El mapa cognitivo como recurso de investigación en el estudio de casos

Fecha de recepción: Junio, 1997

M. Carmen Penalva Martínez
Dpto. Análisis Matemático y Matematica Aplicada, E. U. de Formación del Profesorado.
Universidad de Alicante. Apartado de Correos. 99, ALICANTE 03080 (España)
Tel. 34-965903715, Fax: 34-965903804, e-mail: Carmina.Penalva@ua.es

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 10 No. 2 Agosto 1998
pp. 5-22

Resumen: *Debido a que los mapas cognitivos muestran representaciones explícitas de lo que se cree que es la organización de determinados conceptos y proposiciones en la estructura cognitiva de una persona, constituyen un medio importante en el análisis del conocimiento de los estudiantes.*
Se ha aplicado este tipo de análisis al caso del estudio de los números transfinitos (Penalva, 1996). Como ejemplo, en este artículo se recogen los resultados correspondientes a dos estudiantes que participaron en la investigación.

Abstract: *Due to the fact that cognitive maps show explicit representations of what it is believed to be the organization of specific concepts and propositions in the cognitive structure of a person, they appear to be an effective way of analysing the student's knowledge.*
This type of analysis has been applied to the case of the study of transfinite numbers (Penalva, 1996). As an example, in this article are collected the results which correspond to two students who participated in the investigation.

Introducción

Como indican Novak y Gowin (1988), un *mapa conceptual* es un recurso de representación esquemática de un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura conceptual. Se puede considerar el mapa conceptual como un gráfico formado por líneas que confluyen o divergen. En los puntos de confluencia se colocan los "conceptos"que se sitúan en una elipse o recuadro, los conceptos que están relacionados se unen mediante una línea y el significado de esa relación se expresa mediante "palabras enlace". Los mapas conceptuales muestran una estructura jerárquica, los conceptos más generales e inclusivos deben situarse en la parte superior del mapa, y progresivamente los más específicos y menos inclusivos en la inferior. Hay que tener en cuenta que a veces existen dos o tres formas válidas para unir dos conceptos, aunque las connotaciones serán diferentes en cada una de ellas.

Según Norton (1992), los mapas conceptuales pueden usarse de varias formas:

- pueden usarlos los profesores durante la planificación de una asignatura,
- pueden darse a los estudiantes como un modelo para revisar, y
- puede utilizarlos o realizarlos un alumno durante el proceso de aprendizaje.

Con el término *mapa cognitivo* se designa una representación explícita y manifiesta de la organización de determinados conceptos y proposiciones que posee una persona. No es que se esté diciendo que los mapas cognitivos muestran la estructura cognitiva completa de la persona, sino que se afirma que son un medio, a partir del cual se puede ampliar y avanzar en el análisis de los significados que el estudiante da a determinados conceptos y en las relaciones que establece entre ellos (Llinares, 1992).

En nuestro caso, debido a que los mapas cognitivos contienen representaciones exteriorizadas de proposiciones, son instrumentos extraordinariamente efectivos para poner de manifiesto lo que el estudiante ya sabe, dejando a la vista sus concepciones equivocadas. Constituyendo así, un medio muy importante en el análisis del conocimiento de los estudiantes, pudiendo ser utilizado en una planificación más adecuada de la instrucción. A continuación presentamos una aplicación de este tipo de análisis.

Ilustración en el caso de los números transfinitos

El progreso de las matemáticas ha provocado a lo largo de los tiempos un significado cada vez más amplio del término *cálculo numérico*. En el presente, consiste en el estudio de métodos de resolución numérica de problemas matemáticos. Para ello, se desarrollan teorías que generalizan los cálculos, de las operaciones más elementales se avanza hacia operaciones más abstractas. Los cardinales transfinitos constituyen una parte de la teoría de conjuntos, y en la actualidad se integran en el pensamiento y en los sistemas de expresión de matemáticos e informáticos. Por tanto, deben tener un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes (Ifrah, 1994).

El trabajo que aquí se presenta forma parte de la Tesis Doctoral titulada "Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito" (Penalva, 1996). Esta investigación está relacionada con investigaciones previas de Fischbein, Tirosh, Waldegg y otros autores sobre los conceptos de infinito y de conjunto infinito, así como con el trabajo de Sierpinska (1994) sobre comprensión en Matemáticas. Los objetivos de la investigación son: (1) estudiar concepciones y dificultades de comprensión que algunos estudiantes con distinta formación tienen asociadas al concepto de número cardinal de un conjunto infinito, y (2) analizar la evolución de tales concepciones en la interacción que se produce en una situación de enseñanza y elaborar el concepto personal de algunos estudiantes seleccionados.

La metodología seguida durante la primera etapa de la investigación, estuvo basada en:

- Una revisión histórica del concepto *número cardinal de un conjunto infinito*, lo cual no sólo ayudó a identificar concepciones y obstáculos epistemológicos desarrollados en la historia del concepto, sino que posibilitó la búsqueda de hechos cruciales que permitieron identificar actos de comprensión realizados por los estudiantes cuando se enfrentan a tareas relacionadas con el término estudiado.
- El análisis de trabajos relacionados con el tema de estudio. Las investigaciones que repercutieron más directamente en este trabajo se clasificaron en tres grupos, denominados: investigaciones psicodidácticas

relacionadas con el concepto de infinito, estudios relativos al proceso de comunicación del contenido matemático y estudios sobre el aprendizaje de conjuntos infinitos.

- El diseño y desarrollo de entrevistas semiestructuradas a profesores y a estudiantes universitarios con el fin de detectar otras concepciones y dificultades de comprensión relacionadas con los conjuntos infinitos.
- El análisis de las entrevistas, representando los resultados de las entrevistas de los estudiantes por medio de mapas cognitivos.

Algunas dificultades de comprensión detectadas en las entrevistas están relacionadas con: el significado que se le asigna a determinados términos en le lenguaje natural y a los símbolos matemáticos; las representaciones gráficas utilizadas; la secuenciación de contenidos y los ejemplos utilizados durante la instrucción; los significados de los conceptos matemáticos implicados.

En la segunda etapa de la investigación, lo importante no era averiguar si había progreso en la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito en los estudiantes a los que se les aplicaba una situación de enseñanza, ya que se podía conjeturar que una situación de ese tipo siempre produciría algún cambio favorable, sino qué tipo de progreso se producía y qué es lo que promovía el cambio. Se enfatizó en la evolución de la comprensión del concepto, cómo y a qué se debía. Para ello:

- Se realizaron distintos análisis del concepto. Primero se estudió el concepto público, y una vez determinada una aproximación al concepto de número cardinal de un conjunto infinito, se hizo un análisis del concepto, según el modelo de Sierpinska (1994), basado en actos de comprensión, que posteriormente permitió analizar el concepto personal de cada uno de los sujetos seleccionados.
- Se realizaron dos series de entrevistas a un nuevo grupo de estudiantes (se eligieron estudiantes con distinta formación matemática: un estudiante de tercer curso de la Diplomatura de Magisterio de la especialidad de Ciencias; un estudiante de segundo curso de la Diplomatura de Magisterio de la especialidad de Educación Musical y de tercer curso de la Licenciatura de Ciencias Económicas; un estudiante de segundo curso de la Diplomatura de Estadística cursando asignaturas de libre configuración del área de Didáctica de la Matemática; un estudiante de segundo curso de Ingeniería Química; y dos recien licenciados en Matemáticas, estudiantes del Curso de Aptitud Pedagógica, todos ellos de la Universidad de Alicante):
  1. Tres entrevistas indagatorias (para algunos estudiantes fueron suficientes dos entrevistas) que posibilitaron identificar, no sólo concepciones y dificultades relativas al concepto, sino también averiguar las relaciones que el estudiante establece entre los conceptos.
  2. Cinco entrevistas formativas. En estas entrevistas hay un aporte de información, y por tanto, son distintas a las ya realizadas. A través de la introducción en las entrevistas de "momentos de enseñanza" se ayudó a cambiar la forma de comprensión mediante la superación de las propias dificultades, para ello el estudiante resolvía cuestiones o actividades.

- Estudio de casos. Para cada estudiante con los datos obtenidos en las entrevistas indagatorias se averiguaron las concepciones previas y las dificultades de comprensión en relación al concepto, y se elaboró el mapa cognitivo correspondiente. Posteriormente, a partir de las entrevistas formativas, se analizó la influencia de una determinada tarea en relación a la concepción percibida y la evolución de las concepciones, y se elaboraron dos mapas cognitivos más para cada estudiante, el segundo hacia la mitad de las entrevistas y el tercero al final del proceso de instrucción.

Para el análisis de las respuestas de las entrevistas indagatorias se consideraron los siguientes campos (aspectos que posibilitan la formación del concepto de número cardinal de un conjunto infinito):

Clasificación de conjuntos
- contextos relacionados con los conjuntos
- situaciones en las que utiliza los conjuntos
- ejemplos de conjuntos
- propiedad utilizada para la clasificación
- clases producidas.

Conjuntos infinitos
- contextos relacionados con los conjuntos
- situaciones en los que utiliza los conjuntos
- ejemplos
- propiedades características.

Comparación de conjuntos infinitos
- criterio utilizado
- clases resultantes.

Número cardinal de un conjunto infinito
- equipotencia de conjuntos infinitos
- números cardinales infinitos.

Lenguaje utilizado
- lenguaje natural
- lenguaje matemático.

Para el diseño y el análisis de las entrevistas formativas se tuvieron en cuenta los resultados obtenidos en el primer objetivo, el análisis del concepto, las concepciones y dificultades previas de los estudiantes detectadas en las entrevistas indagatorias, y los siguientes tipos de tareas asociadas al concepto público elegido:
- Comparación de conjuntos infinitos.
- Caracterización de conjuntos infinitos.
- Asociación de un número cardinal a los conjuntos infinitos.

Para la elaboración de las preguntas de las entrevistas formativas se eligieron variables de las tareas que manipuladas sistemáticamente, posibilitaban el logro de las tareas. Cada variable generó un número de variantes de las tareas. Se cambiaron uno a uno los diferentes elementos para provocar conflictos cognitivos en los estudiantes y así poder analizar la influencia de una determinada tarea en relación a la concepción percibida. La combinación de todos los elementos generó una clasificación o un sistema de categorías de las actividades. Cada actividad estaba determinada por el tipo de tarea y por los siguientes elementos o aspectos asociados al concepto:

- Contexto (aritmético, geométrico, aritmético–geométrico).
- Clases de conjuntos (numerables, equipotentes a R, equipotentes a otros conjuntos, no equipotentes).
- Existencia o no de la relación de inclusión entre dos conjuntos dados.
- Variables o atributos de los conjuntos (cotas, dimensión).
- Sistema de representación de los conjuntos.

Los mapas cognitivos fueron construidos por la investigadora a partir de los protocolos de las entrevistas realizadas y se ha probado que han sido un instrumento útil para:

1. mostrar las concepciones de los estudiantes relativas a los números transfinitos;
2. estudiar la evolución de estas concepciones;
3. lograr información en orden a refinar los instrumentos y los pasos siguientes de la investigación.

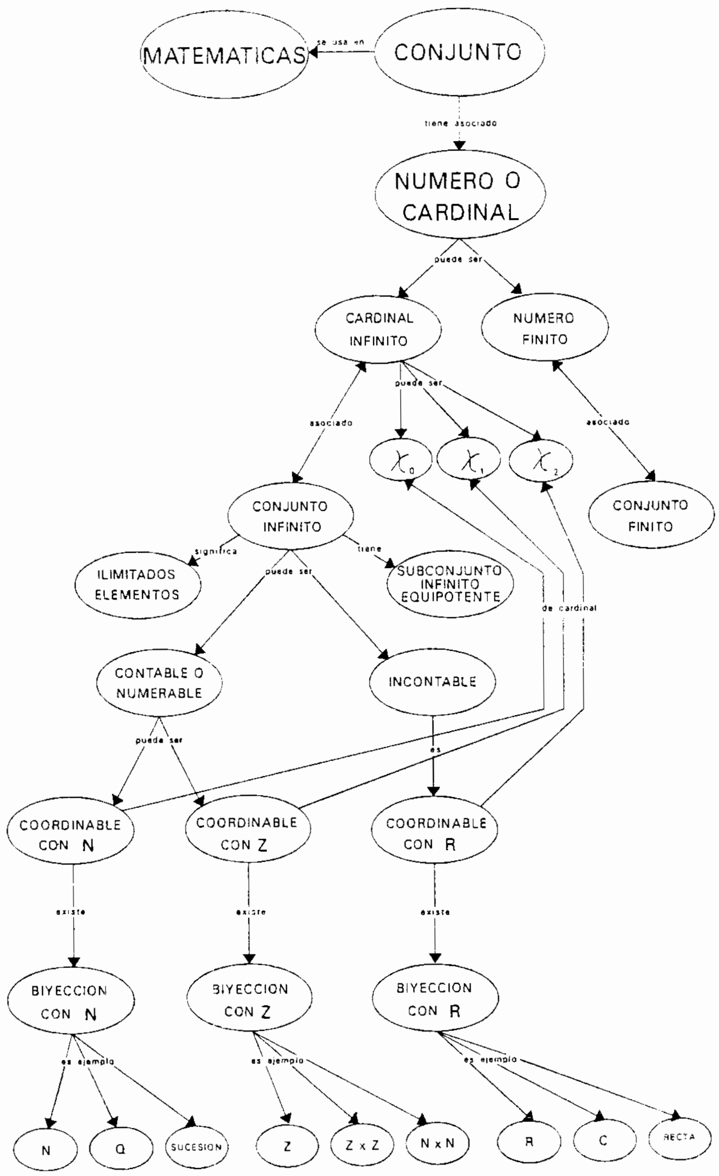
Como ejemplos, se presentan aquí los mapas cognitivos correspondientes a dos de los estudiantes entrevistados. En relación a las concepciones iniciales relativas al concepto de número cardinal de un conjunto infinito, sólo los licenciados en matemáticas (estudiantes del Curso de Aptitud Pedagógica) utilizaron números cardinales infinitos en las primeras entrevistas. Por tanto se ha escogido uno de estos participantes, el estudiante H; y el otro del grupo restante, el estudiante D. La elección de estos casos ha estado guiada, además, por las concepciones y dificultades que mostraban.

Primer ejemplo: el caso del estudiante H

Una de las causas principales que motivó la elección de este estudiante, para el estudio de casos, fue la dificultad de comprensión que presentaba relacionada con el concepto de conjunto numerable. Más explícitamente, fue determinante en su elección la influencia que ejercían las formas de representación de los conjuntos numerables en sus concepciones y dificultades relativas al concepto. Otro aspecto, que cabe mencionar, ha sido el interés mostrado por el estudiante durante el desarrollo de las entrevistas, su esfuerzo por dar respuestas variadas, coherentes y lo más completas posibles. En la elección de este caso para su estudio fue concluyente la inconsistencia que mostraba respecto a la equipotencia del conjunto de los nú-meros naturales y del conjunto de los números enteros, la cual condicionó parte de sus respuestas. Los resultados más relevantes obtenidos se muestran a continuación.

A partir del análisis realizado de las respuestas dadas por el estudiante H en las dos primeras entrevistas (entrevistas indagatorias), se elaboró un primer mapa cognitivo que refleja las concepciones iniciales mostradas por el estudiante y las relaciones que establece entre distintos contenidos conceptuales (Fig. 1). Se observa entre otros aspectos, que:

- El primer criterio utilizado para clasificar conjuntos es el concepto de número cardinal.
- Para dar significado a los conjuntos infinitos, primero utiliza un criterio no formal *"tienen ilimitados elementos"*, sin embargo, en el transcurso de las entrevistas sus ideas van variando y recuerda un criterio más formal (comentario realizado por el propio estudiante), *"un conjunto infi-*



Estudiante H: Primer mapa cognitivo

Figura 1.

nito es un conjunto que tiene un subconjunto infinito equipotente" (no percibe que introduce la palabra "infinito" en su definición).

- La clasificación de los conjuntos infinitos la obtiene utilizando el criterio de "contar elementos".
- Diferencia entre *"ser contable"* y *"tener el mismo cardinal"*. Indica que el conjunto de los números enteros es "contable", pero que no tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números naturales, su cardinal es mayor.
- Afirma que el conjunto de los números racionales es un conjunto *"coordinable"* con el conjunto de los números naturales, aunque no justifica su respuesta. A pesar de que no encuentra una aplicación biyectiva entre ambos conjuntos, mantiene su afirmación. Éste es un

conocimiento que tiene fuertemente arraigado, lo ha adquirido durante su formación matemática y lo ha memorizado.

- También tiene dificultades para comparar conjuntos de distinta dimensión (por ejemplo, ZxZ o NxN con N). Afirma que son conjuntos "contables" pero indica que no se puede establecer una aplicación biyectiva entre esos conjuntos y el conjunto de los números naturales.
- La causa que determina la equipotencia de algunos conjuntos con el conjunto de los números reales la atribuye a la *"densidad"* de los conjuntos, excepto para los números racionales, ya que reconoce la densidad de este conjunto, pero indica que en este caso el conjunto no es equipotente con el conjunto de los números reales.

Del análisis de las respuestas del estudiante también se observa que asocia "existencia" a "conocimiento personal" (*"conozco tres números cardinales infinitos"* o cuando no encuentra una aplicación biyectiva entre dos conjuntos afirma que *"no existen aplicaciones biyectivas entre ambos conjuntos"*).

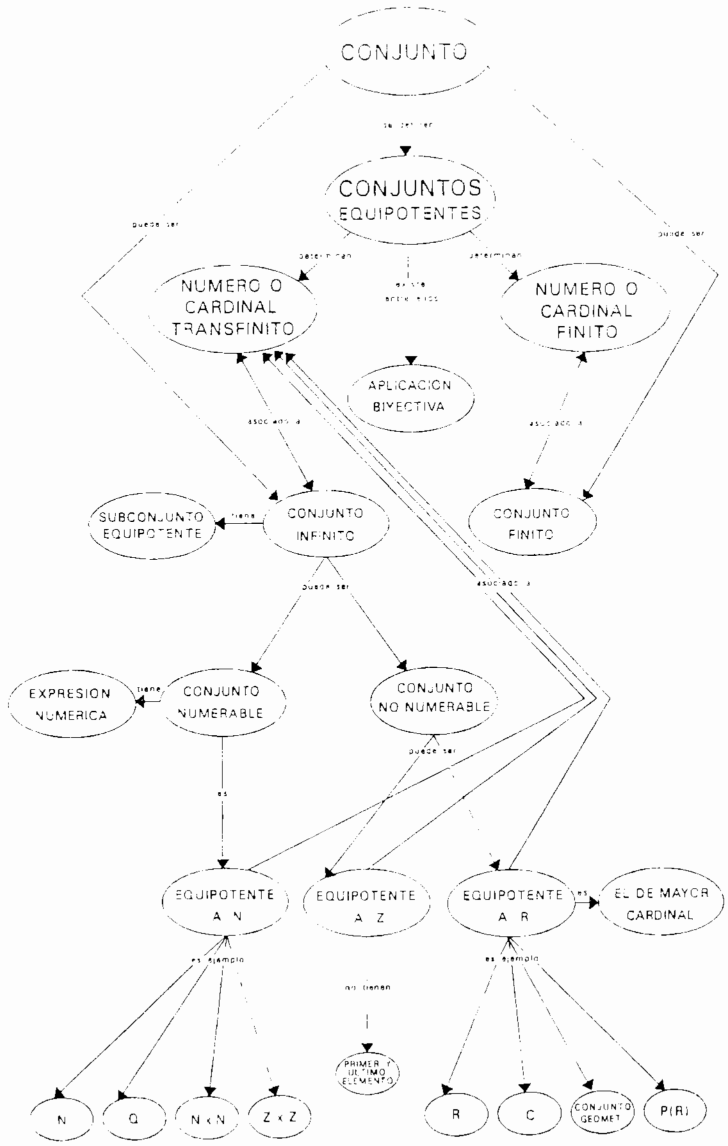
Este primer mapa cognitivo nos ha permitido, también, identificar la **zona de conflicto** del estudiante H (en el mapa está situada en la parte inferior correspondiente a los conjuntos *contables* o *numerables*). Se observa que las dificultades del estudiante han surgido cuando ha tenido que justificar las conjeturas: "Z es un conjunto numerable", "el producto de dos conjuntos numerables es un conjunto numerable" y cuando ha tenido que dar significado al concepto de "conjunto numerable".

El segundo mapa cognitivo del estudiante H (Fig. 2) se ha elaborado a partir del análisis realizado de las transcripciones de las dos primeras entrevistas denominadas formativas (durante dichas entrevistas el estudiante realiza tareas y también se le facilita información). Dicho análisis se centra en:

- el reconocimiento de actos de comprensión que presentaban dificultad;
- la identificación de nuevas dificultades, si las hubiera, y
- el establecimiento de relaciones entre dificultades superadas y las tareas que han influido en ello.

Durante estas dos entrevistas se le han facilitado al estudiante las definiciones de los conceptos de "equipotencia de conjuntos" y de "conjunto numerable", también se ha probado que el conjunto de los números racionales es numerable. Para el estudiante, la numerabilidad de NxN y de ZxZ queda justificada cuando se prueba la numerabilidad del conjunto de los números racionales. Se produce entonces, una reorganización de su conocimiento (el cambio producido en la zona conflictiva del estudiante es fácilmente observable si se comparan los dos mapas), y como consecuencia, argumenta que el conjunto de los números enteros no es numerable, lo cual produce una inconsistencia en su pensamiento. La zona de conflicto del estudiante está condicionada por el fracaso en encontrar una aplicación biyectiva entre el conjunto $N=\{0,1,2,...\}$ y el conjunto $Z=\{...-2,-1,0,1,2,...\}$.

También se observa que inicialmente no clasifica los conjuntos según el criterio de equipotencia de conjuntos (como luego hace), sino que vuelve a hacer una bipartición a partir del concepto de número cardinal, obteniendo de nuevo la clasificación mostrada durante las entrevistas indagatorias (primera serie de entrevistas aplicadas al estudiante H, Fig. 1). Ahora bien, durante este periodo se observa que el estudiante dota de significado más preciso a los distintos conceptos que relaciona y que el lenguaje utilizado se va transformando, el lenguaje natural es sustituido por lenguaje matemático.

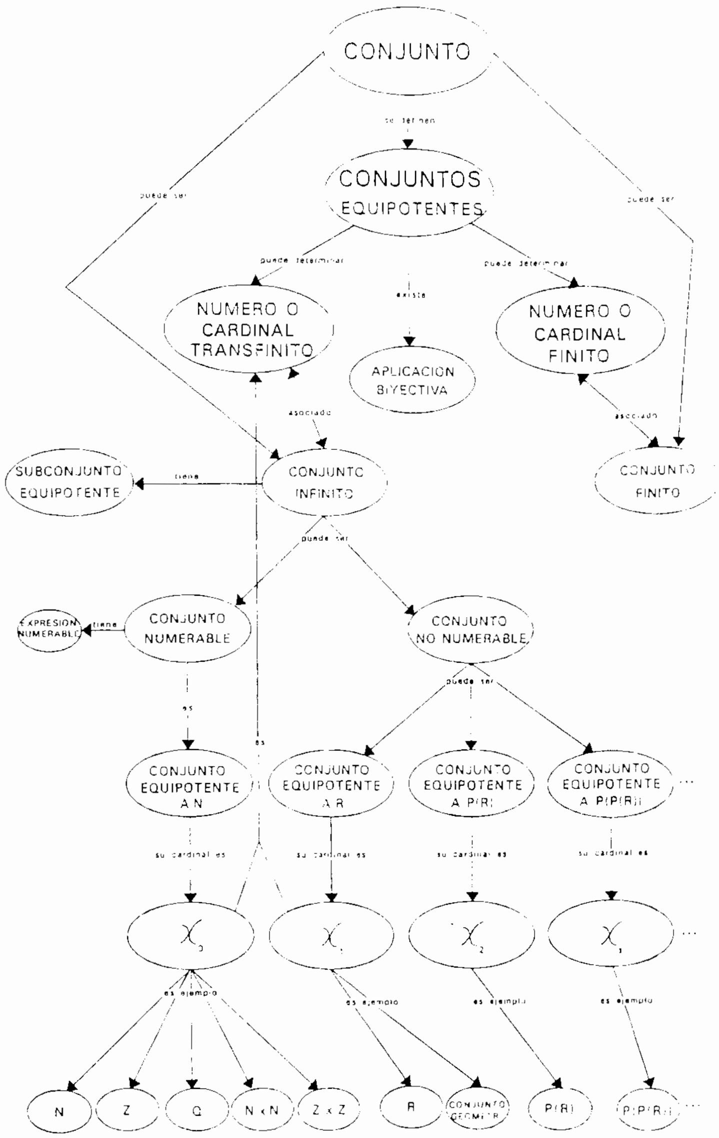


Estudiante H: Segundo mapa cognitivo

Figura 2.

Con los últimos datos obtenidos, correspondientes a las entrevistas formativas (tercera, cuarta y quinta) se elabora el tercer mapa cognitivo del estudiante H (Fig. 3). La admisión de la llamada "hipótesis del continuo" ha sido una de las causas que ha marcado una reestructuración importante en el pensamiento del estudiante, y la principal desencadenante de la disolución de la zona de conflicto (véase mapa). No obstante, ha sido necesario presentarle actividades del tipo

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ -10, & 10, & -11, & 11, & -12, & \ldots \end{array}$$



Estudiante H: Tercer mapa cognitivo

Figura 3.

para que el estudiante identificara un "orden numerable" en Z, ya que debido a su tendencia a buscar fórmulas algebraicas, no encontraba criterios que le permitieran establecer aplicaciones biyectivas entre N y Z.

Se observa también en el mapa que aunque el estudiante admite infinitos cardinales infinitos, le da significado de número sólo a los dos primeros (que son los dos números transfinitos que más ha utilizado durante su formación matemática).

Conclusiones

En el caso del estudiante H, a través de las entrevistas se ha accedido a aspectos relacionados con la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito que de otra forma, sin una intervención interactiva, hubiese sido muy difícil descubrir. El estudio de los resultados obtenidos se basa en el análisis del cambio conceptual detectado.

En primer lugar, utilizando los mapas cognitivos del estudiante (Fig. 4) el análisis de los datos se ha centrado en:

1. la focalización de concepciones,
2. la identificación de errores o de alguna "zona de conflicto", y
3. la descripción de nuevas concepciones.

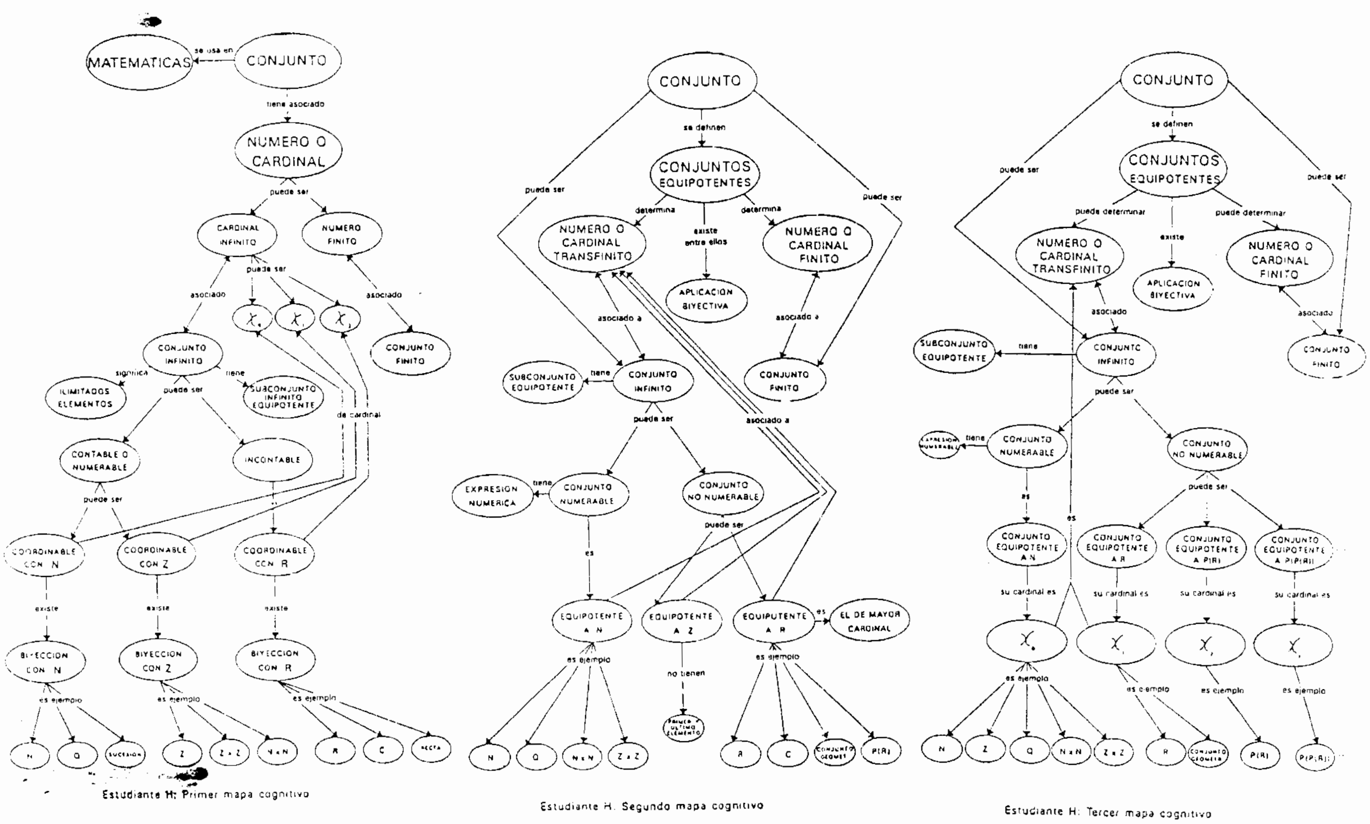


Figura 4.

Posteriormente se ha estudiado el cambio de concepción realizado por el estudiante, buscando las relaciones entre las etapas de construcción del significado del concepto de "número cardinal de un conjunto infinito" y los procesos desarrollados por el sujeto.

Del análisis del primer mapa cognitivo se identifica una concepción inicial del estudiante H, así como una zona de conflicto asociada a dicha concepción:

- *Infinito numerable e infinito no numerable.* Los conjuntos numerables los subdivide en conjuntos coordinables con N (por ejemplo: las sucesiones y el conjunto de los números racionales) y conjuntos coordinables con Z (por ejemplo: ZxZ y NxN), con cardinales ¿$_0$ y ¿$_1$ respectivamente. Esta subdivisión constituye la denominada "zona conflictiva" del sujeto en relación al concepto estudiado. Los conjuntos no numerables son coordinables con R y su cardinal es ¿$_2$.

Observando el segundo mapa cognitivo y comparándolo con el primero se detecta que mantiene la clasificación de los dos grandes grupos, pero varía la subclasificación: los conjuntos numerables son conjuntos equipotentes con N, por ejemplo, Q, ZxZ y NxN. Mantiene que Z es un conjunto no numerable y no equipotente a R. Por tanto sigue siendo el conjunto de los números enteros el origen de la existencia de la zona conflictiva.

A partir del tercer mapa cognitivo se percibe que, debido a la información recibida, el estudiante ha realizado una reestructuración de su conocimiento, considerando infinitas clases de conjuntos no numerables y desapareciendo la zona de conflicto. Ahora bien, sólo asigna el significado de número transfinito a los dos primeros cardinales infinitos, se puede afirmar que esto es debido al uso que ha hecho de estos números cardinales durante su formación matemática.

Segundo ejemplo: el caso del estudiante D

Las principales causas que han motivado el estudio de este caso han sido las concepciones innatas identificadas en el estudiante, que se podrían denominar "concepciones primitivas", relativas al concepto de número cardinal de un conjunto infinito. El estudiante presentaba dificultades que habían sido identificadas, previamente, por profesores entrevistados. Se podría decir que las ideas de este estudiante son "consecuencia natural" del sistema educativo español.

El contraste de las ideas de este estudiante con las del otro estudiante escogido, también ha determinado su elección. En el sentido de que las concepciones del estudiante H son más refinadas, más elaboradas, fruto de su formación matemá-tica; sin embargo, las concepciones de este segundo estudiante son más "ordinarias", debido a que los contenidos relativos al concepto de número cardinal de un conjunto infinito no han sido nunca, para él, objeto de estudio por ellos mismos, los ha utilizado como herramientas matemáticas para el estudio de otros contenidos.

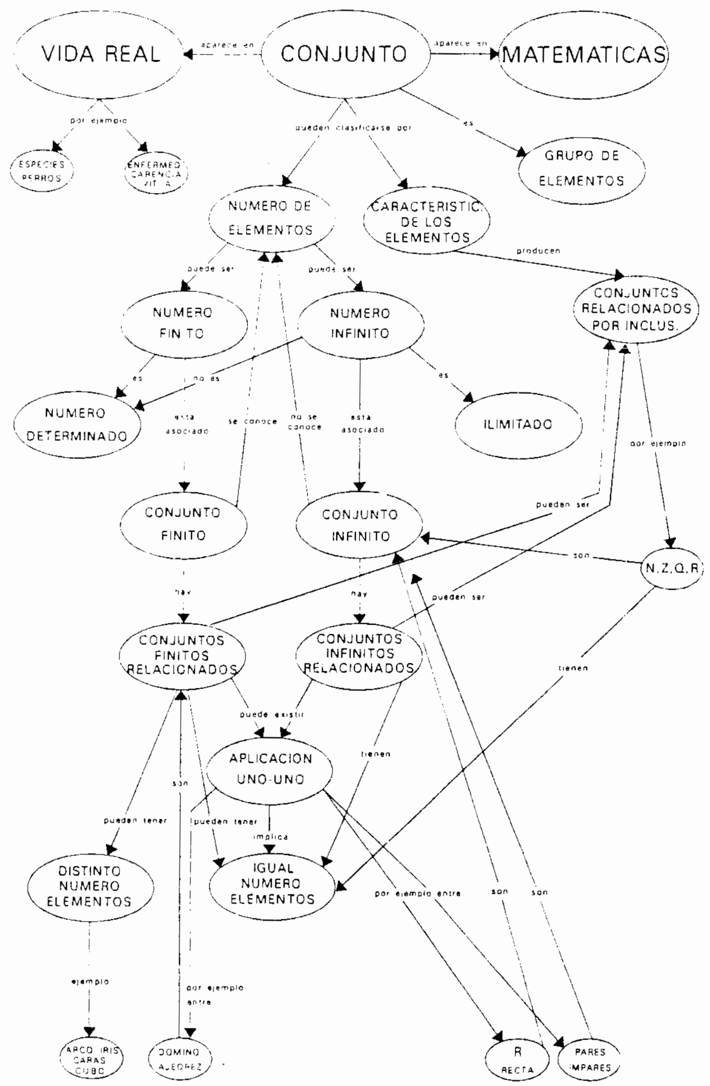
Otro aspecto que caracteriza las concepciones primitivas de este estudiante es la forma de los argumentos utilizados, basada en explicaciones breves sin justificaciones rebuscadas.

También cabe mencionar el interés mostrado por el estudiante durante el desarrollo de las entrevistas, su esfuerzo por responder, y sobre todo su asombro cuando descubría propiedades y hechos que desconocía y que *"estaban al alcance de su mano"*. En el momento de la realización de las entrevistas era estudiante de segundo curso de Ingeniería Química de la Universidad de Alicante, teniendo aprobada la asignatura de "Fundamentos Matemáticos de Ingeniería" en la que se desarrollaron contenidos de Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial e Integral y Métodos Numéricos; en segundo estaba cursando "Ampliación de Matemáticas para Ingenieros" en la que se estudian contenidos de Cálculo Diferencial, Ecuaciones Diferenciales e Integración. Se presenta a continuación el análisis de los resultados obtenidos.

A partir del análisis realizado de las respuestas dadas por el estudiante D en las entrevistas indagatorias, se elaboró un primer mapa cognitivo que refleja las concepciones iniciales mostradas por el estudiante y las relaciones que establece entre distintos conceptos (Fig. 5). Se observa, entre otros aspectos, que:

- En primer lugar el significado que da a los conjuntos infinitos es el de "infinito potencial", posteriormente aparece la concepción de "infinito actual".
- La mayor dificultad del estudiante reside en identificar la equivalencia entre la igualdad de los cardinales de dos conjuntos infinitos y la existencia de aplicaciones biyectivas entre ambos conjuntos.

Estas características determinan la denominada **zona de conflicto** del estudiante D. Por tanto, la principal conjetura que tiene que validar es que "la igualdad de cardinales de dos conjuntos infinitos" implica "la existencia de aplicaciones biyectivas entre dichos conjuntos". A partir de esta propiedad podrá deducir la



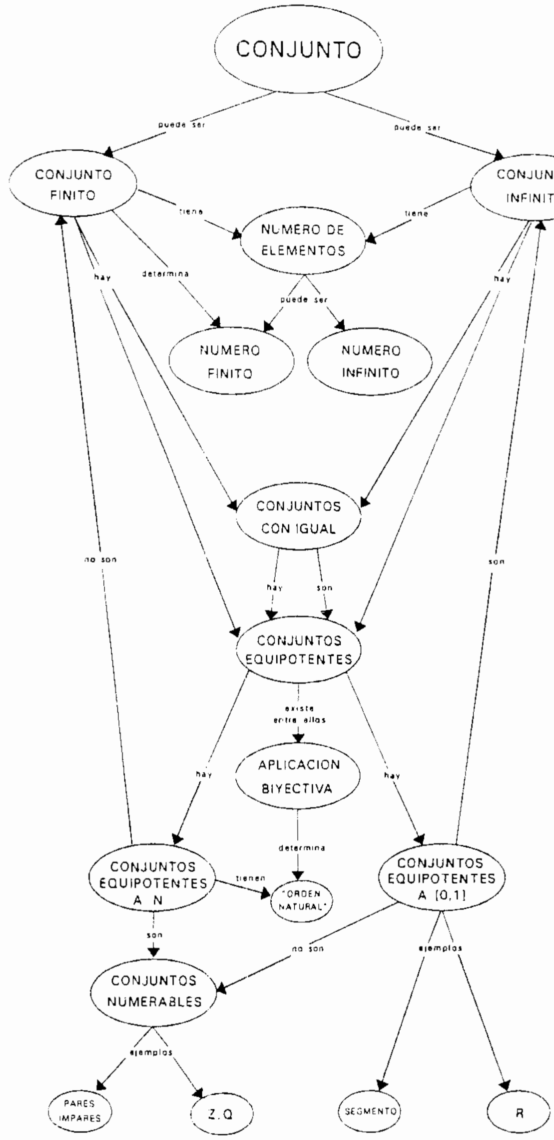
Estudiante D: Primer mapa cognitivo

Figura 5.

existencia de conjuntos infinitos no equipotentes y como consecuencia obtendrá distintos números cardinales infinitos.

El segundo mapa cognitivo del estudiante D (Fig. 6) se ha elaborado a partir del análisis realizado de las transcripciones de las dos primeras entrevistas formativas. La justificación de la existencia de aplicaciones biyectivas entre conjuntos infinitos ha sido un proceso lento para el estudiante, primero lo ha obtenido para conjuntos numerables, a continuación identifica aplicaciones biyectivas entre R y conjuntos que son intervalos cerrados, intervalos abiertos o intervalos semiabiertos. Posteriormente, reconoce la existencia de aplicaciones biyectivas entre los intervalos prescindiendo de los extremos de los mismos.

No le han surgido durante esta fase nuevas dificultades. La concepción de infinito potencial condiciona sus respuestas relativas a la consideración de ¿$_0$ como el número cardinal del conjunto de los números naturales.

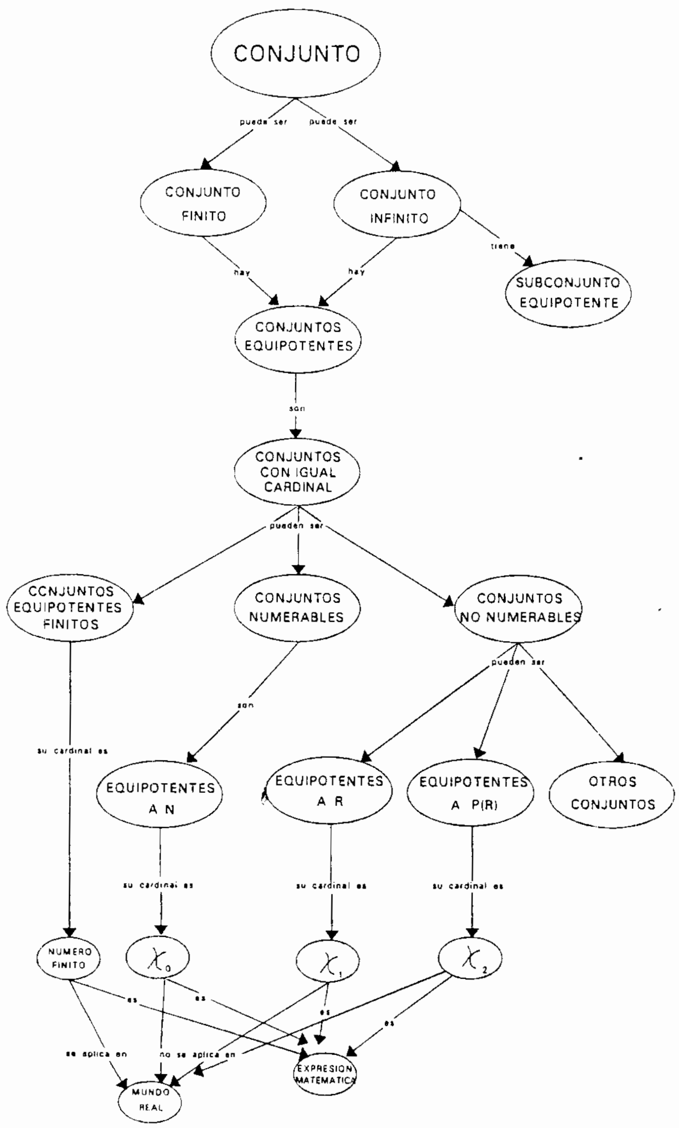


Estudiante D: Segundo mapa cognitivo

Figura 6.

A lo largo de las dos entrevistas mantiene "su criterio" de no equivalencia entre la igualdad de cardinales y la existencia de aplicaciones biyectivas. Sólo a partir de la explicación final relativa a la no numerabilidad de R reconoce su error. Contrastando este segundo mapa del estudiante D con el anterior se puede apreciar el cambio que ha habido en sus concepciones, el cual es debido, sobre todo a la identificación de conjuntos no equipotentes.

Con los últimos datos obtenidos, correspondientes a las entrevistas formativas (tercera, cuarta y quinta) se elabora el tercer mapa cognitivo del estudiante D (Fig. 7). Se observa que la concepción de infinito potencial, que ya se pone de manifiesto en las primeras entrevistas indagatorias se va formalizando. A medida que el significado de conjunto infinito se transforma en infinito actual, adquiere entidad el concepto de número cardinal de un conjunto infinito dotado de una aritmética distinta a la de los números cardinales finitos.



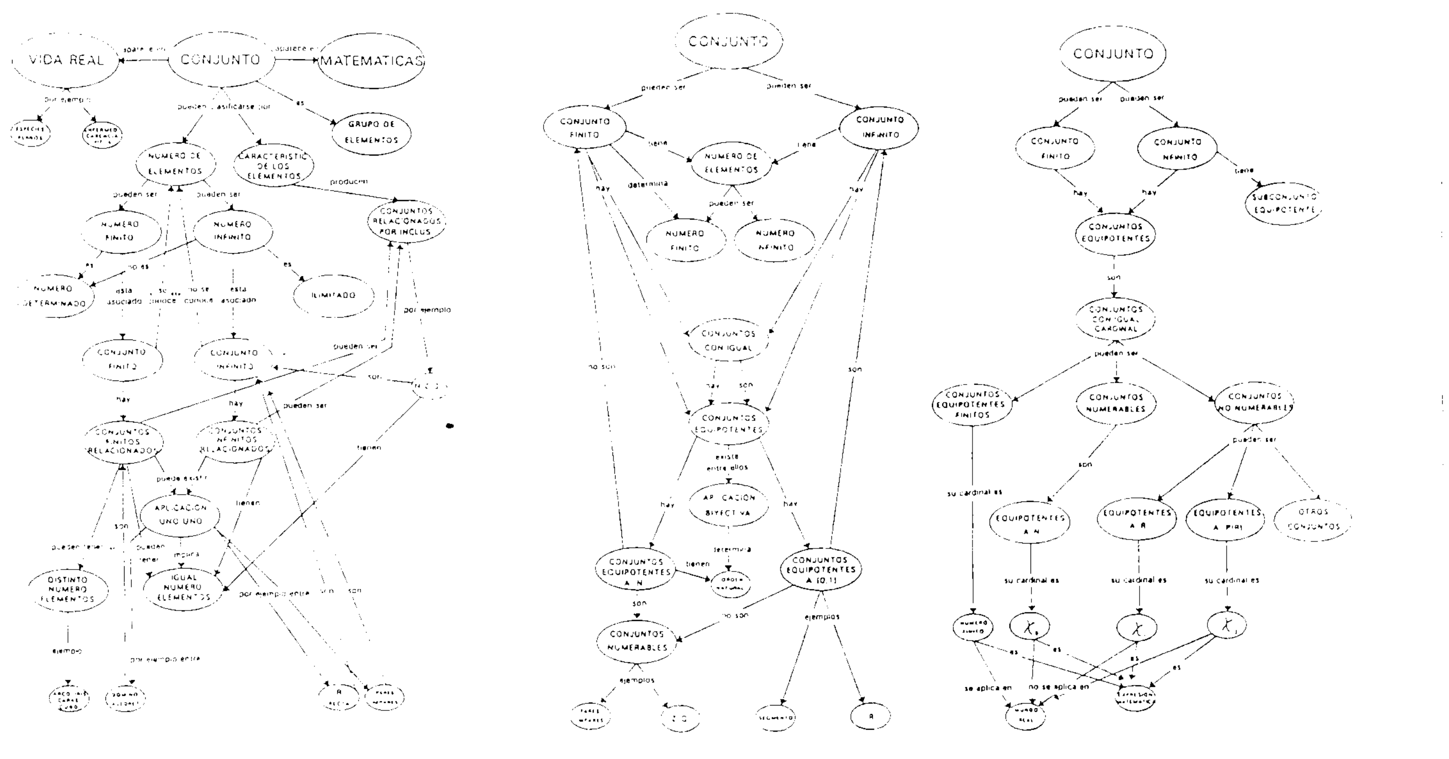
Estudiante D: Tercer mapa cognitivo

Figura 7.

Otro cambio "de actitud" detectado en las respuestas del estudiante es el reconocimiento de que el conjunto de los números racionales es numerable y denso en el conjunto de los números reales, admitiendo también la posibilidad de la existencia de conjuntos no numerables densos en R. Se refuerza la existencia de tres números cardinales infinitos como mínimo. Aunque la respuesta del estudiante no es correcta, se valora de forma positiva ya que admite números cardinales infinitos distintos a $¿_0$ y a $¿_1$. La instrucción matemática recibida durante su formación, no le posibilita justificar si el conjunto mencionado tiene cardinal $¿_0$, $¿_1$ o $¿_2$, ha hecho una generalización de resultados obtenidos en entrevistas anteriores.

Conclusiones

Posteriormente, se realizó un análisis comparativo de los tres mapas elaborados (Fig. 8) con el fin de detectar la evolución de las concepciones del estudiante ante el aporte de información.



Estudiante D: Primer mapa cognitivo — Estudiante D: Segundo mapa cognitivo — Estudiante D: Tercer mapa cognitivo

Figura 8.

Interesa resaltar que este estudiante sitúa los conceptos relativos al concepto objeto de nuestro estudio en el campo de la Matemática, sin ninguna "concesión" a otros campos o áreas, y que durante el desarrollo de la secuencia instructiva se ha reflejado un cambio de actitud en él que le ha producido una mayor confianza en los contenidos formales y un apoyo cada vez menor en sus intuiciones.

Utilizando los mapas cognitivos del estudiante, se puede realizar un análisis del cambio conceptual detectado. El proceso seguido tiene los mismos centros de interés que en el caso del estudiante H, y son:

1. la focalización de concepciones,
2. la identificación de errores o de alguna zona de conflicto, y
3. la descripción de nuevas concepciones.

Del análisis del primer mapa cognitivo del estudiante se obtienen las siguientes concepciones iniciales ya reflejadas.

- *Infinito potencial.* El significado del concepto de conjunto infinito lo obtiene a partir de la negación de conjunto finito. Esto produce una indeterminación del número de elementos que caracteriza al conjunto infinito y justifica la ausencia de criterios válidos para la comparación de conjuntos infinitos.
- *No existencia de jerarquías entre conjuntos infinitos.* Aunque no clasifica a los conjuntos infinitos, sí que destaca algunos conjuntos infinitos entre los que establece una aplicación biyectiva. Del hecho de que dos conjuntos infinitos tengan el mismo número de elementos no deduce la existencia de aplicaciones biyectivas entre los conjuntos. Para el estudiante la implicación "si existe una aplicación biyectiva entre dos conjuntos, ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos" sólo tiene sentido entre conjuntos finitos (pues para él *"todos los conjuntos infinitos tienen el mismo número de elementos"*). Este hecho es el que determina su "zona conflictiva" relativa a la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito.

Analizando el segundo mapa cognitivo del estudiante y comparándolo con el primero se observa que sigue caracterizando a los conjuntos a partir del número de elementos, pero ahora muestra una clasificación de los conjuntos infinitos en dos grandes grupos: conjuntos numerables (poseen "el orden natural") y conjuntos equipotentes a [0,1] (o conjuntos no numerables). Ha sido la instrucción recibida durante la fase que corresponde a los datos de este mapa la que más cambios cognitivos ha provocado en el estudiante respecto al concepto de número cardinal de un conjunto infinito, si bien, no aparecen números cardinales de conjuntos infinitos, ya que los cambios producidos no han puesto de manifiesto, todavía, la operatividad de dichos números para el estudiante.

A partir del tercer mapa cognitivo, se observa que debido a la información recibida, ha realizado una reestructuración de su conocimiento, considerando distintas clases de conjuntos no numerables y desapareciendo su zona de conflicto. Asigna el significado de número transfinito a los tres primeros cardinales infinitos y los sitúa en el campo de la Matemática, diferenciándolos de los números cardinales finitos por su no aplicabilidad al mundo real.

La concepción inicial de infinito potencial identificada en el estudiante, relativa a los conjuntos infinitos, se puede hacer corresponder con las ideas de la época de la Antigüedad Griega. También el estudiante, como Bolzano, identifica puntos de una recta con números reales, pero no tiene un criterio que le permita comparar dos conjuntos cualesquiera, y de forma "natural", considera primero la equipotencia de conjuntos numerables. El asombro del estudiante al comprobar determinadas propiedades hace recordar las palabras de Cantor a Dedekind, "lo veo pero no lo creo" aplicadas a sus propios descubrimientos. Se puede afirmar que la evolución de las concepciones identificadas en las respuestas del estudiante D se corresponde con las detectadas en el desarrollo histórico del concepto.

Observaciones

Los mapas cognitivos han sido un auténtico "instrumento dinámico" en la investigación, ya que:

(1) han facilitado el estudio de las relaciones conceptuales que cada estudiante entrevistado ha mostrado durante las entrevistas, así como la evolución de las mismas, poniendo de manifiesto las concepciones erróneas identificadas en cada estudiante;

(2) han posibilitado la comparación de los resultados obtenidos entre distintos estudiantes, y

(3) han permitido refinar otros recursos o enfoques utilizados en la investigación.

Como ejemplo aclaratorio de este último punto, cabe mencionar que debido al enfoque conceptual utilizado en las entrevistas de la primera etapa de la investigación (basado en el término infinito), en el momento de elaborar los mapas, surgieron dificultades de estructuración jerárquica entre los conceptos de infinito y de conjunto infinito. Este hecho provocó que durante la segunda etapa el concepto de partida no fuera el término "infinito", sino el concepto de "conjunto". Este cambio ha posibilitado conocer un campo más amplio de las relaciones que el sujeto establece con el infinito actual. Además de esta forma no se ha dirigido la atención del sujeto hacia los conjuntos infinitos, sino que es el propio estudiante quien avanza hacia el concepto. Realizando un análisis comparativo de los mapas cognitivos correspondientes a cada estudiante se observan los siguientes aspectos conceptuales:

- El conjunto infinito se obtiene como un concepto subordinado del concepto de conjunto, formando una estructura jerárquica. La bipartición de los conjuntos en finitos e infinitos, suele ser un proceso "habitual" de clasificación de los conjuntos centrado en el campo de la Matemática.
- Existe un vínculo fuerte entre los conceptos de "cardinal" y de "conjunto infinito". Ahora bien, esta relación no es significativa, ya que, aunque se obtiene a partir de la asociación de los conceptos de "conjunto finito" y "número cardinal", sólo el estudiante del Curso de Aptitud Pedagógica mostró, inicialmente, conocer algún número cardinal infinito.

También se observa que la metodología utilizada ha influido positivamente en la comprensión del concepto por los estudiantes, ya que respecto a la resolución de situaciones, ha centrado el interés en los aspectos relativos al concepto de número cardinal de un conjunto infinito.

Bibliografía

CONFREY, J. (1991). Concepts, processes and mathematics instruction. *For the learning of Mathematics*, 2.1, 8–12.

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel.

IFRAH, H. (1994). *Histoire universelle des chiffres*. Paris: Robert Laffont.

LLINARES, S. (1992). Los mapas cognitivos como instrumentos para investigar las creencias epistemológicas de los estudiantes. En C. Marcelo (Coord.), *La investigación sobre la Formación del Profesorado. Métodos de investigación y análisis de datos*, 50–57. Argentina: Cincel.

NOVAK, J.D.; GOWIN, D.B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

ORTON, A. (1992). *Learning Mathematics: Issues, Theory and Classroom Practice*. London: Cassell.

PENALVA, C. (1996). *Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito*. Tesis doctoral, Universidad de Valencia.

PENALVA, C.; GAULIN, C.; GUTIÉRREZ, A. (1996). The use of cognitive maps for analyzing the undertanding of transfinite numbers. In L. Puig and A. Gutiérrez (Eds.), *Proceeding of the 20th. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol1*. 229. Valencia.

SIERPINSKA, A. (1994). *Undertanding in Mathematics*. London: The Palmer Press.

TIROSH, D. (1991). The role of students' intuitions of infinity in teaching the Cantorial theory. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 199–214. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

WALDEGG, G. (1988). *Esquemas de respuesta ante el infinito matemático. Transferencia de la operatividad de lo finito a lo infinito*. Tesis doctoral. Centro de investigación y de Estudios Avanzados, México.