# Transformaciones de funciones: una exploración por medio de software educativo

***Edwar Fabián Panqueba Moreno[1]***

Las funciones es uno de los objetos de estudio de mayor interés no solo desde las matemáticas mismas, en el campo de la ingeniería, la biología, la física, la química, e incluso en situaciones de la vida cotidiana, entre otros. Se han utilizado funciones para modelar y describir el comportamiento de los fenómenos que son analizados desde cada uno de los ámbitos mencionados anteriormente, de ahí la importancia de ser abordadas y trabajadas en los ambientes escolares de educación matemática.

Las transformaciones de funciones como tópico abordado dentro de los planes de estudio de la educación básica secundaria y media, en muy pocas ocasiones, es introducido con ayuda de software de geometría dinámica como Cabrí o GeoGebra. Teniendo en cuenta la importancia que tiene la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función dentro del currículo de matemáticas, surge la idea de trabajar las transformaciones de funciones con ayuda del software GeoGebra, en el marco de una de las prácticas iniciales del espacio académico *Tecnología en Educación Matemática* de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, con estudiantes de undécimo grado del Colegio Grancolombiano de la ciudad de Bogotá D. C., Colombia.

El presente artículo pretende dar a conocer algunos aspectos y detalles obtenidos de la experiencia de aula adquirida con la aplicación de un taller de instrucción, que junto con el uso de la tecnología promovieron el trabajo con este tópico matemático, acompañado además de algunas reflexiones didácticas relacionadas con el diseño del taller y la tecnología como instrumento de mediación en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

**Marco didáctico para el diseño de la actividad**

Como objetivo de aprendizaje, se pensó en que los estudiantes pudieran identificar en la representación algebraica de una función de grado dos, las características que determinan el comportamiento de la respectiva representación gráfica, es decir, reconocer en la expresión algebraica los parámetros que generan modificaciones en la gráfica de una función de grado dos, representada en un plano cartesiano.

Desde los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) y los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006), se establece que las actividades implementadas en el aula de clase para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función, permiten en el estudiante el desarrollo del denominado pensamiento variacional, privilegiándose en este tipo de tareas el uso de tablas y gráficas en el plano cartesiano, para la representación de situaciones de variación.

Las modificaciones que se pueden realizar a cada uno de los parámetros de la expresión algebraica de la función, generan un cambio o variación en su representación gráfica, y es aquí donde está presente el pensamiento variacional, si el estudiante logra reconocer tales parámetros, que al proporcionarles diferentes valores, se obtienen parábolas que difieren entre sí, al ser comparadas unas con otras.

Por otro lado, Bresan y Gallego (2010) (citado por Mora, 2012, p. 3) plantean que el razonamiento inductivo consiste en pasar de casos particulares a la presentación de una propiedad común de tales casos particulares, a través de la formulación de una hipótesis, y a la transferencia de propiedades de una situación a otra, ligado todo lo anterior con el proceso de generalizar. De acuerdo con Mason (1989) (citado por Mora, 2012, p. 3) "*generalizar significa descubrir una nueva ley que nos indique qué parece ser cierto (una conjetura); por qué parece ser cierto (una justificación); dónde parece ser cierto, esto es, un planteamiento más general del problema*".

La generalización está entonces relacionada con otros procesos propios de la actividad matemática como inducir, observar, descomponer, hacer analogías,

[1] Estudiante Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: edwarfabian13@hotmail.com

descontextualizar e identificar características comunes. (Mora, 2012).

Mason, Graham, Pimm & Gowar (1988) (citado por Mora, 2012, p. 16) establecen que en el proceso de generalización, es necesaria la presencia de un proceso a lo largo de la escolaridad, que permita que los estudiantes puedan tener una experiencia en lo que significa hacer matemáticas. Así pues, estos autores señalan algunas etapas iniciales en el proceso de generalización, estas son: percepción de una regularidad, referida a la identificación de una regularidad, el reconocimiento de semejanzas y diferencias entre los objetos que se observan, por ejemplo, desde la visualización de un gráfico. La expresión de la regularidad, en la que los estudiantes comunican sus ideas sobre lo que ven, de manera oral. El registro de la regularidad, caracterizada por la escritura de la regularidad que se observa, no necesariamente con un lenguaje matemático riguroso. Y por último, la comprobación de la regla hallada, en la cual los estudiantes verifican la regularidad que han descrito en la fase anterior, probándola, por ejemplo, en otros casos que no fueron tenidos en cuenta para el descubrimiento de la regularidad en la primera etapa.

Finalmente, como último aspecto a tener en cuenta para el diseño de la actividad, es bien sabido que la tecnología se ha venido incorporando paulatinamente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Autores como Luis Moreno (2002) señalan a las herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación entre el estudiante y su aprendizaje, puesto que con ayuda de la tecnología, es posible realizar una exploración mucho más amplia de una determinada situación, permite comprobar o refutar conjeturas que son inferidas a partir de ciertas características, convirtiendo al estudiante en el actor principal de su propio proceso de aprendizaje.

**Descripción del diseño de la actividad propuesta**

Para lograr el objetivo de aprendizaje trazado, la actividad propuesta se basó en la elaboración y aplicación de un taller de instrucciones, en el cual se describió paso a paso las acciones que los estudiantes debían seguir, apoyados en el uso del software GeoGebra. En primer lugar, se pidió a los estudiantes que graficaran en la pantalla del programa la función $f(x)=x^2$. La gráfica de esta función es una parábola con vértice en el origen de coordenadas, y fue denominada "función original" debido a que en la representación algebraica de esta función, solamente interviene un parámetro, si se tiene en cuenta, que la representación algebraica de la función anterior corresponde a una ecuación de la forma $y=ax$, donde en este caso a tiene un valor de 1. (Azcárate y Deulofeu, 1990). Posteriormente, se les pidió que graficaran en el software, funciones cuya expresión algebraica es de la forma $f(x)=x^2+c$, reemplazando el valor de c por dos, tres y cinco, describiendo las diferencias observadas entre la gráfica original y las gráficas elaboradas hasta el momento. Esta primera parte del taller de instrucción, se elaboró con el fin de dar paso a la primera etapa de generalización, esta es, la percepción de una regularidad, basada en la posición de la gráfica en el plano cartesiano al hacer modificaciones del parámetro *c*.

Para terminar la primera parte del taller, se les preguntó a los estudiantes, sin elaborar la gráfica, sobre el comportamiento de la gráfica de la función en el plano al dar un valor a *c* cualquiera, mayor que uno, comprobando la conjetura obtenida con ayuda del software. Los estudiantes trabajaron en parejas, lo que permitió que se diera la segunda etapa de la generalización, esta es, la expresión de una regularidad, en la medida en la que ellos pudieron socializar entre los integrantes de cada pareja, las semejanzas y diferencias de cada una de las gráficas hechas en las instrucciones anteriores. Al contestar la pregunta, los estudiantes debían escribir en la hoja de trabajo para la actividad, la regularidad encontrada, dando paso a la tercera etapa del proceso de generalización, el registro de la regularidad, de la misma manera en la que estuvo presente la última etapa del proceso, la comprobación de la regla hallada, cuando se utilizó el programa de cómputo para la verificación de la conjetura utilizando otros ejemplos.

Unas instrucciones similares a las descritas anteriormente se incluyeron en el taller, con el fin de realizar un trabajo un poco más completo, incluyendo modificaciones a otros parámetros, por ejemplo, asignar valores al parámetro *c* menores que uno, asignar valores para el parámetro *a* en la función $f(x)=ax^2$, comprendidos entre cero y uno, mayores que uno y valores negativos. De la misma forma que en la primera parte del taller, las siguientes instrucciones fueron pensadas teniendo en cuenta las etapas de la generalización.

**Resultados encontrados y conclusiones finales**

Al analizar las producciones de los estudiantes, con relación a cada una de las transformaciones trabajadas en el taller, conjeturas como "Si se suma un número *c* entonces la gráfica se desplaza tantas unidades como lo indique el número por el cual se suma" o "Si se suma un número *c* entonces la gráfica partirá del punto *(0,c)*, donde *c* es el número por el que se suma la función original" permiten evidenciar que los estudiantes lograron notar la modificación que sufre la representación gráfica de una función en el plano cartesiano cuando se introduce un parámetro *c* a la representación algebraica.

Descripciones como "al escribir un número antes de *x* mayor que cero, observamos que la gráfica se empieza a cerrar o reducir en el eje *x* y cada vez que aumentamos el número se reduce más" o "cuando escribimos un número mayor que cero y menor que uno, la gráfica aumentará en *x*" permiten evidenciar que los estudiantes lograron notar la modificación que sufre la representación gráfica de una función cuando se modifica el parámetro *a*, perteneciendo este a una representación algebraica de la forma $y=ax$, en particular cuando a toma valores mayores que uno o están entre cero y uno.

Por último, conjeturas como "si el número que va antes de *x* es negativo, entonces las parábolas abrirán en sentido contrario a la función original" permiten evidenciar que los estudiantes lograron notar la modificación que sufre la representación gráfica de una función en el plano cartesiano, al modificar el parámetro *a*, en particular cuando toma valores negativos.

De las respuestas analizadas, se puede concluir que la mayoría de los estudiantes participantes de la aplicación del taller, identifican los parámetros en la representación algebraica, que determinan las transformaciones que sufren las representaciones gráficas de dichas funciones. Estos resultados obtenidos, permiten corroborar la utilidad y el gran potencial que tiene el uso de software de matemáticas, para la enseñanza y el aprendizaje de las mismas, además de ser propicio para llevar a cabo los procesos de generalización, en la medida en la que posibilitan la exploración y la comprobación de las conjeturas. Todas y cada una de las instrucciones del taller promovieron el paso de los estudiantes por cada una de las etapas del proceso de generalización, y esto se refleja en las conjeturas escritas por cada grupo de estudiantes participantes de la actividad.

Así pues, se logró la construcción de un saber matemático en donde el estudiante fue el protagonista del proceso, utilizando otras herramientas y recursos que no son tan usuales en el aula de clase de matemáticas.

## Referencias

Azcárate, A., Deulofeu, J. (1990). *Funciones y Gráficas*. Madrid: Síntesis.

MEN. (1997). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Magisterio

MEN. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Bogotá: Enlace editorales Ltda.

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá.

Mora, L. (2012). Álgebra en primaria. Documento en el marco del Programa Todos a Aprender del MEN.

Moreno, L. (2002). Evolución y tecnología. *Seminario Nacional de Formación de Docentes: uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas.* MEN; 67-80.