Prácticas matemáticas en la geometría de Descartes.
Aportes a la formación de profesores

Bello, Jhon Helver - Forero, Alberto
jhbelloc@udistrital.edu.co - albertoforero84@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

El taller contribuye en el análisis de las prácticas asociadas al uso de la relación: instrumento –representación gráfica– representación simbólica; que históricamente se pueden deducir del trabajo que René Descartes presentó en uno de los apartados del discurso del método, llamado Geometría. En este documento Descartes, rompe con la tradición que dejó la geometría euclideana, propone un nuevo modelo de resolución de problemas geométricos y cuestiona el valor de certeza y exactitud de la noción de construcción. Con el fin de acercar a los asistentes a las prácticas matemáticas que llevaron a Descartes a estos planteamientos, se plantean algunas actividades para desarrollar con estudiantes para profesor de matemáticas, pensando que a partir de este trabajo ellos pueden reflexionar sobre elementos que configuran el desarrollo del álgebra escolar.

Palabras clave: Geometría Descartes, representaciones, instrumentos, formación de profesores.

1. Temáticas

La propuesta desarrolla actividades que se pueden abordar desde el modelo de solución de problemas geométricos propuestos por Descartes, con el ánimo de que profesores en formación usen este conocimiento para reflexionar sobre el álgebra escolar.

2. Objetivos

- Desarrollar un ejemplo de uso de la historia de las matemáticas en la formación de profesores de matemáticas.
- Reflexionar sobre los aspectos que aparecen en la geometría de Descartes sobre el uso de representaciones en la solución de problemas geométricos.

3. Referentes teóricos básicos

Inicialmente se van a realizar algunos planteamientos generales sobre el marco en que se incluyen propuestas como esta. Seguidamente, se trazan las ideas teóricas que llevan a buscar en la historia de la matemática aspectos para el trabajo en la formación de profesores. Luego se presentan a partir de algunos elementos expuestos por Descartes en el texto de la Geometría reflexiones sobre la relación entre los instrumentos mecánicos, las representaciones gráficas que producen éstos y su desarrollo simbólico.

La historia de la matemática en la formación de profesores

Al hacer una revisión del uso de la historia de las matemáticas en los programas de formación de matemáticas en Colombia, Torres & Guacaneme (2012), encuentran que la historia de la matemática ha sido usada en la formación de profesores de matemáticas a partir de anécdotas, cursos sobre el tema o haciendo uso de análisis históricos de algunos objetos matemáticos. Sin embargo, el lugar de esta área de conocimiento en este tipo de formación es todavía difuso y puede seguir siendo etéreo en el impacto sobre las reflexiones que deberían hacer los futuros profesores sobre las matemáticas, la constitución de objetos matemáticos y el uso de herramientas que permitan su construcción.

En este sentido, Arboleda (2012) ha planteado que la historia de la matemática debe estar situada pedagógicamente para contribuir en el desarrollo de la capacidad del profesor para saber-analizar su propia práctica, entendiendo esta dualidad como *“una interrogación del docente sobre los* *conocimientos que se movilizan en su experiencia (incluso los de su propia formación), con el fin de establecer en qué medida se reconoce en ellos o debe reproducir"* (Arboleda, 2012, p. 1)

De acuerdo a lo anterior, el papel de la historia se enmarca en los aspectos que permitieron la constitución de lo matemático en algún periodo de la historia, lo que implica para el formador de profesores profundizar en las intimidades propias de la historia de la matemática y extraer las prácticas asociadas al uso, rigor y validación del asunto matemático en cuestión. De esta manera compartimos con Glas (2007, p. 25) que ""*las matemáticas son el producto de una práctica humana común, pero al mismo tiempo este producto es parcialmente independiente de la práctica que la produjo"*. Lo que implica reconocer que las matemáticas son únicas como práctica social y por lo tanto su historia recorre diferentes posturas epistemológicas y ontológicas no solamente de los objetos sino también de las propias matemáticas.

El caso de la geometría de Descartes

Como un caso particular de las posturas propuestas en el aparatado anterior, se tomará la traducción al español de la Geometría de Descartes realizada por Sánchez en 1996, con el fin de comprender las prácticas de la temprana edad moderna, que se acentuaron en esta obra y que permiten que los historiadores localicen al autor en la historia del álgebra y al contenido de este texto como la creación de la geometría analítica a partir del uso de una nueva forma de abordar problema geométricos. Nos vamos a centrar en las prácticas que se evidencian en el texto respecto a la actividad de representar en ella, y el uso de instrumentos y ecuaciones.

El trabajo sobre las representaciones asociadas a una curva en Descartes

En la perspectiva de la Europa del siglo XVII, preguntas sobre formas apropiadas de representación dominaron la actividad intelectual, no solo en ciencia y matemáticas, quizás aún más profundamente en discusiones religiosas, políticas, legales y filosóficas. (Shappin y Shaffer, 1985), por eso se considera que la simbología cartesiana y su relación con las construcciones geométricas hacían parte del método cartesiano en sus trabajos filosóficos, es decir no sólo era una búsqueda por solucionar problemas geométricos sino que además comprendía una manifestación del pensamiento cartesiano, específicamente en geometría. Esta búsqueda logró intervenir en el trabajo de La Geometría, como una herramienta fundamental en el proceso de solución de problemas geométricos, caracterizada en el problema de Pappus (Bello y Forero, 2014).

La representación jugó un papel fundamental en la construcción y tratamiento de las situaciones problema en el discurso cartesiano, la aceptabilidad de una curva como geométrica se daba en términos de su construcción, pero, a pesar de que las ecuaciones algebraicas intervinieron radicalmente en la geometría, para Descartes no eran una representación con la cual se determine la aceptabilidad de una curva, únicamente fueron un medio para la clasificación de las mismas, "Descartes no considera la ecuación como una representación suficiente para una curva" (Mehrtens, Bos, & Schneider, 1981, p. 46). Para este escrito, se pretende demostrar diferentes relaciones entre las representaciones asociadas a un problema específico y un instrumento mecánico cartesiano expuesto en el libro II.

Para describirlo, se consideran las líneas AB, AD, AF y así cuatro, que se supone van a ser descritas por el instrumento YZ. Este instrumento consiste de varias reglas unidas de tal forma que YZ forme a lo largo de la línea AN el ángulo XYZ incrementándose o decreciendo en tamaño y cuando sus lados están juntos, los puntos B, C, D, E, F, G todos coinciden con A; pero como el tamaño del ángulo está creciendo, la regla BC formando ángulos rectos con XY en el punto B, empuja hacia Z a la regla CD que se desliza a lo largo de YZ siempre en ángulos rectos. De la misma forma, CD empuja a DE, que se desliza a los largo de la línea YX siempre paralela a BC; DE empuja a EF; EF empuja a FG; y así sucesivamente. Así imaginamos una infinidad de reglas, cada una empujando a otra, la mitad de ellas haciendo ángulos iguales con YX y el resto con YZ.

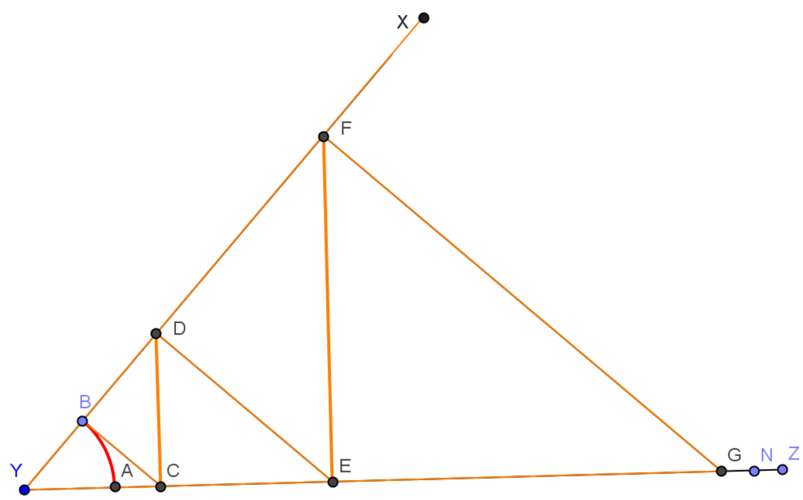

Figura 1. Instrumento para construcción de curvas de diferente complejidad

Ahora, como el ángulo XYZ crece, el punto B describe la curva AB, que es un círculo; cuando las intersecciones de las otras reglas a saber, los puntos D, F, H describen las otras curvas, AD, AF, AH, de donde éstas son más complejas que la primera y así más complejas que el círculo.

El trabajo simbólico sobre lo instrumental

A partir del instrumento expuesto por Descartes en su segundo libro de La Geometría, es posible realizar un trabajo deductivo, exponiendo el método cartesiano para interpretar simbólicamente las curvas que describe el instrumento. Para obtener ecuaciones asociadas a las curvas construidas en el instrumento, el método cartesiano manifiesta que es necesario identificar características de las reglas que intervienen en el mismo, identificando cuales son las cantidades conocidas y las cantidades desconocidas, luego es importante referenciar que las cantidades conocidas fijas se pueden representar por las letras a, b, c, d,.. y las cantidades desconocidas por las letras x, y, z.

Para este caso, las cantidades constantes son YA, YB y las variables son YC, CD, YD, y así consecutivamente. De esta forma es posible definir $YA = YB = a, YC = x,\ CD = y,\ YD = z$; entonces

$$z : x :: x : a$$

$$z = \frac{x^2}{a}$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

entonces es posible deducir que la ecuación para AD es

$$x^4 = a^2(x^2 + y^2)$$

Si ahora se establece $YA = YB = a$, $YE = x,\ EF = y,\ YF = z$; entonces:

$$z : x :: x : YD$$

$$YD = \frac{x^2}{z}$$

$$x : YD = YD : YC$$

$$YC = \frac{\left(\frac{x^4}{z^2}\right)}{x} = \frac{x^3}{z^2}$$

y así es posible obtener

$$z = \sqrt[3]{\frac{x^4}{a}}, \qquad z^2 = x^2 + y^2$$

Entonces la ecuación para la curva AF es

$$x^8 = a^2(x^2 + y^2)^3$$

Hay que establecer en esta relación tal como lo nombra Bos (2001) el producto del análisis de la curva y su instrumento es la representación simbólica de la curva, aspecto que epistemológicamente le otorga un valor menor a este tipo de escritura; no es en Descartes donde lo simbólico toma la importancia de la etapa de la modernidad, es un trabajo simbólico sobre la curva construida a partir de un instrumento que parecía llevar la responsabilidad de otorgar validez al proceso.

El trabajo geométrico sobre lo instrumental

En los problemas geométricos previos al trabajo de Descartes, el énfasis estaba principalmente sobre las construcciones con regla y compás, lo que hacía limitar el número de curvas que se podían analizar y construir; para Bos (1981), desde la antigüedad hasta comienzos del siglo XVII la colección de curvas no cambió; fueron Descartes y Fermat quienes ampliaron este conjunto al involucrar una gran variedad de curvas algebraicas, estas son, las definidas por ecuaciones que contemplan el uso de operaciones algebraicas +, -, x, ÷, $\sqrt[k]{\ }$, con $k > 1$ entero.

En este sentido, el trabajo cartesiano sobre los instrumentos mecánicos permitió abrir un panorama que hasta los periodos previos a Descartes se obviaba por tener un carácter de "inexacto" en cuanto a la medida; así, la noción de curva se hace fundamental en el trabajo matemático y de diversas aplicaciones asociadas al concepto. De esta forma se habla de la complejidad de la curva, dependiendo del tipo de instrumentos que se utilizan para su construcción, para establecer una caracterización en donde la circunferencia y en general todas las secciones cónicas se establecen como las curvas de primer género, pero luego se establecen curvas, como en el caso del instrumento tratado en este escrito, AF, generada por el instrumento, gracias al empuje que dan las reglas anteriores, este concepto asocia la idea de complejidad de una curva a su construcción geométrica, es decir si una curva M es construida haciendo uso de las relaciones instrumentales y geométricas de otra curva N entonces M puede ser únicamente de igual o mayor complejidad que N.

La relación entre el trabajo geométrico y el trabajo algebraico

El trabajo simbólico en Descartes partió de la diferenciación de las cantidades conocidas y desconocidas, aspecto que ya había sido trabajado por Viète, como un medio para lograr encontrar ecuaciones que presentaron la relación entre las cantidades variables, haciendo uso de los parámetros conocidos. Este trabajo algebraico no podría haberse afianzado sin el uso de las diferentes herramientas geométricas que intervenían en el instrumento mecánico, principalmente las relaciones proporcionales entre los segmentos presentes en la construcción y las relaciones en y entre triángulos y figuras geométricas.

4. Propuesta de actividades

A continuación se presentan dos actividades cuya solución llevan a reflexionar sobre los planteamientos teóricos anteriores. Situaciones con la misma intencionalidad son trabajadas en los espacios académicos de Problemas del Álgebra Geométrica y reflexionados en Didáctica del Álgebra de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital, LEBEM y serán trabajadas y reflexionadas durante el taller.

Las situaciones permiten comparar el abordaje desde la geometría y desde el álgebra, su solución por cualquiera de los caminos lleva a reflexionar la relación histórica entre elementos geométricos y el planteamiento y solución de ecuaciones. El proceso que permite la solución de cada uno de los problemas aporta la discusión que permite comprender la importancia del álgebra, el uso de la letra y la solución de ecuaciones.

- **Situación 1:** Construir un triángulo equilátero cuya área sea dada. A partir de éste, construya otro triángulo equilátero que tenga el triple de área que el triángulo equilátero inicial.

  -Describa un proceso geométrico que le permita solucionar la situación.
  -Describa un proceso algebraico que le permita solucionar la situación.
  -¿Qué relaciones encuentra entre los procesos anteriormente descritos?
  -¿Qué aspectos le permiten indicar que cada una de las soluciones es válida?

- **Situación 2:** Dado un círculo de radio 1, ¿es posible cortarlo por una recta paralela a uno de sus diámetros, de tal forma que sus partes queden en razón de 2 a 3?

  -Describa un proceso geométrico que le permita solucionar la situación.
  -Describa un proceso algebraico que le permita solucionar la situación.
  -¿Qué relaciones encuentra entre los procesos anteriormente descritos?

-Analice las situaciones y establezca los aspectos que considera fundamentales para cada una de las soluciones.

Referencias bibliográficas

- Arboleda, L. C. (2012). Los estudios históricos en educación matemática desde la perspectiva de la práctica docente. En A. C. Zambrano, & C. Uribe (Edits.), *La Formación de Educadores en Ciencias en el Contexto de la Investigación en el Aula* (págs. 1-5). Bogotá: Asociación Colombiana para la Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología.
- Bos, H. (2001). *Redefining geometrical exactness: Descartes transformation of the early modern concept of construction*. New York: Springer.
- Descartes, R. (1996). *Discurso del método*. *La dióptrica*. *Los meteoros*. *La geometría*. (J. M. Sánchez Ron, Ed. & G. Quintás, Trad.) Barcelona: Círculo de lectores.
- Glas, E. (2007). Mathematics as Objective Knowledge and as Human Practice. En B. Kerkhove, & J. Bendegem (Edits.), *Perspectives on Mathematical Practice*. p. 25-42. New York: Springer.
- Mehrtens, H., Bos, H., & Schneider, I. (1981). *Social history of nineteenth century mathematics*. Boston: Springer.
- Shapin, S., & Schaffer, S. (1985). *Leviatan and the Air-Pump*. *Hobbes, Boyle, and the experimental life*. New Jersey: Pricenton University Press.
- Torres, L. A., & Guacaneme, E. (2012). *La Historia de la Matemática en Algunos Programas Colombianos*. Reporte de Investigación, Universidad del Valle, Cali.