
La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar

Educación Matemática
Vol. 11 No. 1 Abril 1999
pp. 77-88

Fecha de recepción: Noviembre 1997

Josep Gascón

Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona, Edificio C
08193, Bellaterra (Barcelona) España
gascon@mat.uab.es

RESUMEN: *En este trabajo no se interpreta el álgebra elemental como "aritmética generalizada" sino como un instrumento esencial de la modelización matemática. El carácter prealgebraico de la matemática escolar se pone entonces de manifiesto en la desintegración del corpus de problemas algebraicos, en la ausencia del juego entre parámetros y variables, en la progresiva desaparición de actividades "justificativas" y "demostrativas" y en la utilización de las fórmulas como simples algoritmos de cálculo en un ámbito completamente independiente del lenguaje funcional.*

Se propone una primera explicación de este fenómeno a partir de la atomización del proceso de enseñanza de las matemáticas y de la ausencia de trabajo técnico en las actuales instituciones escolares. Dichas causas están reforzadas por la respuesta psicopedagógica del sistema que, para intentar frenar la alienación didáctica de los alumnos, va eliminando progresivamente la disciplina matemática provocando, paradójicamente, el efecto contrario al perseguido.

ABSTRACT: *In this work we do not interpret elementary algebra as "generalized arithmetic" but as an essential instrument of mathematical modeling. The prealgebraic character of school mathematics is manifested in: the disintegration of the body of algebraic problems; the absence of interplay between the variables and the parameters; the progressive disappearance of "justified" and "demonstrative" activities; and, the uses of mathematical formulas as simple algorithmic calculations in an ambit completely independent of the functional language.*

We propose a preliminary explanation of this phenomenon based on both the atomization of the mathematical teaching process and the absence of technical work in the present school system. These causes are strengthened by the psycho-pedagogic response of the system that, in order to restrain the students' didactic alienation, progressively eliminates mathematical discipline provoking, paradoxically, the opposite of the desired effect.

1. Introducción

Empezaremos enunciando claramente la tesis principal de este trabajo: la matemática escolar, en el ámbito de la enseñanza obligatoria (12-16 años), tiene un carácter marcadamente

prealgebraico en el sentido de “aún no algebrizada” y, lo que es más importante, no está organizada para provocar una progresiva algebrización de la actividad matemática. Postulamos asimismo que este hecho no es accidental sino que constituye un fenómeno didáctico, relativamente universal.

Esta formulación provisional de nuestra tesis plantea algunos interrogantes que iremos abordando progresivamente. El primero y principal puede formularse como sigue:

¿Qué significa “*matemática prealgebraica*” y en qué sentido se contrapone a la “*matemática algebrizada*”?

Ésta será, por tanto, la primera de las cuestiones que abordaremos. Surgirán otras muchas cuestiones, aunque no todas podrán ser tratadas aquí:

- (a) ¿A qué se debe el carácter prealgebraico de las matemáticas obligatorias? ¿Qué otros fenómenos didácticos dependen de la naturaleza prealgebraica de la matemática escolar?
- (b) ¿Por qué decimos que no se trata de un hecho aislado y circunstancial, sino que constituye un auténtico fenómeno didáctico?
- (c) ¿Cuáles son las consecuencias previsibles de este fenómeno? ¿Con qué otros fenómenos didácticos puede relacionarse?
- (d) ¿Hasta qué punto y de qué forma es posible modificar el carácter prealgebraico de las matemáticas escolares?
- (e) ¿Qué características debería tener la organización matemática escolar para provocar una algebrización progresiva de la actividad matemática?

2. El álgebra como “*aritmética generalizada*”

La inmensa mayoría de las investigaciones que se han llevado a cabo sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra elemental asumen acríticamente el modelo dominante dentro del sistema de enseñanza de las matemáticas y consideran que el álgebra elemental es una especie de “*aritmética generalizada*” (Booth, 1984; Vergnaud, 1988; Filloy y Rojano, 1989; Kieran y Filloy, 1989). Aunque, como ha mostrado Katz, la revisión histórica de los problemas que hicieron surgir el álgebra árabe ha puesto de manifiesto que éstos eran problemas de *razonamiento cuantitativo* y no sólo problemas aritméticos (Katz, 1995), la introducción del álgebra en los primeros cursos de enseñanza secundaria tiende a identificar implícitamente el álgebra con el *razonamiento aritmético generalizado* (Gascón, 1993 y 1994; Rojano, 1994; Kaput, 1996).

Esta manera (más o menos explícita) de interpretar el álgebra elemental toma como característica distintiva y casi definitoria del mismo la utilización del “*simbolismo algebraico*” que, en cierta forma, se opone a la vez que prolonga y generaliza un presunto lenguaje aritmético. En otro lugar (Gascón, 1994) hemos caracterizado esta forma habitual, y todavía dominante, de interpretar el álgebra elemental y hemos propuesto un modelo alternativo.

Según este modelo todavía dominante, el álgebra elemental se define en *contraposición* pero también en *dependencia absoluta* de la *aritmética escolar*. Así, se dice, mientras que la aritmética escolar trata siempre y únicamente con *números concretos*, el álgebra elemental (entendida como *aritmética generalizada*) se caracteriza por ser una especie de “*lenguaje*” en el que, además de números, también deben manipularse símbolos que se interpretan ya sea como “*números desconocidos específicos*”:

$$2x + 3 = 5x - 7$$

como “*números generalizados*”:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

o como “*variables*”:

$$y = 3x + 7$$

Se considera entonces que la principal (y casi la única) discontinuidad entre la aritmética y el álgebra escolares se debe al cambio de “semántica” que se da entre los dos lenguajes: mientras que los signos que se utilizan en la aritmética escolar tienen un referente preciso y un significado muy concreto, el nuevo lenguaje (el llamado *lenguaje algebraico*) se caracteriza precisamente por la dualidad de significados de los símbolos que utiliza (Gascón, 1994).

En coherencia con esta manera de interpretar el álgebra como *aritmética generalizada*, se tiende a considerar que los errores en el aprendizaje del álgebra surgen esencialmente como consecuencia de generalizaciones abusivas, o simplemente erróneas, de nociones y de procedimientos establecidos en aritmética. Se plantea así el problema del aprendizaje del álgebra elemental como una transición del “*pensamiento aritmético*” al “*pensamiento algebraico*”. El álgebra elemental se reduce entonces a una mera generalización del “lenguaje aritmético” escolar y su aprendizaje tiende a identificarse con la adquisición de este lenguaje aritmético generalizado (Kieran y Filloy, 1989).

Queda ahora claro que nuestra tesis inicial, relativa a la “*naturaleza pre-algebraica de la matemática escolar*”, **no se refiere al álgebra interpretada como aritmética generalizada**, puesto que ésta, lejos de estar ausente, invade la última etapa de la enseñanza obligatoria. A continuación explicitaremos el sentido preciso que le damos a la citada tesis, interpretando el álgebra, no como *aritmética generalizada*, sino como el *instrumento de una nueva manera de hacer matemáticas*.

Esta forma de proceder, que se caracteriza por estudiar los fenómenos didáctico-matemáticos partiendo de un modelo explícito de los conocimientos matemáticos involucrados, sin presuponer que éstos están “dados” ni, mucho menos, que son transparentes e “incuestionables”, revela claramente que nos situamos en el paradigma de la *didáctica fundamental* (Brousseau, 1986). En este paradigma no sólo debemos explicitar lo que entendemos por “álgebra” (esto es, el modelo epistemológico de “álgebra” que utilizaremos), sino que debemos utilizar dicho modelo como punto de referencia básico para describir, y en su caso explicar, todos y cada uno de los fenómenos didácticos relativos a la enseñanza y al aprendizaje escolar del álgebra.

3. El álgebra como instrumento de la actividad matemática

El estudio de la génesis del álgebra pone en evidencia que, en primera instancia, *el álgebra es un instrumento* al servicio del trabajo matemático; el álgebra es, en primer lugar, el “instrumento algebraico”. Su aparición histórica dió lugar a un cambio radical en las condiciones del trabajo matemático al reemplazar mediante el trazo escrito ciertos usos de la memoria humana permitiendo, además, la explicitación y la manipulación de la estructura del problema tratado. De esta manera se amplió enormemente la posibilidad de abordar matemáticamente los problemas complejos que antes del álgebra se reducían al primer y segundo grado con una o dos incógnitas. (Chevallard, 1989).

Aunque la aparición del álgebra se caracteriza materialmente por la proliferación de *expresiones algebraicas* y por la emergencia de una especie de “lenguaje algebraico”, la nueva forma de hacer matemáticas basa su verdadera potencia en las inmensas posibilidades técnicas que surgen del juego del doble uso de las letras: como “**incógnitas**” y como “*parámetros*”. Entre dichas posibilidades destacan las siguientes: resolver simultáneamente una amplia clase de problemas, justificar, interpretar y controlar el ámbito de aplicación de las técnicas prealgebraicas (sean “aritméticas”, “geométricas” o “combinatorias”) y, además de obtener la incógnita cuando el problema tiene solución, explicar cuáles son las condiciones de existencia de dicha solución y describir la estructura del conjunto de las soluciones.

Al interpretar el álgebra elemental de esta manera, *como un nuevo* instrumento para hacer matemáticas, podemos afirmar que el “carácter prealgebraico de la matemática escolar”, al que se refiere nuestra tesis inicial, tiene que ver precisamente con la *ausencia*, o *presencia muy limitada y fragmentada*, del instrumento algebraico en la actividad matemática escolar.

Este instrumento algebraico puede ser considerado como una técnica matemática, dando a la noción de “*técnica*” la acepción más general de “manera de hacer” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997 y Gascón, 1998). La técnica algebraica así considerada es el resultado del desarrollo de técnicas prealgebraicas muy diversas (aritméticas, de construcción geométrica, combinatorias, probabilísticas, lógicas, ...) y, en cierto sentido puede decirse, a posteriori, que constituye una fundamentación conjunta de todas ellas.

En otro lugar hemos mostrado que el desarrollo completo de la técnica algebraica pasa por dos etapas: en la primera emerge el cálculo ecuacional y en la segunda aparece la *modelización algebraica* propiamente dicha (Gascón, 1993 y 1994).

En la primera etapa de su desarrollo (en la que sólo dispone del cálculo ecuacional), el instrumento algebraico presenta todavía limitaciones importantes, siendo una de las más importantes el que *no permite determinar las condiciones de existencia del objeto incógnita*, aunque sí permite calcularlo (o construirlo) en el caso de que éste exista. Para superar esta limitación es preciso aprovechar una característica esencial del instrumento algebraico que no es explotada por la técnica ecuacional: se trata de la utilización adecuada de la *representación literal*, tanto para designar cantidades desconocidas como *cantidades conocidas* y de llevar a cabo un determinado juego entre unas y otras. Esta forma de utilizar el instrumento algebraico culmina en la modelización algebraica que constituye un tipo de actividad matemática que permite tratar los *casos generales* y hace posible estudiar la *estructura de los problemas* en lugar de limitarse a la simple obtención de la incógnita.

4. Modelización algebraica y matemáticas “algebrizadas”

A partir de los rasgos definitorios de la modelización algebraica (Gascón, 1993 y 1994) y dado que ésta constituye la culminación del desarrollo del instrumento algebraico, podemos caracterizar la noción de “*matemáticas algebrizadas*” (Bolea, Bosch y Gascón, 1998a y 1998b). Sobre esta base desarrollaremos posteriormente la tesis principal de este trabajo relativa a la naturaleza prealgebraica de la organización escolar de las matemáticas, describiremos los obstáculos que impiden su progresiva algebrización y daremos una primera explicación de dicho fenómeno.

(i) Mediante la modelización algebraica se estudian situaciones muy diversas, matemáticas y extramatemáticas, en las que cristalizan problemas aparentemente muy diferentes,

incluyendo la clase de los “problemas aritméticos”, resolubles verbalmente mediante una cadena de operaciones aritméticas, de “construcción geométrica”, de “contar simples”, de “lógica”, de “máximos y mínimos”, etc. (Gascón, 1989). En consecuencia, un primer indicador del grado de algebrización de la actividad matemática viene dado por el *grado de unificación de estos tipos de problemas* y por la mayor o menor *integración de las correspondientes técnicas y de los elementos teóricos asociados* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

(ii) La modelización algebraica se caracteriza por el uso sistemático de parámetros, entendidos en primera instancia como objetos matemáticos (números, funciones, conjuntos, figuras, proposiciones, matrices, ...) *conocidos que se manipulan como si fueran desconocidos*. Por tanto, la mayor o menor algebrización de la actividad matemática puede medirse también por la posibilidad de estudiar la *relación entre todas las variables del problema* sin hacer ninguna distinción esencial entre lo “conocido” y lo “desconocido”, así como por la capacidad de llevar a cabo “justificaciones”, “demostraciones” e “interpretaciones” relativas a la *estructura global de los problemas*, independientemente de la naturaleza aritmética, combinatoria, lógica, física, etc. del sistema modelizado por éstos.

(iii) Los modelos algebraicos se suelen materializar en fórmulas cuyo estudio (por ejemplo, el dominio de validez de las diversas funciones que define una fórmula) permite descubrir las *condiciones de existencia del objeto incógnita*, en lugar de limitarse a buscar o a construir dicho objeto. Esto permite estudiar no sólo cómo dependen las variables “desconocidas” de las “conocidas”, sino también cómo dependen las variables “conocidas” de las “desconocidas”. El lenguaje funcional es útil, además, en la propia construcción de modelos algebraicos y proporciona técnicas para trabajar dentro de ellos. Resulta, por tanto, que el *grado de integración del lenguaje funcional en el estudio de fórmulas* (incluyendo la utilización de parámetros), es otro indicador del nivel de algebrización de la actividad matemática.

5. Naturaleza prealgebraica de las matemáticas escolares

En un primer nivel de análisis, podría decirse que los manuales, los textos oficiales y la actividad matemática escolar tal como se lleva a cabo en la enseñanza obligatoria (12-16 años)*, muestran ciertos rasgos *aparentemente* algebraizantes.

Entre dichos indicios cabe citar: la aparición progresiva de letras; la existencia de un bloque de contenidos consagrado al cálculo algebraico y otro al cálculo ecuacional y, por fin, el *empleo del cálculo algebraico* más elemental (ecuaciones de primer grado con una incógnita) en problemas “concretos”. En el currículo obligatorio de la nueva secundaria española ha desaparecido, sin embargo, el empleo del cálculo algebraico con ecuaciones para resolver problemas de geometría analítica y tiende a desaparecer el tratamiento “algebraico” de los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, así como el de las ecuaciones de segundo grado “completas”.

* Nos referimos, especialmente, al currículo de matemáticas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.) vigente actualmente en el estado español y que se extiende de los 12 a los 16 años. Postulamos, sin embargo, que con las variaciones pertinentes, el carácter prealgebraico de la organización matemática escolar constituye un fenómeno didáctico y, por tanto, relativamente universal en las instituciones responsables de la enseñanza obligatoria.

Un análisis más detallado de la organización matemática escolar en el ámbito de la enseñanza obligatoria confirma, sin embargo, que estos rasgos de algebrización no van mucho más allá de la aritmética generalizada; así, por ejemplo, nunca se rompe la dependencia unilateral entre lo “numérico” (o aritmético) y lo “algebraico”, considerado como generalización de lo “aritmético” (Chevallard, 1989). Un indicio casi universal de la unilateralidad de esta dependencia lo constituye el tratamiento que se da a los números negativos y a los racionales a lo largo de toda la enseñanza secundaria obligatoria: se les trata como si fueran *objetos aritméticos* cuando, de suyo, son *objetos algebraicos* que responden a *cuestiones algebraicas* y resuelven *problemas algebraicos*.

Si, en aras de realizar un análisis mínimamente sistemático, comparamos la organización matemática escolar, tal como aparece en la Enseñanza Secundaria Obligatoria*, con lo que hemos denominado “matemáticas algebrizadas”, se ponen de manifiesto los siguientes contrastes:

(I) La presunta unidad funcional de lo algebraico se rompe en esta organización matemática escolar: se produce una fuerte autonomía de los diferentes bloques y la *desintegración del corpus algebraico* (Chevallard, 1989). Los tipos de problemas tienden a multiplicarse, las técnicas a especializarse y los elementos teóricos a independizarse. No aparece ningún indicio de la necesidad matemática de integración de la actividad, sino todo lo contrario; en la inmensa mayoría de los nuevos libros de texto de Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.), se observa una fuerte y rápida *tendencia a atomizar la actividad matemática*, a tratar problemas cada vez más aislados y a *desaparecer los elementos justificativos e interpretativos* que podrían proporcionar algún indicio de interrelación entre las diversas actividades.

(II) En la resolución de ecuaciones e inecuaciones y, sobre todo, en su utilización para resolver problemas escolares “verbales”, las letras juegan únicamente el papel de *incógnitas, los parámetros están ausentes*. No sólo no se plantea explícitamente la cuestión de estudiar la *estructura global del problema*, esto es, la relación entre todas las variables del mismo, sino que, al tratar los problemas como “adivinanzas” cada vez más aisladas, se hace progresivamente más difícil plantear la cuestión del tipo de problemas al que pertenece un problema dado. No aparece, por tanto, ningún tipo de problemas que ponga en evidencia la “necesidad” actual ni futura de utilizar parámetros. Aunque se manipulan *expresiones algebraicas* en los ejercicios de *cálculo algebraico*, esta manipulación tiene un carácter puramente “formal”, esto es, independiente de cualquier sistema (matemático o extramatemático) cuya modelización podría dar “sentido” a las manipulaciones algebraicas. Las “demostraciones algebraicas” de fenómenos aritméticos, geométricos o combinatorios no juegan ningún papel en la actividad que el contrato didáctico asigna en esta organización matemática escolar.

(III) En la escolaridad obligatoria las fórmulas, que se utilizan casi únicamente en el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos y en algunos problemas de matemática

* Nos referimos, especialmente, al currículo de matemáticas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.) vigente actualmente en el estado español y que se extiende de los 12 a los 16 años. Postulamos, sin embargo, que con las variaciones pertinentes, el carácter prealgebraico de la organización matemática escolar constituye un fenómeno didáctico y, por tanto, relativamente universal en las instituciones responsables de la enseñanza obligatoria.

comercial, no aparecen como el fruto de un trabajo algebraico ni hacen ninguna de las funciones específicas de los modelos algebraicos; las fórmulas hacen únicamente el papel de “reglas” para automatizar ciertos cálculos. Así, por ejemplo, las fórmulas nunca se utilizan para investigar las condiciones de existencia de la incógnita. Las funciones, por su parte, tampoco se utilizan para construir ni para estudiar las fórmulas, éstas aparecen en un ámbito separado e independiente del lenguaje funcional.

Tenemos, en resumen, una organización matemática escolar (en el ámbito de la enseñanza obligatoria) que origina una creciente atomización de la actividad, lleva a la manipulación puramente formal de las expresiones algebraicas, no parece precisar de ningún tipo de “justificación” ni “demostración” algebraica y provoca la separación entre los usos de las fórmulas y del lenguaje funcional. Estas tendencias son dificultades objetivas que no sólo no favorecen, sino que impiden la necesaria algebrización de la actividad matemática escolar*.

Ahora, después de haber clarificado lo que entendemos por “naturaleza prealgebraica de la matemática escolar”, estamos en mejores condiciones para abordar algunas de las cuestiones planteadas en la introducción:

- ¿Cuáles son las causas que determinan la naturaleza prealgebraica de la matemática escolar?
- ¿Por qué la organización matemática escolar no favorece una progresiva y gradual algebrización de la actividad matemática?
- ¿Por qué decimos que no se trata de un hecho aislado y accidental, sino que constituye un auténtico fenómeno didáctico relativamente universal?
- ¿Con qué otros fenómenos didácticos puede relacionarse?

Para empezar a contestar estas preguntas hemos de analizar otros aspectos del sistema de enseñanza de las matemáticas que están presumiblemente relacionados con el fenómeno que nos ocupa.

6. Alienación didáctica, disciplina matemática y atomización del proceso de enseñanza

Uno de los rasgos más llamativos de la enseñanza de las matemáticas a nivel “obligatorio” es la gran cantidad de alumnos que o bien no llegan nunca a “entrar” en el contrato didáctico (Brousseau, 1986) o bien acaban saliendo del mismo antes de finalizar la citada escolaridad obligatoria.

La inmensa mayoría de alumnos pasan por la escuela sin sentir ninguna necesidad de utilizar las matemáticas para responder a cuestiones que se ellos mismos se plantean, ni para llevar a cabo una tarea que sea sentida como problemática por ellos mismos. A estos alumnos la enseñanza de las matemáticas se les impone claramente desde fuera. Denominaremos a este fenómeno “alienación didáctica” de los alumnos.

Sin pretender analizar aquí las causas últimas de este fenómeno, describiremos algunos de los fenómenos asociados y, en la próxima sección, su relación con la naturaleza

* La cuestión de la necesidad de la algebrización progresiva de la matemática escolar, es un tema importante que no podemos tratar aquí. (Bolea, Bosch y Gascón, 1998).

prealgebraica de la matemática escolar en el ámbito de la enseñanza secundaria obligatoria. Ante todo hay que decir que la alienación didáctica de los alumnos es interpretada desde el interior del sistema de enseñanza como el resultado del aflojamiento de la necesaria sujeción de los alumnos a la institución escolar. Se ignora así el origen didáctico-matemático del problema, esto es, las causas relacionadas con la *naturaleza de la matemática escolar* y, por contra, se apela a *factores psico-pedagógicos* tales como:

- a. Los alumnos no quieren o no pueden integrarse en el funcionamiento de la clase ya sea por “desidia”, “falta de interés”, “falta de motivación”, “preparación inadecuada”, “falta de capacidad”, etcétera.
- b. Los métodos de enseñanza del profesor impiden, o no facilitan, que los alumnos se integren en el funcionamiento de la clase.

La institución escolar reacciona, en consecuencia, intentando aumentar la *dependencia mutua entre el profesor y los alumnos* e intentando eliminar las presuntas causas de la *alienación didáctica de los alumnos* que, supuestamente, están relacionadas con factores tales como: unos contenidos demasiado “abstractos” para la capacidad de los alumnos, excesiva concatenación lógica entre los diferentes temas que hace que los alumnos que pierden el hilo en una clase ya no puedan recuperarlo, excesiva exigencia de atención sostenida, un trabajo demasiado duro y repetitivo, un material poco interesante y poco relacionado con los intereses vitales de los alumnos y, entre otras cosas, poca atención a las particularidades individuales de cada alumno. Obsérvese que todas estas presuntas causas pueden describirse sin hacer ninguna mención a la estructura interna de la organización matemática escolar. Este diagnóstico psicopedagógico comporta la eliminación progresiva de algunos de los aspectos más característicos de la “*disciplina matemática*” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997)*.

Ante esta situación y con este diagnóstico oficial “indiscutible”, tanto menos discutible cuanto más implícito, se intentan evitar las presuntas causas de la *desconcertación de los alumnos* con la esperanza de impedir su salida del sistema. Se elimina así del currículo, tal como hemos dicho, todo vestigio de la *disciplina matemática* y se *fracciona el proceso de enseñanza de las matemáticas* hasta hacerlo desaparecer como tal proceso. La enseñanza se convierte entonces en un conjunto atomizado de actividades aisladas, de “*anécdotas*” matemáticas independientes entre sí y encadenadas arbitrariamente. Se tiende a convertir la enseñanza en un mecanismo mágico del que se esperan frutos casi “*instantáneos*”, del que se van eliminando los objetivos a “largo plazo” para salvar únicamente las apariencias del momento presente: se pretende que una noción (como, por ejemplo, la de “número racional”) se aprenda instantáneamente, de una vez por todas; se quiere creer que para dominar una técnica basta utilizarla unas pocas veces en ejemplos aislados y, en

* No es casual que los aspectos de la disciplina matemática que están desapareciendo más rápidamente en la escuela sean precisamente aquellos que chocan frontalmente con las características definitorias de la información tal como ésta ha sido redefinida por los medios informativos dominantes y, muy especialmente, por la televisión. Así, por ejemplo, es muy difícil que la comunicación matemática escolar mantenga un discurso que contradiga la ilusión televisiva de que “ver es comprender”, tampoco es fácil mantener objetivos didácticos a medio y largo plazo cuando la medida óptima del tiempo informativo es ahora la instantaneidad y, por último, es complicado transmitir a los alumnos un criterio de veracidad matemática cuando en los medios de comunicación el único criterio de veracidad consiste en que otras fuentes de información repitan las mismas afirmaciones y, con ello, las “confirmen” (Ramonet, 1996).

definitiva, que las matemáticas deben “aprenderse” al mismo tiempo que se “enseñan”. Se ha eliminado completamente el *proceso de estudio de las matemáticas* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Resumiremos lo anterior diciendo que el sistema de enseñanza da una respuesta de carácter psicopedagógico al fenómeno de la “*alienación didáctica*” de los alumnos y que esta respuesta tiende a eliminar la verdadera disciplina matemática, produciendo como resultado una creciente *atomización de la actividad matemática escolar*. El resultado final, paradójico, es un aumento constante de la alienación didáctica que se quería evitar.

En efecto, en un sistema en el que la enseñanza tiende a ser instantánea, en el que las técnicas matemáticas “*deben*” aprenderse al mismo tiempo que se enseñan y en el que se evitan a toda costa importantes aspectos de la disciplina matemática (en particular aquellos que comportan un trabajo “*rutinario*” y “*repetitivo*”), no hay lugar para un trabajo técnico tranquilo, prolongado y sistemático, con objetivos a medio y largo plazo. Esta situación tiene, como no podría ser de otra manera, consecuencias paradójicas: intentando proteger a los alumnos de toda desconcertación y de la dureza de la disciplina matemática (para retenerlos en el sistema escolar), se lleva a muchos de ellos a un estado de *desconcertación permanente* dado que, debido a la atomización de la actividad matemática escolar, se les obliga a cambiar constantemente de actividad y a realizar tareas para las que son *absolutamente incompetentes* porque no se les ha proporcionado los medios para que lleguen a dominar las técnicas necesarias.

Estos alumnos, que en los últimos cursos de secundaria obligatoria (14-16 años) tienden a ser una mayoría, se sienten empujados a “salir” del *contrato didáctico*, esto es, a romper toda relación con las matemáticas (si es que alguna vez la habían tenido) y mantener únicamente, en clase de matemáticas, una relación con el profesor. Una vez fuera del contrato didáctico no tardará en romperse el *contrato pedagógico* (que rige las relaciones entre profesor y alumno independientemente de la materia de estudio) porque, fuera del contrato didáctico, el contrato pedagógico pende de una relación personal asimétrica y debilitada. En muchos casos puede llegarse hasta romper el contrato escolar (que define la función social de la institución escolar), porque una vez fuera del contrato didáctico y del contrato pedagógico, el contrato escolar es principalmente represivo y sólo puede mantenerse mediante medidas autoritarias. Es en estos casos cuando aparecen las situaciones aparentemente más graves porque son las que provocan mayor alarma social.

La gravedad del problema radica en que las cláusulas del contrato escolar no pueden ser transgredidas porque de su cumplimiento depende la existencia misma de la institución escolar. Es comprensible que, llegados a este punto, se recurra a medidas de control, que pueden llegar a degenerar en la aplicación de simples medidas “policiales”. Se consuma y refuerza de esta forma la *alienación didáctica definitiva* de gran parte de los alumnos que, paradójicamente, era lo que se quería evitar por todos los medios.

Los alumnos que permanecen dentro del *contrato didáctico*, esto es, aquellos que aún sintiéndose más o menos incompetentes se mantienen sujetos a las cláusulas que rigen sus obligaciones y las del profesor en lo que hace referencia a las matemáticas enseñadas, tampoco tienen una situación sencilla: el sistema descarga sobre ellos la responsabilidad de mostrar una actividad matemática “*creativa*”, esto es una actividad matemática capaz de flexibilizar el uso de las técnicas, de combinar adecuadamente técnicas, definiciones y teoremas y hasta de crear ciertos objetos matemáticos nuevos. Pero, dado que la atomización de la enseñanza y la ausencia del trabajo técnico dificulta objetivamente el desarrollo de la creatividad matemática, se produce el fenómeno que hemos deno-

minado “paradoja de la creatividad” (para un análisis más detallado de estos fenómenos Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

7. Causas próximas de la desalgebrización de las matemáticas escolares

Para entender la relación entre la *alienación didáctica* de los alumnos respecto a las matemáticas obligatorias y la *naturaleza prealgebraica de las matemáticas escolares*, tendríamos que prever cuáles serían las consecuencias de una *hipotética algebrización* de la matemática escolar en el ámbito de Enseñanza Secundaria Obligatoria. Citaré tres consecuencias previsibles:

(1) Habría que transformar los objetivos a corto plazo (instantáneos) en *objetivos a largo plazo*, porque la nueva manera (algebraica) de hacer matemáticas no puede aprenderse en unas pocas sesiones ni, tampoco, en un crédito de 32 horas. La actividad matemática algebrizada es esencialmente incompatible con la atomización de la enseñanza.

(2) Las actividades matemáticas aisladas típicas de la matemática prealgebraica de la enseñanza primaria (actividades aritméticas, actividades geométricas, actividades de medida, actividades de contar, etc.) deberían dar paso a *una actividad matemática sostenida y prolongada* que precisaría de un *proceso de estudio muy estructurado y disciplinado*. En particular, sería imprescindible institucionalizar en la escuela un trabajo técnico tranquilo, prolongado y sistemático.

(3) Mientras que en las citadas actividades prealgebraicas prácticamente no aparecen ni la *interpretación*, ni la *justificación* ni, mucho menos, la *demostración*, una hipotética algebrización de la matemática escolar comportaría la necesidad de incluir de manera creciente estos aspectos de la actividad matemática. En particular deberían aparecer técnicas algebraicas para demostrar fenómenos (aritméticos, geométricos, de medida o combinatorios) y para justificar e interpretar las correspondientes técnicas prealgebraicas.

En resumen, la *hipotética algebrización* de la matemática escolar en el ámbito de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años) comportaría una *ruptura de tal envergadura con la actual organización matemática escolar* propia de la enseñanza primaria y con el correspondiente *contrato didáctico institucional* (Gascón, 1997 y Bolea, Bosch y Gascón, 1998a) que, según el diagnóstico psicopedagógico dominante, provocaría un aumento significativo de la salida de los alumnos del sistema. No es de extrañar, por tanto, que las matemáticas de la enseñanza secundaria obligatoria mantengan un carácter tan prealgebraico como las de la enseñanza primaria. El resultado es que el *instrumento algebraico continúa ausente en toda la enseñanza secundaria obligatoria*.

Hasta aquí sólo hemos apuntado una explicación parcial del carácter prealgebraico de la matemática escolar. Más que una descripción de las causas últimas de este fenómeno, hemos intentado mostrar sus “causas próximas”, visibles desde el propio sistema de enseñanza de las matemáticas: *la atomización del proceso de enseñanza y la ausencia del trabajo técnico* son las causas inmediatas del mantenimiento del carácter prealgebraico de la matemática escolar. Estos fenómenos constituye, asimismo, obstáculos objetivos y muy poderosos, que impiden la evolución de la organización matemática, dentro del nivel obligatorio, hacia una progresiva algebrización. Dichos fenómenos dependen, a su vez, de la *alienación didáctica de los alumnos* respecto a las matemáticas obligatorias y, sobre

todo, de las reacciones (de carácter psicopedagógico) del sistema para intentar frenar esta alienación.

La asunción de éstas posibles causas, como hipótesis de trabajo, permitirá diseñar una *ingeniería didáctica* capaz de ser experimentada. El análisis de dicha experimentación nos ayudará a empezar a responder otra de las cuestiones iniciales: ¿Hasta qué punto y de qué forma es posible modificar el carácter prealgebraico de las matemáticas escolares?

Creemos que de esta forma se complementa la conocida tesis de Yves Chevallard que parte de un estudio ecológico mucho más amplio en el que analiza el papel de “lo algebraico” en la cultura, en las prácticas sociales, en la noosfera y, por último, en el sistema de enseñanza. Su estudio sitúa en la *peyoración cultural del álgebra*, que proviene del *logocentrismo, la causa última de la “desalgebrización del currículo”* (Chevallard, 1989).

Para acabar, y una vez analizadas sus causas, comentaremos brevemente uno de los posibles efectos, o consecuencias previsibles, del fenómeno de la naturaleza prealgebraica de la matemática escolar.

Dado que la matemática escolar se mantiene prealgebraica a lo largo de toda la enseñanza obligatoria y dado que la algebrización es imprescindible para progresar en el estudio de las matemáticas*, cabe preguntarse: ¿Cómo y cuándo se produce la algebrización de la matemática escolar? ¿Cuáles son los rasgos característicos y las restricciones de dicho proceso de algebrización?

Avanzaremos una conjetura algo atrevida, aunque con cierta base empírica: las matemáticas escolares no se algebrizan progresivamente sino que aparecen bruscamente algebrizadas en aquel punto del currículo en el que la organización matemática escolar ya no puede resistir la presión de ciertas necesidades que requieren la utilización inevitable del instrumento algebraico. Esto sucede cuando las demostraciones y justificaciones algebraicas, la utilización sistemática de parámetros, la integración de diferentes campos de problemas prealgebraicos, el uso de modelos algebraicos, la integración del lenguaje algebraico y el lenguaje funcional, etc., son absolutamente insoslayables. Hablaremos así de una “*algebrización abrupta*” de la organización matemática escolar en el paso de la secundaria obligatoria a los estudios superiores.

¿Qué consecuencias acarrea esta algebrización abrupta que, además, es universal porque aparece casi simultáneamente en todas las antiguas disciplinas prealgebraicas (aritmética, probabilidad, geometría, combinatoria) y en las nuevas disciplinas que ya nacen plenamente algebrizadas (como el análisis, el álgebra abstracta, la topología, y la geometría diferencial, entre otras)?

Poble Nou, febrero de 1997

Referencia

- BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J., 1998a.** Le caractère problématique du processus d'algebrisation. Proportionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire, *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, ARDM, 153-159.
- BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J., 1998b.** The role of algebraization in the study of a mathematical organization, CERME-1, Osnabrueck, Germany, (pendiente de publicación).

* La cuestión de la necesidad de la algebrización progresiva de la matemática escolar, es un tema importante que no podemos tratar aquí. (Bolea, Bosch y Gascón, 1998).

- BOOTH, L., 1984.** *Algebra: Children's Strategies and Errors*, NFER-Nelson.
- BROUSSEAU, G., 1986.** Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7.2, 33-115.
- CHEVALLARD, Y., 1989.** *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Etude du cas de l'algèbre élémentaire*, Nota de síntesis disponible en el IREM d'Aix-Marseille.
- CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCON, J., 1997.** *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Ed. Horsori: Barcelona.
- FILLOY, E. y ROJANO, T., 1989.** Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics*, 9/2, 19-25.
- GASCON, J., 1989.** *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*, Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.
- GASCON, J., 1993.** Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), 295-332.
- GASCON, J., 1994.** *Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée»*, *Petit x*, 37, 43-63.
- GASCON, J., 1997.** Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad, *Suma*, 26, 11-21.
- GASCON, J., 1998.** Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7-34.
- KAPUT, J., 1996.** *¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra?*, UNO. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 9, 85-97.
- KATZ, V., 1995.** The development of algebra and algebra education. En C. Lacampagne, W. Blair y J. Kaput (Eds.): *The algebra initiative colloquium, Vol 1. Washington, DC: US Department of Education*.
- KIERAN, C. y FILLOY, E., 1989.** El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- RAMONET, I., 1996.** *Pensamiento único y nuevos amos del mundo*. En Chomsky, N. y Ramonet, I., *Cómo nos venden la moto*, Icaria: Barcelona.
- ROJANO, T., 1994.** La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza, *Enseñanza de las Ciencias*, 12(1), 45-56.
- VERGNAUD, G., 1988.** Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre, in Laborde, C. (ed.) *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*, 189-199, La Pensée Sauvage, Grenoble.
-