ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matématica
Vol. 11 No. 1 Abril 1999
pp. 5-24

Lo veo, pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual[1]

Fecha de recepción : Septiembre, 1998

Gianfranco Arrigo[2]
Dipartamento dell Istruzione e della Cultura, Republica e Cantone del Ticino, Suiza
Bruno D'Amore[3]
Universita degli Studi di Bologna, Departamento di Matematica, Italia. Piazza di Porta S. Donato 5
damore@dm.unibo.it

RESUMEN: *En este trabajo estudiamos los límites en la comprensión y aceptación que los estudiantes preuniversitarios muestran ante el uso del infinito actual, en particular, estudiamos las respuestas de los estudiantes en relación al famoso teorema de Georg Cantor. Por otra parte, intentamos analizar los motivos de esta falta de aceptación generalizada que presenta diferentes manifestaciones.*

ABSTRACT: *In this work, we study the limits of understanding and lack of acceptance shown by students from the upper-secondary school related to actual mathematical infinity; in particular, we explore their answers with respect to a celebrated theorem of G. Cantor. Moreover, we try to analyze the motives of this widespread non-acceptance which surfaces in diverse fashions.*

1. Origen histórico del título de nuestra investigación

Cuando nos acercamos a la historia de las matemáticas, una de las cuestiones que más sorprende, es el contenido de una célebre y extraordinaria carta de Georg Cantor (1845-1918) a Richard Dedekind (1831-1916), enviada desde Halle el 29 de junio de 1877. Dado que Dedekind se retrasaba (!) en dar respuesta a un problema que le había propuesto el 25 de junio, Cantor, después de sólo 4 días, y pidiendo disculpas por el proprio *celo*, propone con fuerza, en la carta del 29 de junio, una nueva interrogación, declarando tener *necesidad* de recibir el parecer de Dedekind.

Casi al inicio de esta nueva carta (en alemán), Cantor escribe (en francés) la famosa frase:

> *«Mientras que usted no lo apruebe, yo no puedo más que decir: lo veo pero no lo creo»*[4]

1 Trabajo realizado en el ámbito del contrato de investigación CNR n. 97.00875.CT01 y con contribución económica del Ministerio Italiano de la Universidad y de la Investigación Científica y Tecnológica.
2 Departamento de la Instrucción y de la Cultura, División Escuela, República y Cantón del Ticino, Bellinzona, Suiza.
3 *N.R.D., Núcleo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Bologna, Italia.*
4 Sobre este punto véase (Arrigo, D'Amore, 1993). Para conocer los textos completos de las cartas intercambiadas entre los dos formidables matemáticos alemanes, se puede ver (Noether, Cavaillès, 1937) y (Cavaillès, 1962).

Espontáneamente surge la siguiente pregunta, ¿cuál sería el argumento sobre el que antor solicitaba, decidido, una rápida respuesta de Dedekind? Nos lo dice el mismo Cantor 1 su carta del 25 de junio:

> *«Una variedad continua de p dimensiones, con p > 1, ¿se puede poner en relación unívoca con una variedad continua de una dimensión, de manera tal que a un punto de una corresponda uno y sólo un punto de la otra?»*

Debemos decir inmediatamente que, en aquella época, se entendía por "relación ıívoca" lo que hoy llamamos "correspondencia biunívoca". Para favorecer a un eventual ctor no experto en matemática, nos podemos concretar al siguiente caso, particular, pero ;ualmente significativo:

> ¿es posible hallar una correspondencia biunívoca entre los puntos de un cuadrado[5] y los puntos de un segmento[6]?

Se puede intuir la importancia de la pregunta a partir del siguiente comentario del ıismo Cantor:

> *«La mayor parte de aquéllos a los que les he puesto esta pregunta se han sorprendido mucho del hecho mismo de que yo la planteara, ya que es evidente que, para la determinación de un punto sobre una extensión de p dimensiones, se necesitan siempre p coordenadas independientes»*

Después, Cantor confesó que había intentado demostrar este hecho, suponiendo ıe era verdadero, pero sólo porque ya no estaba satisfecho de la supuesta y tan difundida *ıidencia*! Confiesa por lo tanto haber formado parte *siempre* de aquéllos que no ponían en ıda tal hecho; *siempre*, hasta que demostró que las cosas no eran así...

La demostración hallada por Cantor es de una simplicidad genial; para verla, basta ɔnsultar un buen libro de texto de Análisis de nivel universitario, por ejemplo Bourbaki 970), pag. 47-49. Nosotros aquí nos inspiramos en una célebre vulgarización de la demosación de Cantor que se halla en Courant y Robbins (1941) relativa sólo al ejemplo visto ·riba, propuesto a nuestro hipotético lector no matemático[7].

Pongamos el cuadrado en un sistema de ejes cartesianos ortogonales de origen O, ɜ manera tal que dos lados consecutivos se "apoyen" sobre los ejes (obviamente uno de ıs vértices coincide entonces con el origen). Considerando el lado del cuadrado como ıidad de medida, se tiene inmediatamente que cada punto P interno a la superficie cuadraı tiene coordenadas reales x_P y y_P del tipo $0 < x_P < 1$, $0 < y_P < 1$, por lo tanto, explícitamente: $_P = 0.a_1a_2....a_n...$, y $y_P = 0.b_1b_2...b_n...$. A cada *pareja ordenada de números reales* (x_P, y_P) ıacemos corresponder *el número real* x_P definido de la siguiente manera: $x_{P'} =$ $a_1b_1a_2b_2....a_nb_n...$, obtenido anteponiendo 0 y el punto decimal, y alternando después las fras decimales singulares de cada coordenada. Se puede fácilmente constatar que $0 < x_{P'} <$ y como tal, $x_{P'}$ se define de manera unívoca a partir de x_P y y_P; como $x_{P'}$ se puede considerar ɔmo abscisa de un punto P' en el eje X [P'($x_{P'}$,0)], se puede pensar, por lo tanto P', como *el* ɔrrespondiente de P en la correspondencia definida.

ʾor "cuadrado" entendemos de ahora en adelante una superficie plana con forma cuadrada *abierta*, es cir sin borde.

Ɔe ahora en adelante, hablaremos de segmento *abierto*, es decir sin extremos.

:n realidad, en lo que sigue de nuestro trabajo, es sólo a este ejemplo al que haremos referencia.

Viceversa: se puede partir de P' y de su abscisa y, con el método inverso de distribución de las cifras, llegar unívocamente a P.

Por lo tanto, hemos probado este teorema de Cantor, al menos en el caso en el que la dimensión p de la variedad vale 2: a los puntos internos del cuadrado unitario corresponden de manera biunívoca los puntos internos del segmento unitario.

Dado que esta demostración se basa en la escritura decimal de los números, es obvio que se debe dar por descontado una *unicidad* de tal escritura como, por otra parte, objetó el mismo Dedekind a Cantor en una carta posterior (no obstante aceptando la demostración y admitiendo que su objeción no la descalificaba en lo más mínimo). Se trata por lo tanto de eliminar por convención, antes del enunciado del teorema, la única ambigüedad posible, que se halla sólo en el caso en el que aparece un 9 periódico en la expansión decimal. Por ejemplo, es bien conocido que $0.39 = 0.36$: basta entonces *prohibir* las escrituras del primer tipo y, en el momento en que aparezca, se sustituye con escrituras del segundo tipo[9].

Nuestra investigación tiene motivaciones puramente didácticas y los párrafos precedentes tienen sólo el objetivo de situarla en el ámbito histórico.

Quisimos recordar lo anterior, sólo para justificar nuestro título: «Lo veo, pero no lo creo»; la célebre frase de Cantor, que vuelve tan humana y fatigosa toda la historia de esta demostración; para nosotros será emblemática de aquello que podría decir también un joven estudiante de la escuela secundaria superior, que tuviera que ver con la demostración tratada por Courant y Robbins (1941), e ilustrada por nosotros.

Pero todo esto nos lleva también a poner en evidencia, aunque sea brevemente, los obstáculos que se han tenido en el desarrollo histórico de este difícil y controvertido argumento, hasta la demostración de Cantor que, por cuanto genial y simple, no fue acogida de manera inmediata. Aunque ya no lo diremos más de manera explícita, es obvio que cuando hablemos de obstáculos epistemológicos al respecto, la misma historia rápidamente delineada aquí debe considerarse como un apoyo poderoso a su evidencia.

2. Descripción del cuadro teórico de referencia

En lo que se refiere a la investigación sobre la problemática de la enseñanza y del aprendizaje del infinito, uno de nosotros tuvo el encargo, en ocasión del VIII ICME (Sevilla 1996) de organizar del Grupo de Trabajo XIV, cuyo tema estaba precisamente dedicado a este aspecto. En aquella ocasión, se redactó una bibliografía de más de 300 títulos, con la contribución de muchos investigadores de todo el mundo; tal bibliografía se escribió en italiano, español e inglés y se puso a consideración (precisamente en Sevilla) de los participantes en el GT XIV y se redactó también un panorama razonado de tales investigaciones (D'Amore, 1996).

Partiendo de estos antecedentes, delineamos brevemente el cuadro teórico de referencia, en el que nos queremos insertar.

2.1. Entre las tantas investigaciones presentes sobre el panorama mundial, muchas se dedican a la falta de aceptación, por parte del estudiante, de las diversas cardinalidades transfinitas [entre los muchos ejemplos, véanse los trabajos de Tsamir y Tirosh (1994), de Waldegg (1993), de Fischbein, Jehiam y Cohen (1994, 1995), para tener una primera idea]. Normalmente, para los estudiantes, la cardinalidad de Z es, en un primer momento, superior

[8] En realidad, existen otros detalles que hay que cuidar, así como precauciones que se deben tomar pero, dado que nuestro objetivo aquí no es el de entrar en cuestiones finas sobre este argumento (por lo demás bien conocidas) si no exponer una de nuestras investigaciones, eludimos la cuestión. Se puede ver al respecto Carruccio (1964).

la de N (hay quien incluso dice que es el *doble*). Pero, una vez que se acepta la demostraión de que estos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, muchos estudiantes creen ue pueden concluir que esto depende del hecho de que ambos son conjuntos infinitos y ue por lo tanto «todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad»: *infinita*. Por o que, por ejemplo, N, Z, Q y R deberían simplemente de tener la misma cardinalidad.

Esta aceptación intuitiva (que representa una *misconception* bastante difundida) la lamaremos de ahora en adelante: ***aplastamiento*** de los cardinales transfinitos.

2.2. Ponemos en evidencia otra convicción estudiada muchas veces en las investigaciones; por ejemplo, en Tall (1980)[9] se muestra cómo los procesos mentales y las conviciones intuitivas llevan a los estudiantes a pensar que en un segmento *largo* existan más untos que en un segmento más *corto*[10]

Esta aceptación intuitiva (que representa una *misconception* bastante difundida) la lamaremos de ahora en adelante: ***dependencia*** de los cardinales transfinitos de hechos elativos a medidas.

2.3. Las aceptaciones intuitivas (*misconceptions*) de *aplastamiento* y de *dependencia* se hallan en contradicción entre ellas; pero parece que los estudiantes no se sienten interesados por volver coherentes sus creencias, como muestran, en modos y ámbitos diferentes, Stavy y Berkovitz (1980), Hart (1981), Schoenfeld (1985), Tirosh (1990), Tsamir y Tirosh (1997) y D'Amore y Martini (1997, 1998).

2.4. Duval (1983) analiza la dificultad que tienen los estudiantes para aceptar la correspondencia biunívoca llamada "de Galileo" entre N y el (su) subconjunto de los números cuadrados. Él la explica (incluso) gracias a un obstáculo que llama de ***deslizamiento***: en su caso se trata del deslizamiento del verbo *Tener* al verbo *Ser* en el curso de la demostración (es decir: en el curso de la demostración, se pasa de propiedades de ciertos números recurriendo al verbo *Tener*, a la descripción de una peculiaridad de estos mismos números expresada mediante el verbo *Ser*). Pero nosotros podemos tomar esto como prototipo y hablar de *deslizamiento* más en general, en el curso de una demostración: nuestra acepción de *deslizamiento* (un poco más amplia que la de Duval) se tiene cuando se está hablando de alguna cosa (o en un cierto modo, o en el ámbito de un cierto lenguaje) y, de improviso, nos hallamos hablando de otra cosa (o en otro modo o en otro lenguaje). Es evidente que este pasaje del contexto geométrico al aritmético y viceversa se inserta en el "*jeu de cadres*" de Douady (1984-86). Característica de nuestro caso específico es el doble pasaje y el hecho de que es relativo a una demostración. Se debe también hacer referencia a la dificultad de parte de los estudiantes en el pasaje entre diversos sistemas de representación (Duval, 1995).

2.5. El clásico debate filosófico de origen aristotélico sobre el infinito en sentido *actual* y en sentido *potencial* (Arrigo, D'Amore, 1993) ha inspirado diferentes investigaciones, por ejemplo las de Moreno y Waldegg (1991), de Tsamir y Tirosh (1992), de Shama y Movshovitz Hadar (1994) y de Bagni (1998). Se han hallado, en verdad, resultados a veces contradictorios; pero aparentemente está probado que la evolución de la concepción *actual* del infinito matemático es más lenta y se da en modo contradictorio a lo largo del curso del curriculum escolar y gracias a un proceso de maduración y sistematización cognitiva de los aprendizajes. Ahora, la demostración descrita por nosotros en el apartado 1 es claramente de tipo *actual* por el modo mismo en el que se manipulan algunos conjuntos infinitos (los puntos del cuadrado y del segmento, las cifras después del punto). Este hecho podría constituir uno de los puntos de dificultad para la aceptación de la demostración misma.

[Naturalmente tuvimos en cuenta los numerosos estudios sobre la demostración matemática en clase. Pero, en realidad, aquí no se trataba de "dar una demostración" sino de "seguir una demostración dada por otros" y después discutir el grado de aceptación para estudiar los motivos de un eventual rechazo; nos parece que la especificidad de la demostración y el hecho de que ella involucre al infinito cobran mayor relevancia con respecto a la actividad del demostrar en si].

3. Descripción de los problemas

Tenemos ahora la posibilidad de describir los problemas que nos llevaron a hacer la presente investigación.

P.1. En la demostración ilustrada en el apartado 1 parecen intervenir sólo hechos elementales: los primeros elementos de geometría analítica, la escritura decimal y poco más. Es importante notar que todas las habilidades matemáticas que pueden considerarse como prerrequisito para la demostración del teorema de Cantor habían sido ya adquiridas por parte de los estudiantes a los que se les aplicó la prueba. Es además una costumbre regular de los estudiantes a los que se les aplicó la prueba el dar demostraciones; es más, hay una cierta insistencia en esta actividad. Sin embargo no es un hábito normal hacer este tipo de análisis (y de meta—análisis) en nuestras escuelas secundarias superiores y, por lo tanto, para los estudiantes era la primera experiencia de este tipo. ¿Esto basta para garantizar la comprensión por parte de los estudiantes del tercero y del penúltimo año de la escuela superior (edad: 16-18 años) que hayan ya adquirido esas nociones? Si la respuesta fuese negativa, sería entonces como decir que las habilidades preliminares mencionadas son necesarias, pero no suficientes para la comprensión del teorema.

Algunas pruebas previas efectuadas esporádicamente parecían proporcionar una respuesta *negativa* a esta pregunta. Pero, obviamente, para poder dar una respuesta documentada, se necesitaba hacer la prueba con criterios controlados y siguiendo un aparato experimental sólido.

P.2. En el caso de que hubiésemos encontrado una respuesta negativa a **P.1.**, ¿cuál podría haber sido la explicación?

¿Tendríamos que haber recurrido exclusivamente a los obstáculos epistemológicos, evidentemente presentes en este campo y explícitamente traídos a colación por muchos de los autores citados precedentemente [y en especial modo, por ejemplo, de Fischbein, Jehiam y Cohen (1994)]? O ¿habríamos descubierto, entre las causas de la falta de comprensión, también cláusulas generales y específicas del contrato didáctico?

P.3. Y, finalmente, ¿cuáles de los aspectos señalados en **2.1.** - **2.5.** entran en modo significativo en la cuestión?

4. Hipótesis de la investigación

Una primera distinción que se impuso inmediatamente en las pruebas preliminares efectuadas esporádicamente es la que tiene que ver con el hecho de que algunos estudiantes declaran de no aceptar la demostración, mientras que otros si la aceptan. La primera cosa por estudiar es intentar descubrir qué causas impulsan a los primeros estudiantes al rechazo;

[9] Pero sobre este argumento la literatura es vasta en todo el panorama internacional. Véase (D'Amore, 1996).

[10] Esta creencia de carácter *monádico* (y por lo tanto de factura *pitagórica*), no obstante variados pero esporádicos antecedentes, fue definitivamente descubierta solo en el siglo XIX, es decir, mas bien recientemente. Véase (Arrigo, D'Amore, 1993). Ella, como sea, forma parte de la mentalidad común, más allá del mundo matemático. Se halla incluso entre los profesores.

pero nos parece no trivial, e incluso más interesante, analizar con detalle las respuestas de los estudiantes que declaran de aceptar la demostración, para ver cuales son los *verdaderos* motivos de tal aceptación.

I.1. Según nosotros, se podría descubrir que algunos estudiantes aceptan la demostración a causa del *aplastamiento*, descrito en **2.1.** o la rechazan en base a reelaboraciones de la *dependencia* vista en **2.2.**

I.2. Según nosotros, no existen (o casi no existen) estudiantes en grado de notar la contradicción entre el *aplastamiento* (véase **2.1.**) y la *dependencia* (véase **2.2.**), confirmando así los resultados ya señalados en **2.3.**

I.3. Según nosotros, hay un punto muy delicado en el cual se observa, más o menos conscientemente por parte del estudiante, un tipo de *deslizamiento*, según lo anticipado y descrito en **2.4.** Se trata del momento en el cual, en el curso de la demostración vista en el apartado 1, se pasa de una cuestión relativa a puntos, cuadrado, segmento, plano cartesiano (objetos y lenguaje de la geometría), a otra cuestión relativa, en cambio, al reordenamiento de cifras después del punto decimal (objetos y lenguaje de la aritmética) y se pretende, como consecuencia, hacer de nuevo afirmaciones sobre cuadrados y segmentos. Se esconde aquí un *deslizamiento*: se está hablando de entes geométricos e, de improviso, nos hallamos hablando de cifras decimales; hechas algunas consideraciones sobre el orden de las cifras (aritmética), se traen conclusiones de carácter geométrico. Según nosotros, aquí se esconde un motivo de falta de aceptación de la demostración, pero por lo general se da de manera inconsciente y, por lo tanto, quizás, de manera confusa

I.4. Según nosotros, tratar los conjuntos infinitos de puntos y de cifras en modo *actual* resulta normalmente fuera de la capacidad cognitiva de los estudiantes del nivel mencionado.

I.5. Entre los estudiantes que declaran aceptar la demostración, según nosotros, muchos lo hacen sólo por una cláusula de tipo general del contrato didáctico, aquella que podríamos llamar "confianza en el profesor ": si el profesor da una demostración, es sin duda válida y debe aceptarse. Sobre esta cláusula, véase Perret-Clermont, Schubauer-Leoni y Trognon (1992).

I.6. Según nosotros, existirá un contraste explícito (sobre todo entre los estudiantes más intuitivos pero menos hábiles en el lenguaje formal) entre la aparente imposibilidad de la tesis y su demostración; habrán estudiantes que creerán haber presenciado una especie de *truco*; lo que podría entonces dar salida a consideraciones profundas sobre la imagen de las matemáticas, del profesor de matemáticas y de si mismo al hacer matemáticas, consideraciones del tipo: el profesor puede demostrar todo, se trata de un truco, o de otra cosa. Dado que la frase limitante puesta entre paréntesis al inicio de este párrafo I.6. contiene variables no fácilmente manejables desde un punto de vista experimental, nos limitaremos a poner esta hipótesis de investigación más en general, sin demasiadas condiciones. (Pero, sobre esto, se necesitaría indagar ulteriormente, por ejemplo para descubrir si este eventual comportamiento de los estudiantes está ligado a la demostración que elegimos, o más en general al infinito matemático, o aún más en general a las matemáticas).

5. Metodología

5.1. Población escolar sobre la que se llevó a cabo la prueba

Se trabajó con un muestra absolutamente casual de 16 grupos de II, III y IV superior (edad variable entre los 15 y los 18 años) con un total de 287 estudiantes, 51 de los cuales (tres grupos) eran del Cantón del Ticino (Suiza) y el resto de Bologna (Italia). Ninguno de estos alumnos había tenido precedentemente una enseñanza del Análisis; ninguno de ellos había jamás expresamente estudiado o discutido cuestiones concernientes al infinito matemático; por lo tanto, ninguno de ellos había jamás afrontado la diferencia entre infinito actual y potencial; estos estudiantes no habían desarrollado nada específico sobre los temas tratados en esta investigación (en particular: no habían repasado las nociones que examinaremos más adelante y que son preliminares a los temas en cuestión). No obstante que existen diferencias objetivas entre las dos realidades geográficas (programas diferentes, población escolar más seleccionada en Suiza, modos de trabajar diferentes) no hallamos comportamientos suficientemente diferentes como para justificar una elaboración separada de los resultados.

La prueba fue conducida por el profesor titular, quien siguió las indicaciones que le fueron entregadas junto con un videocasete (véase **5.2.**) y se le proporcionaron cuestionarios para los alumnos (que se ilustrarán más adelante en **6.2.** y **6.3.** dando simultáneamente los porcentajes de respuestas y los primeros comentarios, para evitar repeticiones).

Un solo grupo de 23 alumnos tuvo la posibilidad de reexaminar sus propios cuestionarios a la distancia de un año, después de haber seguido una enseñanza regular del Análisis, como veremos en **8.3.**

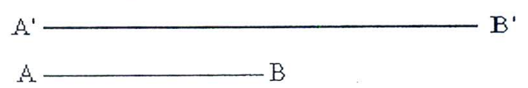
5.2. Contenido del vídeo

Para llegar a proponer la demostración señalada, procedimos por etapas. Nuestra propuesta se dividió en tres partes, la tercera de las cuales era la demostración de Cantor y las dos precedentes, una especie de etapas intermedias (cuyos resultados aprovechamos para dar algunas indicaciones, como veremos más adelante). En el vídeo, alternándose, los dos autores de la presente investigación daban las demostraciones de las tres afirmaciones que se verán más adelante y de las cuales las figuras 1-3 constituyen el momento culminante. El vídeo, con duración de 27 minutos en total, se halla disponible para quien desee examinarlo.

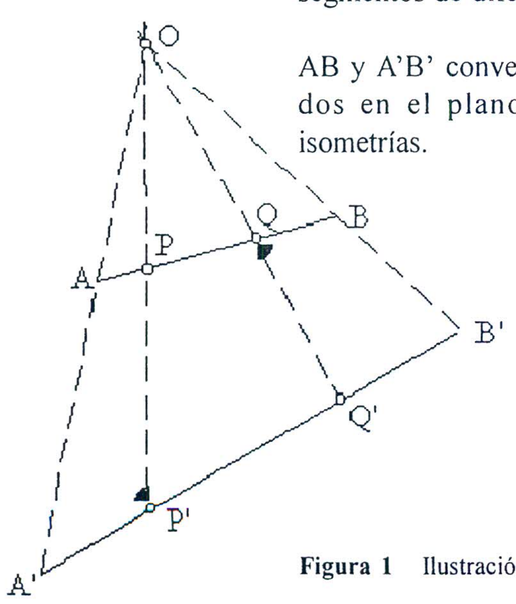
El vídeo se dividió en tres partes:

1) Segmentito - segmentote

Presentación de la problemática y demostración del hecho de que en el plano puntual dos segmentos de diferente longitud son equipotentes (Figura 1).



AB y A'B' convenientemente trasladados en el plano puntual mediante isometrías.



O es el punto de intersección de la rectas AA' y BB'. Desde O se proyectan los puntos del segmento AB sobre el segmento A'B'. La proyección central es una aplicación biunívoca desde AB hacia A'B' y por lo tanto los dos segmentos AB y A'B' son equipotentes.

Figura 1 Ilustración de la demostración contenida en el vídeo

2) Formas decimales periódicas

Presentación y demostración del hecho de que $0.3\overline{9} = 0.4$ (véase la Figura 2).
La investigación de la fracción generatriz de un número decimal periódico formaba parte de los conocimientos en posesión de todos los estudiantes sujetos a la prueba.

$$x = 0,3\overline{9}$$

$$\left.\begin{array}{r} 100 \cdot x = 39,\overline{9} \\ 10 \cdot x = 3,\overline{9} \end{array}\right\} \quad 90 \cdot x = 36 \qquad x = 0,4$$

Figura 2 Demostración del hecho de que $0.3\overline{9} = 0.4$

3) Teorema de Cantor

Presentación y demostración del hecho de que en el plano puntual un cuadrado es equipotente a uno de sus lados (véase la Figura 3).

Las nociones necesarias de geometría analítica del plano eran parte de los conocimientos en posesión de todos los estudiantes sujetos a la prueba.

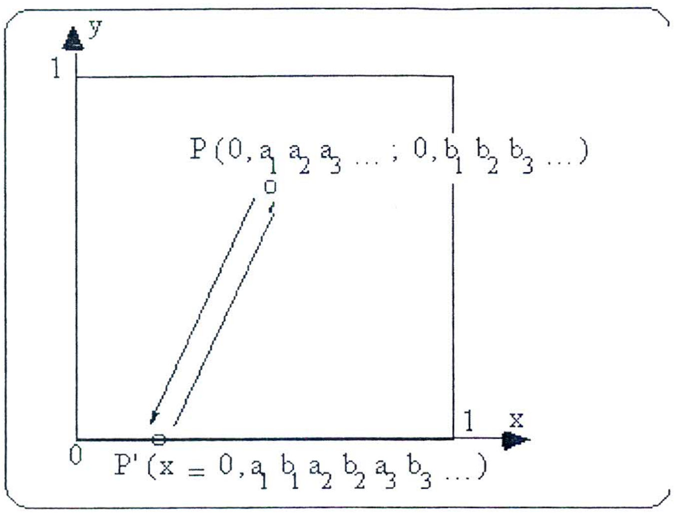


Figura 3 Demostración del caso particular citado arriba de un teorema de Cantor

5.3. Método de realización de la prueba

Cada profesor exhibió la primera parte del vídeo, después dejó unos 10-15 minutos a los estudiantes para responder por escrito a las preguntas de la primera parte del cuestionario (véase 6.2.). Después repitió la misma operación para las otras dos partes, una cada vez. Los alumnos trabajaron individualmente y de manera anónima.

Decidimos utilizar un vídeo para garantizar la misma información a todos los estudiantes involucrados; lecciones de profesores diferentes habrían podido dar informaciones diferentes de un grupo a otro. El vídeo fue realizado por los autores de la investigación con el apoyo técnico del Centro Didáctico Cantonal de Bellinzona (Suiza). Después de la entrega de los test, en muchos grupos se llevaron a cabo entrevistas sobre el objeto de la investigación.

Cada grupo destinó para la operación entera un lapso de tiempo variable entre hora y hora y media.

Como ya dijimos, algunos estudiantes tuvieron la ocasión de reelaborar sus propias respuestas después he haber seguido un año de enseñanza del Análisis. Estos estudiantes recibieron sus propios cuestionarios (reconocidos por ellos mismos) y tuvieron la posibilidad de confirmar o de modificar las respuestas dadas la primera vez (véase 8.3.).

6. Resultados del test y primeros comentarios

6.1. Antecedentes

La revisión de los cuestionarios y el sucesivo registro y elaboración lógico-numérico en la computadora fue realizada enteramente por los autores de la investigación. Se utilizó únicamente una hoja electrónica.

En seguida se reportan los resultados más significativos. Se recuerda que el número de los alumnos sujetos a la prueba fue de 287.

6.2. Contenido de los test y respuestas a las preguntas cerradas

1) "Segmentito - segmentote"

La demostración comprende dos fases. En la primera, se disponen los dos segmentos en el plano en modo tal que se pueda determinar un oportuno centro de proyección. En la segunda, se hace la proyección de los puntos de un segmento sobre el otro. A los estudiantes se les propone la siguiente pregunta:

¿En qué medida cada una de estas dos fases te convenció?

(Pon una sola cruz por cada fase y justifica brevemente tu respuesta).

	para nada	no tanto	bastante	del todo
FASE 1	3.1%	6.6%	41.5%	48.8%
FASE 2	4.5%	7.3%	28.9%	57.8%

Algunos estudiantes no ponen ninguna cruz en lo que concierne a la Fase 2, lo que explica por qué la suma de los porcentajes es inferior a 100. Este hecho sucede también en pruebas sucesivas, por lo que no lo repetiremos. Solo el 10-12% afirma no estar convencido de la demostración. Pareciera por lo tanto que una argumentación semejante se halla dentro de las capacidades de comprensión de la gran mayoría de estos alumnos.

2) "Formas decimales periódicas"

Te acabamos de demostrar que 0.399999.... = 0.4

A1. Este hecho te convence...

(Pon una sola cruz por cada fase y justifica brevemente tu respuesta).

para nada	no tanto	bastante	del todo
17.4%	**28.3%**	**24.7%**	**29.6%**

A2. Las siguientes igualdades te convencen?

(Pon una sola cruz por cada fase y justifica brevemente tu respuesta).

para nada	no tanto	bastante	del todo
3.8%	1.7%	3.1%	90.9%
16.7%	17.8%	13.6%	51.2%
18.5%	26.5%	25.1%	29.3%
17.4%	24.4%	23.0%	34.1%

En cierta medida, estos porcentajes son inesperados, sobre todo los relativos a las últimas tres preguntas. Es el primer indicio de un resultado que se profundizará más adelante y que nos hace decir cómo no siempre y no todos los conocimientos matemáticos (incluso algo considerado como elemental) se estructuran correcta y sólidamente y, por consecuencia, se conservan intactos por mucho tiempo en las mentes de los estudiantes. Desde este punto de vista, sorprende mayormente el tercer resultado: casi la mitad de los alumnos de la muestra encuentra problemas para reconocer que es igual a 1/3.

3) "Teorema de Cantor"

¿Cuál es (cuáles son), según tú, el punto crucial (los puntos cruciales) de la demostración que acabas de ver?

(Pon una sola cruz por cada fase y justifica brevemente tu respuesta).

(1) que las coordenadas de los puntos del cuadrado sean del tipo (0.a1a2...an...,0.b1b2...bn...): 12.9%

(2) que de dos coordenadas (abscisa,ordenada) se pase a una sola (abscisa): 44.6%

(3) que el pasaje de dos coordenadas a una se haya hecho mediante una manipulación de las cifras decimales: 38.3%

(2b) responde SOLO si pusiste una cruz en (2): ¿te creó particulares dificultades el pasaje inverso, es decir de una sola coordenada a dos?: 6.3%

Se ve inmediatamente cómo el punto crucial de la demostración del teorema de Cantor es el tratamiento de las coordenadas que implica una manipulación de las cifras decimales. Es seguramente una operación nueva hecha en una situación jamás vista antes por el estudiante. Se trata de un escenario extremadamente inestable que hará decir a gran parte de los estudiantes "que no entendieron bien" o que "sospechan que existe un truco" y, a unos pocos... valientes, "que no aceptan la demostración" y, por lo tanto -mediante una desenvuelta aplicación del criterio lógico del tercero excluído-, afirman que el teorema es falso.

Como muchas veces sucede en las pruebas de este tipo, existen preguntas que pueden influir en las respuestas a otras preguntas. Por ejemplo, la pregunta 2b puede haber influido en los resultados, dado que pone en evidencia una de las opciones posibles de una pregunta precedente.

Preferimos no poner una pregunta genérica del tipo: «¿Te convenció la demostración?», para evitar respuestas demasiado genéricas. Preferimos "eludir" la problemática de la aceptación o del rechazo, a través del análisis de la aceptación y rechazo de pasajes particulares. Lo que explica por qué a veces los estudiantes pueden poner más de una cruz sobre el cuestionario. Naturalmente, eso implica riesgos de interpretación. Por ejemplo, los sucesivos porcentajes sirven sólo para tener una idea de densidad creciente de las dificultades encontradas por los estudiantes.

De hecho, a través de las entrevistas individuales, se logra completar las indicaciones recibidas por escrito, profundizando en las motivaciones y en el significado real de ellas.

6.3. Contenido de los test y respuestas a las preguntas abiertas

Cada una de las tres partes del cuestionario concluye con una pregunta abierta:
«Con tus palabras, ¿Cómo explicarías la demostración, a un alumno más joven que tú?».[11]

Una estimulación de este tipo, se presta obviamente a reacciones muy distintas. Para los fines de nuestra investigación clasificamos las respuestas de los estudiantes de la siguiente manera:

vídeo	el estudiante declara plena confianza de que lo que se le presentó en el vídeo, es correcto sin dar ninguna justificación
rico	el estudiante reconstruye completa o parcialmente la demostración vista, interpretándola personalmente, o da su versión en parte o totalmente diferente pero, aunque no siempre, completa, correcta e indicadora de una apropiación del conocimiento
equivocado	el estudiante no está convencido de la pertinencia de la demostración y se refugia en su esfera de conocimiento adquirido previamente, en la que el teorema puede aparecer incluso falso
no	el estudiante muestra de no haber entendido en general

Además, sólo para las partes 1 y 3:

aplastados	"aplastamiento", es decir el estudiante considera equipotentes entre sí a todos los conjuntos infinitos y, no obstante muestre de haber entendido la demostración presentada, termina por concluir aduciendo esta justificación (véase también 2.1.)
depende "	dependencia", es decir el estudiante está convencido en principio que el segmento más largo contiene más puntos que el otro y, con mayor razón, que un cuadrado contenga más puntos de los que puede contener uno de sus lados; todo esto incluso en los casos en los que declara de haber entendido la demostración dada en el vídeo (véase también 2.2.).

[11] La introducción de esta prueba se hace en referencia a D'Amore y Sandri

Al presentar los resultados, distinguimos los teoremas "geométricos" 1 y 3 del "aritmético" 2 (que pusimos como antecedente), pero nada impide leer las dos tablas juntas.

Formas decimales periódicas	
vídeo	10.8%
rico	35.9%
equivocado	19.5%
no	33.8%
aplastados	0.0%
depende	0.0%

El resultado más sobresaliente está constituido, según nosotros, por el casi 20% de los estudiantes que creen firmemente que .
Este hecho interesa por dos motivos:

- los estudiantes conocen ya desde la escuela media este argumento y, por lo tanto, debería de hallarse bien consolidado en su competencia cognitiva;

- muchos de ellos entendieron bien el modo con el que se llega a la igualdad; sin embargo, en el momento de concluir, en su mente regresa la imagen según la cual sería solo una aproximación de 0.4.

Entre los estudiantes que aceptan la demostración, son mucho más numerosos (77%) los que la reconstruyen (más o menos) reinterpretándola.
Veamos ahora los resultados relativos a los teoremas de tipo geométrico:

Segmentito-segmentote		**Teorema de Cantor**	
vídeo	15.7%	**vídeo**	13.8%
rico	46.3%	**rico**	19.2%
equivocado	6.2%	**equivocado**	5.8%
no	20.6%	**no**	57.7%
aplastados	9.8%	**aplastados**	2.8%
depende	1.4%	**depende**	0.7%

Si sumamos los porcentajes de las categorías "equivocado", "no", "aplastados" y "depende", obtenemos en "segmentito-segmentote" un porcentaje del 38% y en el "teorema de Cantor" incluso un 67%, que representan partes consistentes de estudiantes que no lograron captar ningún elemento positivo de la visión del vídeo. Ellos, en consecuencia, o bien declararon que no entendieron ni siquiera el sentido de lo que se les presentó, o bien se quedaron callados, o cayeron en el aplastamiento, o reaccionaron perorando la tesis opuesta (alguien se refugió en la dependencia).

[Las categorías "aplastados" y "depende" parecen no tener un papel importante en este caso específico, contrario a lo que se encuentra en la literatura al respecto. De hecho, en las entrevistas individuales se pone en evidencia que muchas veces el estudiante responde por escrito a los test en modo rápido, sin entrar demasiado en los detalles; por ejemplo, no siempre especifica en modo completo el verdadero motivo de un rechazo. Pero, verbalmente, con preguntas oportunas, se logra captar mejor este motivo. Mostraremos con muchos detalles los resultados de las entrevistas individuales en 7.].

Como sea, subrayamos que, al menos para esta categoría, la demostración no sirvió para abrir nuevas vías para el aprendizaje. En general estos estudiantes expresaron una convicción previa, en parte sostenida por imágenes mentales coherentes con sí mismas, pero no idóneas para afrontar la nueva situación cognitiva. Por otra parte, sabemos que es compleja y rara la aceptación del continuo pasaje entre competencia e ignorancia en los procesos de aprendizaje, dada la tendencia que se tiene a estabilizarse en las nuevas habilidades logradas.

Subrayamos que muchas de nuestras observaciones precedentes se basan no sólo en los resultados estadísticos de los cuestionarios, y de los cuales hemos hablados hasta ahora, si no también en los comentarios escritos (muchas veces, ricos y largos) respecto de tales cuestionarios.

He aquí un protocolo que ofrece un ejemplo que se refiere a "segmentito-segmentote" en el que el estudiante razona sobre la base de imágenes mentales coherentes con sí mismas, pero no idóneas para la nueva situación (es decir, se basa en la recta vista como un collar perlas llamadas puntos: "el modelo del collar"):

> *Utilizaría un teorema [sic!] aprendido en las escuelas elementales, es decir que una línea es un conjunto infinito de puntos, y por lo tanto si al primer punto de un segmento le corresponde otro al primer punto del otro segmento; y en conclusión al infinitésimo punto del primer segmento le corresponde uno en el segundo segmento.*

Entre los estudiantes que aceptan la demostración, en "segmentito-segmentote", encontramos (análogamente a lo hallado para las "formas periódicas") un neto mejoramiento (75%) de aquellos que reinterpretan la demostración respecto a los que la aceptan sin dar ninguna justificación. Por el contrario, en el "teorema de Cantor" los porcentajes de estas dos categorías se hallan muy cercanos al 50%: es otro índice de la notable dificultad de esta demostración.

7. Discusión de los resultados y verificación de las hipótesis

7.1. Introducción

Los porcentajes de alumnos que no entendieron las demostraciones (suma de las categorías "equivocado", "no", "aplastados", "depende") son por lo tanto los siguientes:

Segmentito-segmentote	Formas periódicas	Teorema de Cantor
38%	53.3%	67%

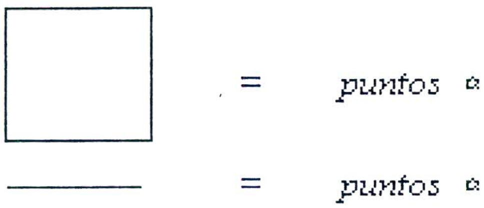
Esto responde de manera elocuente al problema P.1. (véase 3.) dando razón a nuestras perplejidades iniciales que ponían en fuerte duda la comprensión de la demostración del teorema de Cantor por parte de los estudiantes preuniversitarios que se hallan en posesión de las nociones preliminares que resultan ser por lo tanto necesarias pero no suficientes. No sólo, pero, agregamos, los resultados muestran que también las otras dos demostraciones (mucho más elementales) crean graves problemas de comprensión.

Madura en nosotros cada vez más la convicción de que los obstáculos que impiden este tipo de comprensión no son sólo de naturaleza didáctica si no también de naturaleza epistemológica.

Desde este punto de vista, los fenómenos (contradictorios) del aplastamiento y de la dependencia (mucho menos frecuente en nuestra muestra) serían solo manifestaciones visibles de tales obstáculos.

He aquí un protocolo que constituye un claro y explícito ejemplo de aplastamiento (se redactó después de la demostración del teorema de Cantor):

Un área está formada por infinitos puntos;
un segmento está formado por infinitos puntos;
un área contiene los mismos puntos que un segmento



7.2. El obstáculo en "Segmentito-segmentote"

Quien rechaza la demostración lo hace principalmente porque ve el segmento según el modelo del "collar". Es evidente que una concepción semejante lleva a la convicción de que la cardinalidad de las "perlas-puntos" depende de la longitud del "sostén-segmento": es decir el estudiante imagina que vale la implicación: mayor longitud ® mayor cardinalidad de los puntos. El obstáculo epistemológico [entendido en el sentido clásico a la Bachelard (1938) y Brousseau (1983)] es un conocimiento estable y evidente que funciona bien en ámbitos precedentes, que constituye un modelo fuerte, pero que crea problemas y errores en el momento en el que se busca adaptarlo a nuevos conocimientos, a situaciones nuevas. Para poder hablar de "obstáculos epistemológicos" se necesita tener, en la historia de las manifestaciones análogas, aquéllas verificadas en los estudiantes: en este caso, ciertamente, no faltan! Para superar el obstáculo, se necesitan conocimientos nuevos. En este caso, consideramos que ellos se puedan buscar en el concepto de densidad (que tiene que ver con el infinito actual: el segmento puntual es denso porque entre dos de sus puntos diferentes elegidos de manera arbitraria existe un número infinito de puntos). Es difícil imaginar que un estudiante que no haya comenzado un estudio del Análisis pueda tener una imagen de la topología de los puntos de la recta (y mucho menos de su densidad) que le permita entender perfectamente este hecho. Por otra parte, este punto de la investigación simplemente confirma, con ejemplos diferentes, los resultados de Romero y Chesa y Azcarate Giménez (1994).

Pero entonces, ¿porqué el 62% de los estudiantes declara aceptar el teorema y declara haber entendido la demostración?

Los estudiantes, que constituyen el 15.7%, que declaran completa confianza en el profesor (vídeo) pueden ser todos alumnos influenciados por la norma de confianza del contrato didáctico ya recordada antes.

Queda aún el 46.3% constituido por estudiantes que reconstruyen la demostración y que al final declaran la evidencia del teorema. ¿Podemos entonces concluir que estos sujetos ya interiorizaron el concepto de conjunto denso?
Puede ser, pero existe al menos otra explicación.

La demostración usa la imagen del punto como intersección de dos rectas, la que tiene dos notables ventajas didácticas:

- se halla bien fundada en la mente del alumno (gracias a la larga experiencia hecha con la geometría)

- contiene ya al menos embrionariamente el concepto de densidad (el radio proyectante puede incluso verse de manera dinámica al rotar alrededor del centro de proyección, y los puntos de intersección con los dos segmentos, recorrer enteramente los segmentos mismos).

Según esta interpretación, el obstáculo epistemológico señalado podría haber sido al menos en parte superado.

7.3. El obstáculo en "formas periódicas"

Quien rechaza la demostración lo hace porque aún no logra entender el significado exacto de forma decimal periódica de un número racional. Los números periódicos nacen en un contexto lingüístico de infinito potencial. Cuando se introducen en la escuela media, el profesor, por lo general, advierte: «Podría continuar la división y obtener siempre el mismo residuo, por lo tanto, en el cociente debería poner siempre la misma cifra...». De aquí nace ciertamente la idea de "acercarse siempre más al resultado sin alcanzarlo jamás" descrito por muchos alumnos. Para muchos estudiantes es casi igual a 1, pero no exactamente igual a 1, porque «para llegar a 1 falta siempre algo». Por lo tanto, más que de obstáculo epistemológico en este caso parece necesario hablar de obstáculo didáctico.

He aquí un protocolo que constituye un ejemplo significativo en tal sentido (el estudiante responde a la pregunta: ¿Cómo explicarías que a un alumno más joven que tu?):

> *Me apoyaría en la realidad: si medimos indirectamente un objeto, o un espacio, podemos obtener un número periódico. Pero un número periódico es un número infinito y dado que en la realidad no existen objetos infinitos, entonces no existe el número periódico. Y para verlo, o se hace una medición directa, o se toma el número finito más cercano al periódico. El número más cercano a 0.999999... es 1.*

Probablemente sólo la adquisición de conceptos como densidad e infinito actual permiten poder pensar las cifras decimales infinitas como un todo único y llegar así al dominio de los números periódicos.

Sin embargo, en nuestras pruebas, el 46.7% de los estudiantes declara de haber comprendido. ¿Cómo es posible un resultado aparentemente tan alto? Probablemente la demostración ofrece la posibilidad de eludir el obstáculo didáctico. La operación permite llegar formalmente al resultado sin tener que pensar en las infinitas cifras después del punto. Naturalmente se necesita aceptar la extensión de las propiedades de cálculo propias de los decimales finitos a estas nuevas formas: pero frente a extensiones semejantes, por lo general, los estudiantes no se plantean excesivos problemas (de hecho, ninguno de nuestros 287 estudiantes cuestionó la operación).

El obstáculo didáctico viene por lo tanto eludido en el curso de la demostración gracias a un oportuno ardid. Pero, también aquí, si el estudiante se pregunta sobre lo que ha encontrado, puede recaer en el obstáculo, rechazar la tesis y refugiarse en la aproximación («Lo veo, pero no lo creo»).

He aquí un protocolo que constituye un ejemplo de este comportamiento (el estudiante responde a la pregunta: «¿Cómo explicarías que a un alumno más joven que tu?»):

Diciéndole que la diferencia es tan pequeña que 0.999... y 1 son casi iguales.

7.4. Los obstáculos en el "teorema de Cantor"

Aquí las cosas se complican. Para empezar, observamos que la misma tesis entra en conflicto con los modelos sugeridos por una supuesta "evidencia", precisamente la citada por Cantor en sus cartas y puesta en discusión por él mismo. Se trata de la equipotencia entre dos infinitos actuales de diferente naturaleza geométrica: uno, el cuadrado, bidimensional, el otro, uno de sus lados, unidimensional.

La demostración, en vez de ayudar como en los dos casos anteriores, añade incluso al menos otras dos dificultades:

- el pasaje de la situación geométrica inicial a su algebrización a través del método de la geometría analítica (véase el "deslizamiento") y el consiguiente regreso a la interpretación geométrico-topológica; tal deslizamiento se observa en muchos estudiantes con claras y evidentes intervenciones del tipo: «¿y eso qué tiene que ver?"

- la manipulación de las cifras decimales, decididamente inusitada y juzgada por muchos estudiantes como «no matemática», «no permitida», «no correcta», «inexplicable», ...

Esto explica porque solamente el 19.2% (categoría "rico") logra acercarse a la construcción del conocimiento como objeto. Una quinta parte de los estudiantes, por lo tanto, proporciona resultados de aceptación positiva, como resulta de la globalidad de esta misma verificación.

Por lo tanto, si consideramos que el 67% de los estudiantes (suma de las categorías "equivocado", "no", "aplastados", "depende") no ha obtenido de esta demostración elementos positivos para el aprendizaje, debemos concluir que en este caso se han superado con mucho las capacidades normales de aprendizaje de los estudiantes de la escuela superior.

La causa de esto se halla ciertamente en los dos motivos mencionados arriba: deslizamiento y manipulación de las cifras decimales.

El obstáculo epistemológico, en este caso, parece ligado a las dimensiones diferentes de los elementos que se confrontaron y quizás a la noción común euclidiana «El todo es mayor que una parte» que en este caso es muy evidente y que parece tener una aceptación y raíces aún más profundas que en el caso "segmentito-segmentote". Por otra parte, la misma historia nos dice que esta era la convicción de los matemáticos de finales del siglo XIX y aún del mismo Cantor.

En este contexto, puede ser interesante ver en qué medida interviene el contrato didáctico, según el cual lo que se presenta por el profesor se considera correcto, incluso en el caso de no haber sido entendido del todo. La tabla siguiente responde a esta curiosidad:

toma como muestra a los estudiantes que declaran haber aceptado la demostración del teorema de Cantor (33%) y busca de analizar los límites de tal aceptación (algunos no responden).

Teorema de Cantor	
No he entendido un pasaje pero creo en la demostración	18.8%
No he entendido dos pasajes pero creo en la demostración	6.6%
No he entendido tres pasajes pero creo en la demostración	0.3%
No he entendido ningún pasaje pero creo en la demostración	0.0%
Entendí la demostración pero no estoy de acuerdo con la tesis	3.8%

Consideramos significativos los primeros dos porcentajes (18.8% y 6.6%): una parte, para nada despreciable, de estudiantes declara aceptar la demostración incluso sin haber entendido uno o dos pasajes! Pero, por otra parte, hay que notar que ningún estudiante está dispuesto a aceptar un teorema de cuya demostración no ha entendido algún pasaje. El último porcentaje representa la parte de estudiantes hoy solidarios con el comportamiento asumido por Cantor en junio de 1877: «Lo veo, pero no lo creo». Se trata de casos que confirman lo que Waldegg (1993) llama «resistencia a la intuición».

8. Respuestas a las preguntas formuladas en 3

8.1. Primeras conclusiones

La demostración del teorema de Cantor se revela por encima las capacidades normales de aprendizaje de los estudiantes de las escuelas superiores que no han aún seguido un curso del Análisis. Esto se debe sobre todo a obstáculos de naturaleza epistemológica y didáctica, como hemos mostrado, y a dos pasajes en la demostración (deslizamiento y manipulación de las cifras). El éxito obtenido por el 19.2% cae en los valores normales del estrato de alto rendimiento de una población escolar y por lo tanto no parece significativo para nuestra investigación.

Las demostraciones de los otros dos teoremas ("segmentito-segmentote" y "formas periódicas") resultaron más accesibles, pero también pusieron en evidencia la existencia de obstáculos de diversa naturaleza, por ejemplo de tipo curricular y cognitivo general.

El examen de los cuestionarios nos lleva a intuir que los obstáculos se podrían superar en al menos dos modos:

- mediante una especie de eludir (véanse las demostraciones de "segmentito-segmentote" y de "formas periódicas"); la operación puede lograrse también plenamente, pero no tiene efecto duradero. A la fase "lo veo", es decir a la comprensión técnica de la demostración, puede seguir una reacción del tipo "pero no lo creo" causada por el regreso en superficie de los obstáculos.

- - mediante remoción y superación de los mismos.

8.2. Descripción del obstáculo e hipótesis para su remoción

Para superar un obstáculo epistemológico se necesita hacer atravesar al estudiante la frontera de sus conocimientos, aumentándolos de manera directa y oportuna.

Por ejemplo, en el caso de "segmentito-segmentote" se necesita ayudar al estudiante a separarse del modelo del segmento como "collar" cuyas "perlas" se hallan estrechamente ordenadas. Se necesita hacerle tomar conciencia, por ejemplo, del hecho que, en un segmento, dado un punto, no tiene ya sentido pensar ni en el punto anterior ni en el sucesivo, buscando imágenes oportunas.

Una prueba que sostiene nuestras tesis está constituida por la siguiente indagación. Pudimos enfrentar de nuevo a 23 estudiantes de nuestra muestra original a sus cuestionarios, contestados un año antes. Mientras tanto, este grupo había llevado un año de enseñanza del Análisis. Los estudiantes tuvieron la libertad de confirmar o de modificar las respuestas que habían dado el año anterior. Los resultados de la re-elaboración se presentan en el siguiente párrafo.

8.3. Re-elaboración de las respuestas por parte de algunos estudiantes que llevaron un año de enseñanza del Análisis

De 69 casos posibles (23 estudiantes en tres situaciones diferentes) se tuvieron 15 casos (22%) de cambio radical hacia una mejor opinión (es decir: pasaron a una reconstrucción correcta y convencida de la demostración) y 3 casos (4%) a una peor opinión (es decir rechazaron la tesis anteriormente aceptada).

En particular: 8 alumnos de 23 (35%) cambiaron de idea con respecto a las "formas decimales", 7 de los cuales produjeron la demostración basada sobre la serie geométrica, que consideran (con razón) la única rigurosa. El octavo estudiante tiene una historia particular y lo consideramos significativo para nuestra reflexión; he aquí el protocolo producido:

a le falta un pedacito para llegar a 1
pedacito = 0.000............1 al final del infinito
final del infinito?!?!
➡ 0.09 = 0 1

Evidentemente, la forma expresiva es ingenua, pero el protocolo proporciona ya un amplio y eficaz testimonio de la re-elaboración crítica creada en base al nuevo conocimiento. Según nosotros, el breve escrito precedente prueba cómo se pueda llegar al pasaje más allá de la frontera de los propios conocimientos.

Dos alumnos respondieron que ahora si habían entendido (es decir después del año de Análisis) la demostración del teorema de Cantor, pero ambos afirman que no la creen (uno de ellos declara lo mismo a propósito de las formas decimales).

Consideramos estos últimos casos demasiado aislados para ser significativos. De cualquier modo, tenemos la impresión que ciertas dudas puedan permanecer también después de años de enseñanza del Análisis, sobre todo si este último se basa mayormente en la adquisición de nociones y técnicas (como muchas veces, desgraciadamente, sucede) y no sobre la reflexión de lo que se está haciendo y sobre la construcción consciente del conocimiento.

Se debería considerar la presente investigación como una primera parte, preliminar a una próxima más "explorativa" en lo que concierne a las convicciones de los estudiantes, a sus reacciones, sus justificaciones, sus explicaciones, sobre la aceptación o no de los infinitos actual y potencial y de las situaciones aparentemente paradójicas con las que nos podemos encontrar durante el estudio del infinito.

Agradecimientos

Para la conducción de las pruebas descritas en 5., recibimos la ayuda de muchos colegas de la escuela secundaria superior, los cuales colaboraron de una forma valiosa. Agradecemos explícitamente por la colaboración a: Gabriella Bolognini (Itc, Bologna), Maurizio Casali (Ist. Prof., Bologna), Filippo Di Venti (Escuela Superior de Comercio, Bellinzona), Aldo Frapolli (Liceo cantonale, Bellinzona), Elisa Menozzi (Itis, San Lazzaro di Savena), Fabrizio Monari (Ist. Prof., Monghidoro), Leda Nerini (Itis, Budrio), Giovanna Paganini (Liceo Scientifico, Imola), Patrizia Ricci (Itis, Budrio), Anna Maria Rossini (Liceo Scientifico, Casalecchio), Mara Tullini (Itis, Budrio); gracias también al grupo IVB2 (Liceo Cantonale, Lugano 2). Muchos otros profesores llevaron a cabo la prueba en sus grupos para proporcionarnos ideas preliminares, así como ayuda para la investigación de los elementos y de los parámetros de la metodología de conducción y análisis, pero tales pruebas no se tomaron en cuenta, obviamente, en este trabajo.

Para la realización del vídeo, agradecemos a Silvio Moro (Centro Didáctico Cantonale, Bellinzona).

Agradecemos a los colegas Mario Ferrari (Pavia), José Luis Gonzáles Marí (Málaga) y Hermann Maier (Regensburg) por los consejos dados en ocasión de la lectura de una versión preliminar de este trabajo.

Bibliografía

Arrigo G. & D'Amore B. (1993): Infiniti. Milano, Angeli.

Bachelard G. (1938), La formation de l'esprit scientifique. Paris, Vrin.

Bagni G.T. (1998), L'infinitesimo nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi. L'educazione matematica, 3, 2, 110-121.

Bourbaki N. (1970), Éléments de Mathématiques - Théorie des ensembles - E III. Paris, Hermann.

Brousseau G. (1983), Les obstacles épistemologiques et les problèmes des mathématiques. Recherches en Didactiques des Mathématiques, 4, 2, 165-198.

Carruccio E. (1964), Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought. London, Faber and Faber.

Cavaillès J. (1962), Philosophie mathématique. Paris, Hermann.

Courant R. & Robbins H. (1941), What is mathematics? New York, Oxford Univ. Press.

D'Amore B. (1996), "El infinito: historia de conflictos, de sorpresas, de dudas". Epsilon, 36, 341-360.

D'Amore B. & Martini B. (1997), "Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos". Números, 32, 26-32.

D'Amore B. & Martini B. (1998), El "contesto natural". Influencia de la lengua natural en las respuestas a test de matemática. Suma, en prensa.

D'Amore B., Sandri P. (1996), "Fa' finta di essere... ". Indagine sull'uso de la lingua comune en contesto matemático en la escuela media. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 19A, 3, 223-246.

Douady R. (1984), Jeux de cadres et dialectique outil-object dans l'enseignement des mathématiques. Thèse d'État, Univ. De Paris. (1986) Recherches en didactique des mathématiques, 7, 2, 5-31.

Duval R. (1983), "L'obstacle de dedoublement des objects mathématiques". Educational Studies in Mathematics, 14, 385-414.

Duval R. (1995), "Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?" Actes de l'École d'été 1995.

Fischbein E., Jehiam R. & Cohen D. (1994), "The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles", Proceedings of the XVIII PME, 2, Lisboa, 352-359.

Fischbein E., Jehiam R. & Cohen D. (1995), "The concept of irrational numbers en high-school students and prospective teachers". Educational Studies in Mathematics, 29, 29-44.

Hart K. (ed.) (1981), Children's understanding of mathematics, 11-16. London, Murray.

Moreno L. & Waldegg G. (1991), "The conceptual evolution of actual mathematical infinity". Educational Studies in Mathematics, 22, 211-231.

Noether Y. & Cavaillès J. (eds.) (1937), Briefwechsel Cantor-Dedekind.

Perret-Clermont A.-N., Schubauer-Leoni M.L. & Trognon A. (1992), "L'extorsion des réponses en situation asymetrique". Verbum, 1/2, 3-32.

Romero y Chesa C. & Azcarate Giménez C. (1994), "An inquiry into the concept images of the continuum. Tryng a research tool", Proceedings of the XVIII PME, Lisboa, 185-192.

Schoenfeld A. H. (1985), Mathematical problem solving. New York, Academic Pres.

Shama G. & Movshovitz Hadar N. (1994), "Is infinity a wholer number?", Proceedings of the XVIII PME, 2, Lisboa, 265-272.

Stavy R. & Berkovitz B. (1980), "Cognitive conflict as a basic for teaching qualitative aspects of the concept of temperature". Science Education, 28, 305-313.

Tall D. (1980), "The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity". Educational Studies in Mathematics, 11, 271-284.

Tirosh D. (1990), "Inconsistencies in students' mathematical constructs". Focus on Learning Problems en Mathematics, 12, 111-129.

Tsamir P. & Tirosh D. (1992), "Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity", Proceedings of the XVI PME, Durham NH, 90-97.

Tsamir P. & Tirosh D. (1994), "Comparing infinite sets: intuition and representation", Proccedings of the XVIII PME, 2, Lisboa, 345-352.

Tsamir P., Tirosh D. (1997), "Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito". La matematica e la sua didattica, 2, 122-131.

Waldegg G. (1993), "La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction", Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 5, 19-36.

Traducción del italiano: Angel Balderas Puga