El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías

Carlos Eduardo Vasco

Proyecto Zero, Universidad de Harvard

Resumen . Esta conferencia trata inicialmente sobre la ubicación del pensamiento variacional y la modelación en la situación curricular actual de la educación básica y media después de la Ley 115 de 1994, en particular, en los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas. Se explica la propuesta anterior por sistemas, en particular los sistemas analíticos, tal como se propusieron para la educación matemática en la básica secundaria y la propuesta actual sobre los cinco tipos de pensamiento: numérico, espacial, métrico, estocástico y variacional. Se señala qué no es y qué es este último tipo de pensamiento y se proponen diversas maneras para desarrollarlo. Posteriormente el pensamiento variacional se relaciona con las nuevas tecnologías en la educación y, en particular, con la meta de aprender a modelar matemáticamente procesos que ocurren en la realidad. Para ello, se señala qué no es y qué es un modelo en general y un modelo matemático en particular, y se caracteriza la modelación matemática de procesos de la realidad circundante. Se proponen diversas maneras de practicar la modelación matemática y se enfatiza el papel que pueden tener en ella las nuevas tecnologías.

Antecedentes

Lineamientos generales del currículo

A comienzos de 1994, la Ley General de Educación (ley 115), le quita al Ministerio de Educación Nacional la potestad curricular para fijar centralmente los programas de las áreas fundamentales y obligatorias estipuladas en la ley. En los Art. 78 y 148 se estipula que el Ministerio de Educación Nacional debe únicamente expedir “los lineamientos generales de los procesos curriculares” y “los indicadores de logros para cada grado de los niveles educativos” de la educación formal. Así pues, esos artículos le ordenan al Ministerio fijar lineamientos generales de los procesos curriculares e indicadores de logro, sin precisar qué son estos últimos.

Después de dos años de reuniones realizadas en el Ministerio de Educación bajo la coordinación de Ana Celia Castiblanco Paiba, en el año 1998 se publicaron los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas. En dichos documentos se enfatiza en una potentes idea central: el propósito de las matemáticas no es tanto el manejo de muchos sistemas matemáticos conceptuales y simbólicos, sino el desarrollo de cinco tipos fundamentales de pensamiento matemático: numérico , espacial, métrico, estocástico y variacional, a través de cinco procesos básicos: formular y resolver problemas, comunicar, razonar, modelar procesos y fenómenos de la realidad, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

El dominio de los sistemas matemáticos no es pues ya el propósito central del currículo de las matemáticas escolares como lo propuse durante los veinte años de la renovación curricular, desde 1978 a 1998. En los lineamientos, los sistemas matemáticos se ubican en su lugar apropiado como herramientas de las que se puede valer el pensamiento matemático respectivo y como medios potentes que ayudan a desarrollarlo y a refinarlo. Ahora, el propósito central es el desarrollo de los cinco tipos de pensamiento matemático enumerados. El paso de los sistemas concretos y familiares para los alumnos a los sistemas conceptuales y simbólicos que se proponía en la renovación curricular, se concreta ahora en el proceso de modelación matemática de situaciones de la vida cotidiana.

La propuesta de trabajo por sistemas de la Renovación Curricular de 1974 a 1993

Los sistemas numéricos, geométricos, métricos y estocásticos se señalaban como los cuatro pilares de la educación matemática en la básica primaria, y los sistemas analíticos se agregaban para la básica secundaria, de sexto a noveno grado (no había programas de educación media, grados 10 y 11). Había además tres sistemas instrumentales: los lógicos, los conjuntistas y los sistemas generales de relaciones y transformaciones.

La idea principal es que los sistemas analíticos son colecciones de funciones, transformaciones u operadores con sus operaciones y sus relaciones. Los números naturales, racionales o reales, o los puntos de la línea, el plano o el espacio *no* son elementos del universo de los sistemas analíticos. En ese sentido, los sistemas analíticos son apenas un tipo particular de sistemas generales cuyos objetos son transformaciones, operaciones, operadores o funciones tomadas activamente, no como relaciones y mucho menos como conjuntos de parejas. Usando una metáfora zoológica, podemos decir que los objetos de los sistemas analíticos son monstruos que tragan y transforman números, pero no son números. Desde el punto de vista de Anna Sfard, son reificaciones de procedimientos o algoritmos de operaciones.

La propuesta de trabajar por tipos de pensamiento fue un paso adelante muy significativo, pues establece el propósito de las matemáticas escolares en el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas y en su utilización socialmente más poderosa: la modelación, sin limitar las matemáticas escolares a la mera aplicación de algoritmos ya conocidos para “resolver problemas” que apenas son ejercicios escolares y no verdaderos problemas abiertos y retadores. Una de las dificultades que se ha encontrado en la interpretación de los lineamientos curriculares del área de matemáticas es que no es muy claro qué se debe entender por “pensamiento variacional”. Intentemos acercarnos a ese concepto.

El pensamiento variacional

Qué no es

El pensamiento variacional no consiste en saberse una definición de función. Al contrario, las definiciones usuales de función son estáticas: conjuntos de parejas ordenadas que no se mueven ni hacen nada. Eso estaría bien a lo sumo para la función idéntica, que es la que no cambia nada; pero precisamente la función idéntica es la que no es del agrado de los estudiantes, precisamente porque no hace nada.

Tampoco es aprenderse las fórmulas de áreas y volúmenes como *ba*, pr^2, o de las leyes matemáticas de la física, como $f = ma$, V=IR, o $s = 1/2gt^2 + v_0t$. Más aún, esas leyes, entendidas sólo como fórmulas para remplazar valores en ellas, obstaculizan el pensamiento variacional, que primero trata de captar qué varía, con qué y cómo, antes de escribir nada y, mucho menos, antes de memorizar fórmulas.

Tampoco se trata de dibujar las gráficas. Al contrario, las gráficas cartesianas paralizan la covariación, y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica. En la gráfica de la función cuadrática $y = x^2$, por ejemplo, la parábola, en puntos cercanos al origen, no deja ver características importantes tales como: el cero y el uno se quedan quietos, los negativos saltan al lado de los positivos, los números mayores que uno se agrandan y se agrandan cada vez más drásticamente en la medida en que son más grandes, los números menores que uno se achican y que se achican cada vez más drásticamente en la medida en que son más pequeños. Eso sí sería pensamiento variacional, pero saberse las gráficas de las funciones usuales no lo es. Más bien se convierten en obstáculos epistemológicos y didácticos al dominio del pensamiento variacional.

Qué es

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.

Tiene pues un momento de captación de lo que cambia y lo que permanece constante y de los patrones que se repiten en ciertos procesos, como los cambios de temperatura durante el día y la noche, de los movimientos de caída libre o tiro parabólico; luego tiene un momento de producción de modelos mentales cuyas variables internas interactúen de manear que reproduzcan, con alguna aproximación, las covariaciones detectadas; luego tiene un momento de echar a andar o “correr” esos modelos mentales para ver qué resultados producen; otro de comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar; y finalmente, el momento de revisar y refinar el modelo, o descartarlo y empezar de nuevo.

Sólo cuando hay tecnologías socialmente disponibles, como las palabras, dibujos y otros símbolos, hay un momento de formulación simbólica del sistema mental por medio de algún simbolismo con su tecnología respectiva, simbolismo que puede ser verbal, gestual, pictórico o simbólico -formal y no sólo esto último, como suele equivocadamente creerse. Esta formulación permite objetivar el modelo mental, calcular con la representación tecnológicamente disponible, y continuar con los momentos de comparación y reformulación del modelo.

El objeto del pensamiento variacional es pues la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad.

Pongamos un ejemplo. El profesor sostiene una pelota de caucho en cada mano, y las lanza al aire alternativamente, sin hacer malabares. El estudiante trata de percibir la variación de cada una en el tiempo, y luego la covariación de una con otra. Nota que la una se mueve mientras la otra está quieta. Puede reproducir mentalmente el movimiento que hace el profesor, lanzar las pelotas al mismo ritmo, a la misma altura que él y hasta se animaría a hacerlo con dos pelotas reales. Algo tiene que estar pensando para poderlo hacer. Algún modelo imaginativo tiene que tener en la cabeza para poder imitarlo. Trata de precisarlo verbalmente. Trata de pintar unos ejes de coordenadas y de escribir unas ecuaciones. Ahí viene el problema. La representación pictórica es estática. Las fórmulas son difíciles. Los ensayos fracasan. El pensamiento variacional se queda atascado y viene el desánimo y el abandono de la tarea.

El pensamiento variacional requiere el pensamiento métrico y el pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal. Requiere también del pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales. Su principal herramienta son los sistemas analíticos, pero puede valerse también de sistemas lógicos, conjuntistas u otros sistemas generales de relaciones y transformaciones.

Para mí, el principal propósito del pensamiento variacional es la modelación y no es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios. Al contrario, para mí, los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso. Para poder resolver un problema interesante tengo que armar primero un modelo de la situación en donde las variables covaríen en forma semejante a las de la situación problemática, y no puedo hacerlo sin activar mi pensamiento variacional.

Por eso podemos decir que el pensamiento variacional incluye la modelación, que veremos más detalladamente en seguida. Por lo tanto, podemos esquematizarlo en varias fases o momentos, no necesariamente secuenciales y con muchos caminos de realimentación entre esas fases o momentos:

- M omento de captación de patrones de variación: lo que cambia y lo que permanece

- Momento de creación de un modelo mental

- Momento de echar a andar el modelo

- Momento de comparar los resultados con el proceso modelado

- Momento de revisión del modelo

Si hay una tecnología socialmente disponible que permita hacerlo, habría también otros momentos:

- Momento de formulación simbólica

- Momento de calcular con esa formulación

- Momento de comparar los resultados con el proceso mo delado

- Momento de reformulación del modelo

Ya veremos más adelante cómo las nuevas tecnologías informáticas permiten nuevos momentos muy potentes para la modelación contribuyendo al desarrollo del pensamiento matemático.

Cómo se desarrolla

El pensamiento variacional se desarrolla de múltiples maneras:

- Con el pensamiento numérico, si se fija la atención en la manera como varían los números figurados pitagóricos, como la variación de los números cuadrados; con los intentos de captar patrones numéricos que se repiten, como 3, 6, 9, 12, o 3, 9, 27, 81, o 3, 5, 7, 11.

- Con el pensamiento espacial, o mejor espacio -temporal.

- Con el pensamiento métrico en cuanto a la diferenciación entre magnitudes, cantidades de magnitudes, medición anumérica, ordenación de cantidades de magnitudes y medición numérica.

- Con el pensamiento proporcional tradicional, con tal de que no se defina una proporción como la igualdad de dos razones, pues eso es estático y se refiere a la representación de la proporción, no a la covariación entre las magnitudes que se identifican como proporcionales. Se pueden desarrollar notaciones más acordes con la covariación. En el programa de la renovación curricular propuse que se trabajara primero la correlación positiva o negativa, y luego se viera que la proporcionalidad directa entre cantidades (como anotó acertadamente en su tesis Edgar Guacaneme), es sólo un tipo muy específico de covariación positiva, y que la proporcionalidad inversa es sólo un tipo muy específico de correlación negativa entre cantidades absolutas o no-negativas. En esa notación se pueden usar flechas diagonales con la punta hacia arriba o hacia abajo para indicar que si una aumenta, la otra aumenta o disminuye.

- Con las representaciones gestuales (Seymour Papert; "body-syntonic mathematics" o "matemáticas sintónicas con el cuerpo"); por ejemplo, subir y bajar el dedo para el movimiento circular y el armónico simple, la mano extendida para las derivadas y para el aumento o disminución de la pendiente, lo que permite entender el test de las primeras derivadas y entender el test de la segunda derivada mucho mejor que cualquier fórmula.

- Con representaciones de máquinas y circuitos.

- Con reinterpretaciones dinámicas de las representaciones gráficas y tabulares. Aquí es muy poderosa la pantalla del computador o la calculadora graficadora.

- Con la atención a las variaciones implícitas en el pensamiento espacial, o mejor, espacio-temporal, que es el pensamiento geométrico tomado dinámicamente, no en la forma estática de la geometría euclidiana tradicional. Por ejemplo, atender a la variación del área de un triángulo en posición estándar con el cambio del largo de la base, con el cambio de altura, con el cambio de la posición del vértice a lo largo de una paralela a la base, o con el cambio de la posición de la base a lo largo de la recta en donde está el segmento inicial, mientras se mantiene el vértice fijo.

- Con las representaciones sagitales de la desacreditada "matemática moderna" ("New Math"), en las cuales se ve más claramente a dónde van los puntos o números del dominio que en la representación cartesiana.

- Con el papel cuadriculado, el milimetrado y el ajuste de curvas.

- Con el estudio de las esplinas cúbicas, que permiten ajustar no sólo el punto de empalme sino la primera derivada en ese punto, para producir gráficas suaves a la vista (no "suaves" en el sentido de C-infinito, sino sólo en el sentido de C-uno).

- Con el estudio de las funciones exponenciales, logarítmicas y logísticas. Aquí también es clave el uso de la tecnología electrónica, para utilizar los potentes menús de ajuste de curvas ("curve fitting") en los paquetes matemáticos como Isetl, Derive, Maple o Mathematica.

La modelación

Qué no es

No es aprender a caminar en la pasarela.

No es armar modelitos de balso o de cartón, aunque eso ayuda.

No es dibujar, pintar o modelar en arcilla y plastilina, aunque eso ayuda.

No es aprenderse fórmulas de modelos ya inventados y probados por otros, aunque eso puede ayudar o estorbar, como se dijo arriba a propósito de los modelos usuales de la física matemática.

Qué es

La modelación es pues el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad.

Resalto que es un arte, no una ciencia. Como en la epistemología de las ciencias naturales, para repetir a Karl Popper, no se sabe cómo es la lógica de la invención de modelos, pero sí hay una lógica de la puesta a prueba, la justificación y el refinamiento o abandono de los modelos. No hay pues una lógica de producir modelos matemáticos, pero sí la hay para ponerlos a prueba, ajustarlos, compararlos y generalizarlos o descartarlos.

Para mí, los dos libros clásicos sobre modelación son el Maki & Thompson (1973) para situaciones de las ciencias sociales y biológicas y el de Gentner & Stevens (1983) para los aspectos cogntivos. Pero la producción de libros sobre modelación matemática es muy grande y la lista interminable. Basta hacer una búsqueda en *barnesandnoble.com* o en *amazon.com* bajo el nombre de "modelación matemática" para darse cuenta de la abundancia de literatura sobre modelación matemática desde la primaria hasta los postgrados. Si buscan en una base de datos como el ERIC con la palabra clave "mathematical modeling" con una sola "L" van a encontrar literatura distinta de si buscan "mathematical modelling" con doble "L".

Si se hace una búsqueda en la base de datos ERIC en los últimos diez años, se ve también la cantidad de artículos publicados en este tiempo sobre la modelación matemática en la primaria, la secundaria y la universidad. En los Estados Unidos hay una entidad llamada "COMAP", dirigida por Solomon Garfunkel y Henry Pollack en la cual se ha trabajado persistentemente en la modelación matemática en las escuelas y colegios. El proyecto se llama "MMOW": Mathematics: Modeling our World. En Latinoamérica, la persona que más seriamente ha tocado el tema de las que yo conozco es la vice-presidenta del CIAEM, quien ahora organiza el XI CIAEM en Blumenau, Brasil, en julio de 2003, Maria Salett Biembengut. Ella hizo su tesis de maestría en 1990 en Rio Claro, Brasil, sobre la modelación matemática como método de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en primaria y secundaria, y luego su tesis doctoral en 1997 en Florianópolis sobre la calidad de la enseñanza de las matemáticas en la ingeniería, en la que desarrolla una propuesta metodológica y curricular para reorganizar la enseñanza de las matemáticas alrededor de la modelación matemática en las carreras de ingeniería. De su libro Biembengut (1999) tomé algunas ideas de lo que es la modelación.

Las revistas que más consistentemente han publicado artículos sobre este tema desde los años 80 son el *International Journal for Mathematical Education, Science and Technology*

IJMEST y la revista canadiense *For the Learning of Mathematics.*

Cómo se desarrolla

Como todo arte, el arte de la modelación matemática se aprende haciéndolo. Afortunadamente hay muchas propuestas de modelos de diferentes tipos para aplicarlos a distintos tipos de procesos, y muchos casos y problemas que estimulan a la modelación a muy distintos niveles.

La investigación sobre la manera como los alumnos de distintas edades producen e interpretan modelos matemáticos es apenas incipiente. Hay muchas propuestas en todos los niveles educativos, generalmente muy asociadas a la disponibilidad de nuevas tecnologías. En particular, el programa Excel de Microsoft ha sido utilizado con mucha frecuencia para la modelación, lo cual nos debería impulsar a cambiar la notación de la mal llamada "álgebra de bachillerato", pues es muy distinta a la que se utiliza en las hojas de cálculo o "spreadsheets".

Pero programas como Isetl, Maple, Derive y Mathematica tienen muchas herramientas para plantear, transformar y graficar resultados de distintos modelos. En cursos más avanzados, las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales proporcionan las herramientas más poderosas para modelar. La manera actual de visualizar las ecuaciones diferenciales como campos vectoriales en el plano, permite un acercamiento al pensamiento variacional que no era posible antes del desarrollo de los programas graficadores en colores y los procesadores y coprocesadores de alta velocidad.

El uso de las nuevas tecnologías

La cautela con las nuevas tecnologías en la Renovación Curricular

Yo soy un entusiasta de los computadores desde su difusión comercial en los años sesenta. En la Universidad de Saint Louis, Missouri, trabajé mi tesis doctoral con un enorme IBM 1620, que ocupaba toda una sala pero sólo tenía 64 K de memoria, menos que cualquier agenda electrónica de propaganda. Con ese computador, en 1967 y 1968 hice una de las primeras tesis en cálculo algebraico asistido por computador ("Computer Assisted Algebra"). Me volví más entusiasta de ellos desde los primeros computadores personales, los Apple I y II, los Commodore, los Amiga y los primeros PC 186, 286 y 386. Compré en 1985 uno de los primeros MacIntosh Plus, que todavía funciona después de 17 años.

Pero he sido acusado por algunos colegas de detener el uso de los computadores en la educación pública. Las razones para que haya circulado esa acusación pueden ser distintas. En primer lugar, en los programas de la renovación curricular en el área de matemáticas, desarrollados con mi asesoría en el MEN de 1978 a 1984, cuando se expidió el Decreto 1002 que promulgaba esos programas de primero a quinto grado, yo me opuse a poner contenidos y objetivos que requirieran el uso de computadores, pues los programas iban a ser obligatorios para todo el país, y en ninguna escuela pública que yo conociera había todavía computadores. Optamos por preparar algunos contenidos con actividades que fácilmente pudieran transferirse a computadores, para no avergonzar ni irritar a los maestros que no tenían ningún acceso a ellos.

Otra razón puede ser mi oposición a gastar dineros ordinarios del presupuesto para comprar computadores o calculadoras; para ello existían otros fondos, y además había que atender primero a los problemas de electricidad de las escuelas y colegios oficiales, y sobre todo, a los problemas de la seguridad de los equipos. Infortunadamente, la realidad me dio la razón. Todos los equipos de computación que se compraron en el MEN en esos años de 1978 a 1988, inclusive los que se compraron para la sede central del CAN, o resultaron inútiles, o se los robaron, o no hubo cómo repararlos después del primer daño.

Pero también había razones académicas para mi escepticismo, derivadas de la investigación. La principal era que los maestros no sabían ni querían utilizar los computadores. Todavía la mayoría se resiste a hacerlo, y más todavía en matemáticas, creo que más que todo por el temor de que sus alumnos resulten sabiendo más que ellos.

La segunda razón era que si se utilizaban los computadores, se hacía en forma que apenas repitieran lo que se podía hacer con otros materiales, con los cuales se podía trabajar más fácilmente, más eficazmente y con menos costos. Con Jim Kaput y otros colegas en Harvard en 1985 a 1989 analizamos algunos juegos de computador, y vimos que en general eran más eficaces los mismos juegos en cartón o plástico que en la pantalla.

Sólo cuando Jim Kaput desarrolló a partir de 1985 la teoría y la práctica de las representaciones múltiples ligadas, por ejemplo, dividiendo la pantalla en cuatro ventanas para ver la representación algebraica, la tabular, la gráfica cartesiana y una representación icónica de la situación de proporcionalidad directa o función lineal, se empezó a ver lo que se podía hacer en computador que no se podía hacer de ninguna otra manera.

Cuando Judah Schwartz y Michal Yerushalmi desarrollaron en 1985 el "Geometric Supposer", antecesor del "Geometry Sketchpad" y del "Cabri Géomètre", se pudo ver la potencia de los computadores para la exploración geométrica en los colegios y escuelas. Por eso me opuse a que se gastara dinero en equipos que no tenían las capacidades gráficas para montar un buen software matemático y no tenían garantías de servicio, protección, compra de licencias de software e insumos de impresión.

La convicción de que no hay "Camino Real" para las matemáticas

Pero el problema principal de los computadores y las calculadoras graficadoras es que se les atribuyó cualidades mágicas para resolver todos los problemas de la educación matemática. Pronto se vio que sí aumentaban la motivación de los estudiantes para interactuar con los computadores y calculadoras, pero que la conceptualización matemática volvía a quedar rezagada. La facilidad de cálculo y el tamaño y resolución de las pantallas mostró que lo único que se hizo fue cambiar unos problemas por otros, unas preconcepciones por otras, y unos tipos de errores por otros.

Para ello se conocen ya algunas estrategias que sirven para aumentar el aprovechamiento de las calculadoras y los computadores. La más importante de ellas es la de estimar el resultado antes de pedirle al programa que lo calcule. "Piense antes de apretar".

Otras son más sutiles e ingeniosas. Yo averiguo por ejemplo cuál es el rango de la calculadora o el programa de computador. Supongamos que el rango es desde -1.0×10^{-99} hasta $+1.0\times10^{-99}$. Entonces pido evaluar $10^{-50}\times10^{50}\times10^{-50}$, lo cual da 10^{-50}, y luego evaluar $10^{-50}\times10^{-50}\times10^{50}$, que debería dar lo mismo, pero da cero.

Los problemas alrededor del uso de la tecnología han sido estudiados por los colegas de "una empresa docente", y aparecen ya en distintos artículos internacionales, como el de Michèle Artigue. Se verifica una y otra vez que los estudiantes rechazan las demostraciones más ahora que antes, lo que es preocupante, y prima la verificación empírica sobre los intentos de falsación, para hablar en la terminología de Karl Popper. Como consecuencia de ello, por ejemplo, los límites y la continuidad desaparecen ante la pretendida evidencia del contacto de las curvas en la pantalla. El Profesor Iván Castro ha tematizado el problema de la verificación empírica usando construcciones fractales para que los estudiantes "crean" que la diagonal del triángulo rectángulo isósceles de cateto uno mide dos unidades, o que la razón del diámetro a la circunferencia de radio unitario, que debería ser p, mide también dos unidades. Las construcciones ciertamente tienen como límite la diagonal del triángulo o el diámetro de la circunferencia, y los alumnos concluyen acerca de la invariancia de la longitud de las distintas curvas fractales.

Por ello sigo siendo escéptico del uso de los computadores y las calculadoras, a menos que tengan una alta calidad y vengan acompañadas de una formación continuada de los educadores que las utilizan, como afortunadamente ocurre en el presente proyecto.

Las nuevas potencialidades de las tecnologías electrónicas para desarrollar y refinar el pensamiento variacional y la modelación

Esas dificultades y esas reservas no obstan para que yo siga siendo un entusiasta de los computadores y las calculadoras de alta calidad y velocidad, alto poder gráfico y facilidad de manejo. Su potencial es inmenso, especialmente ahora con el advenimiento de poderosos paquetes de software para modelación, para graficación pseudo-tridimensional, para tutorías interactivas y para simulación.

Las ventajas de la tecnología aparecen cuando después de las fases usuales del pensamiento variacional, una vez se formula simbólicamente el modelo, ya no es difícil programarlo en el computador o la calculadora. Entences se puede "correr" o ejecutar, parametrizarlo, cambiarlo y recalcular fácilmente los valores que van tomando las variables. Además, como lo propuso Jim Kaput hace más de quince años, la tecnología permite enlazar distintos modelos y representaciones.

Pero para lograr extraer a las nuevas tecnologías todo ese potencial, no bastan cursillos y conferencias al estilo de la mal llamada "capacitación". Hacen falta programas largos, con un fuerte componente investigativo, de tipo taller presencial, con buen seguimiento y materiales de apoyo. Por ello, los costos del hardware y el software y los costos de los cursos y talleres de formación permanente son muy altos. Esto nos exige motivar muy bien dichos gastos con el logro de desempeños muy superiores en los estudiantes del proyecto con respecto a los que siguen otras estrategias metodológicas que requieran mucho menor inversión.

La actitud apropiada no es pues la del deslumbramiento y la exageración, sino la de la apropiación laboriosa y creativa, la de la investigación cognitiva, socio -afectiva y evaluativa seria y permanente y la de la reserva crítica que acompañe el entusiasmo y la diversión que permite el uso de estas tecnologías, especialmente en el desarrollo del pensamiento variacional y de las capacidades de modelación matemática por parte de los estudiantes de todos los grados escolares.

Referencias

Biembengut M, (1999) *Modelagem matemática & implicações no ensino e aprendizagem de matemática,* Blumenau, SC: FURB.

Gentner D and Stevens A, (Eds.) (1983) *Mental models*. Hillsdale, NJ: Lawrence

Erlbaum.

Maki D and Thompson M, (1973) *Mathematical models and applications.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice -Hall.