Educación Matemática
Vol. 11 No. 2 Agosto 1999
pp. 64-89

La construcción del número natural a través del proceso aditivo. Uso del cuadrito vacío por estudiantes de educación básica

Fecha de recepción: Diciembre, 1997

Alma Arana Hernández y Aurora Gallardo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
Departamento de Matemática Educativa
agallardo@mail.cinvestav.mx

Resumen. *En este trabajo se presentan diferentes etapas por las que atraviesan niños de segundo año de primaria, en la construcción del concepto de número, vía una gran variedad de representaciones simbólicas de la adición ($a + b = c$), formadas con uno o más cuadritos vacíos ($\square$). Se encuentra que una de las limitantes del estudiante para convertirse en resolutor eficiente, es la dificultad de concebir los sumandos que forman un número, (conflicto proceso-concepto). A través de las estrategias de conteo Contar Todo, Seguir Contando y unas intermedias que surgen del presente estudio, se observa la evolución del concepto de sumando y/o procepto de número aditivo.*

Abstract. *This work deals with different stages that students in second grade of elementary school pass through to construct the concept of number using a large diversity of symbolic representations of addition ($a + b = c$) with one or more place-holders ($\square$). One of the restrictions found that obstruct the student to become an efficient solver, is the difficulty to conceive the addends that form a number (a process-concept conflict). The evolution of the concept of addend and/or additive number procept is observed through strategies such as Count All, Count On and others intemediate states-gies that arise in this study.*

Introducción

Este estudio, se aboca al análisis de la construcción del concepto de número en estudiantes de segundo año de primaria. Se examina un libro de texto de primero de primaria cuyos ejercicios interrelacionan los siguientes tópicos:

1) Diferentes representaciones simbólicas de la adición planteadas con la ayuda del cuadrito vacío ($\square$):
Aquellas en las que sólo aparece un cuadrito: $a + \square = c$, $a + b = \square$, $\square + b = c$.
O dos cuadritos: $\square + \square$, $a + \square \quad \square$, $\quad \square + b \quad \square$
O tres: $\square + \square + \square$, $\quad \begin{matrix} \square + \square \\ \square \end{matrix}$
O cuatro: $\square + \square + \square + \square$.

Incluso situaciones en las que se vincula el cuadrito vacío con los lenguajes verbal y numérico

$$\square + \square$$

8 ocho

2) Los conjuntos de objetos visualizados mediante una representación gráfica (imágenes).
3) Los enunciados verbales de los ejercicios contenidos en el texto.

El estudio se lleva a cabo con una serie de actividades, desde la elaboración de un examen diagnóstico para elegir a los candidatos a entrevista clínica, evaluación y selección de los estudiantes, hasta el análisis teórico de las respuestas a las preguntas planteadas. Se eligieron 8 estudiantes, quienes exhiben diversos niveles de avance en la construcción del concepto de número mediante el uso que le asignan al cuadrito vacío en las expresiones antes mencionadas. Se concluye que algunos niños no llegan a identificar en dichas representaciones, a los sumandos (componente binaria de la adición o suma) y por tanto a diferenciarlos del resultado o total. Son los cuadritos vacíos de la notación $\square + \square$, los que ayudan a construir la idea de sumando.

A cierta construcción de sumando, le corresponde una Estrategia de Conteo. Y viceversa, cada Estrategia de Conteo, trae consigo una forma particular de percibir al sumando.

La percepción cada vez más nítida de los sumandos, induce una evolución en las estrategias de conteo, así como en la construcción del concepto de número natural.

En este estudio, a través de las diferentes notaciones, se identifican estrategias de transición entre Contar Todo y Seguir Contando.

Elementos teórico-metodológicos del estudio

Se aplicó un examen diagnóstico a 29 niños de segundo año de primaria de una escuela federal.[1] Este examen permitió indagar sobre conocimientos relacionados con la serie numérica, específicamente el conteo. "¿Hasta qué número sabes contar?" fue la primera pregunta. Así también, se plantearon sumas sencillas para explorar sobre hechos numéricos conocidos por los estudiantes. En un principio se preguntó en lenguaje verbal: "¿Cuántos son 5 y 5?" ¿Cuántos son 8 y 2? y ejercicios similares. Después se pidió que pusieran por escrito sumas, "¿Cómo escribes que cuatro y tres son siete?" Con el objeto de averiguar qué tanto conocen de un número en particular (proceptos elementales, Tall et al 1994)[2] se pregunto: "Escribe todas las sumas que te dan 7" ¿Cuánto le tengo que sumar a 5 para qué dé 7?" "A un número le aumeté 3 y me dio 7 ¿cuál fue ese número?". Las siguientes preguntas fueron formuladas para explorar la idea de sucesor. "¿Cuánto le aumentas a 5 para que te dé 6?" "¿Cómo escribes esa suma?"

A continuación se les pidió realizar suma de dos números tanto de formato vertical como horizontal. Por último, se plantearon problemas verbales que se resuelven con adiciones. Siguiendo la clasificación de Riley et al (1983), uno de los problemas es de Cambio, cuya estructura aditiva es de la forma $a + \square = c$ y otros dos de Com-

[1] Escuela Federal Guadalupe Victoria, México, D.F.

[2] El concepto de procepto elemental desarrollado por Tall et al se describe a continuación en este mismo apartado.

binación (a + b = □). Cabe aclarar que el cuadrito vacío no aparece en ninguno de los ejercicios del examen diagnóstico. Los enunciados de los tres problemas son los siguientes:

- La mamá de Manuel lleva 6 cuadros pintados y quiere hacer 10. ¿Cuántos le faltan?
- Alicia lavó la ropa de su muñeca. Lavó 2 blusas y 3 vestidos. ¿Cuántas prendas lavó en total?
- Anita recolectó algunas flores: primero cortó 4 flores amarillas; más adelante cortó 3 de color lila. Luego cortó 2 rosas más ¿cuántas flores cortó en total?

Los estudiantes que presentaron el examen fueron clasificados en tres grupos, A, B, C. Al primer grupo pertenecen quienes tuvieron una calificación de 9 ó 10. Al grupo B, los que tienen calificación menor a 9, pero mayor que 7.5 y al C, los de calificación menor o igual a 7.5 y mayor que 4.5. Se eligieron a tres estudiantes de las categorías C y B; a uno de la categoría A para realizar entrevistas clínicas videograbadas.

Las características de estos siete estudiantes son los siguientes:

Tania (categoría C) tuvo dificultades con las sumas y los ejercicios relacionados a proceptos. Fue exitosa con el problema más difícil, el primero.

Perla (categoría C) no supo sobre proceptos ni resolvió los problemas. Tuvo buen desempeño en las adiciones.

Itzel (categoría C). De las preguntas sobre proceptos, contesta bien una de seis. Contesta bien las adiciones. No resuelve los problemas.

José Luis (categoría B). Buen desempeño en proceptos (correctos cuatro de seis) y en problemas (bien dos y el primero incorrecto). Resuelve correctamente las adiciones.

Juan Carlos (categoría B). Contesta bien cuatro proceptos de seis. Se equivoca solamente en un problema, el primero. Correctas las sumas.

Blanca (categoría B). Responde acertadamente las adiciones y la mayor parte de los proceptos. Dificultad en el primer problema.

Juan Luis (categoría A). Contesta bien las adiciones y falla solamente en un procepto. No resuelve el problema 1.

Cabe mencionar que las preguntas más difíciles fueron las referentes a la construcción del sucesor (no las contestó ningún estudiante de los 29). En consecuencia, hace sentido elegir un libro de texto donde se fomenta la idea de sucesor para la construcción del número natural.

Con el propósito de afinar el diseño del protocolo de la entrevista, se videograbó a una niña de primero de primaria, Diana. A esta estudiante se le preguntó sobre ejercicios del libro de texto que involucraban situaciones aditivas en la recta numérica. Se concluyó que la complejidad del modelo de la recta interrelacionado con el uso múltiple del cuadrito, requería de un estudio aparte y estos ejercicios no fueron presentados a los otros estudiantes. Se decidió incluir a Diana en el análisis de esta investigación por la riqueza de sus respuestas durante la etapa de clínica.

En síntesis, el protocolo de la entrevista se diseña a partir de ejercicios del libro de texto donde aparecen el mayor número de diferentes expresiones en las que interviene el cuadrito. Estas representaciones simbólicas de la adición se muestran en el apartado Introducción de este artículo (página 1). En el apartado Etapa Experimental del Estudio se describen los ejercicios que conforman la entrevista, organizados para su análisis en seis bloques.

Ahora bien, esta investigación se fundamenta en la teoría de Proceptos de Tall et al (1994). Estos autores apoyados en estudios anteriores como el de Piaget (1952), Dienes (1960) y Sfard (1991), sostienen que los procesos se convierten en conceptos y que las acciones o procedimientos[3] llegan a ser concebidos como objetos mentales. Tall hace notar la importancia del cambio cognitivo de los procesos matemáticos a los objetos mentales manipulables, a lo cual le han llamado reificación o encapsulación. Señala así mismo que los símbolos usados, juegan un papel central en la relación entre proceso y concepto. Se interesa por la forma en que un símbolo puede estar representando un proceso o un objeto. Advierte además que existe cierta ambigüedad entre proceso y concepto expresada por ejemplo, en el simbolismo ***a/b*** y ***a dividido entre b***.

Define **procepto**, como aquella fusión entre concepto y proceso, representados por el mismo símbolo. Un **procepto elemental**, es la amalgama de un proceso que produce un objeto matemático y un símbolo que representa a ambos: el procedimiento y el objeto.

Esta definición permite que el simbolismo evoque ya sea al proceso o el objeto de tal forma que $2 + 3$, puede entenderse como aquello que evoca ya sea, al proceso de adición de dos números, o al concepto de suma.

Los autores describen la encapsulación del concepto de número por medio del conteo:

- A través del procedimiento de contar, se encapsula el concepto de número. (La cardinalidad de un conjunto de objetos es asignada a partir del último elemento contado).
- En aritmética, un **procepto**, es la encapsulación de un número a partir del procedimiento aditivo cuando, al llevarse a cabo la suma de dos números se obtiene otro número. A partir de $3 + 5$, se obtiene 8.
- Si el procedimiento "$3 + 5$" se llega a identificar con 8 ó a fundir en 8, equivale a saber que dos números forman al 8 y que "$3 + 5 = 8$".
- Dado que la simbología juega un papel muy importante en la encapsulación del concepto de número, la finalidad entonces, es que el niño logre ver esta identidad ($a + b = c$) como un todo: construir el 8 por un lado y tener la habilidad de evocar a esta pareja de números que lo forman. (Procepto elemental).
- Muchos **proceptos elementales**, forman un **procepto**, es decir, muchas parejas de números forman al número 8, al concepto de número 8. Por ejemplo $10 - 2$ da 8, así como también $4 \times 2 = 8$.
- En la expresión 3+5=8, se conjugan varias lecturas:
    - un procedimiento a llevar a cabo, $3 + 5$.
    - un objeto a construir, el número 8.
    - que dos números forman a otro tercer número. Procepto elemental. $\square + \square = 8$

[3] Un Proceso es la representación cognitiva de una operación matemática, como el proceso para resolver una ecuación o el proceso para la adición.
Un procedimiento, es el algoritmo para llevar a cabo un proceso.

- Si ya se sabe que 3 mas 5 da 8, tres más cuánto, da 8, $3 + \square = 8$
- Cuánto más cinco, da 8: $\square + 5 = 8$

Así, el **procepto** 8, incluye el proceso de contar 8 y la colección de otras representaciones tales como $4 + 4$, $6 + 2$, $2 + 6$, 2×4, $10 - 2$, etc. Todos estos símbolos pueden ser considerados para representar el mismo objeto y a la vez indican la manera flexible en la que el 8 puede ser descompuesto y recompuesto usando diferentes procesos. La formulación de **proceptos** en las estrategias de conteo **Contar Todo** y **Seguir Contando**, es como sigue:

En **Contar Todo** (figura 1), distinguen tres subprocesos que son independientes:

1) Contar el primer conjunto, 2) contar el segundo conjunto y, luego combinar los dos conjuntos en uno solo y 3) contar todos los objetos.

Se conjetura que la memoria más reciente que el niño tiene en este proceso es el último objeto contado. Esto representa el valor de aquel conjunto que es la unión de los dos conjuntos concebidos a partir de los dos subprocesos:

1) contar tres (uno, dos, tres)
2) contar dos (uno, dos)

El total de este conjunto, cinco, es el último punto de referencia para el niño.

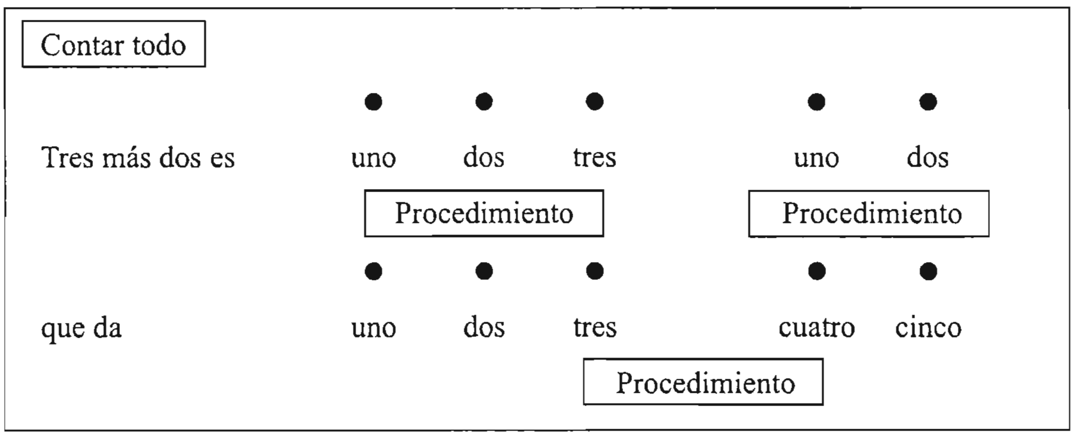

Figura 1

Dado que este procedimiento ocurre en el tiempo, se supone que cualquier relación proceptual entre los datos (3 más 2) y el 5, es oscurecido por lo largo de la rutina de conteo, usada para la solución. La naturaleza de tal procedimiento puede evitar la encapsulación de "$3 + 2 = 5$" como un hecho conocido. Por tanto, los autores sugieren que **Contar Todo** es un procedimiento, extensión del proceso de contar y es improbable que se llegue de una forma directa a la encapsulación de un **PROCEPTO**.

En la estrategia **Seguir Contando** (figura 2), primero se cardinaliza el primer conjunto y luego a este número, se añade una segunda cantidad a través del procedimiento de seguir contando.

De hecho el procedimiento es más sofisticado que en Contar Todo porque hay un doble conteo: $3 + 2$, involucra decir: tengo ya tres, entonces guardo el rastro de "dos números" que es la cardinalidad del segundo conjunto (primer conteo) y luego digo "cuatro y cinco" (segundo conteo).

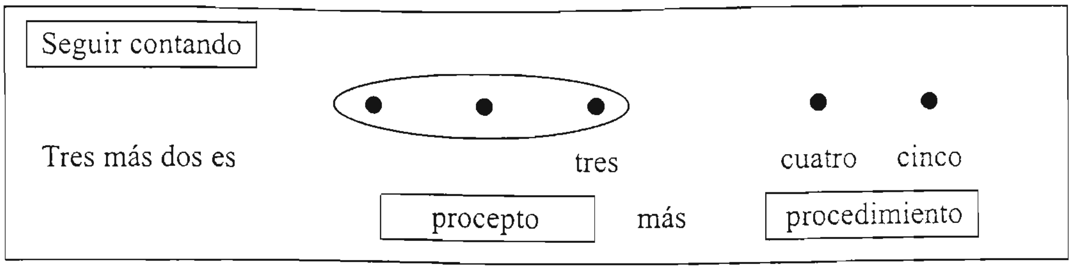

Figura 2

Seguir Contando está formada por un Procepto Elemental más un Procedimiento: un número es incrementado uno a uno, para formar series sucesivas de Proceptos Elementales a través del procedimiento de conteo.

Considerar como Procedimiento a Seguir Contando, puede tener dos interpretaciones cualitativamente diferentes:

— como el Procedimiento (conteo) de adición, y
— como el Procepto de suma.

Si se considera como Procedimiento, es esencialmente más corto y la síntesis del procedimiento Contar Todo. También aquí, el niño es capaz de calcular el resultado, pero no necesariamente vincula los datos con el resultado de tal forma que cierta adición con **x**, **y** números dato y **z** número resultado, sea recordado más tarde como un hecho conocido ($\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}$). Algunos niños con un limitado rango de hechos conocidos, pue-den volverse eficientes en el conteo, utilizando como método universal, esta estrategia.

Seguir Contando, como **procepto**, produce un resultado que puede ser considerado como un procedimiento de conteo y como concepto de número. La notación $3 + 2$, puede representar tanto el proceso de adición y el resultado de dicho proceso, la suma.

Cuando los datos y su suma son guardados en la memoria simultáneamente, entonces el resultado es un hecho conocido significativo, que puede interpretarse como una combinación flexible de **procepto** y **procepto** para dar un **procepto**.

Los autores pretenden examinar las características del desarrollo de síntesis del pensamiento del matemático exitoso. Consideran un **procepto elemental** como la primera etapa del crecimiento dinámico de un **procepto**.

La etapa experimental del estudio

Dado que el simbolismo juega un papel central en la relación entre proceso y concepto (Tall et al, 1994), analizaremos a la luz de esta teoría los ejercicios elegidos del libro de texto de primaria. En estos ejercicios se entrelazan diferentes representaciones de la adición vía el cuadrito vacío, situaciones que amalgaman los lenguajes verbal y numérico en el cuadrito vacío y representaciones gráficas de conjuntos de objetos (lenguaje pictórico). Es esta ambigüedad en el simbolismo lo que origina el pensamiento flexible en el sujeto facilitando u obstruyendo según el caso, la construcción del número natural. En relación al lenguaje pictórico existen trabajos como el de Campbell (1981) donde exhibe las diferentes maneras en que los estudiantes pueden leer las ilustraciones que aparecen ligadas a situaciones aditivas. Byrne y Mason (1976) exponen la falta de concordancia entre lo pictórico y lo verbal, mostrando que los alumnos ignoran lo verbal y basan su respuesta únicamente en la representación pictórica. Santos (1997) observa que el estudiante no sabe leer las ilustraciones como la enseñanza y el libro de texto lo requieren. Encuentra casos en que los alumnos sólo se basan en la ilustración para contestar los ejercicios. Si se les advierte que lo "escrito" también tiene que considerarse, arriban al resultado correcto.

Es importante señalar, que en la presente investigación no hay fase de enseñanza ni el estudio de las ilustraciones es central. Se pretende únicamente analizar el comportamiento espontáneo de los niños ante un texto matemático que incluye lenguajes diversos. Se trata de señalar cómo pequeñas variaciones en el simbolismo producen cambios sustanciales en la comprensión del texto. Vale recordar que los libros de texto gratuito producidos por la SEP tienen una amplia difusión en el país. El que nos ocupa es el libro de texto de primero de primaria, versión 1980 que no sufrió cambios radicales durante un período de 10 años y que era vigente al inicio de esta investigación. La versión actual de este libro involucra tambien al cuadrito vacío en sus contenidos aritméticos, relacionándolo con otros lenguajes. Utiliza representaciones más sencillas y generalmente, con un único cuadrito para colocar el total de objetos contados. También recurre al uso del cuadrito vacío para escribir el signo de una operación aditiva. Por ejemplo en $5 \square 3 = 2$; $6 \square 4 = 10$ y casos similares (Matemáticas. Primer Grado. 1997). El presente estudio pretende advertir de la complejidad del simbolismo de los textos matemáticos y metodológicamente hablando, el análisis aquí realizado puede utilizarse como punto de partida para la comprensión e interpretación de la versión actual.

A continuación, se examinan las primeras cuatro unidades del libro de texto, versión 1980, referentes a la construcción de los números del 1 al 9 por medio del proceso aditivo. Existen 22 ejercicios en el Libro del Niño analizado, y de ellos sólo 18 contienen en su estructura cuadros vacíos. Se escogieron a los más representativos en términos de la diferente expresión aditiva, lo cual quedó resumido en 6 bloques. Estos bloques se describen a continuación.

Se enfatiza la identificación de la acción de añadir y los conjuntos sumando (datos) del proceso aditivo. El objeto, resultado de la operación no es relevante.

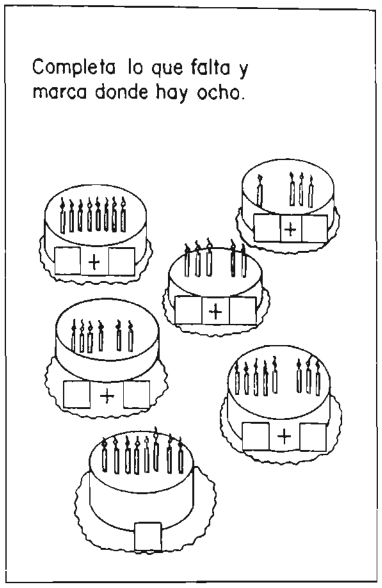

Figura 3b

Bloque 2. En estos ejercicios, las expresiones aditivas son del tipo □ + □, es decir, sólo se presenta la parte izquierda de una igualdad del tipo a + b = c. En algunas ocasiones, se plantean dos sumandos, en otras 3 ó 4. No hay Total Se enfatiza la identificación de los conjuntos sumando (datos) del procedimiento. Se intenta que se distingan diferentes sumandos de un número.

Figura 4

Bloque 3. La expresión es de la forma $\square + \square$.

$$\square.$$

No tiene signo igual. Se trata de poner cada sumando en el cuadrito correspondiente y realizar la suma, escribiendo el resultado en el cuadrito respectivo. De esta manera se pretende que el estudiante identifique las partes de una suma, así como diferentes sumandos de diversos números.

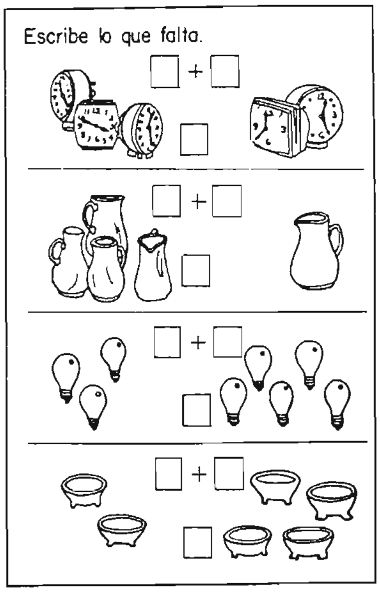

Figura 5

Bloque 4. Las expresiones son de la forma

- a) $\square + \square = \square$
- b) $\square = \square + \square$.

Notar que se incluye al signo igual en ambos casos

En a) $\square + \square = \square$ es necesario,

- identificar la situación aditiva de unión,
- identificar los sumandos pictóricamente.
- identificar los sumandos simbólicamente
- realizar la operación aditiva.
- relacionar sumandos con resultado o total.

Se observa una amalgama de procesos, procedimientos y simbolismo tanto para la adición como para el concepto de número.

Dos de los tres ítems de este caso, están redactados a manera de problema verbal. En uno de ellos (Figura 6), se combinan el lenguaje natural, los cuadritos respectivos al primer sumando, segundo sumando y el resultado o total. También combinado pero ahora, con el lenguaje Pictórico (las flores o los vestidos) aparece la expresión aditiva que caracteriza a este bloque ($\square + \square = \square$).

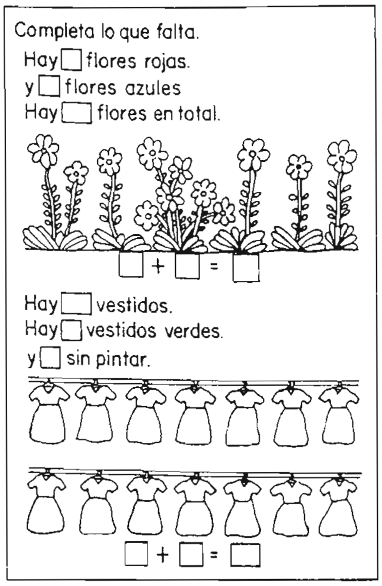

Figura 6

En otro de los ejercicios (Figura 7), los cuadritos no están combinados con el lenguaje natural, sino que hay dos columnas. Una, la de la izquierda, consiste del lenguaje natural y la de la derecha corresponde a los cuadritos que se relacionan con la primera columna: entre ellos aparece la expresión que nos ocupa en este bloque.

$\square$
$\square$
$\square + \square$
$\square + \square = \square$

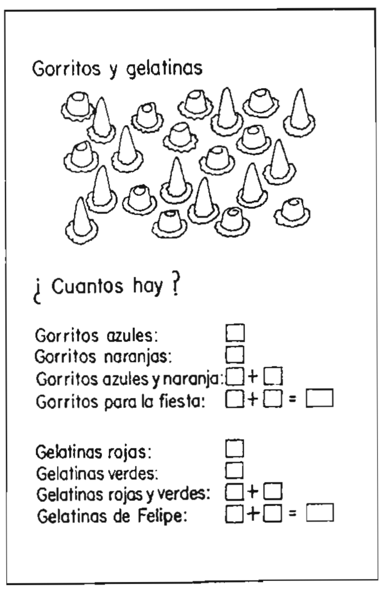

Figura 7

En b), $\square = \square + \square$ últimos dos renglones de la figura 8, piden que se obtenga primero el resultado o total y luego se escriban los sumandos. (Utilización del pensamiento proceptual flexible). Notar que los dos primeros renglones son del tipo a), $\square + \square = \square$.

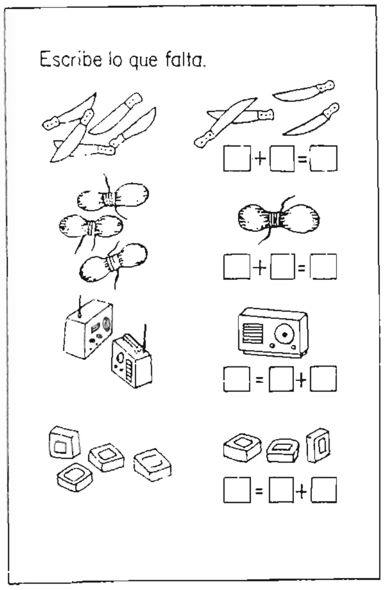

Figura 8

Bloque 5. La representación aditiva de este bloque es del tipo: $a + \square = c$, $\square + b = c$ y $a + b = \square$. En este ejercicio, Figura 9, la situación es puramente algorítmica, (Evocación de Proceptos).

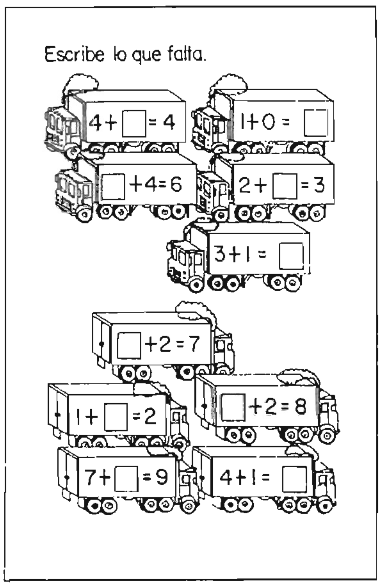

Figura 9

Bloque 6. La simbología de la adición, es casi completa, pues sólo le falta el signo igual (=), en dos diferentes formatos:

a) $a + \square \quad \square$
b) $\square + b \quad \square$

En la figura 10, la representación pictórica de los sumandos está al centro del renglón, separando a las expresiones antes mencionadas. Se quiere hacer ver que un número lo podemos formar de diferentes maneras, [construcción de diferentes proceptos elementales de un número]. En este caso siempre se trata del 4: 3 + 1, 1 + 3, 2 + 2, 1 + 3. En la figura 10 aparecen cuatro renglones. En los tres primeros, la expresión simbólica es del tipo a). En el último renglón es del tipo b). En estos ejercicios, se debe lograr lo siguiente:

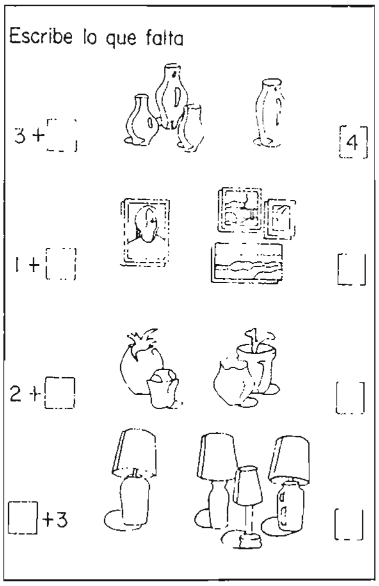

Figura 10

- identificar la situación aditiva de unión,
- identificar a los sumandos, pictóricamente.
- identificar a los sumandos, simbólicamente y realizar la operación aditiva.
- Identificar al total.
- relacionar sumandos con resultado o total.
- Reunión del proceso, procedimiento y simbolismo para la construcción del concepto de número vía el proceso aditivo.

Análisis de los errores en relación a la estructura aditiva

En las respuestas dadas por los estudiantes, se encontraron básicamente tres categorías según la forma de contestar en los cuadritos vacíos. Se enuncian y describen a continuación:

Estrategia A: Respuesta en un sólo cuadrito.
Estrategia B: Respuesta en dos cuadritos.
Estrategia C: Respuesta en todos los cuadritos.

En la estrategia **A**, los estudiantes usan el primero de dos o más cuadritos para escribir el resultado o total, es decir, la cardinalidad de la unión de conjuntos, los demás cuadritos quedan vacíos. Los ejercicios que utilizan la estrategia **A** pertenecen a los Bloques 1, 2 y 4. En los bloques 1 y 2 se hace énfasis en el procedimiento más que en el objeto, es decir, en la identificación de los sumandos. En el 4, el énfasis es tanto en el procedimiento como en el objeto.

Para la estrategia **B** existen dos modalidades en las respuestas, **B1** y **B2**.

B1 corresponde a escribir en el primer cuadrito, la cardinalidad de la unión y luego en el segundo cuadrito, la cardinalidad de alguno de los conjuntos sumando. **B2** se refiere a invertir los pasos, es decir, escribir en el primer cuadrito la cardinalidad de uno de los conjuntos y en el segundo, la cardinalidad de la unión.

La estrategia **B1** se presenta en: BL 1, BL 2 y BL 4. La estrategia **B2** surge en BL 1 (dos cuadritos), BL 2 (dos, tres y cuatro cuadritos), BL 3 (tres cuadritos) BL 4 (tres cuadritos).

En los bloques 1 y 2, se enfatiza el procedimiento i. e. los sumandos. En BL 3 y BL 4 se pregunta por los sumandos y por el total. Además, en BL 4 se incluye al signo igual (=); en BL 3, no.

En las estrategias de resolución de estos ejercicios, se puede apreciar la aparente necesidad de no dejar en blanco algún cuadrito, de tal forma que se presenta una evolución en **B** con respecto a **A**. Es posible que la notación de 2 ó mas cuadritos, los esté obligando a considerar "partes" o "sumandos", es decir, a separar el Todo. Esta apreciación es mas burda en **B1**, que en **B2.**

La estrategia **B2**, se parece mucho a la estrategia Seguir Contando (SC). En SC, 1) se cardinaliza el primer conjunto, 2) existe un proceso de ir añadiendo los elementos del segundo conjunto y 3) se llega a la obtención del Total. En **B2**, se cardinaliza el primer conjunto (escritura en el primer cuadrito) es decir, se lleva a cabo el paso 1) de SC y se continúa con el conteo de los objetos del segundo conjunto escribiendo en el segundo cuadrito el total de objetos: el paso 2) ir añadiendo, no lo pueden dejar por escrito, llegan de inmediato a la obtención del Total: $\boxed{7} + \boxed{8}$ en lugar de $\boxed{7} + \boxed{1} = \boxed{8}$. (Bloque 1, figura 3a, pág.)

$\boxed{8} + \boxed{}$, Estrategia A, conteo centrado en CT, no hay percepción de los sumandos

$\boxed{8} + \boxed{7}$, Estrategia B1, empiezan a desprenderse de CT: Perciben además del todo a uno de los sumandos.

$\boxed{7} + \boxed{8}$, Estrategia B2 (SC) como procedimiento (ver fig. 2, pág. 5), están a un paso de percibir a los conjuntos sumando. Y de llegar a

$\boxed{7} + \boxed{1} = \boxed{8}$ que es (SC) como procepto de suma: proceso de adición y el resultado de dicho proceso (ver fig. 2, pág. 6)

Se observa que la concepción de los conjuntos sumando está muy relacionada con la estrategia de conteo en la que se encuentran. En **A**, están muy centrados en la estrategia Contar Todo. En **B2**, están a un paso de: 1) cardinalizar el primer conjunto, 2) cardinalizar el segundo conjunto y 3) sumar. En **C**, el estudiante, escribe en todos los cuadritos el mismo resultado: la cardinalidad de la unión de los conjuntos. Los ítems pertenecen a los bloques 2 y 6. En BL 2, el énfasis se encuentra en el procedimiento (dos, tres y cuatro cuadritos). Esto implica percibir lo que se va a sumar. Responder con la estrategia **C** equivale a no poder dejar por escrito lo que se va a sumar. Se saltan este procedimiento y se van hasta el total.

En BL 6, se busca la relación 1 a 1 entre sumandos físicos y simbólicos, así como el vínculo entre procedimiento y objeto. Los niños que no advierten esto, responden escribiendo el total en todos los cuadritos. Se observa que **B1** y **B2** son dos estrategias de transición entre **A** y **B**, Contar Todo y Seguir Contando, es decir, poder identificar a los sumandos.

Con lo anterior se muestran los errores que han cometido algunos estudiantes, en la construcción del concepto de número a partir del proceso aditivo (proceso de añadir, juntar o combinar) y con el simbolismo para la adición (sumandos y objeto o número a construir). Se ha visto cómo en los primeros dos bloques: BL1 y BL2 se enfatiza más los sumandos que el objeto a construir. En BL 3, BL 4, BL 5 y BL 6, se enfatiza simultáneamente a los sumandos y al número a construir. Se presentan dificultades para la distinción de estos elementos.

Análisis de los errores en relación a los lenguajes pictórico y simbólico

Se examinará ahora, la dificultad que tienen los estudiantes para visualizar a los sumandos, analizando la interrelación que guarda el cuadrito vacío **o**, con la estructura gráfica (lenguaje pictórico) así como también con la representación simbólica de los ejercicios del libro en cuestión.

Errores en relación al lenguaje pictórico

Los errores en torno a lo pictórico, donde se representan situaciones cotidianas por medio de ilustraciones, son cuatro, denotados por **P1**, **P2**, **P3**, **P4**.

P1: El estudiante piensa equivocadamente que los elementos de uno o dos renglones son los elementos del conjunto sumando. No identifica adecuadamente la acción de añadir. Lo anterior se puede apreciar en el siguiente diálogo de Juan Carlos (C) con la Entrevistadora (E)
E: Escribiste un tres y un dos. ¿cuáles son esos tres? (ver fig. 11)
C: Estos (señalando los tres primeros pantalones de la hoja) y dos (señalando los últimos dos pantalones)
E: Vuelve a leer tu hojita..., desde el primer renglón, que dice "Hay uno" y ¿en la figura qué dice?
C: Un pantalón...
E: ...Hay un pantalón... y en el siguiente renglón ¿qué hay?
C: Dos pantalones.
E: Hay dos pantalones y quién más está ahí...
C: Una señora...
E: ¿Qué está haciendo la señora?
C: Tendiendo
E: Está tendiendo... ¿qué tiende?
C: Un pantalón.
E: Está tendiendo un pantalón, entonces ¿antes cuántos había?

C: Tres.
E: Antes había tres, y ahora ¿cuántos hay?
C: Cinco.

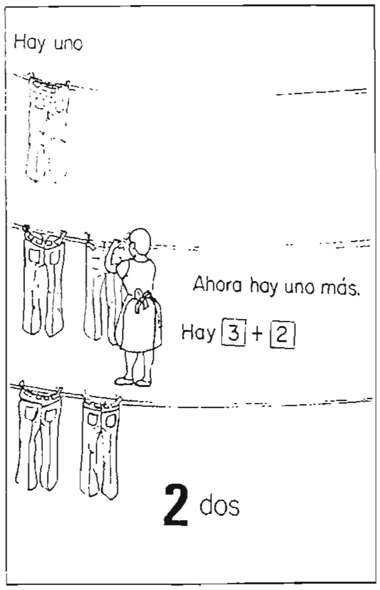

Figura 11

P2: Sin discriminar entre los cuadritos sumando y total, escribe en cualquiera de ellos, la cardinalidad del conjunto más cercano. Esto muestra que no distingue lo que es un sumando del total. Ejemplificamos con Juan Luis (J): En el segundo renglón (ver fig. 12)
J: (Observa el ejercicio y en el segundo cuadrito de "1 + □ □" escribe 3. Luego, continúa con la explicación:)
Bueno aquí son tres [refiriéndose al conjunto de tres cuadros y escribiendo 3 en el cuadrito de 1 + □]. El tercer renglón lo resuelve exactamente de la misma forma.

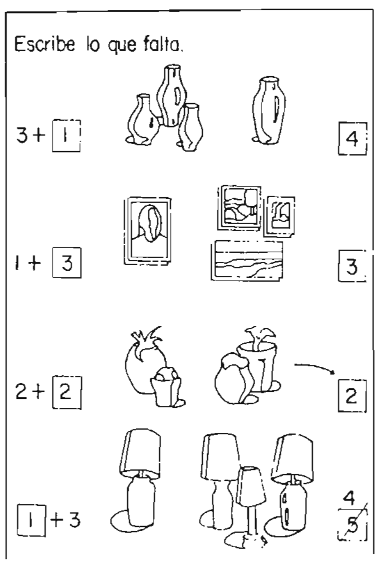

Figura 12

P3: Recurre a una partición rebuscada, de uno de los conjuntos sumando. Elige el conjunto colocado encima de la notación aditiva representada por cuadritos. Nótese que no tiene claro el procedimiento aditivo.
En el primer renglón (ver fig. 13)
[El estudiante centra su atención en el conjunto que está por encima de la expresión □ + □ = □ y su conteo es de izquierda a derecha en este conjunto]. Verbaliza:
J: **uno, dos... aquí,** [Se refiere al segundo cuadrito de la expresión □ + □ = □]
le corresponde el número 2. [Escribe 2. Continúa con el conteo de los objetos que sobran de ese mismo conjunto].
Uno, dos, aquí [Se refiere al primer cuadrito de la expresión antes mencionada.]
también le corresponde el número dos, [Escribe el número 2, en el cuadrito.]
y si los sumamos nos dan cuatro. [Escribe 4].

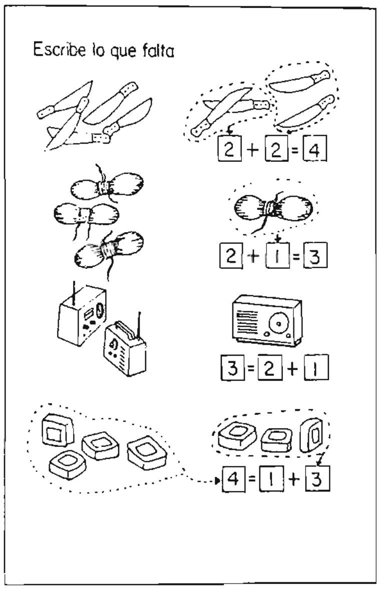

Figura 13

P4: Suma una cantidad explícita en lenguaje natural, con una cantidad representada pictóricamente. Hay una interacción incorrecta del lenguaje natural con el pictórico:
De la oración "Después puso *uno* más" escrita en el segundo renglón del ítem (fig. 14), toma el *uno* y lo suma a los 3 platos que aparecen en este mismo renglón. Escribe 4 en el primer cuadrito de □ + □, dejando fija su atención en este segundo renglón:

Errores en relación al lenguaje simbólico

En cuanto a la dificultad que tienen los estudiantes para visualizar a los sumandos, en el lenguaje simbólico, detectaron cuatro errores **S1**, **S2**, **S3**, **S4**.

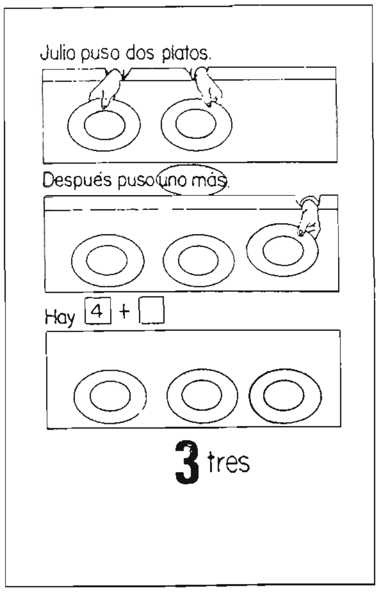

Figura 14

S1: Realizan generalizaciones equivocadas.

Las generalizaciones equivocadas ocurren porque los estudiantes no tienen clara la noción de conjunto sumando ni han percibido cómo se representa éste simbólicamente. Tampoco han llegado a establecer la relación uno a uno entre sumando físico y sumando simbólico, no diferenciando entonces las siguientes notaciones: a) □ + □ = □ y b) □ = □ + □. Uno de los ítems (el de los cuchillos fig. 15) consiste de 4 renglones, en los primeros dos, la notación es de la forma a) y en los restantes, de la forma b). Algunos estudiantes no advierten este último cambio, y contestan como si fuera de la forma a). Así José Luis (JL), resuelve correctamente los dos primeros renglones y en el tercer renglón, cuenta el primer conjunto de radios (de izquierda a derecha):

JL: **Uno, dos,**
[En el tercer renglón escribe 2 en el primer cuadrito de □ = □ + □. Luego, cuenta el segundo conjunto:]
JL: **Uno.**
La operación la realiza mentalmente:
JL: **Tres...**
En el cuarto renglón hace exactamente lo mismo que en el anterior.

S2: Escribe en el cuadrito, el número más cercano. Es parecido a P2, pero en este caso no hay conjuntos de objetos, hay sólo números.
En la figura 6, CAMIÓN 1: 4 + o = 4 se presenta el diálogo siguiente:
T: **Escribe lo que falta. Cuatro para llegar... ¡ah ya, ya! Cuatro más cuatro, son cuatro.**
[Escribe en el cuadrito, 4; ella tiende a repetir el número más cercano al cuadrito].
CAMIÓN 2: 1 + 0 = □

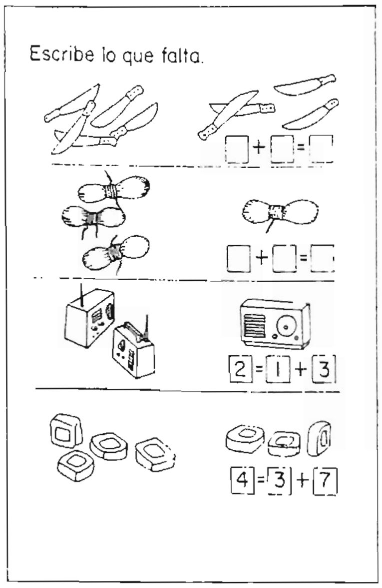

Figura 15

T: **Una más cero, cero.**
[Escribe cero en el cuadrito, repite el número que está mas cerca del cuadrito.]
CAMIÓN 4: 2 + □ = 3
T: **Dos para llegar a tres. Dos, tres.**
[Escribe 3]
CAMIÓN 7: 1 + □ = 2
T: **Una para llegar a dos. Una, dos.**
Escribe 2.

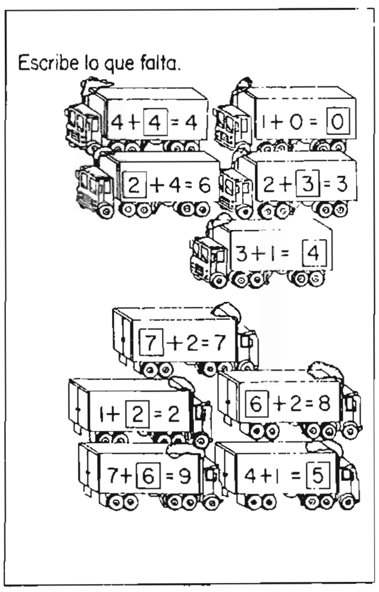

Figura 16

S3: Suma dos números, no importa que uno sea sumando y el otro total. El resultado lo escribe en un cuadrito. Tampoco importa si éste es para escribir un sumando o un total.

El ejemplo se caracteriza porque no hay objetos que contar, a diferencia de los anteriores. Se está suponiendo con ello, que el niño ha vinculado ya ambos aspectos, el de procedimiento y el conceptual, refiriéndose a la interrelación en la que el mismo objeto es representado por varios símbolos, es decir, $1 + 1 + 1$, $2 + 1$, $1 + 2$, $4 - 1$, etc. Esto permite que el número sea descompuesto y reconstruido en una variedad de formas reflejando los diferentes procesos disponibles para producir el mismo objeto (Tall et. al., pág. 122). En la fig. 17, se muestra el siguiente ejercicio resuelto por Diana.

D: **Escribe lo que falta.**

CAMIÓN 1: $4 + \square = 4$

D: **Tengo cuatro.**

E: Tienes cuatro...

D: **Y ¿cómo... aquí pongo cuatro?,**

[Refiriéndose al cuadrito vacío. No sabe para qué es el cuadrito].

D: **¿y aquí pongo la resta, digo la suma?**

[Refiriéndose al camión 2. En el camión 2 está $1 + 0 = \square$]

D: **Cuatro y cuatro, uno, dos, tres, ¡son ocho!**

"Cuatro y cuatro son ocho..." ($4 + \square = 4$). La niña no distingue que le están preguntando por un sumando. Es claro que esta habilidad o flexibilidad de "procesos disponibles" a los que se refiere Tall, no son accesibles todavía en ella.

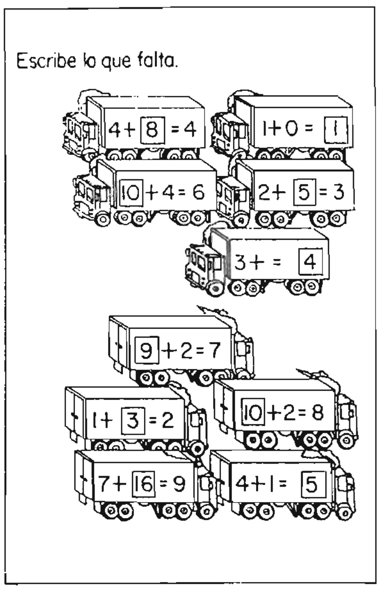

Figura 17

Simbólicamente el concepto de suma tampoco está disponible. No recurre a un conteo adecuado para encontrar las soluciones. Los demás casos los resuelve exactamente de la misma forma.

S4: No establece una relación uno a uno entre cuadritos:

- sumando pictórico, con cuadrito sumando y,
- total pictórico, con cuadrito total.

Diana (D), lee el enunciado del ejercicio (fig. 18)

D: **Hay vestidos y vestidos verdes y sin pintar, entonces cuento todos los que son... pintados,** [empieza a contar los vestidos verdes:] **uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis... seis**. [Escribe 6, en donde debía escribir el total de vestidos, los pintados y los sin pintar, que son 14].

E: Bueno, luego que más?

D: **Luego, ... aquí... otra vez contar los...** [señala el renglón donde está escrito: "vestidos verdes", por eso dice "otra vez". Señala el renglón siguiente y afirma:] **Ahora contar sin pintar**...]

E: Explícame...

D: **Contar los..**

E: Explícame...qué te están preguntando.

D: **Hay ver...**

E: Aquí dice hay... [refiriéndose al primer renglón].

D: **Hay vestidos ver**... [se refiere al segundo renglón].

E: Hay vestidos, ¿no? dice: hay... tu pusiste hay seis vestidos. ¿no?

D: **¡Ay no! ¡Ya me equivoqué! Hay uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce vestidos,** [ella entiende ahora, que el universo son todos los vestidos y los cuenta].

E: ...Catorce vestidos...

D: **Entonces los pongo arriba**... [anota 14 arriba del 6, que escribió antes].

E: ...sí...

D: **14 vestidos verdes** [Vuelve a mencionar "verdes" y no son los verdes, son el universo].

E: [Lee, el enunciado, renglón por renglón]. Hay catorce vestidos.

D: **Hay vestidos verdes. Hay uno, dos, tres, seis vestidos verdes. Y sin pintar, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho** [Escribe 8 en el lugar correspondiente].

E: ...ocho...

D: **Entonces, son seis, digo, catorce,** [refiriéndose a los números que ha de poner en los cuadritos
vacíos que están al finalizar el ejercicio] **más,** [cuenta 6:]
uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis... son veinte... [sabe que 14 y 6 son 20]
es que no sé qué es, catorce...y seis,... veinte, [al universo, que es de 14, le añade los 6 vestidos verdes y los 8, sin pintar:]
veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, veinticinco, veintiséis, veintisiete, veintiocho. ¡Veintiocho!. [escribe 14, 20 y 28 en los cuadritos, respectivamente.

Figura 18

Diana ha aprendido a sumar todo y poner el resultado en el cuadrito después del signo igual. Entonces suma 14 con 6 y a 20 le agrega 8. Escribe 28 como el resultado total. En este caso, o + o = o significa para Diana, el proceso aditivo y el resultado suma. Sin embargo, no pudo vincular adecuadamente la representación pictórica (vestidos) con la representación simbólica (o + o = o).

A continuación se presentan reunidos en una sola tabla, los errores y aciertos de los estudiantes. Los aciertos son marcados con 1; con asterisco (*) los ejercicios que no fueron planteados. Los errores debidos a los lenguajes simbólicos y pictóricos, **S1, S2, S3, S4, P1, P2, P3, P4** aparecen para cada estudiante. Los sujetos están ordenados de mayor a menor número de errores.

La tabla 7 también muestra las estrategias de conteo erróneas **A**, **B1**, **B2**, **C**, utilizadas por los alumnos. Se observa que un mismo estudiante cambia de estrategia en ejercicios distintos.

	BL 1a					BL 1b	BL 2			BL 3	BL 4				BL 5	BL 6
	1	2	3	4	5	6	10	13	15	11	12a	12b	15	16	14	9
	□+□ numeral					numeral □+□	□+□ □+□+□ □+□+□+□			□+□ □		□+□=□ □=□+□			a+b=□ a+□=c □+b=c	a+□ □ □+b □
Tania	A	A P4	B1	A	A	A	A	C	A	B2 P2	1	S1	A	S4	S2	P2
Itzel	B1	B2 P1	B2	B2	B2	B1	A	1	1	1	1	S1	1	P1 S1 S4	S3	C P2 S1
Juan Carlos	P1	P1	B2	B2	B1	B2	1	1	1	B2	1	S1	A S4	1	1	1
Diana	*	*	*	B1	*	*	B2	*	*	*	1	S1	S4	B2	S3	C
														S4		P2 S1
José Luis	1	1	1	1	1	1	A	*	B1	1	1	S1	B1	B1	1	1
Perla	1	1	1	1	*	A	1	1	A C S4	1	1	1	1	1	1	S1
Juán Luis	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	P3	P3	1	1	1	C P2
Blanca	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

TABLA 7

Se consideró importante, analizar si los errores del tipo pictórico o simbólico, implicaban algunos de los errores del tipo **A**, **B1**, **B2**, **C**. Sólo en el caso de Itzel en el Ítem 2, P1 implica B2. Es decir que la lectura por renglones de lo pictórico da lugar a la estrategia B2 (cardinalidad del primer conjunto sumando más cardinalidad del Todo). Las estrategias B1, B2 y C dan lugar a S4 (que no sepan distinguir los sumandos ni física ni simbólicamente, implica que tampoco podrán llegar más allá, hasta ligar primer sumando simbólico con primer sumando simbólico de la expresión $\square + \square$ (BL 4, fig. 7). El error S3 indica un nivel muy bajo aditivamente hablando, pues no distinguen la suma. Suman, por ejemplo, el sumando **a** con el total **c**, para poner el resultado en el cuadrito de $a + \square = c$.

Tania es una de las estudiantes que más dificultades presenta. De los 14 ítems de la entrevista (inicialmente fueron 16, se eliminaron 2) se ha equivocado en 11 de la forma **A**, **B1**, **B2**, **C**. A ella le ha costado trabajo identificar a los sumandos, lo cual va logrando poco a poco si se observa la propia evolución de sus respuestas. *En los dos primeros ejercicios, su desempeño es del tipo A, (escribe en el primer cuadrito el resultado de contar todo, dejando vacío el segundo cuadrito). En el tercer ítem usa **B1** (escribe el todo en el primer cuadrito y en el segundo, la cardinalidad de cualquiera de los sumandos). En los próximos 3 ejercicios (ítems 4, 5, 6) vuelve a la estrategia **A**.*

Conclusiones

En relación a las estrategias de conteo

Durante el desarrollo del concepto de número por el niño en los ejercicios analizados, se presentan las siguientes situaciones:

Quienes cometen el error tipo **A** (usan el primero de dos o más cuadritos para escribir el resultado o total, los demás cuadritos quedan vacíos, Bloques 1, 2 y 4), no encapsulan el concepto de número aditivamente, esto es, no logran ver la simbología $\square + \square$ de forma unificada una vez que su respuesta es:

$\boxed{8} + \square$ ocho

ocho

Aquí el único procepto construido es la cantidad "ocho" (resultado del conteo total de objetos). No distinguen en el proceso a los sumandos. Las situaciones aditivas de añadir, juntar o combinar no las perciben en el ítem.

No diferencian un sumando del resultado ó total. De hecho, no se pueden desprender del Todo. Lo único que han hecho hasta ahora, es asignar un cardinal a un conjunto. De algún modo, es lo que construyen en Contar Todo, un todo que es 8 por ejemplo y que al escribirlo en $\square + \square = 8$, lo tienen que hacer en partes: considerar a una de sus partes (7), y luego a otra de sus partes (1). Se trata del proceso inverso (descomponer en partes) de componer un Todo. Esta situación se presenta cuando apenas están aprendiendo a obtener el Todo, a partir de estar asignándole un cardinal a un conjunto.

En estos ejercicios se da mayor importancia al procedimiento ($\square + \square$) que al objeto a construir.

Esta posibilidad de contemplar las partes del número (sumandos) está en función de las etapas de conteo en las que se encuentra el niño.

- En el error tipo **B1** (escriben en el primer cuadrito, la cardinalidad de la unión y luego en el segundo cuadrito, la cardinalidad de alguno de los conjuntos sumando: 8 + 7, Bloques 1, 2 y 4), su atención está todavía muy centrada en el Todo, pero debido a la notación $\square + \square$, se ven forzados a pensar en algo más que en el Todo y es entonces cuando colocan a uno de los sumandos en el otro cuadrito. Se advierte que no les gusta dejarlo vacío. Empiezan someramente a distinguir la diferencia entre sumando y total.

  Es de llamar la atención que de entre los conjuntos cuyas cardinalidades son 7 y 1 elementos, eligen al cardinal más grande. Captan que el 7 interviene en la construcción del 8.
- En el error tipo **B2**, invierten los pasos de B1 (escriben en el primer cuadrito la cardinalidad de uno de los conjuntos y en el segundo, la cardinalidad de la unión, por ejemplo 7 + 8; los Bloques son 1, 2, 3 y 4a).

  Puede pensarse que ésta es una refinación de la estrategia anterior, dado que comprenden igual que en **B1**, la ayuda del 7 en la construcción del 8 y que va primero que el 8. La notación $\square + \square$, vuelve a influir para que se piense en los sumandos. La diferenciación entre sumando y total es mas fuerte.
- Responden con la estrategia **C** (cuando hay más de dos cuadritos, como en $\square + \square + \square$). Escriben en todos los cuadritos el mismo resultado, la cardinalidad de la unión de los conjuntos (Bloques 2 y 6). Una vez que la cualidad binaria no es clara en **o** + **o**, ésta no la pueden generalizar a $\square + \square + \square$ ó a $\square + \square + \square \quad \square\square$. Al no tener estrategias disponibles de 3 ó 4 pasos, se desconciertan con tantos cuadritos, respondiendo lo más simple, que es el Todo, o sea regresan a la estrategia más primitiva.

Las estrategias **A** y **C** son muy parecidas. En la primera, contestan el Todo sólo en uno de los cuadritos, mientras que en **C**, contestan el Todo, en todos los cuadritos. Siguen sin tener clara la diferencia entre sumando y total.

De las situaciones descritas anteriormente se concluye:

Los estudiantes no distinguen entre total y sumando.

Los cuadritos vacíos en la notación $\square + \square$,
ayudan a construir la idea de sumando.

y por lo tanto,

La notación simbólica $\square + \square$ induce una evolución
en las estrategias de conteo.

La percepción de los sumandos ayuda a la
evolución de las estrategias de conteo.

En este estudio se identifican,

Estrategias de transición entre Contar Todo y Seguir Contando.

En relación a los lenguajes pictórico, simbólico y verbal:

Existe una tendencia en los estudiantes a interrelacionar los tres tipos de lenguajes. Esto ayuda a la buena o mala resolución del ejercicio. A continuación se muestran las dificultades que produce la amalgama de los tres lenguajes:

- En los ejercicios de la forma **a** + □   □, **a** en el conjunto de los Naturales, (ver BL 6, fig. 10) la ilustración es presentada en medio de dicha expresión simbólica. Los estudiantes no llegan a vincular los sumandos con el total. La percepción del ejercicio no es global, y mezclan erróneamente lo simbólico con lo pictórico. Existen muchas fallas en la resolución de este tipo de ítem, incluso niños que se desempeñaron bien en la entrevista, 5 de un total de 8, se equivocan.

  Existen otros ejercicios en los que no pueden vincular el procedimiento (sumandos) con el objeto. En ellos, se pide en Lenguaje Verbal que se subrayen o marquen aquellas expresiones □ + □ en las que se obtiene el número 8. El numeral ocho, que es el objeto a construir, está muy alejado, del procedimiento que lo construye, así como de los objetos (ilustración) a considerar. En este ejercicio todos los estudiantes mostraron, con sus respuestas mucha confusión, (del BL 1, fig. 3b). Es análogo al caso anterior (BL 6, fig. 10)
- En algunos ejercicios, la expresión □ + □ divide a la ilustración pictórica en lo de arriba y lo de abajo. Este formato los confunde (BL 1, fig. 3a).
- Los estudiantes no recuperan del lenguaje pictórico, las acciones dinámicas como añadir pantalones, platos y flores, (figs. 11, 14, 18) Algo dinámico lo consideran estático, lo cual los lleva a errores en sus respuestas.

  Por otra parte, existen ejercicios en que la interrelación de los tres lenguajes PICTÓRICO, SIMBÓLICO Y VERBAL resulta afortunada y lleva a resultados correctos. Estas situaciones son las siguientes:
- Ejemplos para una buena resolución son los ejercicios cuya representación simbólica es de la forma

  □ + □
□

  Junto a cada cuadrito sumando, se sitúa su conjunto pictórico, de tal modo, que la relación 1-1 entre conjunto y cuadrito, se puede establecer fácilmente. Además los sumandos quedan diferenciados del resultado al estar éste un renglón por debajo de la notación (□ + □) exactamente abajo del signo más (+). (BL 3, fig. 5).

  En el desarrollo de las entrevistas se observa agilidad y soltura en la resolución de estos ítems. Sólo dos estudiantes de ocho, se equivocan. Este tipo de ejercicios puede conducir a la construcción de proceptos elementales: la construcción de un número vía el "procedimiento" para llevar a cabo una suma (□ + □), en donde **se distinguen** y construyen (al asignar el cardinal respectivo) los dos sumandos.
- Otro ítem con muchos aciertos es aquél cuya expresión simbólica es □ + □ = □, (BL 4, fig. 6). Sólo 1 estudiante de los 8, se equivoca.

  Algo común que tienen estos dos últimos ejercicios, que pudiéramos decir son "fáciles", es

1) la notación simbólica está toda junta, permitiéndoles discriminar entre sumandos y total.
2) Estos dos ítems son contiguos en el diálogo. Es posible que éste sea el momento álgido de la entrevista, en el cual los chicos empiezan a distinguir los sumandos del total.

- Sí la expresión simbólica está cerca de la representación pictórica, se tienen menos errores, que cuando está alejada, como en el ítem de los árboles (BL 2, fig. 4).

Es importante señalar que los buenos resolutores son capaces de construir los proceptos elementales, sin ser afectados por la multiplicidad de formatos pictóricos en los ejercicios. Sin embargo, la población estudiantil en general leerá de diversas formas los textos matemáticos y el simbolismo mostrará ambigüedades para el lector. Estos hechos deben ser considerados en la enseñanza de cualquier tema escolar.

Finalmente, vale recordar que el uso del cuadrito vacío invade también el dominio multiplicativo de expresiones y el pre-álgebra. Es necesario advertir que en esta última, el cuadrito vacío puede ser un obstructor cuando la solución buscada es un número negativo. En Gallardo (1995) se muestra que en ecuaciones de las formas $\square \pm a = b$, $a \bullet \square = b$ y $a \bullet \square \pm b = c$ con a, b, c números enteros, el cuadrito vacío contribuye al evitamiento de la solución negativa por su connotación inherente de "lugar a ser llenado". El estudiante busca generalmente un número positivo "para llenarlo".

Bibliografía

Arana, A. (1996). La adquisición del concepto de número vinculado al proceso aditivo en niños de primaria: el uso del cuadrito vacío ($\square$). Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN-México.

Byrne, M.A. y Mason, G.E. (1976). When pictures and word conflict. Elementary School Journal V 76, pp. 310-314.

Campbell, P. (1981). What do children see in texbook pictures? Arithmetic Teacher. V 59, 2, pp. 12-16.

Dienes, Z.P. (1960) Building up mathematics. London: Hutchinson Educational.

Gallardo, A. (1995) Negative numbers in the teaching of arithmetic. Repercussions in elementary algebra. Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 158-161.

Piaget, J. (1952). The child's conception of number (C. Gattegno & F.M. Hodgson, Trans.). London: Routledge & Kegan Paul.

Riley, M. S., Greeno, J.G. & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking. New York: Academic Press.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

Santos-Bernard, D. (1997). The use of illustrations in school mathematics textbooks: presentation of information. Unpublished Ph. D. Thesis. University of Nottingham. England.

Secretaría de Educación Pública (1980). Libro de Texto 1° de Primaria. México.

Secretaría de Educación Pública (1980). Libro del Maestro respectivo. México.
Secretaría de Educación Pública. (1997) Matemáticas. Primer grado. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.
Tall, D.O. & Gray, E.M. (1994). Duality Ambiguity and Flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 25, No. 2, 116-140.