ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 11 No. 2 Agosto 1999
pp. 52-63

El maestro constructivista como investigador.[1]
Cómo enseñar razones y proporciones a adolescentes

Fecha de recepción: Agosto, 1998

Bronisuave Czarnocha
University of New York, Department of mathematics,
Nueva York City, EEUU
bczho@mail.hostos.cuny.edu

Resumen. *Durante la última década, los proponentes del método constructivista de la investigación educativa han desarrollado una herramienta de investigación importante denominada enseñanza experimental. En este artículo se muestra que la enseñanza experimental constructivista es también una poderosa herramienta instruccional que puede usarse exitosamente para facilitar los momentos de descubrimiento de los estudiantes en el contexto de la técnica de enseñanza por descubrimiento. El autor analiza el empleo de la enseñanza experimental con propósitos instruccionales mediante el análisis del desarrollo de la investigación —acción del curso de matemáticas impartido en una escuela secundaria de educación especial en la ciudad de Nueva York.*

Abstract. *An important investigative tool called teaching experiment has been advanced within last decade by the proponents of the constructivist approach to educational research. It is shown that a constructive teaching experiment is also a powerful instructional tool and can be used successfully to facilitate students moments of mathematical discoveries in the context of Discovery technique of teaching. The author discusses the employment of teaching experiment for instructional purposes through action research analysis of the mathematics course taught in a Special Education high school in New York City.*

Introducción

La técnica de enseñanza por descubrimiento (Bruner, 1961; Shulman, 1968) ha adquirido recientemente nueva importancia en el contexto del movimiento reformador al interior de la profesión educativa. El supuesto primordial de esta técnica es que el aprendizaje de un tema específico puede lograrse de manera más efectiva si el estudiante descubre el conocimiento por sí mismo en vez de hacerlo a través de la instrucción directa o el aprendizaje de memoria. El papel del maestro consiste en crear condiciones favorables para los momentos de descubrimiento. La esperanza en el

[1] El título está pensado como un diálogo con la visión expresada en el artículo "The Constructivist Teacher as Teacher and Model Builder" (Cobb, P. Steffe, L. P. 1983).

éxito de esta técnica como herramienta instruccional se basa en la creencia de que el proceso de descubrimiento del conocimiento ofrece a los estudiantes diversión y un ejercicio mental de calidad duradera.[2]

Entré en contacto con esta técnica mediante el desarrollo del método conversacional de enseñanza de las matemáticas, que limitaba el tiempo de sólo lectura a un mínimo y me permitía mantener un diálogo continuo con los estudiantes sobre matemáticas. Este método permitió crear condiciones favorables para que los estudiantes me revelaran su proceso de pensamiento y para encontrar lo que más adelante se denomina "momentos de cognición matemática".[3] Luego de observar y ayudar a los estudiantes en sus esfuerzos durante esos momentos y tomar en consideración mi propia experiencia como científico, me percaté de lo siguiente:

(1) los momentos de cognición son ingredientes fundamentales del proceso de descubrimiento a través del cual los estudiantes construyen su realidad matemática, y que

(2) los esfuerzos de los estudiantes en el proceso de construcción del conocimiento son bastantes semejantes en su contenido creativo a los esfuerzos de un científico que plantea un nuevo concepto o un nuevo teorema a partir de trozos diferentes de información.

Permítaseme describir un ejemplo sencillo de uno de tales momentos junto con el tipo de interacción estudiante-maestro que revela el proceso de pensamiento del estudiante. El ejemplo está tomado de una clase de álgebra intermedia; ocurrió durante el análisis del dominio de $f(X) = \sqrt{X}$.

El maestro preguntó a los estudiantes durante el análisis: "¿Pueden usarse todos los valores reales de X para el dominio de la función $f(X) = \sqrt{(X + 3)}$?"

Estudiante: "No, no pueden usarse X's negativas". (La estudiante está confundiendo aquí la regla general que establece que para el dominio de definición de la función $\sqrt{X}$ sólo pueden usarse X positivas, con la aplicación particular de esta regla a $\sqrt{(X + 3)}$.X

Maestro: "¿Qué tal $X = -5$?"
Estudiante: "No funciona".
Maestro: "¿Qué tal $X = -4$?"
Estudiante: "Tampoco funciona".
Maestro: "¿Qué tal $X = -3$?"
Estudiante, luego de pensar un minuto: "Aquí sí funciona".
Maestro: "¿Qué tal $X = -2$?"

[2] Los orígenes de la técnica de instrucción por descubrimiento se remontan a Arquímedes, quien en se obra "El Método" presenta al lector la forma en que descubrió muchos de sus resultados en el campo de la integración. Al mismo tiempo, indica que esta presentación de ninguna manera debe tomarse como la demostración de sus resultados sino como un ejercicio estimulante e iluminador.
Este método descansa en el diseño de situaciones y el empleo de técnicas que permitan al estudiante participar en el descubrimiento del conocimiento matemático. La técnica se relaciona con el constructivismo al postular un proceso de descubrimiento en las mentes de los estudiantes.

[3] El tipo de momentos aquí analizados son mencionados en publicaciones profesionales bajo varias designaciones diferentes. M. Wertheimer (Wertheimer, 1959) lo introduce como "un cambio repentino, cuando... todas las partes de repente forman un todo consistente, con una nueva orientación, en poderosa reorganización re-centrada, donde todo se ajusta a los requerimientos estructurales", mientras A. I. Gates (Gates, 1942) introdujo el concepto de midsight. No he encontrado ninguna investigación centrada en el proceso que facilita estos momentos durante la instrucción matemática.

Estudiante: "También aquí funciona". Poco después, agregó: "Aquí no es posible usar las X's menores que -3".

Maestro: "Correcto. ¿Qué ocurre con $\sqrt{(X + 5)}$?"

Estudiante: "No se pueden usar X's menores que -5".

Maestro: ¿Qué ocurre con $\sqrt{(X - 1)}$?"

Estudiante, luego de pensar un minuto: "No es posible usar X's menores que 1".

La forma tradicional de tratar la confusión de la estudiante hubiera podido ser proporcionar de inmediato un contraejemplo a la respuesta original o explicar que lo que se requiere en este caso es aplicar la desigualdad $X + 3 > 0$. La ruta seguida aquí por el maestro no sólo mostró a la estudiante su error, sino que también la condujo al momento de reflexión en silencio en que, fue evidente, se llevó a cabo una pequeña reorganización de su pensamiento.[4] Los ejemplos presentados a partir de ese momento fueron diseñados para convencer tanto a la estudiante como al maestro de que la reorganización ya era estable y que podía aplicarse (transferirse) a otras situaciones.

El análisis de otros momentos de descubrimiento facilitados de manera semejante me clarificó que lo que ocurre en la mente de los estudiantes durante tales momentos debe ser bastante semejante a lo que ocurre en la mente de un científico de un matemático durante el proceso de formulación de un nuevo concepto o de un nuevo teorema. Se concluyó el planteamiento de una pregunta natural: ¿puede ser posible cambiar las condiciones de enseñanza de modo que este proceso de descubrimiento, tan real y auténtico, se convierta en una herramienta esencial de instrucción? Es evidente que tal técnica, pensé, debía tener dos componentes:

- un método concreto orientado a la presentación de ejemplos, a fin de contar con un entorno vivencial para los estudiantes, y
- el maestro-investigador quien, a través del proceso continuo de evaluar y descubrir los estados de cognición del conocimiento matemático, facilita los descubrimientos de los estudiantes mediante la elección idónea de ejemplos y preguntas.

La técnica trae a colación una herramienta de investigación avanzada recientemente denominada enseñanza experimental constructivista. Asociada en sus inicios con el trabajo de L. S. Vygotsky, surge de "*la necesidad de estudiar los cambios que ocurren en estados mentales bajo el influjo de la instrucción*". (Huntington, 1983). El aspecto constructivista de la enseñanza experimental radica en el supuesto de que en la mente del estudiante se lleva a cabo una construcción autónoma independiente de la realidad matemática. El papel del experimentador es presentar la naturaleza dinámica de ese proceso. Esto puede lograse esencialmente por medio de la interacción didáctica con el estudiante. En consecuencia, una característica distintiva de un ex-

[4] Según una investigación reciente sobre el desarrollo del pensamiento matemático (Clark y otros, 1998), un estudiante, mientras adquiere un concepto matemático, pasa en su etapa cognoscitiva a través de 3 etapas de la tríada de desarrollo de Piaget y García (Piaget y García, 1989), la etapa Intra, Inter y Trans. A menudo en la etapa Intra, el estudiante domina reglas por separado que rigen el concepto sin hacer la conexión entre éstas como manifestaciones diferentes de una regla general (Clark y otros, 1998).
Esta es exactamente la etapa del estudiante en el diálogo entrecomillado. La intervención instruccional del maestro ayuda a los estudiantes a moverse hacia la etapa Inter donde son observadas y comprendidas las conexiones entre instancias diferentes del concepto. A fin de coordinar la regla $X > 0$ para X con la manifestación de esa regla para $(X + 3)$, el estudiante debe construir una correspondencia entre $X + 3$ en $(X + 3)$ y X en X; en términos menos técnicos, el estudiante debe estar consciente de que $X + 3$ puede sustituirse por X en X y en $X > 0$. Sólo entonces puede comprenderse la condición correcta para el dominio de la función.

perimentador que usa la enseñanza experimental constructivista es la dualidad inherente en sus acciones con respecto a los niños (o estudiantes) que también son sujetos del experimento. Por una parte, en tanto su interés siempre radica en "*investigar lo que podría estar ocurriendo en las cabezas de los niños*" y en "*suponer lo que el niño* ***puede*** *aprender*" (Cobb & Steffe, 1983), actúa como investigador. Por otra parte, debido a que el experimentador que utiliza la técnica de la enseñanza experimental debe "*encontrar caminos y medios para fomentar este aprendizaje*" y "*con base en la interpretación actual del lenguaje y acciones del niño, debe tomar en el acto decisiones sobre la creación de situaciones y el planteamiento de preguntas críticas*", actúa en este sentido como maestro. La adaptación de la enseñanza experimental para efectos de enseñanza explota esta dualidad mediante el cambio de énfasis entre sus dos aspectos. En contraste con el interés del experimentador, el interés del maestro es encontrar medios y caminos para fomentar lo que ***necesitan*** los estudiantes para aprender a fin de alcanzar un momento de descubrimiento particular. No obstante, como tales momentos sólo pueden ocurrir dentro de las estructuras cognoscitivas matemáticas autónomas de los estudiantes, el maestro debe investigar estas estructuras durante una secuencia instruccional particular. En este sentido, el o la maestra actúa como investigador(a).

Informe sobre enseñanza experimental como técnica de enseñanza

Una ocasión para investigar el valor pedagógico de lo que ha sido presentado como técnica de investigación apareció cuando se me pidió desarrollar un curso de matemáticas básicas para un grupo especial de estudiantes a quienes no les había ido bien en cursos normales de matemáticas y que reprobaban constantemente la materia. La técnica de descubrimiento sería la primera técnica de enseñanza, con la esperanza de que el llamado a la curiosidad y creatividad naturales de los jóvenes fuese capaz de vencer su resistencia a la materia. En esa época yo estaba enseñando en una escuela de educación especial para estudiantes inteligentes pero con dificultades psicológicas importantes que les obstaculizaba el aprendizaje. Había 7 estudiantes en el curso: Alan, Arnold, Charlie, Denny, Georgina, Jake y Sandro, cuyas edades iban de 14 a 16 años. Su conocimiento matemático era azaroso y contenía lagunas resultantes de las operaciones con fracciones. Mientras preparaba el curso, fui advertido por el director: "No se preocupe por cuánto aprenden en términos de conocimiento objetivo. Lo que importa es que cambie su actitud hacia las matemáticas". Así, contaba con las condiciones ideales para la enseñanza experimental, la observación y la reflexión.

El curso fue organizado alrededor de las partes del programa normal que podían transformarse fácilmente en un método interactivo y que, a la luz de la premisa fundamental de la técnica, pueden usarse para facilitar el proceso de descubrimiento:

- Operaciones con enteros con ayuda de fichas de dos colores
- Operaciones con polinomios con ayuda de fichas manipulables utilizadas para el álgebra
- Estudio de potencias con ayuda de calculadora científica
- Gráficas de funciones lineales y cuadráticas con coeficientes enteros
- Problemas enunciativos en los que el método de ensayo y error conduce al planteamiento de ecuaciones
- Razones y proporciones
- Lógica a través de problemas lógicos cooperativos

Todas las secciones del curso tenían un tema común: proporcionar actividades concretas que, esperaba, podrían llevar al descubrimiento de operaciones y conceptos algebraicos formales.

Los materiales de investigación para este informe son:

- el diario del maestro
- las respuestas de los estudiantes al cuestionario distribuido originalmente cada día, luego cada 2 o 3 días a medida que los estudiantes se quejaban de la monotonía de las preguntas.

Los entrecomillados en la narración indican los extractos de estas dos fuentes.

Elegí la sección de proporciones como base del informe porque ofrece una visión excelente de los éxitos y las dificultades en la aplicación de la técnica por descubrimiento. Mi objetivo inicial fue facilitar el descubrimiento y el planteamiento del concepto matemático de proporción. En consecuencia, planeé la secuencia de actividades teniendo en mente ese objetivo: figuras a escala, trabajo con mapas, dibujo de objetos según una razón preestablecida, recetas de cocina, división de objetos en una razón dada, etc. Aquí se hizo un supuesto importante sobre el orden relativo de introducción de las razones y proporciones. En el método tradicional se introducen antes las razones que las proporciones, ya que se trata del concepto necesario para expresar las proporciones (una proporción es la igualdad de dos razones). Decidí invertir el orden de nuestras investigaciones porque, con base en observaciones previas, me parecía que la semejanza de objetos es una percepción más básica e intuitiva. Las razones, como herramienta de comparación y como herramienta conceptual y numérica para expresar semejanzas, debían aparecer de manera natural a partir de investigaciones de semejanza.

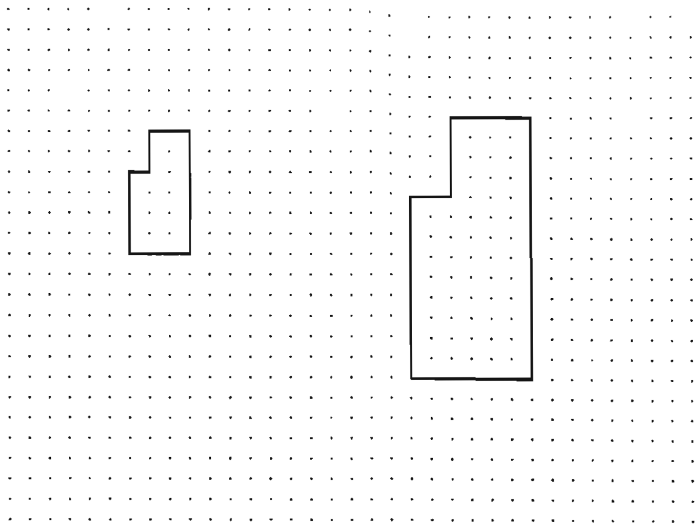
La discusión comenzó con el trazado de dibujos de figuras geométricas semejantes y personajes de caricaturas semejantes que había preparado para la clase. La primera tarea fue clasificar las figuras y los personajes en grupos. El nivel de entusiasmo en el grupo era alto; el diálogo estudiante-maestro era alentador: "Es igual pero más pequeña. ¿Qué tanto más pequeña? Tenemos que comparar las figuras. ¿Cómo debemos compararlas?..." Parecía más fácil estimar la comparación en el caso de las figuras geométricas; en el caso de figuras de contornos suaves la comparación fue más difícil. Sin embargo, la comparación de dibujos de un niño y de un adulto por una parte, y los de un adulto y un gorila de pie por la otra (haciendo a un lado las risas provocadas por los dibujos) empezó a introducir la idea de lados correspondientes: "Tenemos que comparar mano con mano y la longitud de un cuerpo con la longitud del otro cuerpo". Ya estaba ahí el germen de "¿está o no en proporción?" Apunte del 2/2/93 en el diario del maestro: "La noción de escala y de lados correspondientes está flotando; no está fija." y "la escala y la razón deben hacerse en cuadrados, son más fáciles de medir [en papel punteado] que los triángulos [Fig. 1 y Fig. 2]. Ejercicios ulteriores fijaron el concepto de lados correspondientes en triángulos; hubo algo de confusión en este sentido con los rectángulos: "¿Qué longitud en un rectángulo corresponde a qué longitud en otro?"

— "¿Importa?"
— "No, no importa".

El tema de las dos clases siguientes fue "¿Cuánto más grande?". Proporcioné hojas con rectángulos en las escalas 2:1 (6:3, 4:2, 2:1) y 3:1 [Fig. 3]. La comparación

Fig. 1

Encuentra la escala entre las figuras



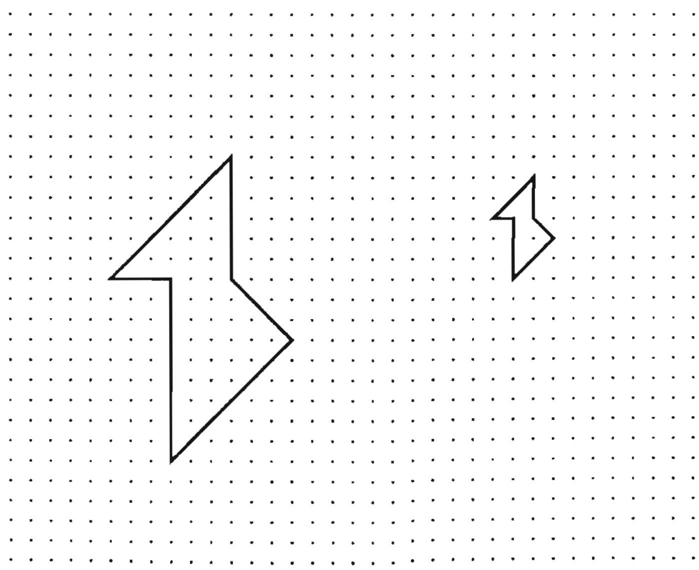


Fig. 2

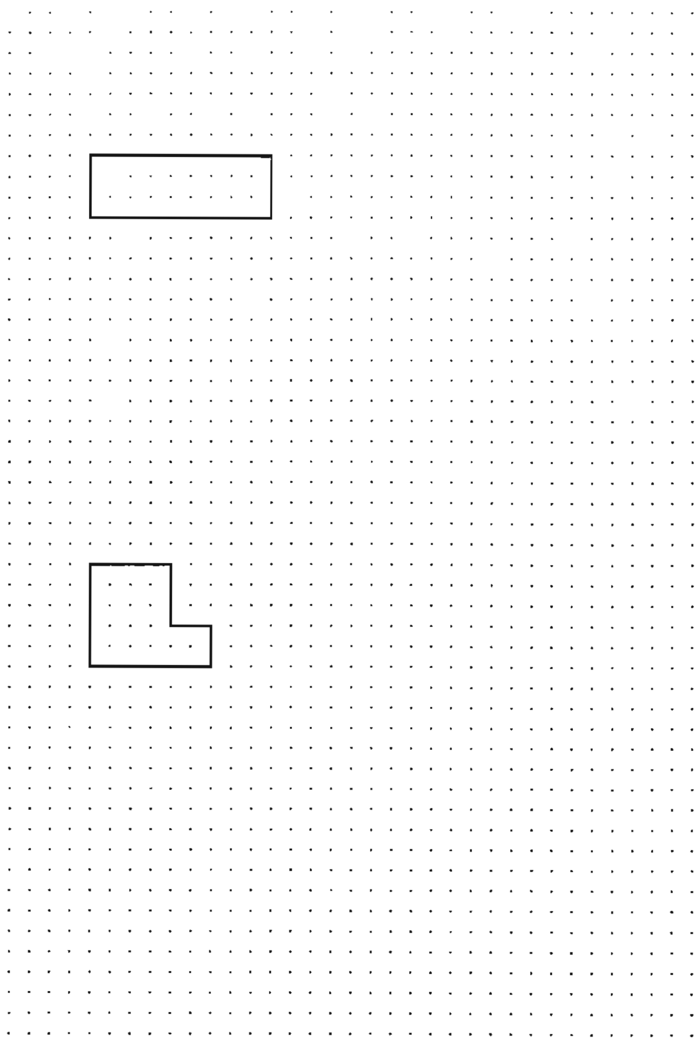


Fig. 3

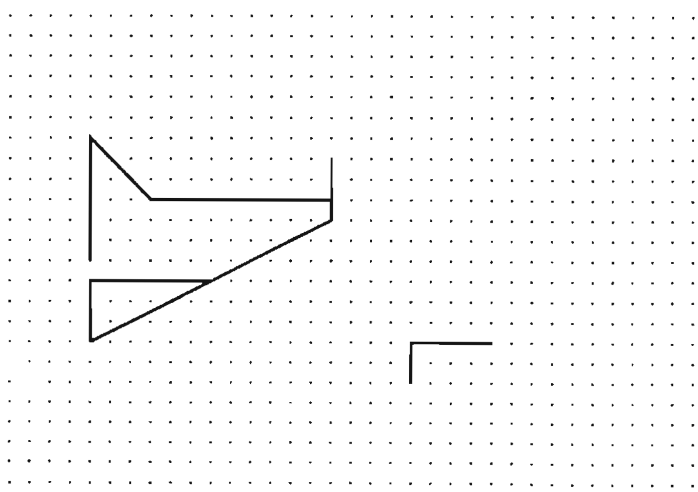


Fig. 4

"dos veces más grande" apareció en las notas de casi todos, pero no se alcanzó el planteamiento numérico. Comencé a darme cuenta de que a pesar de que los significados intuitivos de semejanza y proporción casi están presentes, no podía facilitar su planteamiento formal.[5] La dificultad se centró en el concepto de medida común: la unidad de comparación. Esta impresión se hizo más fuerte cuando se introdujo otra serie de actividades de medición. Preparé la siguiente tarea: una figura completamente trazada en papel punteado, mientras que de otra figura sólo aparecen dos de sus lados. La instrucción era: completar la segunda figura. [Fig. 4]. Esperaba que el proceso de cómputo implicado en esta actividad podría ayudar a plantear la proporción. Los dibujos a escala 2:1 o 3:1, o para el caso 1:2, no presentaron ningún problema para lograr el objetivo, aunque las figuras a escala 3:2 fueron muy difíciles. Pronto fue bastante evidente el por qué. El número "1" en la escala 2:1 significa no sólo el objeto inicial de comparación sino también la medida común. En la escala 3:2 la medida común está oculta en los números que definen la razón. La importancia de la diferencia conceptual entre estos dos casos a menudo escapa a nuestra atención instruccional y somos llevados, con base en el tipo de problemas 2:1, a la creencia errónea de que los estudiantes poseen la comprensión de las razones y proporciones. En realidad, su comprensión es fragmentaria y no incluye el caso más general del tipo 3:2. Lentamente, bajo el influjo de estas observaciones, el objetivo inicial de descubrir las proporciones comenzó a cambiar al descubrimiento del significado de las razones. Claramente mi supuesto inicial sobre el orden idóneo de introducción de conceptos también resultó erróneo.

Mientras tanto, apareció otro problema de tipo organizativo. Todo el procedimiento comenzó a ser aburrido para los estudiantes; sus respuestas a los cuestionarios son testigo: "Hoy me divertí menos con los puntitos negros", o bien, "Hoy me divertí más con las bromas que hizo Nick a Sean y David". O aún mejor: "Otra cosa que me gustaría escuchar son chistes sobre gallegos". Necesitaba una nueva actividad, por lo que decidí usar los problemas de recetas de cocina:

A CONTINUACIÓN SE TE PROPORCIONAN LOS INGREDIENTES NECESARIOS PARA PREPARAR EL FAMOSO PLATILLO

FONDUE DE POULET À LA CRÈME

Los siguientes ingredientes son para preparar una comida para 4 personas.
El objetivo es preparar esta comida para 6, 8 o 10 personas.

INGREDIENTES	4 personas	6 personas	8 personas	10 personas
Pollo	3 lb			
Mantequilla	3 cucharadas			
Cebolla	12 oz			
Vino blanco seco	6 oz			
Vermouth seco	4 oz			
Crema espesa	3 tazas			

[5] La dificultad de la transición de la comprensión conceptual a su representación simbólica (formal) ha sido observada por L. Streefland (Streefland, 1984). También son interesantes los resultados en (Karplus y otros, 1987) donde se observó que la solución de problemas en donde la tarea implica planteamientos explícitos de proporción y están relacionados con su técnica de multiplicación cruzada fue usada por una evidente minoría de estudiantes.

Esta receta de cocina me proporcionó una sorpresa. Apunte del 2/22/93 en el diario: "... la receta de cocina resultó más difícil de usar que el escalamiento de figuras. [El caso de 8 personas fue fácil, pero los de 6 y 10 fueron más difíciles". Lo que sugirieron los estudiantes fue "tomar la mitad de un número y sumarla al número; por ejemplo, $1/2 \times 3 + 3$, o $1/2 \times 5 + 5$, o con palabras, "6 es 2 más que 4 y [como] 2 es la mitad de 4, de modo que tomamos [en el caso del pollo] 3 lb + 1 1/2 lb. 2 cucharadas + 1 cucharada [en el caso de la mantequilla]".

En ese momento estaba muy desconcertado. El grupo tenía la solución del problema pero su técnica era bastante sorprendente. En ese momento se planteó con bastante claridad la tensión entre mi papel como maestro y como investigador de los procesos cognoscitivos de los estudiantes. Como maestro quería facilitar el descubrimiento de la razón 3:2, pero como investigador sentía curiosidad sobre el descubrimiento de una técnica inesperada. Al pensar en lo anterior, ahora desde la perspectiva de investigador, veo dos posibilidades interesantes: se trataba del germen del algoritmo euclidiano[6] usado para encontrar la medida común (nota: "6 es más que 4 y [que] 2 es la mitad de 4": la repetición exacta de los dos primeros pasos del algoritmo de Euclides) o se trataba del cambio de fracción a un número mixto, también a lo largo de la ruta del algoritmo euclidiano. A la vez, me sentía en la oscuridad y muy frustrado con la incapacidad de llegar a la razón. Decidí repetir la receta de cocina en un contexto algo distinto. Dos días después Sean y Cory propusieron "como 4 cabe en 6 una vez y media, 3 x 1_ es el número de libras de pollo necesarias para 6 personas". Parecía que ya tenía la solución a mi problema: su intuición "euclidiana" estaba motivada por la división, más que por la búsqueda de la medida común. Pero ¿por qué esta preferencia por los números mixtos en vez de por las fracciones? ¿Y por qué este esquema elaborado en lugar de las fracciones? Por otra parte, quizá mediante el desarrollo de su intuición "euclidiana" yo podría finalmente facilitar el descubrimiento de la medida común.

Estas preguntas eran tan intrigantes que dediqué dos sesiones en clase a la pura comparación de números e intervalos de recta. Aquí, abstraídos de cualquier problema concreto por resolver, llegaron a las comparaciones multiplicativas más rápido y de manera más natural que durante el análisis de las recetas de cocina. Era como si, después de todo el trabajo previo sobre ejemplos concretos, las razones en lo abstracto estuviesen más fácilmente a su alcance que en lo concreto, y su redescubrimiento dentro de lo concreto debiera comenzar de nuevo. Esto sugiere un tipo de enfoque dialéctico sobre la relación entre lo concreto y lo abstracto. El desarrollo formal de un concepto particular no garantiza su descubrimiento en otra situación concreta. Tal vez la madurez intelectual de uno no tiene tanta importancia para alcanzar un nivel formal de razonamiento, sino en la conciencia que se tiene sobre el movimiento constante entre lo concreto y lo formal.

[6] La descripción del algoritmo euclidiano según es presentado por Boyer (Boyer C. B. 1985, p. 126): "Dados dos números distintos A, B se resta el menor A del mayor B... hasta que se obtiene un residuo R1 menor que el número más pequeño; luego este residuo R1 se resta repetidamente de A hasta que se obtiene un residuo R2 < R1; luego R2 se resta repetidamente de R1 y así sucesivamente. Al final, el proceso produce un residuo Rn que mide a Rn-1, t por tanto a todos los residuos procedentes, así como A y B". Así, en términos de esta descripción, como A = 4, B = 6, mis alumnos restaron 4 de 6 (el primer paso del algoritmo euclidiano), obtuvieron el residuo R1 = 2 y luego observaron que este residuo es exactamente la mitad de 4 (el segundo paso del algoritmo euclidiano) o, en otras palabras, que 2 mide a (es el MCD de) A = 4 y B = 6. Por supuesto, su atención no estaba centrada en R1 tanto como en el algoritmo en sí porque su repetición exacta para los números correspondientes en la receta les permitió encontrar las cantidades necesarias.
Si el algoritmo descrito se interrumpe una vez que se obtiene el primer residuo, el procedimiento es equivalente a cambiar 6/4 en el número mixto 1 1/2. Esta es la razón por la cual la afirmación de mi estudiante, "... 2 es la mitad de 4...", puede interpretarse de ambas formas, como la búsqueda del MCD o como un cambio de la fracción incorrecta en un número mixto.

A esa altura del curso ya había abandonado completamente las proporciones y me había centrado en la medida común. Es ahí cuando finalmente favorecí otro momento de entendimiento matemático. Más allá de la frustración con el problema y la creciente indiferencia de mis estudiantes, decidí llevar una bolsa de dulces M&M al grupo y ofrecer la siguiente tarea: "Tengo aquí 24 dulces M&M. Vamos a dividirlos en la razón 5:3. La mayor parte es para ustedes y la más pequeña es para mí si me dicen exactamente cuántos dulces les tocan a ustedes y cuántos me tocan a mí".

Apunte del 3/22/93 en el diario: "Ayer se estableció un compromiso. Hay algo que pueden conseguir. Sandro y Charlie lo resolvieron muy rápido y tienen buenas ideas sobre el planteamiento del concepto de razón. Así también con el problema con 70 piezas y la razón 4:3. Charlie lo explica así [o más bien, plantea sus pensamientos en ese momento]: "Sumas 4 y 3. Esta es la razón total que es el número total. Y lo divides en 70. Luego separas 4 y 3 y multiplicas cada uno por esto [el resultado de la división]. La razón es cómo dividir este todo. ¿Qué parte de la razón es [3 y 4]?

Todo está ahí. Cuando Charlie dice "... la razón total que es el número total" quiere decir, creo, $3x + 4x = 70$ (todo el número). Así, la medida común, que algebraicamente se denota por x, debe estar, [creo], en su conciencia. Pero esto es implícito, no explícito. Luego dice: "Divides en 70.... La razón es cómo dividir esta cantidad [en partes iguales]". Si Charlie puede descubrir cuán grande es uno de éstas, habré resuelto el problema". Falta algo: el planteamiento explícito, la expresión formal o la descripción de la unidad que le permitirá traducir sus palabras en la ecuación $3x + 7x = 70$, que en el método tradicional es el punto de partida del análisis para resolver este tipo de problemas.

He llegado así al punto en que, en mi opinión, debe encontrarse la dificultad más profunda del estudiante en todo el método. La dificultad radica no en la facilitación del descubrimiento conceptual, sino en la traducción de ese descubrimiento en un concepto matemático preciso y formal. Parece haber un gran hueco entre la comprensión conceptual intuitiva derivada de la acumulación de experiencias concretas y el planteamiento del concepto matemático. Probablemente se trata del mismo hueco que ha socavado la eficacia del método tradicional; no obstante, aquí lo observamos desde el extremo opuesto. ¿Cómo se aborda el problema con el método tradicional? Introducimos los conceptos formales de razones o proporciones e intentamos relacionarlos mediante ilustraciones y numerosos ejemplos con el estado de conocimiento de los estudiantes. Nuestra dificultad se encuentra exactamente en este proceso de establecer relaciones y su fuente es de nuevo el hueco entre el aspecto formal que enseñamos y el aspecto concreto del estado de conocimiento de los estudiantes (Harrison, Lawson A. 1975). Como resultado, los esfuerzos de los estudiantes se centran en el ajuste entre problemas y la multitud de reglas formales, más que en la comprensión. A esto le sigue la confusión y el desencanto. La técnica de descubrimiento encuentra el mismo hueco pero desde el lado del método concreto. Con la intención de presentar una alternativa viable y exitosa al método tradicional, la técnica de descubrimiento debe poder llenar ese hueco. El descubrimiento del concepto de razón o proporción es apenas el primer paso. El paso siguiente es descubrir o, tal vez mejor, plantear el concepto formal, el símbolo, e inclusive el lenguaje que corresponde a esta intuición particular. Parece que el énfasis en la verbalización del proceso de pensamiento (exactamente como lo hizo Cory durante la sesión) junto con la introducción del hábito de escribir en clase en términos matemáticos puede conducir al llenado de ese hueco.

Aquí quiero decir escritura no del diario ni descriptiva, sino escritura en tanto herramienta para expresar claramente las ideas y conceptos intuitivos que se presentan durante los momentos de descubrimiento.

Discusión del informe sobre la enseñanza experimental

La consecuencia más importante que surgió del informe es la necesidad de mantener un flujo flexible del curso a la vez que la enseñanza experimental se emplea para fines instruccionales. Esta necesidad es dictada por la interacción dialéctica entre los dos aspectos del papel del instructor: maestro e investigador. Para facilitar la meta establecida por el maestro, el descubrimiento de las proporciones, el investigador debe descubrir los elementos del desarrollo cognitivo del conocimiento matemático de los estudiantes en la clase. Debido a que con frecuencia estos descubrimientos eran inesperados y contradecían los presupuestos del maestro, éste debía modificar sus objetivos pedagógicos (por ejemplo, del descubrimiento de las proporciones al descubrimiento del concepto de medida común) y plantear nuevas actividades mejor adaptadas a los niveles de comprensión cognoscitiva de los estudiantes. Tuvo que plantear nuevas preguntas que, optimistamente, al dirigir niveles de comprensión recientemente descubiertos, deben acercar a los estudiantes a su momento de descubrimiento. Al mismo tiempo, centrar las preguntas y actividades en clase en un nuevo objetivo ofreció una abundancia de preguntas de investigación cuyas investigaciones independientes en clase nuevamente influenciaron el flujo del curso.

Desde el punto de vista del maestro, el curso fue un éxito si se considera el cambio de actitud del estudiante hacia las matemáticas. Sus respuestas al último cuestionario distribuido al término del curso indican que los estudiantes "aprendieron formas diferentes de pensar sobre problemas matemáticos", "cómo representar polinomios con cuadrados", que "aprendieron de una nueva manera". Al comparar esta clase con otras clases afirmaron que "las otras clases no usaron otras formas para hacer comprender", "fueron aburridas, mientras que esta clase fue una aventura", "una clase divertida" o que "pasamos más tiempo en cada tema". Uno de los estudiantes, Charlie, inicialmente muy negativo respecto hacia las matemáticas, dijo: "Sí, me gusta cuando no sabemos que resultará. Es como un crucigrama". También me preguntó en algún momento cómo las cantidades proporcionales se reflejan en áreas y volúmenes.

Desde el punto de vista del investigador el curso también fue un éxito, no sólo porque resultó posible usar de manera consistente la enseñanza experimental como herramienta instruccional y facilitar con su ayuda un momento de descubrimiento, sino también porque ayudó a generar varias preguntas de investigación importantes como:

- el desarrollo del tipo de pensamiento algorítmico euclidiano en adolescentes
- el desarrollo de la noción de medida común
- técnica de facilitación de momentos de comprensión (o percepción) matemática y su conexión con la verbalización de los procesos de pensamiento;
- la hipótesis de que la madurez intelectual es equivalente al movimiento entre los niveles de pensamiento concreto y abstracto.

Algunas de estas cuestiones fueron analizadas en publicaciones profesionales y presentan nuevos puntos de partida de la investigación educativa; otras no lo fueron, como el desarrollo del tipo de pensamiento algorítmico euclidiano o la cuestión del facilitamiento de los momentos de comprensión matemática. Encontré con satisfacción después de la terminación del curso que una hipótesis semejante, concerniente al uso del lenguaje verbal y escrito, fue planteada en *Model for Learning and Teaching Mathematics* (Steffe, Smock, 1975). Los autores proponen que "*se debe sugerir una interacción cuidadosamente dispuesta entre las palabras habladas que simbolizan un concepto matemático y el conjunto de acciones realizadas en el proceso de construcción de una representación tangible del concepto... Es necesario desarrollar un vocabulario matemático.... para explicar y proporcionar materializaciones del concepto*". El hecho de que estos autores hayan llegado a su sugerencia con base en consideraciones teóricas de las teorías de Piaget y Vygotsky mientras aquí se llegó a lo mismo como resultado del empleo de la enseñanza experimental como herramienta instruccional ofrece, creo, un poderoso apoyo para el desarrollo ulterior de esta técnica.

Bibliografía

Arquímedes: The Method en *The Works of Archimedes, Great Books of the Western World.* Robert Maynard (ed.) (1952)

Boyer, C.B. (1985): *History of Mathematics.* Princeton University Press

Bruner, J. (1961): *The Art of Discovery.* Harvard Educational Review

Clark, M. J. (1998): "Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule" en *Journal of Mathematical Behavior* 16 (4) 345-364

Cobb, P. y Steffe, L. P. (1983): "The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder" en *Journal of Research in Mathematics Education* 14 (2) 83-94

Gates, A. L. (1942): "Connectionism: Present Concepts and Interpretations" en Henry, N. B. (ed.): The *Psychology of Learning: Fourty First Yearbook of NSSE*

Harrison, B. y otros (1989): "Allowing for Students' Cognitive Levels in the Teaching Fractions and Ratios" en *Journal of Research in Mathematics Education* 20 (3) 288-300

Huntington, R. P. (1983): "Emerging Methodologies for Understanding Internal Processes Governing Children's Mathematical Behavior" en *The Australian Journal of Education* 27 (1) 45-61

Karplus, R. (1983): "Early Adolescents' Proportional Reasoning on Rate Problems" en *Educational Studies in Mathematics* 14 (3) 219-233

Lawson, A. (1975): "Relationship of Science Subject Matter and Developmental Levels of Learning" en *Journal of Research of Science Teaching* Vol. 12 347-358

Piaget, J. y García, R. (1989): *Psychogenesis and the History of Science.* N. York: Columbia University Press.

Shulman, L. S. (ed) (1966): *Learning by Discovery: A Critical Appraisal.* Keisler, I. R.

Steffe, L. P. (1991): "The Constructivist Teaching Experiment: Illustrations and Implications" en von Glasersfeld, R. (ed), *Radical Constructivism in Education.* Kluwer Academic Publishers.

Steffe, L. P. y Smock, (1975): "On a Model for Learning and Teaching Mathematics" en Steffe, L. P. (ed): *Research on Mathematical Thinking of Young Children.* Reston Va: NCTM

Streefland, L. (1984): "Research for the Roots of Ratio: Some Thoughts on the Long Term Learning Process" en *Educational Studies in Mathematics* 15 (4) y 16 (1)

Wertheimer, M. (1959): *Productive Thinking.* Harper and Row.

Vygotsky, L. S. (1978): *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes.* Cambridge, Mass: Harvard University Press.