ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

*Educación Matemática*
*Vol. 11 No. 2 Agosto 1999*
*pp. 16-31*

# Potencial de la calculadora en el desarrollo del sentido numérico: Un estudio con niños de 11-12 años de edad

**Fecha de recepción:** Diciembre, 1997

**Tenoch E. Cedillo**
Universidad Pedagógica Nacional,
México, D. F.
Tenoch.Cedillo@ajusco.upn.mx

**Resúmen.** *Se reportan resultados de la primera fase de una investigación sobre el desarrollo de nociones y estrategias numéricas en un ambiente de enseñanza basado en el uso de la calculadora. El estudio se centra en las posibilidades de la calculadora como herramiénta de enseñanza desde una perspectiva que intenta trascender la función primaria de esa máquina como instrumento de cálculo. Los resultados obtenidos muestran que la calculadora puede explotarse para abordar la enseñanza de la aritmética bajo un enfoque didáctico que ofrece un promisorio antecedente para el estudio del álgebra. Los resultados de este estudio sugieren que el trabajo con la calculadora permite que los niños transiten de lo particular a lo general y empiecen a basar sus razonamientos sobre "valores aún desconocidos".*

**Abstract.** *The paper discusses some results from a first research stage on the development of pre-algebraic notions and strategies within a number-based environment. The study focuses on the potential of the calculator as a teaching tool from an approach that attempts to go beyond the original function of calculators as crunching number tools. The results strongly suggest that the calculator-based environment can be exploited to approach the teaching of arithmetic from a didactical view that provides a crucial antecedent to the study of algebra in the middle school. Children's reactions during classroom sessions and individual interviews show that the number-based experience they had throughout the study allowed them to skilfully go forth and back from the general to the particular and were also able to start reasoning and calculate on "the yet unknown".*

## Introducción

En los actuales planes y programas de estudio de matemáticas para la escuela secundaria se hace énfasis en que el trabajo en clase deberá "favorecer la comprensión de las nociones aritméticas a partir de la solución de problemas muy diversos y permitirá el desarrollo de estrategias de conteo, cálculo mental, estimación de resultados y el uso inteligente de la calculadora".[1] En cuanto a la enseñanza del álgebra, se recomienda "aprovechar las

[1] Educación Básica, Secundaria. Plan y Programas de Estudio 1993, SEP, pág. 38.

oportunidades que ofrecen la aritmética y la geometría para que los estudiantes se inicien gradualmente en el uso de las literales y otros temas que preparan el acceso al álgebra". Respecto a la incorporación de nuevos medios, en el Libro para el Maestro de Educación Secundaria se recomienda "utilizar la calculadora como un auxiliar en la solución de problemas" (pág. 19).

Estos principios y recomendaciones alientan por primera vez el uso de la calculadora desde el ámbito oficial en México, y resumen dos finalidades centrales para la enseñanza de la aritmética, por una parte se destaca su carácter instrumental como herramienta para comprender y manejar información de tipo cuantitativo; por otra parte, se señala la función propedéutica de la enseñanza de la aritmética como un elemento que proporcione bases para el estudio del álgebra y la geometría tanto en la escuela secundaria, como posteriormente en el bachillerato. Estas finalidades concuerdan ampliamente con los propósitos de los profesores de matemáticas, a la fecha aún no conozco a algún profesor que no pretenda que sus alumnos usen las matemáticas escolares como una herramienta que les permita plantear y resolver problemas, y que ese conocimiento sea la base sobre la que sostengan un sólido avance en estudios posteriores. El problema que aún debemos intentar solucionar *es cómo llevar a buen término esos propósitos con un mayor número de alumnos*. Éste es el ámbito en que se ubica la investigación que aquí se reporta.

La reforma curricular de 1993 propone una alternativa a una tradición de enseñanza que se cultivó durante mucho tiempo, en la que el énfasis se otorgaba al dominio en la ejecución de las operaciones aritméticas básicas, lo cual se tradujo en una gran inversión de tiempo y esfuerzo por parte de los profesores para que los estudiantes lograran un manejo aceptable de los algoritmos para ejecutar esas operaciones. Quizás la mayor crítica a este enfoque es que propiciaba un aprendizaje mecanicista que parece no favorecer la comprensión de conceptos, ni un uso eficiente de la aritmética como herramienta para resolver problemas. A este respecto, la reforma curricular de 1993 disminuye notablemente el énfasis en la enseñanza de los algoritmos de las operaciones aritméticas y otorga especial atención a que los alumnos desarrollen estrategias no convencionales. Este planteamiento didáctico se apoya en cuidadosas recomendaciones para el profesor y en los libros de texto, en los que se incluyen actividades donde las operaciones básicas se introducen en el marco de la resolución de problemas.

Esa alternativa para la enseñanza de la aritmética ofrece una perspectiva más alentadora, parece sensato pensar que la función de las operaciones de la aritmética, y los conceptos que éstas involucran, podrían comprenderse mejor si su enseñanza se ubica en un contexto en donde la finalidad no sea simplemente ejecutar bien las operaciones básicas, sino usarlas como un medio para resolver problemas. Sin embargo, el diseño de actividades para una enseñanza basada en la resolución de problemas es una de las grandes dificultades aún no superadas. Aún persiste el debate sobre cuáles problemas son más adecuados: los problemas basados en "situaciones de la vida real", que acuden a la experiencia cotidiana del estudiante como apoyo para el aprendizaje de situaciones más complejas y abstractas, o los problemas diseñados para recrearse en situaciones de orden meramente matemático, que acuden a la curiosidad intelectual y la creatividad del estudiante. La investigación realizada a la fecha confirma que los estudiantes presentan distintos tipos de acercamiento y distintas habilidades en la resolución de problemas, por lo que considero que ambos tipos de problemas debieran incluirse como punto de partida en la enseñanza de las matemáticas.

El uso de la calculadora en la clase de matemáticas es otro aspecto que requiere de un estudio cuidadoso para dar un mejor apoyo al logro de las metas propuestas. La incorporación de la calculadora en el aula introduce nuevos elementos que implican, entre otros aspectos, el diseño de actividades de aprendizaje acordes a esa nueva herramienta, y por lo mismo, en consonancia con nuevas formas de enseñanza y de aprendizaje.

En esta década se han realizado un buen número de investigaciones que han aportado evidencia de los beneficios que pueden obtenerse del uso de la calculadora en la clase de matemáticas; esos estudios han ayudado a despejar muchas dudas de los profesores y padres de familia sobre la pertinencia del empleo de la calculadora en el aula. Por ejemplo, actualmente ya no se puede sostener la creencia de que el uso de la calculadora puede inhibir el desarrollo de habilidades aritméticas básicas (Hembree y Dessart, 1986, 1992; Shuard, 1992; Ruthven, 1992; Brolin, 1992). Otros estudios han mostrado el potencial del uso de la calculadora como apoyo en la resolución de problemas, en particular, se ha encontrado que el uso de la máquina favorece que los estudiantes se concentren en los procesos de solución al hacer descansar el cálculo aritmético en la calculadora. Otro aspecto favorable a este respecto es que la disponibilidad de la calculadora en el aula permite que los problemas propuestos sean "más realistas", ya que el apoyo que brinda la máquina ayuda a que el profesor introduzca en el planteamiento de problemas datos numéricos que no se restringen al manejo de números enteros, aspecto que en el ambiente del lápiz y el papel limita artificialmente las situaciones que dan contexto a un problema matemático (Shumway, 1990; Shuard, 1992).

La investigación que aquí se reporta se propone estudiar qué es lo que aprenden los alumnos cuando el ambiente de aprendizaje se basa en el uso de la calculadora, en otras palabras, el interés central de esta investigación es analizar las nociones y estrategias numéricas que desarrollan los estudiantes en un ambiente de trabajo donde la ejecución de las operaciones aritméticas no es un fin, sino el medio que permite explorar y generar soluciones a problemas matemáticos; otro propósito que orienta esta investigación es estudiar cómo influye en el aprendizaje de los estudiantes el hecho de que el trabajo de cálculo aritmético esté a cargo de una máquina. Uno de los productos esperados de este trabajo es la formación de un banco de actividades de enseñanza en el que la calculadora no se use solamente como un auxiliar en el cálculo aritmético, sino como una herramienta que medie el aprendizaje de los estudiantes.

En lo que resta de este reporte se abordan los principios de orden teórico y metodológico que se emplearon esta investigación. Asimismo, el reporte incluye una sección donde se discuten los resultados obtenidos y, por último, se plantean algunas conclusiones e implicaciones hacia la enseñanza.

## Referente teórico

Este trabajo tiene como antecedente un estudio sobre el aprendizaje del código algebraico, cuyos resultados resaltaron la necesidad de establecer una relación más estrecha entre la enseñanza de la aritmética y el álgebra (Cedillo, 1995, Cedillo, 1997). Esos resultados sugieren que una manera de fortalecer esa relación es logrando que los estudiantes generen significados para los números y sus operaciones que les permitan ir más allá de aplicar los algoritmos de las operaciones aritméticas eficientemente, de manera que empiecen a trabajar con "lo aún desconocido" en un contexto numérico.

También de ese estudio previo se deriva el referente teórico en que se sustenta esta investigación, que consiste en concebir la aritmética como un sistema de signos que los sujetos pueden usar para comunicar y manipular ideas matemáticas, con base en esa concepción de la aritmética se proponen analogías entre la adquisición del lenguaje materno y el aprendizaje de las matemáticas escolares. Bajo esta premisa, se asigna a la calculadora el papel de un ambiente en el que los sujetos pueden producir expresiones matemáticas empleando el lenguaje de la aritmética. Un aspecto crucial en este planteamiento teórico, es que la producción de esas expresiones se da como una forma de comunicación entre el sujeto y la máquina, lo cual se basa en introducir el uso de la calculadora para realizar actividades que promueven que el sujeto anticipe una respuesta antes de acudir a la máquina, cuando se ejecuta el procedimiento mediante el que el usuario expresa su estrategia, la respuesta de la máquina le ofrece retroalimentación inmediata que le indica si sus mensajes fueron emitidos y recibidos con la intención y el significado que él quería darles. Este proceso cierra el ciclo de comunicación entre la máquina y el sujeto.

Hay otra condición que debe cubrirse para ubicar a la aritmética como un lenguaje en un sentido más amplio, consiste en crear un ambiente de trabajo que demande su uso como un medio para que el estudiante logre sus propios fines. Este aspecto debe ser cubierto por las tareas que se diseñan para el uso de la calculadora en la clase.

Las actividades experimentales que se usaron en esta investigación fueron diseñadas para orientar la enseñanza de la aritmética *a través de su uso mediante la calculadora*, guardadas las proporciones, pudiera considerarse que este proceso simula la forma en que aprendemos el lenguaje materno. Este referente teórico puede resumirse en algunos principios, entre los que se destacan los siguientes:[2]

- El *uso* del código aritmético es el *vehículo* que promueve que los estudiantes asignen significados a los números y sus operaciones. Este principio contrasta notablemente con el que consiste en asumir que los significados (definiciones y reglas) son los que determinan la forma en que posteriormente se aplicará el sistema de signos de la aritmética.
- De acuerdo con el principio anterior, este enfoque teórico no propone sustentar la enseñanza de la aritmética en el aprendizaje de reglas y definiciones, sino en realizar actividades que propicien que el estudiante, a través del uso del código aritmético, asigne significados a los números y sus operaciones que le permitan usar con propiedad ese código en diversos contextos.

El marco proporcionado por estos principios implica que la calculadora se use como un ambiente que motive que el estudiante se involucre en la solución de un problema, si esto se logra, él anticipará una estrategia de solución y la expresará mediante expresiones matemáticas que son ejecutadas por la máquina. El resultado de esa ejecución ofrece retroalimentación inmediata que le permite validar o, en su caso, reformular las conjeturas en que basó su estrategia.

## Preguntas de investigación

La investigación se orientó a obtener datos que permitieran dar respuesta a las siguientes preguntas:

[2] Puede encontrarse una versión más detallada de este referente teórico en Cedillo, 1995 y Cedillo, 1997a.

- ¿Qué nociones y estrategias aritméticas desarrollan los estudiantes cuando enfrentan situaciones donde las operaciones aritméticas son el vehículo para obtener respuestas o soluciones, y la ejecución de las operaciones se deja a cargo de la calculadora?
- ¿Cuáles son las limitaciones y las bondades de las actividades basadas en la exploración numérica mediante el uso de la calculadora?
- ¿Cuál es la actitud de los estudiantes hacia esta forma de enseñanza?

## Aspectos metodológicos

### *Método de Investigación*

Dado que una meta importante de esta investigación es estudiar lo que aprenden los alumnos, se adoptó el método de análisis cualitativo como instrumento de investigación, en particular, el método de estudio de casos (Miles y Huberman, 1984). Esta forma de análisis permite inquirir y conocer de manera más detallada los *procesos de solución* que emplean los estudiantes, lo cual proporciona un esquema más fiel de los alcances y limitaciones de sus aprendizajes. Las fases previstas para realizar esta investigación son un estudio piloto y un estudio principal, en ambas fases las principales fuentes de datos son el trabajo escrito de los estudiantes (36 hojas de trabajo realizadas en clase y dos cuestionarios), y dos entrevistas individuales con seis alumnos previamente seleccionados de acuerdo con su desempeño en matemáticas, dos alumnos con un rendimiento por abajo del promedio, dos alumnos con rendimiento promedio, y dos alumnos con rendimiento arriba del promedio. Las entrevistas fueron estructuradas con base en los procesos de solución que emplearon esos alumnos para abordar las hojas de trabajo durante las sesiones de clase.

En este reporte sólo se aborda la parte correspondiente al análisis de los datos obtenidos del trabajo escrito de los alumnos, posteriormente se reportará la siguiente fase de investigación, en la que se incluirán los datos arrojados por entrevistas individuales.

### *Sujetos*

El trabajo de campo se llevó a cabo con un grupo escolar que cursa el primer grado de la escuela secundaria (11-12 años de edad).[3] El grupo consta de 20 alumnos y se trabajó con ellos durante 16 sesiones de 50 minutos cada una, dos sesiones por semana, durante ocho semanas. El trabajo se desarrolló como una parte del curso regular que se imparte en la escuela.

### *Ambiente de trabajo*

El investigador se incorporó como profesor del curso de matemáticas, su participación se centró en observar y hacer registros sobre el trabajo realizado por los alumnos. Esto fue factible debido a que la actividad en la clase se desarrolló con base en hojas de trabajo previamente preparadas que se proporcionaban a los alumnos al inicio de

[3] Centro Escolar Hermanos Revueltas, Coyoacán, México, D.F.

cada sesión. Esta forma de trabajo permitió que: (i) las actividades no dependieran de la exposición del profesor, (ii) que los alumnos pudieran avanzar a su propio ritmo, y (iii) que el profesor tuviera la posibilidad de atender las preguntas que individualmente planteaban los alumnos.

Se dedicaron al trabajo de campo dos de las cinco sesiones semanales de que consta el curso regular. La actividad durante esas sesiones de clase se organizó como sigue:

- Al iniciar la clase los alumnos recibían un sobre que contenía las hojas de trabajo sobre un tema determinado. Los alumnos tomaban su calculadora e iniciaban el trabajo. Se pedía a los alumnos que hicieran su mejor esfuerzo y avanzaran tanto como les fuera posible. Al finalizar la sesión entregaban su sobre al profesor (investigador), en la siguiente clase recibían su sobre con las hojas de trabajo que habían completado revisadas por el profesor, y las hojas que aún no habían abordado. Los estudiantes debían retomar su trabajo haciendo las correcciones señaladas en las notas que el profesor había escrito al revisar los trabajos. Una vez hecho esto podían abordar nuevas hojas de trabajo.
- Los alumnos podían elegir trabajar en grupo o individualmente.
- Los alumnos podían completar tantas hojas de trabajo como les fuera posible en cada sesión, la única regla era que no podían entregar su trabajo en blanco, si no entendían algo debían acudir al profesor o a cualquiera de sus compañeros.
- El profesor observaba cómo trabajaban los estudiantes y atendía las preguntas que individualmente le planteaban.

*Actividades de enseñanza.*

Las actividades se organizaron en paquetes de hojas de trabajo que corresponden a los siguientes temas: Números naturales y sus operaciones (8 hojas de trabajo), Decimales y sus operaciones (12), Fracciones comunes y sus operaciones (8), y Números con signo y sus operaciones (8). A continuación se muestran algunos ejemplos de estos materiales.[4]

*Números naturales y sus operaciones*

- Un alumno de otra escuela dice que con la calculadora puede producir los números del cero al cien usando sólo el número 4 y las teclas $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{}$, y las de paréntesis. ¿Puedes hacer lo que dice ese alumno?
- ¿Puedes encontrar un número entero que esté entre 50 y 60 y que sólo pueda dividirse entre sí mismo y el 1? ¿Cuál es ese número?
- Una alumna de otra escuela dice que encontró diez números enteros que están entre 80 y 120 que sólo pueden dividirse entre sí mismos y el 1. ¿Es cierto lo que dice esa alumna? ¿Cuáles son esos números?
- ¿Puedes encontrar un método para inventar números que sólo puedan dividirse entre sí mismos, el 1 y otro número? Describe tu método.

[4] Las colección completa de esos materiales será publicada próximamente en la serie La calculadora en el Aula, Vol. 1., Algebra y Sentido Numérico, Grupo Editorial Iberoamérica.

- Encuentra cinco números que sólo puedan dividirse entre sí mismos, el 1, y otros dos números más. ¿Qué números encontraste?
- ¿Puedes encontrar un método para inventar números que sólo puedan dividirse entre sí mismos, el 1, y otros dos números? Describe tu método.

*Números decimales y sus operaciones*

- Escribe dos números que multiplicados den por resultado 19.873. ¿Encontraste un método para encontrar esos números? Describe tu método de manera que cualquiera de tus compañeros lo entienda. Si quieres hazlo con un ejemplo.
- ¿Puedes hacer la operación $84 \times 37$ sin usar la tecla para multiplicar y sin hacer la multiplicación mentalmente ni con lápiz y papel? Explica en qué consiste el método que usaste, hazlo de manera que cualquiera de tus compañeros lo pueda entender.
- Encuentra los números que faltan. Escribe las operaciones que usaste para obtener una solución.

$48.7 \times \mathrm{d} = 695.4$ $\qquad$ $e \times 17.68 = 23.46$

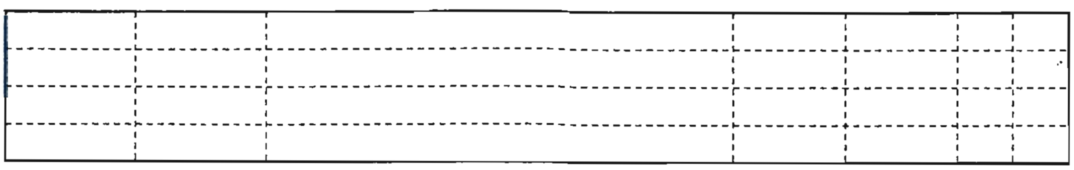
$\mathrm{r} \div 0.536 = 4.715$ $\qquad$ $1.267 \div \mathrm{q} = 100.412$

- Usa números para escribir en la calculadora las medidas que están descritas con palabras. Si leíste y escribiste correctamente cada cantidad obtendrás el total que se indica. Si el total que obtuviste es diferente del que se indica, busca y corrige el error que cometiste.

| | |
|---|---|
| dos kilos tres cuartos | ______ |
| + cuatro mil doscientos cincuenta gramos | + ______ |
| + un kilo y cuarto | + ______ |
| + diez kilos cien gramos | + ______ |
| **Total:** ______ | **Total: 18.35 kilos** |

*Fracciones comunes y sus operaciones*

- La figura de abajo representa una tira de papel que se ha dividido en algunas partes. En cada parte del rectángulo escribe la fracción correspondiente. Suma las fracciones que escribiste. **Si tus respuestas son correctas la suma debe darte 1.**



- Encuentra tres fracciones cuya suma dé como resultado $\frac{3}{8}$.
- Usa la calculadora para realizar las siguientes operaciones.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{8}+\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{10}+\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{6}+\frac{1}{3}$ | $\frac{8}{16}+\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{4}+\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{14}+\frac{1}{3}$ | $\frac{16}{32}+\frac{1}{3}$ |

¿Qué observas? ¿Por qué crees que esté pasando eso? ____________
¿Puedes construir otras cinco operaciones que den el mismo resultado que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$?

- Un alumno de otra escuela dice que para obtener la tercera parte de 891 le da lo mismo dividir entre 3 que multiplicar por $\frac{1}{3}$ ¿Estás de acuerdo con él? Si tu respuesta es afirmativa di por qué. Si no estás de acuerdo muéstralo con un ejemplo.
- Encuentra una forma de usar la calculadora para obtener los números que faltan.

  a) $\frac{2}{5}+\frac{a}{b}=1$ b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{c}{d}=1$ c) $3-\frac{l}{m}=\frac{3}{7}$ d) $\frac{2}{3}-\frac{x}{y}=\frac{1}{5}$

  ¿Encontraste un método para contestar las preguntas anteriores? ¿Cuál es tu método?
- Encuentra una fracción que **esté entre** $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$.

*Números con signos y sus operaciones*

- Usa la calculadora para realizar las siguientes operaciones.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-7+9$ | $-5+-7$ | $8+-7$ | $-15+-17$ | $30+-50$ | $0.5+-2$ | $-19+-30$ | $-72+30$ |

¿Qué hizo la calculadora para sumar un número negativo con un número positivo? ¿Qué hizo la calculadora para sumar un número negativo con otro número negativo?

- ¿Puedes encontrar tres números que al sumarlos den por resultado cero? ¿Cuáles son?
- ¿Puedes encontrar cinco números que al sumarlos den por resultado $-27$? ¿Cuáles son?
- Construye una suma con cuatro sumandos, dos positivos y dos negativos, de manera que el resultado sea $-0.763$.
- Encuentra los números que faltan.

| | | |
|---|---|---|
| $-15+13+m=0$ | $17+-20+n=-75$ | $p+18+-35=-100$ |
| $-2.5+q+-12=7.8$ | $\frac{1}{3}+r+-\frac{1}{9}=-2$ | $-\frac{1}{5}+s+\frac{3}{8}=0$ |

*Toma de datos*

Con el fin de documentar el trabajo de los alumnos, las actividades de enseñanza se diseñaron como hojas de trabajo y se reprodujeron para ser entregadas a cada estudiante. Esto proporcionó datos que posteriormente fueron analizados. Al término de cada sesión se recogían las hojas de trabajo que habían completado los estudiantes. Esas hojas eran revisadas por el investigador y se llevaba un registro del avance de cada estudiante. Estos registros se centraron en las siguientes categorías: (i) los aciertos de los estudiantes, (ii) los errores que cometieron, (iii) las estrategias no convencionales que desarrollaron, y, (iv) las dificultades que tuvieron y la forma en que las superaron (con ayuda del profesor o por sí mismos).

Las notas que tomó el investigador al término de cada sesión constituyeron otra fuente importante de datos. Finalmente se aplicaron dos cuestionarios a manera de exámenes que permitieron estudiar los logros individuales y las estrategias que desarrollaron los estudiantes.

## Resultados

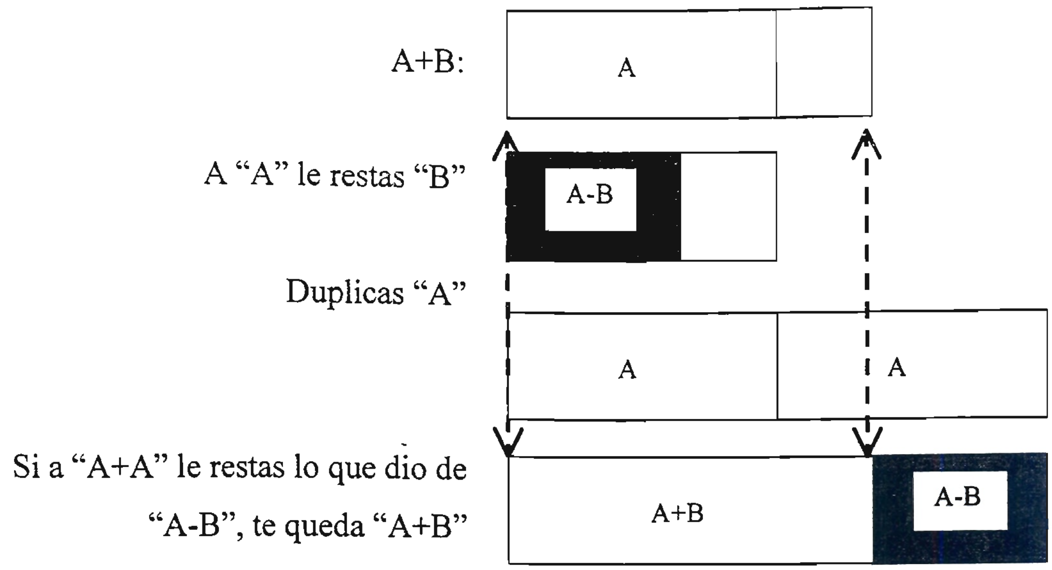
### *Nociones y estrategias: Transición de lo particular a lo general.*

Un resultado importante de este estudio está relacionado con indicios de procesos de generalización mostrados por los estudiantes. A pesar de que las actividades de enseñanza consistieron en manipulaciones numéricas, y por lo mismo se centran en el tratamiento de casos específicos, las estrategias que desarrollaron los estudiantes mostraron una notoria tendencia hacia la generalización de procedimientos. Esta forma de trabajo de los estudiantes puede ser un antecedente importante en el paso de la aritmética al álgebra.

Los datos recabados muestran que hubo dos factores determinantes en las estrategias que desarrollaron los alumnos en torno a procesos de generalización: (i) el cálculo numérico se hizo descansar en la calculadora, lo cual favoreció que los estudiantes se concentraran en el establecimiento de las relaciones relevantes en la solución de un problema; (ii) el cálculo numérico nunca fue el objetivo final de las actividades, sino un medio para realizarlas. Las actividades así diseñadas y el apoyo de la calculadora, propiciaron que los estudiantes exploraran tantas estrategias como les fue posible sin que eso agotara sus esfuerzos, lo cual parece haber favorecido que en muchas ocasiones encontraran más de una forma de resolver un problema. Este hecho ayudó que los estudiantes rompieran el esquema de respuesta única y se iniciaran en la búsqueda de estrategias más generales y más eficientes. En lo que sigue se presentan algunos episodios del trabajo de los estudiantes que proporcionan evidencia de esto.

"La tecla descompuesta" es una actividad en la que se requería a los estudiantes que encontraran formas para ejecutar las operaciones aritméticas sin usar las tecla correspondientes a la ejecución de una operación. Atahualpa (alumno de 12 años de edad), encontró mediante exploraciones numéricas que para sumar dos números sin usar la tecla de la suma, podía "*duplicar el mayor de los números y a eso restarle el resultado de restar a ese número el otro*".[5] Su explicación puede describirse mediante la identidad $a + b = 2a - (a - b)$, cabe mencionar que Atahualpa no cuenta con elementos de álgebra que le permitan expresar y manipular esas relaciones mediante esa identidad. Él no pudo explicar con claridad cómo encontró ese método, no obstante, el argumento que utilizó para sostenerlo fue retar a sus compañeros a que encontraran un par de números que no pudieran ser sumados de esa manera, lo cual también corresponde a un procedimiento general para mostrar la no validez de una proposición. Algunos estudiantes se esforzaron para encontrar un ejemplo que contradijera la estrategia de Atahualpa, al no poder hacerlo se propusieron encontrar cómo explicar su validez y obtuvieron el siguiente diagrama, donde los rectángulos A y B representan a los números que "quieren sumar sin sumar".

[5] De aquí en adelante, el texto entre comillas y letra cursiva corresponde a transcripciones de expresiones de los estudiantes.




Otros tres estudiantes intuyeron que el método de Atahualpa se podía aplicar al caso de "restar sin usar la tecla de la resta" (el investigador los alentó para que no abandonaran esa idea). Finalmente encontraron el siguiente procedimiento: "*multiplica por dos el primer número y a eso le restas el resultado de sumar los dos números*", lo cual corresponde a la identidad $a - b = 2a - (a + b)$. Cabe mencionar que aunque no pudieron evitar el uso de la resta, esos estudiantes lograron retomar la estrategia que les había funcionado para la suma y extenderla para el caso de la resta.

Otros alumnos respondieron a la actividad de la tecla descompuesta haciendo una estimación de la suma de los dos números dados, y luego restaban a esa estimación uno de los números hasta obtener el otro mediante un proceso de ensayo y error. Erick generó otra estrategia interesante, él encontró que podía hacer la suma sin usar la tecla de sumar "*restándole al primer número el otro, pero su negativo*", lo cual corresponde a la identidad $a - (-b) = a + b$. Al explorar con la calculadora él había observado que "*restar un número negativo es lo mismo que sumarlo*", claramente Erick no podía explicar por qué ese procedimiento funcionaba, su único argumento era la validación empírica que le proporcionaba la máquina.

Las actividades del tipo "encuentra dos números que multiplicados (sumados, restados o divididos) den 8.956" fueron otras situaciones que propiciaron la generación de estrategias generales por parte de los alumnos. La estrategia más frecuente fue el uso de la relación inversa entre operaciones. Por ejemplo, Mariana planteó: "*eliges un número, el que quieras, entonces divides el número que te dan entre el número que elegiste, el resultado de esto y el número que elegiste son dos números que multiplicados te dan el número que se pide*".

## *Generalización y eficiencia*

Se propició que los alumnos discutieran los diversos métodos que habían generado y ellos se propusieron dilucidar "*cuál método es mejor*". En esta discusión pusieron en juego argumentos relacionados con la eficiencia y la generalidad del método. Finalmente fueron capaces de concluir que las distintas estrategias que habían generado tenían el mismo nivel de generalidad "*porque cualquiera de esos métodos se podía usar con los números que quieras*", pero los métodos de Atahualpa y Erick fueron reconocidos como más eficientes "*porque no necesitas hacer tanteos*".

Salvo en el caso de la estrategia de ensayo y error, los alumnos no podían explicar con claridad por qué los procedimientos que desarrollaron eran válidos, sin embargo, estos episodios muestran cómo los estudiantes empezaron a formular generalizaciones en un ámbito de trabajo que partió del manejo de casos específicos. Otro aspecto relevante es el hecho de que los estudiantes condicionaron la validez de los procedimientos que generaron en tanto no encontraran un ejemplo que mostrara lo contrario. Estos hallazgos sugieren que la calculadora puede usarse para apoyar el paso de lo particular a lo general. De acuerdo con lo observado en este estudio, parece poco probable que el conocimiento adquirido por los estudiantes con base en la validación empírica que ofrece la calculadora pudiera representar un obstáculo. Más bien, estos resultados sugieren que ese conocimiento basado en lo empírico puede ser un antecedente favorable para abordar posteriormente el estudio de métodos de validación formales.

*Resolución de ecuaciones*

Las ecuaciones que se incluyeron en el paquete de actividades son de las formas $x + b = c$, $bx = c$, y $b \div x = c$ (a, b y c, constantes), esas ecuaciones pueden resolverse aritméticamente "deshaciendo operaciones". Sin embargo, para una mejor apreciación del trabajo desarrollado por los estudiantes debe tenerse en cuenta que no se les dio ninguna instrucción sobre qué es una ecuación, qué es una incógnita, o cómo se resuelve una ecuación. También hay que considerar que los valores numéricos que se usaron en las ecuaciones son bastante sofisticados (fracciones decimales, fracciones comunes y números negativos). La ausencia de instrucción sobre este tema y la complejidad de los valores numéricos que se incluyeron se debe al propósito de observar en qué medida el uso de la calculadora podía apoyar a los alumnos en la solución de ese tipo de situaciones, por lo que la única indicación que se les dio fue "encuentra los números que faltan".

Las respuestas de los alumnos a estas actividades señalan varios resultados importantes, entre éstos cabe destacar los siguientes:

- Para ninguno de los estudiantes representó alguna dificultad la abrupta inclusión de literales en el contenido de expresiones aritméticas.
- Todos los estudiantes pudieron resolver correctamente las ecuaciones de las formas $a \pm a = b$, $ax = b$, y $x \div a = b$.
- Quince alumnos pudieron resolver las ecuaciones de la forma $a \div x = b$, doce de ellos lo lograron mediante el procedimiento de ensayo y error, tres de ellos pudieron desarrollar métodos que muestra que fueron capaces de empezar a operar con "lo aún desconocido". Sus respuestas muestran una versión del proceso denominado *operar con la incógnita* (Filloy y Rojano, 1984, 1989).

Los datos recabados sugieren varias explicaciones con relación a la aceptación por parte de los alumnos del uso de literales en expresiones matemáticas. Para algunos alumnos la instrucción "encuentra los números que faltan" fue suficiente para que entendieran que las literales que se incluyeron en las ecuaciones representaban "un número que falta". Para otros alumnos lo que se les pedía era claro porque "*cuando usamos la calculadora siempre se nos pide que encontremos números que faltan ... aquí era más claro, en lugar del número que falta había una letra*". Ciertamente, en la mayor parte de las actividades precedentes a las de ecuaciones se pide a los alumnos que encuentren números que satisfacen condiciones dadas, por ejemplo, "encuentra dos números que divididos den 3.0567". Otros alumnos manifestaron que las letras incluidas en expresiones matemáticas no les sorprendieron porque en la primaria y otras clases de la secundaria usan fórmulas.

Estas respuestas de los alumnos parecen explicar satisfactoriamente su aceptación para trabajar con expresiones que contienen literales. Cabe destacar que hay estudios en los que se ha encontrado que una alta proporción de alumnos de esas edades han mostrado un rechazo al uso de literales como símbolos matemáticos y que su experiencia en el nivel elemental con las letras los ha conducido a desarrollar concepciones erróneas para el uso estos símbolos en el álgebra (Küchemann, 1981). El contraste entre los resultados del estudio que aquí se reporta y los obtenidos por Küchemann resaltan la importancia de que nuestros alumnos no hayan presentado indicios de ese tipo de problemas, lo cual parece haberse dado fundamentalmente por el contexto numérico en que se presentaron las actividades prealgebraicas.

En cuanto al éxito alcanzado por los alumnos en la resolución de ecuaciones, una explicación plausible son las acciones que realizaron cuando enfrentaron las actividades del tipo de "la tecla descompuesta" y "encuentra dos números que sumados den un número dado". En estas actividades la estrategia más empleada por los alumnos fue acudir a las operaciones inversas. Es muy probable que los estudiantes conocieran la relación inversa entre la suma y la resta o la multiplicación y la división, sin embargo, los datos recabados muestran que ellos no estaban conscientes de que esta relación pudiera emplearse como herramienta para resolver problemas aritméticos, cuestión que fue más evidente cuando enfrentaron la solución de ecuaciones.

Otro elemento que influyó notablemente en el éxito de los alumnos fue la disponibilidad de la calculadora, lo cual favoreció que pudieran verificar sus respuestas ágilmente. Un buen número de alumnos "pensaba en voz alta" o comentaban entre ellos mientras realizaban las actividades, una expresión que se escuchaba frecuentemente era "*bueno, ya está, veamos si está bien*". En muchos casos, expresiones como ésta precedían la verificación de los cálculos mediante la calculadora. La complejidad de los valores numéricos incluidos en las ecuaciones también desempeñó un papel importante en el desarrollo de esta predisposición de los estudiantes para verificar sus resultados, cuando se les preguntó a este respecto varios de ellos contestaron "*en general los resultados son números muy complicados ... difícilmente puedo saber a simple vista si estoy bien ... lo bueno es que con la calculadora es muy fácil checar si estoy bien o no*". A este respecto debe notarse la disponibilidad de la calculadora induce en los estudiantes la idea de que ahora "le es fácil checar los resultados", pero lo que están haciendo vas más allá de usar inteligentemente la calculadora, ellos están logrando algo que la investigación ha mostrado que en general le es difícil en el ámbito de la resolución de ecuaciones: *dar sentido a lo que están haciendo y saber qué es lo que están buscando*. La consciencia de lo que están haciendo y lo que deben obtener es lo que les indujo a verificar sus resultados y a contar con criterios que les permitían valorar si sus respuestas eran correctas o no.

Al inicio de la sección de resultados relacionados con resolución de ecuaciones se mencionó que algunos estudiantes desarrollaron estrategias que involucraron cierta manipulación sobre "lo aún desconocido". Esto se presentó cuando estaban resolviendo ecuaciones de la forma $a \div x = b$. Algunos estudiantes pudieron hacerlo mediante ensayo y error, pero otros acudieron a reinterpretar la ecuación como se describe a continuación. Silvia (alumna de 12 años de edad) explicó cómo resolvió la ecuación $1.267 \div q = 100.412$ como sigue:

> *"Se trata de encontrar entre qué número debes dividir a 1.267 para que el resultado sea 100.412 ... no lo pude encontrar tanteando con distintos números, entonces me di cuenta que* ***si ya supiera qué número es****, al multiplicarlo por 100.412 me debería dar 1.267, es decir* $\mathbf{q \times 100.412 = 1.267}$ *... Así me di cuenta que el número que buscaba es el resultado de dividir 1.267 entre 100.412, eso me dio 0.0126180 ... lo comprobé con la calculadora y está bien".*

Otros dos estudiantes ofrecieron explicaciones similares, aunque no tan claramente como lo hizo Silvia, sin embargo es importante hacer notar cómo el trabajo que han realizado con la calculadora les ha permitido, por una parte, enfrentar la solución de ecuaciones que difícilmente se podrían pensar como los primeros casos que se propondrían a niños de esas edades; por otra parte debe destacarse el tipo de transformaciones de orden algebraico que esos niños han podido efectuar con base en una experiencia totalmente basada en el tratamiento de casos numéricos.

### *Actitud de los estudiantes*

Durante la ya larga experiencia que he tenido como profesor de matemáticas he probado diversos materiales para apoyar la enseñanza, con toda certeza puedo afirmar que ninguno de los recursos que he empleado ha producido una motivación tan evidente y tan sostenida en el tiempo como la que produce el uso de la calculadora. El uso de la calculadora en la clase introduce por sí mismo un elemento que motiva curiosidad en los estudiantes, esta curiosidad se manifiesta en un notorio interés en la clase de matemáticas. Quizás el indicador más evidente que debo mencionar es que los estudiantes expresaban una seria molestia si por alguna razón dejaban de tener una clase.

La motivación de los estudiantes puede estar relacionada con la novedad del uso de la máquina en la clase, otro factor que puede influir en ese interés es que las actividades están planteadas en el esquema de un juego, en la actualidad los juegos son quizás el uso más común de las máquinas entre los jóvenes. A este respecto, la ventaja que ofrece la calculadora es que cualquier cosa que se haga al usarla está inmersa en una actividad matemática, por esto, si la actividad con la calculadora es un juego entonces es un juego matemático. El asunto que debemos estudiar con más cuidado es lo que aprenden los estudiantes a través de estos juegos basados en el uso de la calculadora.

Otro aspecto importante es el fortalecimiento de la auto estima de los estudiantes. Los datos aportados en este estudio indican que el uso de la calculadora favorece este aspecto. Una de las primeras cosas que aprenden los estudiantes es que la calculadora puede realizar los cálculos con mayor velocidad que ellos, pero que la calculadora no puede actuar por sí misma, ni elegir qué operaciones deben realizarse para resolver un problema; eso es algo que ellos sí pueden hacer. Los estudiantes aprenden pronto a usar la calculadora para poner a prueba sus conjeturas, con el apoyo de la máquina ellos son capaces de contestar por sí mismos muchas de las preguntas que usualmente planteaban al maestro o a compañeros más competentes. La posibilidad de avanzar por sí mismos refuerza notablemente su auto estima. El siguiente episodio con un alumno cuyo desempeño en matemáticas es notablemente más bajo que el del resto de sus compañeros ilustra esta situación. Él estaba buscando dos números que sumaran 0.321, su primer intento fue con los números 0.320 y 1, al hacerlo con la calculadora se sorprendió que el resultado fuera 1.320. Entonces intentó con 0.301 y 2, y se encontró una situación similar. A pesar de que esos intentos mostraban un fracaso evidente, él se acercó orgullosamente a comentarme su éxito: "*Por fin entendí por qué me decían que debo alinear los números para sumar ... los decimales nunca me salieron bien, pero ahora me di cuenta por qué 0.320 más 1 no da 0.321. ¡Qué tonto!, ¿No? Pero ya me di cuenta de que lo que debía sumar no es 1 sino 0.001, es decir, más un milésimo*". Este episodio es un buen ejemplo de cómo la interacción con la máquina puede favorecer un cambio de actitud hacia las matemáticas, ahora ese alumno ya puede hablar de sus dificultades, en particular, porque las está superando por sí mismo.

Durante el desarrollo de esta investigación se observó que un buen número de alumnos declaran cosas como la siguiente: "*yo nunca he sido bueno en matemáticas, nunca pude hacer bien las restas ni las divisiones, las fracciones nunca las entendí, pero con la calculadora me gustan las cosas que hago porque las entiendo mejor ... me habían dicho no tenía sentido hacer las cosas con la calculadora porque eso no me hacía pensar, eso no es cierto, para hacer algo con la calculadora necesito antes pensar para ver qué voy a hacer*".

Probablemente esas expresiones se deben a experiencias desfavorables debido a una falta de destreza para calcular, cuestión que queda en un segundo plano al incorporar la calculadora. Sin embargo, el asunto que parece importante es que el desempeño de los estudiantes en la clase de matemáticas mejora notablemente con el apoyo de la calculadora, lo cual cuestiona fuertemente el hecho de que los cursos de matemáticas se centren en el dominio de destrezas de cálculo (en el caso de la aritmética), y en el dominio de la manipulación simbólica (en el caso del álgebra), en lugar de promover el uso de las operaciones en la resolución de problemas.

## Comentarios finales

El trabajo desarrollado por los alumnos indica que en muchas ocasiones no pudieron responder al primer intento, sin embargo difícilmente se rendían ante una tarea porque podían seguir poniendo a prueba sus conjeturas con el apoyo de la calculadora. Al principio parecía que sólo intentaban estrategias de ensayo y error, sin embargo, después de algunos intentos llegaban a bosquejar estrategias que les conducían sistemáticamente a una solución correcta. Los datos recabados muestran que al dar respuesta a ese tipo de actividades, los alumnos no estaban aprendiendo cómo realizar las operaciones, lo que estaban aprendiendo es *qué son y para qué sirven las operaciones*, además, estaban desarrollando una noción de número a través de las acciones que realizaban con ellos.

El tipo de actividades que se usaron en este estudio contrastan fuertemente con aquéllas en las que el énfasis se pone en el dominio de los algoritmos para ejecutar las operaciones aritméticas. Las actividades que se emplearon en esta investigación se centran en el uso de las operaciones y no en cómo se ejecutan los cálculos, esto último puede hacerlo la calculadora, *pero la calculadora no puede elegir qué operaciones son pertinentes, ni la manera en que éstas se usan para resolver un problema*. Los resultados de este estudio sugieren que la calculadora puede emplearse para favorecer que los estudiantes aprendan cómo emplear sus conocimientos de aritmética en la solución de problemas. Este aspecto es crucial, porque saber cómo usar las operaciones es un factor determinante en el éxito que los estudiantes puedan alcanzar en sus estudios futuros. En última instancia, parece que todos estaríamos de acuerdo en que el propósito más importante en la enseñanza de la aritmética es que ésta sirva como herramienta para plantear y resolver problemas. Las respuestas de los estudiantes que se han discutido en este reporte sugieren que la calculadora desempeñó el papel de un interlocutor con el que los ellos pueden *interactuar mediante el lenguaje de la aritmética*, este hecho ubica a la aritmética en un contexto pragmático que contrasta notablemente con el papel que se le otorga al concebirla solamente como un conjunto de reglas para realizar cálculos numéricos.

Los resultados de esta investigación indican que el hecho de que la calculadora se emplee para promover que los alumnos aprendan para qué sirven los números y sus operaciones no significa que ellos no aprendan cómo hacerlas. Los datos recabados muestran que al trabajar con la calculadora los alumnos no sólo aprenden sobre el significado de las operaciones, sino que desarrollan estrategias no convencionales para realizarlas, sobre todo, estrategias de cálculo mental. Estos resultados sugieren que una vez que los alumnos han comprendido cómo pueden ser utilizadas las operaciones, parecen estar en una situación más favorable para aprender, si se considera necesario, la ejecución de los algoritmos convencionales.

En cuanto a la enseñanza del álgebra, los resultados de este estudio muestran hallazgos promisorios que sugieren que la calculadora puede explotarse para promover que los estudiantes desarrollen nociones y estrategias numéricas que pueden ser una apoyo importante en la transición de la aritmética al álgebra.

En las siguientes fases de esta investigación se centrará en el estudio de cómo puede abordarse la enseñanza del álgebra cuando la operatividad algebraica se basa en el uso del manipulador simbólico que está instalado en cierto tipo de calculadoras, y qué es lo que aprenden los estudiantes bajo esa forma de enseñanza.

## Bibliografía


Brolin, H., 1992. Introducing Calculators in Swedish Schools. *Calculators in Mathematics Education*. NCTM Yearbook, Reston, Virginia.

Cedillo, T., 1995. Introducción al Álgebra Mediante su Uso: Una alternativa factible con calculadoras gráficas. *Educación Matemática, Vol. 7, pp. 106-121*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Cedillo, T., 1996. Number Patterns: A Milieu Where Students May Extend Their Algebraic Achievements To Problem Solving. *XIX Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Valencia, España.

Cedillo, T., 1997. *Calculadoras: Introducción al Álgebra*. Grupo Editorial Iberoamérica, cuadernos didácticos, Vol. 7. México.

Cedillo, T., 1997a. Exploring Algebra as a Language in-use. *XX Annual Conference* *of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Lathi, Finlandia.

Filloy, E., y Rojano, T., 1984. From an Arithmetical to an Algebraic Thought (a clinical study with 12-13 year olds). *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Madison, Wisconsin.

Filloy, E., y Rojano, T., 1989. Solving equation: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics, Vol. 9, No. 2, FML Publishing Association, Canada.*

Hembree, Ray, and Donald J. Dessart, 1986. "Effects of Hand-held Calculators in Precollege Mathematics Education: A Meta-Analysis". *Journal of Research in Mathematics Education*, 17: 83-99.

Hembree, Ray, and Donald J. Dessart, 1992. "Research on Calculators in Mathematics Education". In J. T. Fey and C. R. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education*, Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Küchemann, D.E., 1981. Algebra. In K. Hart, (Ed.) *Children's Understanding of Mathematics: 11-16.* London: Murray.

Miles, M. and Huberman, A., 1984. *Qualitative Data Analysis, a Sourcebook of New Methods.* SAGE Publications, London.

Ruthven, K., 1992. Personal Technology and Classroom Change. *Calculators in Mathematics Education.* NCTM Yearbook, Reston, Virginia.

Shuard, H., et. al., 1992. CAN: Calculator Use in the Primary Grades in England and Wales. *Calculators in Mathematics Education.* NCTM Yearbook, Reston, Virginia.

Shumway, R., 1990. "Supercalculators and the Curriculum". *For the Learning of Mathematics*, 10(2), 2-9.