ARTÍCULOS
DE
INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 11 No. 2 Agosto 1999
pp. 32-51

Representaciones matemáticas de estudiantes pre-universitarios en la resolución de un problema de optimización

Fecha de recepción: Marzo, 1998

Miguel Ángel Campos Hernández y Juan Estrada medina
Universidad Nacional Autónoma de México,
México, D. F.
campos@servidor.unam.mx

Resumen. *Se presentan resultados de un estudio sobre representación matemática de estudiantes pre-universitarios en un proceso de resolución de un problema de optimización. Se analizaron sus respuestas escritas mediante análisis de discurso con base en teorías de la representación y de resolución de problemas. Se encontró que la mayoría sigue una estrategia fundamentalmente de tipo algorítmico, con un limitado número de representaciones matemáticas, entre las que predomina la medición, sin una noción sólida de variable y de relaciones funcionales, sin esquemas de monitoreo del procedimiento y de la solución obtenida, y con limitaciones en el conocimiento base. Se comentan brevemente alternativas educativas a esta situación.*

Abstract. *This interpretive study reports findings on mathematical representation 12th-grade students show as they attempt to solve an optimization problem. Students' written protocoles were analyzed by means of discourse analysis grounded on representation theory and theories of problem solving. It was found that most students follow an algorithmic approach, with a limited number of different types of mathematical representation, a predominance of measurement actions without a clear notion of a variable and functional relations, an apparent lack of control processes along the strategy and of the obtained solution to the problem, and incorrect or otherwise unclear knowledge base content. Educational derivations of these findings are discussed.*

Introducción

En este trabajo analizamos el contenido representacional que muestran los estudiantes de un curso de introducción al cálculo (12° grado escolar, último antes del ingreso a la universidad) al intentar resolver un problema de optimización: encontrar el área máxima de un rectángulo, dado un perímetro fijo.[1] El estudio se fundamenta en los aportes de Janvier (1978, 1987) y Dreyfus (1991) sobre representación, y de Schoenfeld (1985, 1992) y Hiebert (1992) sobre resolución de problemas. Se parte de la base de que representación y manipulación simbólicas son dos de los más importantes proce-

[1] Este estudio es parte de una línea de investigación sobre estructuras de conocimiento y razonamiento, dentro de la cual se estudian representación, estrategias y resolución de problemas, y en ella participan también Patricia Balderas, Sergio Cruz y Asela Carlón.

sos del hacer matemáticas (Schoenfeld, 1992, 335), los cuales se pueden mostrar en un proceso de resolución de problemas. Así, las preguntas de investigación que se abordan en este estudio son: (a) ¿cómo se representan el problema los estudiantes? (b) ¿qué secuencia representacional se puede observar conforme buscan la solución? y (c) ¿qué relación presenta su plan con el procedimiento de resolución desde el punto de vista representacional? También se comentan las soluciones que obtienen. Las respuestas a estas preguntas pueden ayudarnos a comprender mejor cómo se relacionan las formas representacionales con que cuenta un estudiante del nivel escolar que ahora estudiamos al abordar un problema, y las que utiliza al intentar resolverlo; con ello se puede analizar su enfoque o perspectiva sobre el hacer matemáticas, detectar dificultades en el procedimiento y proponer alternativas didácticas más realistas y adecuadas al hacer matemático.

Consideraciones teóricas

Las representaciones son las formas en que percibimos, imaginamos y categorizamos la realidad y nuestras propias construcciones simbólicas, y las usamos para describirla, explicarla o ilustrarla (Campos, 1997); esto incluye por tanto a las representaciones matemáticas de los objetos o procesos matemáticos, su contenido y sus relaciones con entidades empíricas. Como parte del conocimiento previo, las representaciones tienen un papel muy importante en la comprensión (Hiebert y Carpenter, 1992, 66-67) y las estrategias que generan los estudiantes (*id.*, 74). Una representación mental del objeto o proceso matemático "se refiere a esquemas internos o marcos de referencia que usa una persona para interactuar con el mundo externo" (Dreyfus, 1991, 31). Esta representación interna se convierte en *externa* cuando se comunica mediante lenguaje, símbolos o figuras (Hiebert y Carpenter, *id.*, 66). Es decir, las representaciones matemáticas internas forman parte del conocimiento base de una persona, y las externas el conocimiento comunicado.[2]

La mayoría de las representaciones están relacionadas con conceptos (Dreyfus, 1991, 33), e incluso a redes de conceptos dentro de conocimiento que presenta alguna organización (Hiebert y Carpenter, *id.*, 66-67, 78). Aunque no se tenga formalizada cada idea matemática (ver la discusión entre concepto informal o *concepto-imagen* y su definición formal o *concepto-definición*, en Vinner, 1991), un concepto o situación matemática "se puede describir de muchas maneras o con muchos *modos de representación*. Además de *gráficas* o *descripciones verbales*, a menudo se usan tablas y fórmulas (ecuaciones)" (Janvier, 1978, 3.2; itálicas en el original). Esta idea de diversidad de representaciones acerca de un concepto la comparten Eisenberg y Dreyfus (1992, 46) al plantear "el uso de más de una representación para la misma situación matemática" en su discusión sobre funciones y visualización. Además, Dreyfus (*id.*, 32) afirma que "una función es un concepto abstracto con el que generalmente operamos en una de varias representaciones, o preferentemente en varias representaciones al mismo tiempo; a menudo esto incluye la representación gráfica y la algebraica". Es decir, una idea matemática puede representarse de diversas formas y cada

[2] Es conveniente recordar que el conocimiento comunicado está basado en lo que ya se ha comprendido; ver Sternberg (1987) para una amplia y detallada discusión del proceso de comprensión verbal, que da forma al contenido representacional, y Prawat (1989) sobre los procesos cognoscitivos de acceso a dicho contenido.

una de estas formas o tipos representacionales puede comunicarse en por lo menos un modo particular con formatos diferentes de acuerdo a la sintaxis propia del modo. Por ejemplo, el concepto de límite o de función se puede representar en forma gráfica (internamente) y expresarse en diversos modos (externos): como ecuación o como gráfica; también puede representarse en forma algebraica (internamente) y expresarse en modo verbal (externo) o gráfica (también externamente). En el caso de descripciones en formato verbal o textual, los conceptos se expresan por lo menos mediante el *concepto-nombre* (Vinner, 1991, 68), y éstos en sí mismos hacen referencia a otros tipos de representaciones. En términos generales, se podría ver esta situación para cualquier concepto matemático de la siguiente manera :

CONCEPTO MATEMATICO			
REPRESENTACION INTERNA	REPRESENTACION EXTERNA		
TIPO A	MODO A1	MODO A2	MODO A...
TIPO B	MODO B1	MODO B2	MODO B...
...		...	

Además de la diversidad de representaciones posibles de un concepto matemático, es necesario el intercambio entre ellas mediante un proceso de traducción de los componentes de una forma de representación a otra (Janvier, 1978, 1987; Dreyfus, 1991, 32-34). La diversidad y la traducción están presentes en un proceso de resolución de problemas (Dreyfus, 1991, 33). Existe una amplia literatura sobre este proceso, por lo que aquí sólo insistiremos en la diferencia entre *ejercicios rutinarios* y *problemas desde una perspectiva matemática* (Schoenfeld, *id.*, 337). Aunque parece haber una idea generalizada sobre la importancia de este proceso, los ejercicios rutinarios, que proveen práctica en ciertas técnicas matemáticas pero que "son todo menos problemas" (*ib.*), todavía predominan en la enseñanza. Los *problemas*, por su parte tienen que ver con "una pregunta, que es desconcertante y difícil" (*id.*, 337, 339), están en la base del hacer de los matemáticos (*id.*, 339) y pueden utilizarse en contextos pedagógicos para propiciar una actividad de producción de sentido matemático (*id.*, 339-40). Como uno de los propósitos pedagógicos más importantes en estos contextos es entender, se puede interpretar dicha producción de sentido como "representar y organizar internamente el conocimiento en formas que enfatizan relaciones entre partes de la información" en el proceso de resolución de problemas (Hiebert *et al.*, 1996, 16). De hecho, Schoenfeld agrupa "los conocimientos y comportamientos necesarios para una adecuada caracterización del desempeño matemático de resolución de problemas" (1985, 15) en recursos (incluye conocimiento), heurística (incluye estrategias), control (incluye monitoreo) y sistemas de creencias (a estos elementos agrega *prácticas* más tarde: 1992, 348, 360ss). Estos aspectos están interrelacionados, por lo que elementos del sistema de creencias se incorporan en las propias estrategias mediante los "enfoques generales o formas de pensamiento que se necesitan para construir... procedimientos /particulares/" (Hiebert *et al.*, *ib.*).[3] Es decir, el contenido

[3] No está por demás acotar que estos elementos, aprendidos en interacción social (generalmente en la escuela), se combinan de diferentes maneras para resolver problemas de acuerdo con sus características y la experiencia de cada persona. Por tanto, las estrategias no están separadas nunca de los otros componentes, son específicas y dependen del contexto.

representacional está tanto en la forma de plantearse el problema y establecer vías de resolución como en la forma particular de proceder en la búsqueda de solución.

En lugar de describir representaciones y estrategias posibles *a priori*, en este trabajo se identifican cuáles utilizan los estudiantes a partir de un problema específico. Para ello, y siguiendo la discusión anterior, definiremos a la estrategia como una secuencia de actividades manifiestas (externas), cada una de éstas relacionadas con alguna acción cognitiva (interna), en búsqueda de solución(es) a un problema de acuerdo con los recursos conceptuales, lógicos y de procedimiento que se poseen en el momento de intentar dicha búsqueda. La actividad manifiesta es *un hacer* o *un decir* acerca de por lo menos un componente representacional (concepto, variable, dato u otro) mediante conceptos-nombre (en descripciones verbales), expresiones algebraicas, símbolos u otras formas, y su relacionamiento, que llamaremos *relaciones-nombre* (mediante diversos formatos o modos representacionales externos, generalmente formas verbales y otras formas gramaticales). Como se puede apreciar, en este estudio se analizan las representaciones externas con base en modos representacionales diversos contenidos en modo de texto.

El análisis de texto se está incorporando poco a poco al análisis del aprendizaje matemático. Véanse por ejemplo el modelo lingüístico de Reusser (1992) respecto a problemas aritméticos verbales; y los estudios de Frid (1992) sobre la conceptualización del cálculo en el lenguaje técnico y cotidiano que utilizan estudiantes universitarios; de Pressini y Knuth (1998) sobre el papel del discurso en el contexto de educación matemática; y de Presmeg (1998) sobre visualización y contenido semiótico en entrevistas sobre un problema de series. El conocimiento comunicado en modo textual contiene enunciados proposicionales, dentro de los cuales los conceptos-nombre y las relaciones-nombre tienen una función discursiva específica, como base y medio para la construcción y expresión de conceptos.[4] En este trabajo se analiza el texto desde el punto de vista de sus componentes proposicionales mediante *el modelo de análisis proposicional* o MAP (Campos y Gaspar, 1996), el cual se ha aplicado en ciencias naturales (Campos, Cortés y Gaspar, 1999; Campos, Gaspar y Alucema, 1999) y en matemáticas (Balderas, 1998). En el MAP una *proposición* está formada por lo menos por dos unidades semánticas conceptuales o conceptos-nombre C, y por lo menos una unidad semántica relacional o relación-nombre R que los conecta (además de otros términos gramaticales con el propósito de dar fluidez al enunciado proposicional, incluídos los cuantificadores que no se consideren conceptos o relaciones en un contexto temático dado). Estos elementos se encuentran en una estructura sintáctica (modo representacional verbal) de tipo sujeto-predicado, y comunica información contextual (temática o situacional). Así, la proposición forma una estructura básica $C_1R_1C_2$. Por ejemplo:

- *Dos planos distintos se intersectan en una recta.*
  (J. Bracho, *¿En qué espacio vivimos?*, México, FCE, 62), cuyos elementos C y R son:
- *Dos* [C: *planos distintos*] [R: *se intersectan en*] *una* [C: *recta*].

[4] Véase un pormenorizado análisis de las proposiciones como unidades semánticas en van Dijk y Kintsch (1983), la función semántica de componentes sintácticos en Lemke (1990), las relaciones entre conocimiento base y lenguaje en Frederiksen (1981), así como los procesos cognitivo-lingüísticos que producen un *modo verbal* específico en Levelt (1992), su relación con estructuras sintácticas y conceptos en Bock y Loebell (1990), y el enfoque representacional del discurso en van Eijck y Kamp (1997).

En general las proposiciones tienen más de dos conceptos y una relación:

- La solución general de la ecuación diferencial $d^2y/dt^2 = -g$ es $y = -1/2gt^2 + ct + d$, donde c y d son constantes arbitrarias (P. García y C. De la Lanza, *Ecuaciones diferenciales y en diferencias*, UNAM, 1984, 15), cuyos elementos C y R son:
- La [C: *solución general*] [R: *de*] la [C: *ecuación diferencial*] [R: */de la forma, que se escribe/*] [C: $d^2y/dt^2 = -g$] [R: *es*] [C: $y = -1/2gt^2 + ct + d$], [R: *donde*] [C: *c*] [R: *y*] [C: *d*] [R: *son*] [C: *constantes arbitrarias*].

Esta proposición tiene la forma sintáctica CR(CRC)R(CR(CRCRC)).

Como un concepto *define* un objeto, los conceptos-nombre que tienen esa función semántica son los sustantivos (simples : *límite, ecuación,...* o compuestos: *ecuación lineal*, *transformada de Laplace*,...) y las expresiones matemáticas (que funcionan como conceptos compuestos: $dy/dx = (dy/du)(du/dx,...)$. Como las relaciones lógicas tienen la función semántica de unir dichos conceptos, las relaciones-nombre pueden aparecer en forma estándar (*y*, *o*, *no*,...), verbal (genéricas: *tiene*, *lleva a*,... ; y derivadas de conceptos: *medir*, del concepto de medición, *factorizando*, del concepto de factorización,...) y en otras formas genéricas (*mientras que*, *a partir de*,...). La estructura semántico-sintáctica de un texto así definido permite reconocer otros elementos implícitos, por lo que es claro que el discurso explícito no agota el mensaje o contenido base que se desea comunicar. Una vez establecida la diferencia entre concepto-imagen, concepto-definición (internos) y concepto-nombre (externo), y entre relación lógica (interna) y relación-nombre (externa), en adelante nos referiremos a estos elementos-nombre o unidades semánticas simplemente como *conceptos* y *relaciones*. Como las proposiciones pueden contener más de dos conceptos y una relación, se identificaron estructuras mínimas lo más cercano a ($C_1R_1C_2$) sin que pierdan sentido por sí mismas dentro del contexto de la estructura proposicional del discurso del que forman parte. Estas subestructuras se denominan *unidades semánticas subproposicionales*, USS (Campos y Gaspar, 1997). Cada USS comparte por lo menos un concepto con otra USS anterior debido a que son encadenamientos entre significados.

Para complementar el análisis se trabajó con las siguientes definiciones: (a) *paso estratégico*: es una USS que, por tener dos conceptos y una relación como mínimo, comunica por lo menos una forma representacional; (b) *secuencia estratégica*: conjunto comunicado de pasos de la búsqueda; (c) *disponibilidad representacional*: número de representaciones diferentes que se comunican en una secuencia estratégica determinada; (d) *variabilidad representacional*: presencia de una representación diferente a la(s) identificada(s) en el paso anterior; (e) *congruencia estratégica*: similitud de significados conceptuales y relacionales entre dos secuencias estratégicas, independientemente del orden de los pasos y su número; en este estudio se analiza la congruencia entre la *estrategia planeada*, EP (lo que se piensa hacer para resolver un problema) y la *estrategia realizada*, ER (lo que realmente se hizo).

Metodología

Se aplicó un examen que contiene un problema de optimización de área con perímetro fijo, a un grupo escolar de estudiantes (N = 34) al inicio de un curso de introducción al cálculo (12° grado escolar, último antes del ingreso a la universidad). En ese momento ya han cursado álgebra, geometría analítica y geometría euclidiana en los dos ciclos escolares inmediatos anteriores, en los que se revisan métodos algebraicos, graficación, funciones y cónicas, entre muchos otros temas. De acuerdo con las elementos teóricos mencionados (ver también notas 2 y 3) y que el examen se aplicó en un contexto específico (inicio de un curso de introducción al cálculo), se espera que los estudiantes utilicen algunos o todos los conocimientos que tengan respecto a esos temas en su intento por encontrar una solución al problema planteado. El enunciado del problema es el siguiente:

> *Se tienen diez hilos de 30 centímetros cada uno. Se anudan de manera que todos tengan la misma longitud ya doblados. ¿Cuáles son las medidas de la base (largo) y altura (ancho) de un rectángulo que se puede formar, de tal manera que se obtenga el área máxima?*

Obsérvese que las condiciones iniciales del problema son: (a) existencia de varios trozos de la misma longitud; y (b) libertad de agruparlos (dos o más) o no. Haber provisto diez hilos es una sugerencia para comparar más de un caso de rectángulo formado (por ejemplo, un rectángulo por hilo, con diferentes dimensiones respecto a otros). La instrucción de doblar y anudar es una sugerencia alternativa para formar uno o más rectángulos. El problema consiste en que, dado *un* perímetro fijo (agrupando o no los hilos), existen diferentes valores de área entre las cuales uno solo es el máximo. Por ello, el área máxima siempre es respecto a las dimensiones de base y altura (las variables) del rectángulo formado; y por otra parte, la referencia a *un rectángulo que se pueda formar* se refiere a uno de los posibles rectángulos que se pueden formar con un perímetro seleccionado (dadas las opciones que da tener varios hilos y poder combinarlos como se considere conveniente), el cual deberá tener el área máxima.[5] En la aplicación del examen se informó a los estudiantes que tenían dos horas para resolverlo, se le entregó a cada uno un juego de diez hilos de 30 cm cada uno, y se les indicó que los utilizaran en la forma en que les pareciera conveniente; también se les informó que este examen era parte de un estudio sin efecto en la calificación.

En el examen se incluyeron otras preguntas,[6] de las cuales una se utilizó para el análisis del enfoque en la estrategia planeada (EP):

> *Pregunta #3: Escribe primero las ideas que se te ocurren para empezar a resolver el problema.*

> Y otra más para el análisis de estrategia realizada (ER):

> *Pregunta #4: En el siguiente espacio escribe todos los pasos que vas utilizando para resolver el problema.*

---

[5] Existen otras formas de enunciar este problema, entre las cuales unas son más claras que otras. Hay que tomar en cuenta que todo enunciado tiene un interlocutor cuyos *recursos* no son necesariamente los que supone que tiene quien enuncia. El enunciado que utilizamos tiene un alto grado de complejidad en la medida en que requiere del estudiante que tome decisiones sobre qué hacer con los hilos y proceder en consecuencia. Este proceso no es trivial y es precisamente lo que deseamos estudiar. Cuando se tienen propósitos pedagógicos es importante enunciar el problema en las formas más adecuadas.

[6] Las otras preguntas del examen, como apoyo en la identificación del problema, son:
#1 ¿Cuáles son los datos del problema?
#2 ¿Qué es lo que se desconoce del problema?;
#5 Después de haber terminado el problema, toma en cuenta los datos y la solución. Contesta la siguiente pregunta: ¿podría haber dos rectángulos diferentes, es decir, que pueda darse el caso de que haya dos soluciones diferentes que den la mayor área a la vez? ¿Por qué?
#6 *¿Encontraste y registraste diferentes rectángulos? Sí ____ No ____. En caso de que si lo hiciste, ¿qué sucede con el perímetro de todos ellos?*

Análisis de resultados y discusión

Todos los estudiantes respondieron al examen. La gran mayoría tomo una hora, de las dos disponibles para realizarlo. Se identificaron las proposiciones, y dentro de ellas sus componentes conceptuales, relacionales y las USS en la respuesta de cada estudiante, las *representaciones matemáticas* en las USS, y la *congruencia* entre EP y ER. De acuerdo con las preguntas de investigación, los resultados son los siguientes:

(a) ¿Cómo se representan los estudiantes el problema?

Al plantearse el problema (EP). Veinte estudiantes respondieron a la pregunta #3 (estrategia planeada, EP) indicando tomar un solo hilo, dos mencionaron más de uno y 12 describieron figuras sin mencionar hilos para formar el rectángulo. Todos procedieron a señalar la necesidad de contar con medidas, o a incluirlas, y algunos de ellos indicaron que el área se obtiene con la fórmula del rectángulo. Dos estudiantes mencionaron una relación funcional. Aunque 15 estudiantes mencionaron que se pueden variar las medidas o el tamaño del rectángulo, todos indicaron cómo encontrar el área de un rectángulo si se cuenta con las medidas de base y altura. Algunos ejemplos de respuesta a esta pregunta:

- *Hacer con un hilo el rectángulo y luego medir sus lados y con esto contestar.*
- *En principio debe conocer la forma de la figura, a partir de esta figura deducir o calcular las medidas de cada lado, que es lo que se pide en el problema.*
- *Formar un rectángulo haciendo variar (como una función) su altura y base de forma que se obtendrá el área mayor.*

El plan de resolución (EP) que proponen los estudiantes contiene varias formas de representación: las más frecuentes son *V*isualización *G*eométrica, *M*edición de *O*bjetos *Geo*métricos y *M*edición de *O*bjetos *Gen*éricos (estas representaciones y las que se mencionarán más adelante se encuentran definidas en el Anexo 1). Es decir, ver y medir. Estas representaciones son adecuadas para abordar una gran diversidad de problemas matemáticos, pero en este caso los estudiantes se concentraron en un solo ejemplo. En general, no explican por qué las dimensiones propuestas, ni sus variaciones, producen el área máxima de un rectángulo con el perímetro seleccionado ni exploran el efecto de las variaciones sugeridas en el tamaño del área obtenida. Como en sentido estricto no hay una representación de *variabilidad*, y casi ninguna de *relaciones funcionales*, se trata de un procedimiento para encontrar un área dadas ciertas medidas, es decir obtener *el* área (*la* solución) deseada *del* caso que se plantea. Este procedimiento corresponde a un enfoque de las matemáticas que no está anclado en una relación funcional como lo requiere el problema y de hecho, convierte a éste en un ejercicio rutinario.

El promedio del grupo en número de representaciones diferentes identificadas al establecer su plan es de 2.9, por lo que la *disponibilidad representacional* promedio por estudiante es de prácticamente tres maneras diferentes de representarse el conocimiento que utilizaría. Si se acumulan las representaciones diferentes que utilizó el grupo en conjunto, o *disponibilidad representacional agregada*, se obtiene un total de 14 (Anexo 1; se puede notar que las primeras cuatro aparecen en modo de texto o discursivo, las siguientes ocho son de carácter simbólico en referencia al uso de signos, operaciones y medición, y las siguientes dos son de visualización, que ilustran el contenido de las formas anteriores). Como el promedio de USS (paso estratégico) en el grupo en la estrategia planeada es de 2.3, significa que cada estudiante en promedio produjo 1.3 representaciones diferentes por paso estratégico (2.9 representaciones diferentes/2.3 pasos estratégicos = 1.3), es decir, prácticamente cuatro representaciones diferentes cada tres pasos. De estas cuatro, por lo menos una es de visualización y otra es de alguna forma de medición en la mayoría de los estudiantes, por lo que los contenidos representacionales en el grupo, aparte de estas dos formas, son muy dispersos.

En el Anexo 2 se muestra la respuesta del estudiante RAB (elegido al azar), *exclusivamente con el propósito de ilustrar el análisis proposicional* que se practicó a la de cada uno de los estudiantes *y el contenido representacional*. RAB toma un segmento de hilo de 25cm, lo dobla para obtener una configuración rectangular, y duplica su valor para obtener un perímetro de 50cm; prevé variaciones en el tamaño del rectángulo en general (en una ocasión) y en las medidas de base y altura en particular (en dos ocasiones). Se representó el problema en cinco formas diferentes, utilizando algunas de ellas más de una vez. Predominan la medición y la variación. La primera aparece en cuatro de las ocho USS identificadas (*M*edición de *O*bjetos *Gen*éricos, al referirse a la medida del hilo en tres ocasiones, y *M*edición de *O*bjetos *Geo*métricos respecto a la base y la altura, en una ocasión. La variación (*Va*riaciones en dimensiones *G*eométricas) aparece en tres de esas ocasiones. Todas sus referencias de medición son sobre un solo caso de rectángulo, y las variaciones se mencionan como posibilidad de tener más de uno. Parece una buena aproximación que incluye la posibilidad de que dichos datos se modifiquen, como valores de variables. Sin embargo, como los demás estudiantes del grupo, no explica por qué las dimensiones propuestas producen el área máxima de un rectángulo con el perímetro seleccionado ni explora el efecto de las variaciones sugeridas en el tamaño del área obtenida. Su enfoque no está anclado en una relación funcional tampoco y la operación propuesta sigue la pauta de dicho enfoque, que termina por convertir el problema en un ejercicio rutinario, donde no son necesarios más casos.

Al resolver el problema (ER). La representación más frecuente es *M*edición de *O*bjetos *Geo*métricos, en 41 ocasiones. Esta situación se debe al requerimiento efectivo de obtener una medida de área, por lo que se prepara el problema, y en ocasiones se cierra, con una medida particular. Las representaciones funcionales, *M*ediciones *F*uncionales *G*eométricas y *R*elaciones *F*uncionales *C*ualitativas, que son las que realmente se necesitan, sólo fueron utilizadas una vez cada una, por diferentes estudiantes. Con estas dos se aumentó de 14 a 16 el número de representaciones identificadas en el grupo (Anexo 1). Como se trata de la estrategia *realizada*, se esperaría que quienes mencionaron variaciones posibles en la medida efectivamente las exploren y expliquen por qué una de las áreas obtenidas es la mayor. Aunque la mitad del grupo trabajó con más de un caso de rectángulo e hizo comparaciones, definiendo el área mayor obtenida como el área máxima, se concentra en obtener un área por caso sin dejar claro que dichas medidas se definan como variables, y no se consideran relaciones funcionales. Por ello, se opera con el mismo enfoque de establecer ciertas medidas y obtener con ellas un área, convirtiendo el problema a un paso intermedio entre un ejercicio rutinario y un problema. Se requeriría trabajar más y más casos para obtener una buena estimación. Como se puede apreciar, el contenido representacional sigue siendo determinante. El promedio de representaciones diferentes por estudiante en ER es de 4.4, un aumento de la *disponibilidad representacional* de 50% sobre el promedio en el plan, lo que indica la necesidad de acceder a su propio conocimiento al ser requeridos a producir efectivamente una solución del problema. Por otra parte, al realizar cálculos para obtener una solución, se incrementó el promedio de USS por estudiante de 2.3 (en la estrategia planeada) a 2.7, lo que significa que en la estrategia realizada se pusieron en operación 1.6 representaciones diferentes por estudiante por paso. Esto equivale a casi cinco representaciones cada tres pasos, un aumento de una forma representacional respecto a la estrategia planeada. De esas cinco, por lo menos una es de medición y otra de operaciones aritméticas o algebraicas, por lo que los contenidos representacionales en el grupo se mantienen dispersos, tomando en cuenta que en el conjunto se identificaron 16 de ellas.

Este contenido representacional es parte del enfoque limitado (de ejercicio rutinario) ya mencionado. A continuación se muestran como ejemplo las respuestas a la pregunta #4, para resolver el problema, de los tres estudiantes cuyas respuestas a la pregunta #3 se presentaron antes:

- *Se mide 20cm y 7.5cm de tal manera que el área del rectángulo 1 es igual a 55 cm* /Indica otros dos casos de base y altura y el resultado respectivo/.
- *Medir los lados del rectángulo. Sus alturas iguales a 7.5cm y sus bases iguales a 22.5cm. El área de este rectángulo es igual a b × a. A = 22.5 × 7.5 = 168.75cm.*
- *(B × h/2) = área. l × l = 60cm de perímetro. Base = 2x, h = x. B = 21, h = 9, A = 94.5* /Hace una tabla con estos y otros seis valores de B y h, y las áreas resultantes correspondientes, entre ellas B = 15, h = 15 y área igual a 112.5, indica que ésta corresponde a la de un cuadrado y que no existe mayor área que la de éste para este problema/.

Los dos primeros estudiantes toman un hilo y duplican los valores de base y área definidos, sin indicar cómo hicieron ésto último. El primero calcula el perímetro en lugar del área. El tercer estudiante establece varias medidas (mediante el uso de una tabla) y aparentemente sabe que el área máxima que se puede obtener es de un cuadrado, pero calcula el área de un triángulo.

Por su parte, RAB muestra siete representaciones diferentes en ER (Anexo 3), utilizando casi todas sólo una vez. Nuevamente predomina la medición (*M*edición de *O*bjetos *Gen*éricos, paso 1; *M*edición de *O*bjetos *Geo*métricos, paso 4 y *M*edición *Al*gebraico *G*eométrica, paso 5). También en esta ocasión menciona variaciones posibles en las dimensiones del rectángulo (*Va*riaciones *G*eométricas, paso 3) pero, como la mitad del grupo, no las explora. Procede directamente a calcular la medida del área (*C*álculo *Al*gebraico-*G*eométrico, paso 5). Como en su plan, no explica por qué su solución corresponde al área máxima que se solicita, no compara con otras posibilidades a pesar de haberlo mencionado también en ER, y tampoco analiza el efecto de tales variaciones sobre el área obtenida. Se observa claramente que su estrategia no muestra relaciones funcionales, las variables quedan como posibilidad y el problema se reduce a un ejercicio rutinario basado en medición y operaciones (en este caso a manera algebraica). A estas limitaciones de enfoque se agregan confusiones en los recursos, ya que calcula el área del triángulo, no del rectángulo y, en lo que podría ser un descuido mayúsculo, el resultado de la operación aritmética es incorrecto.

(b) ¿Qué secuencia representacional se puede observar conforme buscan la solución?

Se observa una gran variedad de formas de trabajar por parte de los estudiantes, con una secuencia representacional muy variada. Las representaciones que utilizó el grupo con mayor frecuencia en la apertura de EP son la *V*isual *G*eométrica y la *M*edición de *O*bjetos *Geo*métricos; en el bloque intermedio lo es la *M*edición de *O*bjetos *Geo*métricos, y ésta misma es también la más frecuente en el cierre. Es decir: ver y medir, medir, y medir al final.

Al resolver el problema (ER), *M*edición de *O*bjetos *Geo*métricos y *V*isual *G*eométrica son las representaciones más frecuentes en la apertura. Nuevamente *M*edición de *O*bjetos *Geo*métricos es la más frecuente en el bloque de desarrollo, y ésta, junto con *Cálculo Algebraico-Geométrico* son las más frecuentes en el cierre. Es decir, ver y medir, medir, y operación con medición. La figura 1 ilustra esta situación. Esta visión de conjunto muestra similitud representacional en ambas estrategias, principalmente como medición junto con la necesidad de visualización, a lo que se agrega operación al resolverlo.

Al analizar los cambios de representación paso a paso de cada estudiante con el propósito de ver la *variabilidad representacional,* tenemos que en ocasiones permanecen en la(s) misma(s) representación(es) entre pasos, pero más frecuentemente utilizan una diferente por lo menos en el siguiente respecto al paso anterior. Es decir, la forma de proceder requiere ciertas representaciones que el estudiante decide involucrar en un paso determinado de acuerdo con la disponibilidad, ya analizada en el apartado anterior. Para tener una idea numérica al respecto, obsérvese que si el número de pasos por estudiante es igual a k, el máximo número posible de cambios de representación en una secuencia dada es $k - 1$, por lo que la proporción rc de veces que se cambia de representación es: $rc = \mathrm{CR}/(k - 1)$, en donde $\mathrm{CR} = 1, 2, ..., (k - 1)$ es el número de pasos en que hubo cambio de representación. El promedio del grupo en EP es: $rc = 0.619$, es decir, de las veces en que se puede hacer un cambio de representación (al avanzar de un paso a otro), 61.9% de ellas lo hacen, manteniéndose el 38.1% restante en aquellas que consideran convenientes a su estrategia. Este valor fue ligeramente superior en ER: $rc = 0.635$, es decir, utilizando una representación diferente en el siguiente paso el 63.5% de las veces.

La secuencia representacional del estudiante RAB en su estrategia realizada (Anexo 3) inicia con medición (*M*edición de *O*bjetos *Gen*éricos) y operación (*O*peración *S*in *F*órmula), continúa con enunciado (*E*nunciado *Geo*métrico), variaciones (*Va*riaciones *G*eométricas), enunciado (*E*nunciado *Geo*métrico) y medición (*M*edición de *O*bjetos *Geom*étricos), para terminar con operación (Cálculo *Al*gebraico-*G*eométrico) y medición (*M*edición *Al*gebraico-*G*eométrica). En total pone en operación siete representaciones diferentes en una secuencia particular comunicada, de entre varias posibles, que tiene su propio sentido: establecer el perímetro y medidas de base y altura de un caso, sugerir variaciones en estas medidas, y calcular el área. Los cambios representacionales de un paso a otro de sus estrategias EP y ER se ilustran en la figura 2. En ambas estrategias se utilizan *M*edición de *O*bjetos *Gen*éricos y *O*peraciones *S*in *F*órmula, *E*nunciado *Geo*métrico, *Va*riaciones *G*eométricas y *M*edición de *O*bjetos *Geo*métricos; mientras que en EP insiste en medir y variar las medidas como acciones posibles (en los pasos 5 y 8), en ER hace cálculos para obtener una medida de área (Cálculo *Al*gebraico-*G*eométrico, Medición *Al*gebraico-*G*eométrica, en el paso 5). Si bien en EP utiliza alguna representación en dos pasos consecutivos (*Medición de Objetos Genéricos*, en los pasos 1 y 2, *Variaciones Geométricas*, en los pasos 4 y 5), en ER no se mantiene en la misma representación conforme avanza. Es decir su *variabilidad representacional* es realmente muy dinámica. Así, en EP $(k - 1) = 7$, CR = 5, por lo que $rc = 5/7 = 0.714$, mientras que en ER cambia de representación en cada paso: dado que $k - 1 = 4$, CR = 4, $rc = 4/4 = 1.00$, esto es, que cambió de representación en 71.4% y 100% de las veces, respectivamente.

(c) ¿Qué relación presenta su plan con el procedimiento de resolución desde el punto vista representacional?

La similitud entre las secuencias estratégicas producidas en EP y ER, o *congruencia estratégica* es fuerte. Las respuestas breves facilitan esta situación. Desde el caso de dos estudiantes que produjeron secuencias breves exactamente iguales, hasta catorce que iniciaron con el mismo contenido relativo a la visualización y la medición al planear e intentar resolver el problema. Sólo se nota una diferencia al utilizar cálculos de tipo algebraico mediante ecuaciones o la fórmula del área del rectángulo. Para el grupo los requerimientos del *hacer* (ER) involucran muy poca información y modalidades de representación adicionales respecto al *planear* (EP).

Esta situación general se puede apreciar mejor en el caso del estudiante RAB (Anexo 4): enunciados completos en ambas estrategias dan el mismo tratamiento al mismo objeto. Por ejemplo, en la primera USS de EP y en la segunda USS de ER se habla de *formar el rectángulo*; en la primera USS de EP y ER se habla de *medir el hilo*; y así sucesivamente. EP contiene dos segmentos proposicionales que no tienen correspondencia en ER, es decir, algunas ideas que se plantearon inicialmente no se consideraron pertinentes para realizarse (aunque aparentemente se tomaron en cuenta para obtener las medidas que se usaron al final). Por otra parte, la forma de calcular el área no se estableció en EP y sí se realizó en ER. Los demás segmentos son prácticamente idénticos en su contenido: 6 de 8, es decir, un nivel alto de congruencia.

Los resultados de este estudio muestran en primera instancia que los estudiantes no tuvieron problemas con los hilos entregados para abordar el problema, decidiendo tomar uno, dos o más, o ninguno. Sin embargo, tener varios hilos al principio no parece haberles sugerido que se podían comparar diferentes rectángulos formados. Así, a pesar de que plantearon que podrían variar las dimensiones, no se tomaron esas posibilidades como valores de *variables* respecto a base y altura. Quienes hicieron alguna comparación simplemente pusieron cada caso frente a otro sin considerarlos como variables. Excepto por dos estudiantes, no utilizaron o infirieron relaciones funcionales.

Aunque en la estrategia planeada aparecen solamente tres representaciones en promedio por estudiante, inmediatamente después, al resolver el problema (ER), se ve que cuentan con por lo menos 4.4 en promedio. Se muestra claramente, como afirman Janvier (*id.*) y Dreyfus (*id.*), que operan con varias representaciones para el mismo tipo de situación matemática, lo cual hemos denominado *disponibilidad representacional*. De hecho, algunos estudiantes operan con más de una representación por paso tanto al abordar como al resolver el problema. Eisenberg y Dreyfus (*id.*) y Presmeg (*id.*) reportan los beneficios de procesar visualmente problemas funcionales o aritméticos, lo cual sucede en nuestro estudio, aunque la visualización se limita a una representación informal o geométrica de la configuración rectangular para ubicar las medidas necesarias para obtener un área deseada (de ahí el predominio de la medición).

Esta forma de representación visual, la medición y los cálculos aritméticos para obtener el área son elementales y no permiten construír una estrategia adecuada para acometer el problema si no se relacionan con representaciones referentes a la variación y a las relaciones funcionales como lo requiere el problema planteado. De hecho, este problema se puede resolver con una estimación aceptable, si no se cuenta con los recursos del cálculo diferencial, por ejemplo si se comparan diversos valores de base y altura, utilizando tabulación y graficación, observando las variaciones (relación funcional de variables) y disminuyendo el rango de variación. Sin embargo, como ya vimos, la mayoría no hizo ni una cosa ni otra, a pesar de que indicaron que se podrían tomar otros valores. Solamente uno de los dos estudiantes que lo abordaron de esa forma obtuvo una respuesta correcta. Así, las representaciones utilizadas son cualitativamente limitadas respecto a los requerimientos del problema, y también cuantitativamente, considerando que el grupo en conjunto de hecho tiene por lo menos 16 diferentes.

Por otra parte, no tienen mayores dificultades para cambiar de representación entre un paso y otro (*variabilidad representacional*). Como se refieren al mismo objeto al pasar de una representación a otra (*el rectángulo* se forma con hilos → se describe o dibuja → tiene lados → los lados se relacionan de cierta manera → ...), se nota que está operando un proceso de traducción (Janvier, *id.*) entre representaciones. La traducción no es trivial y Balderas (*id.*) reporta que los estudiantes cambiaron de una conexión entre representaciones discursivas y numéricas, a una conexión de representaciones discursivas y algebraicas después de varias sesiones de trabajo. En nuestro estudio, sin trabajo didáctico de por medio, los estudiantes se encuentran en una situación en que traducen representaciones discursivas (enunciado del problema) a una visual (informal), acompañándolas de representaciones numéricas (aritmética) y de medición. Como no obtuvieron una estimación aceptable, que podría lograrse combinando la medición con la noción de variable y relaciones funcionales, el sólo recurso de la medición y el cálculo aritmético o algebraico son insuficientes para tal efecto.

Las diversas confusiones entre áreas (triángulo, rectángulo, cuadrado) y entre área y perímetro muestran que los estudiantes realmente cuentan con limitaciones en el conocimiento base o recursos (Schoenfeld, *id.*), lo cual orienta sus estrategias (heurística) inadecuadamente. Por lo visto, no vieron la relación o no saben cómo relacionar lo que saben de álgebra, tabulación y graficación con el problema planteado. Además de los errores aritméticos involucrados, los errores conceptuales, como tomar el perímetro por el área o el área del triángulo por la del rectángulo, dificultan el tránsito de una a dos dimensiones, con la consiguiente confusión en las operaciones involucradas (*i.e.*, sumar los lados para obtener el área).

Debido a que la solución obtenida se toma como la correcta sin explicar por qué es el área máxima, e incluso no se revisan los resultados, se nota que no cuentan con esquemas de monitoreo (Schoenfeld, *id.*) del procedimiento y la solución obtenida, o no las ponen en operación. De hecho, no explicar por qué las dimensiones propuestas producen el área máxima de un rectángulo con el perímetro seleccionado ni explorar el efecto de las variaciones sugeridas en el tamaño del área obtenida, se debe al enfoque (Hiebert *et al.*, *id.*) o sistema de creencias (Schoenfeld, *id.*) con el que parten: debido a la ausencia de las nociones de variable y de relaciones funcionales, la(s) operación(es) propuesta(s) sobre un solo caso les es(son) suficiente(s); por tanto, teniendo ciertos datos y usando un algoritmo particular se puede obtener *la* solución deseada *del* caso que se plantea. Con ello, el problema se convierte en un ejercicio rutinario (*id.*) en un contexto representacional pobre con el cual pueden operar en la producción de sentido matemático muy limitado (*id.*).

Consideraciones finales

Aunque no todo se comunica, la selección representacional comunicada que hace cada estudiante en un modo particular indica que, de tener conocimiento diferente al mostrado, no lo pudieron relacionar con el problema planteado. Se encontró una gran diversidad de formas de resolución, pero se identificó un enfoque común, limitado, el cual requiere sólo algunas representaciones de procedimiento aritmético o algebraico. Esta situación indica que un curso de cálculo debería realizarse sobre bases más seguras, dando atención muy cuidadosa al conocimiento previo, que incluye el enfoque y las representaciones disponibles. Así mismo, se debe poner atención en esquemas de razonamiento adecuados a los requerimientos de las matemáticas que generen estrategias adecuadas. Esta necesidad se puede generalizar por supuesto a la enseñanza de niveles más avanzados de matemáticas.

Con situaciones como las analizadas en este trabajo, es evidente la necesidad de superar el limitado enfoque que predomina en la enseñanza de las matemáticas en nuestros cursos de cálculo, y que reduce su aprendizaje a procesos rutinarios. Este enfoque, por accesible y útil, es asimilado también rutinariamente por los estudiantes desde los grados escolares elementales, como lo muestran los estudiantes en este trabajo: al habérseles presentado un problema que escapa a ese enfoque (sin incluir todos los datos, sin indicar el procedimiento y sin suponer que se encontrará sólo una solución con sólo aplicar un procedimiento una vez), se vieron imposibilitados para responder adecuadamente, sin integrar conocimiento que revisaron en los cursos previos. Las transformaciones necesarias en el conocimiento previo incluye la necesidad de pasar de una visión algorítmica de carácter aritmético, a una perspectiva en donde se dé tratamiento al problema con base en el concepto de función, esencial para matemáticas avanzadas, sobre todo si han decidido iniciar carreras en las disciplinas físico-matemáticas como es el caso de estos estudiantes.

Al intentar superar este enfoque, los docentes deberán hacer referencia *explícita* y sistemática a conocimiento previo, interpretar descripciones verbales que enuncian problemas, establecer *diferentes formas de representarse los problemas* (discursivas, gráficas, funcionales, algebraicas), insistir en la noción de variabilidad, identificar datos y diferenciarlos de las variables nítida y detalladamente; todo ello con el propósito de que el proceso de aprendizaje, o construcción de sentido matemático en este caso, se inicie con conocimiento previo sólido e incluya procesos adecuados de traducción entre las representaciones que se tienen y las que se adquirirán en clase, en un contexto motivante, que permita el desarrollo de la imaginación y otras habilidades cognoscitivas.

Bibliografía

Balderas, P. (1998). La representación y el razonamiento visual en la enseñanza de la matemática, Tesis doctoral, Facultad de Filosofía y Letras, UNAM.

Bock, K. y Loebell, H. (1990). Framing sentences, *Cognition*, (35), 1-39.

Campos, M.A. (1997). Representación y conocimiento, Ponencia presentada en el IV Seminario de Cognición, Epistemología y Enseñanza de las Ciencias, UNAM, México, Nov 1997-May 1998.

Campos, M.A. y Gaspar, S. (1996). El modelo de análisis proposicional: un método para el análisis de conocimiento aprendido, en M.A.Campos y R.Ruiz, *Problemas de acceso al conocimiento y enseñanza de las ciencias*, México, UNAM, 51-92.

Campos, M.A. y Gaspar, S. (1997). A detailed step-by-step procedure to use the Propositional Analysis Model to study concept organization, *Reportes de Investigación*, (7) 56, IIMAS, UNAM.

Campos, M.A., Cortés, L. y Gaspar, S. (1999). Análisis de discurso de la conceptualización de estudiantes de biología en el nivel universitario, *Sociotam. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades*, CEMIR, jul-dic (en prensa).

Campos, M.A., Gaspar, S. y Alucema, M.A. (1999). Análisis de discurso de la organización lógico-conceptual de estudiantes de biología de nivel secundaria, *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, COMIE, jul-dic, no. 7 (en prensa).

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes, en D.Tall, *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht: Kluwer, 25-41.

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On understanding how students learn to visualize functions transformations, en E.Dubinsky *et al.*, *Research in collegiate mathematics education*, I, Providence, AMS-MAA, 45-68.

Frederiksen, C. (1981). Inference in preschool children's conversation -a cognitive perspective, en J.Green y C.Wallat, *Ethnography and language in educational settings*, 303-350. Norwood, Ablex.

Frid, S. (1992). Three approaches to undergraduate calculus instruction: their nature and potential impact on students' language use and source of conviction, en E. Dubinsky *et al., op.cit.* , 69-100.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding, en D. A.Grouws (ed.), *Handbook of research in mathematics thinking and learning*, NCTM, 65-97

Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A. y Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: the case of mathematics, *Educational Researcher*, (25), 4, 12-21.

Janvier, C. (1978). The interpretation of complex cartesian graphs. Doctoral dissertation, University of Nottingham, Wetherby.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education, en C.Janvier, *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, Hillsdale, LEA, 27-32.

Lemke, J. (1990). *Talking science*, Norwood, Ablex.

Levelt, W. (1992). Accesing words in speech production: stages, processes and representations, *Cognition*, (42), 1-22.

Pressini y Knuth (1998). The dualistic nature of school mathematics discourse, *Proceedings of the XX Annual Meeting, International Group for the Psychology of Mathematics Education (North American Chapter), I,* ERIC, Columbus, 227-233.

Prawat, R. (1989). Promoting access to knowledge, strategy and disposition in students: a research synthesis, *Review of Educational Research*, (59), 1, 1-41.

Presmeg, N. (1998). On visualization and generalization in mathematics, *Proceedings of the XX Annual Meeting, International Group for the Psychology of Mathematics Education (North American Chapter), I,* ERIC, Columbus.

Reusser. K. (1992). From text to situation to equation: cognitive simulation of understanding and solving mathematical word problems, en H.Mandl *et al.* (eds.), *Learning and instruction*, vol 2, Oxford, Pergamon Press, 477-497.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem solving*, San Diego, Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense in mathematics, en D. A.Grouws (ed.), *op.cit..*, 334-370.

Sternberg,R. (1987). The psychology of verbal comprehension, en R.Glaser, *Advances in Instructional Psychology*, III, 97-150. Hillsdale (NJ): LEA.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking , en D. Tall, *op.cit.*, 3-21.

van Dijk, T. y Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*, Orlando, Academic Press.

van Eijck, J y Kamp, H. (1997). Representing discourse in context, en J. van Benthem y A. ter Meulen, *Handbook of Logic and language*, Amsterdan, Elsevier, 179-237.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, en D.Tall, *op.cit.*, 65-81.

Anexo 1. Representaciones identificadas en las estrategias planeada y realizada del grupo.

NOMBRE	CODIGO	DESCRIPCION
En las estrategias planeada y realizada:		
1. Enunciado geométrico	EGeo	Se enuncia un objeto geométrico sin dibujarlo.
2. Enunciado genérico	Egen	Se enuncia un objeto genérico sin dibujarlo.
3. Descripción de objetos geométricos con un enunciado de un problema	DGP	Se describen objetos geométricos en el contexto de un planteamiento de problema.
4. Variaciones geométricas	VaG	Enunciado de posibles variaciones de objetos geométricos, sin operaciones o mediciones.
5. Codificación	C	Se utilizan letras para representar objetos geométricos.
6. Cálculo aritmético-geométrico	CArG	Se une un procedimiento aritmético implícito o explícito con un objeto geométrico.
7. Cálculo algebraico-geométrico	CAlG	Se une un procedimiento algebraico implícito o explícito con un objeto geométrico.
8. Operaciones sin fórmula	OSF	Se realizan cálculos aritméticos.
9. Operaciones algebraicas	OA	Se realizan operaciones con símbolos.
10. Medición de objetos geométricos	MOGeo	Se define o realiza una medición de un objeto geométrico.
11. Medición de objetos genéricos	MOGen	Se define o realiza una medición de un objeto no enunciado en forma geométrica.
12. Medición algebraico-geométrica	MAlG	Se define o realiza una medición de objetos geométricos utilizando símbolos.
13. Visualización geométrica	VG	Se dibuja un objeto geométrico.
14. Visualización aritmético- geométrica	VArG	Se une un dibujo de un objeto geométrico con una operación aritmética.
Sólo en la estrategia realizada:		
15. Mediciones funcionales geomé-tricas	MFG	Se realizan mediciones con base en variaciones numéricas en donde un factor varia en función del otro, utilizando objetos geométricos.
16. Relaciones funcionales cualitativas	RFC	Se establecen variaciones no numéricas en donde un factor varia en función del otro, utilizando objetos geométricos.

Anexo 2. Estrategia planeada del estudiante RAB

I. Respuesta textual a la indicación "Escribe primero las ideas que se te ocurren para empezar a resolver el problema" (pregunta #3):

"Primero formar el rectángulo midiendo a lo largo del hilo formado (doblado), y ya teniendo la medida (25 cm) la duplicamos teniendo en cuenta que son dos partes (50 cm). El rectángulo lo podemos formar de cualquier tamaño (largo y ancho). Así que con la medida que tenemos (50 cm) la distribuimos para formar el rectángulo teniendo así que su base es de 17 cm y su altura de 8 cm (podemos cambiar sus medidas)".

II. Análisis proposicional y representaciones (Proposiciones y USS. Conceptos en negritas, relaciones en cursivas. Conceptos en corchetes unen dos USS. Conceptos o relaciones entre diagonales están implícitos en el texto original. Las definiciones de las representaciones se encuentran en el Anexo 1).

Secuencia estratégica	Representaciones
P_1	
USS_1. Primero *formar* el **rectángulo** *midiendo* a los largo del **hilo**.	Enunciado geométrico (*EGeo*), Medición de objetos genéricos (*MOGen*).
USS_2. **[Hilo]** *formado* (/*al ser*/*doblado*), *y* ya *teniendo* la **medida** (/*igual a*/25 cm).	Medición de objetos genéricos (*MOGen*).
USS_3. [La **medida**] la *duplicamos teniendo en cuenta que son* dos **partes** (/*cada una igual a*/50 **cm**).	Operación sin fórmula (*OSF*).
P_2	
USS_4. El **rectángulo** lo *podemos formar* de cualquier **tamaño**.	Enunciado geométrico (*EGeo*), Variaciones en dimensiones geométricas (*VaG*).
USS_5. [Cualquier tamaño] (/*en*/**largo** *y* **ancho**.	Variaciones en dimensiones geométricas (*VaG*).
P_3	
USS_6. Así que con la **medida** que *tenemos* (/*igual a*/50 cm) la *distribuimos para formar* el **rectángulo**.	Medición de objetos genéricos (*MOGen*).
USS_7. [El **rectángulo**] *teniendo* así que *su* **base** *es* de 17 **cm** *y su* **altura** *de* 8 **cm**.	Medición de objetos geométricos (*MOGeo*).
USS_8. *Podemos cambiar sus* **medidas**/de la **base** *y* la **altura**/.	Variaciones en dimensiones geométricas (*VaG*).

Anexo 3. Estrategia realizada del estudiante RAB.

I. Respuesta textual a la indicación "En el siguiente espacio escribe todos los pasos que vas utilizando para resolver el problema" (pregunta #4):

"*Medir el hilo doblado y con el resultado lo duplicamos y así formamos el rectángulo teniendo en cuenta que puede variar con respecto a los demás rectángulos formados. Una vez hecho el rectángulo y conociendo su base y altura procedemos a sacar el área:*

$A = (Bxa) = (17 \times 8)/2 = 48$ cm."

II. Análisis proposicional y representaciones (ver formato en el Anexo 2; las representaciones se definen en el Anexo 1).

Secuencia estratégica	**Representaciones**
P_1	
USS_1. *Medir* el **hilo** doblado *y* con el **resultado** lo *duplicamos*.	Medición de objetos genéricos (*MOGen*), Operación sin fórmula (*OSF*).
USS_2. [Con el **resultado**...] *y* así *formamos* el **rectángulo**.	Enunciado geométrico (*EGeo*).
USS_3. *Teniendo en cuenta que*/este **rectángulo**/*puede variar con respecto a* los demás **rectángulos** formados.	Variaciones en dimensiones geométricas (*VaG*).
P_2	
USS_4. Una vez *hecho* el **rectángulo** *y conociendo su* **base** *y* **altura**.	Enunciado geométrico (*EGeo*), Medición de objetos geométricos (*MOGeo*).
USS_5. [Con **base** *y* **altura**] *procedemos a sacar* el **área**/que *es*/**A = (B × a) = (17 × 8)/2 = 48 cm.**	Cálculo Algebraico-geométrico (*CAlG*). Medición Algebraico-geométrica (*MAlG*).