Divergencia de la serie armónica

Fecha de recepción: Julio, 1998

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 11 No. 3 Diciembre 1999 pp. 89-94

Antonio Rivera F.
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN,
Departamento de Matemática Educativa.
arivera@mail.cinvestav.mx

Resumen: *En este artículo presentamos un acercamiento elemental a la divergencia a infinito de la serie armónica* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ *así como a su comportamiento asintótico, el cual está relacionado con la función logaritmo natural y la famosa constante g de Euler. La representación gráfica de las sumas parciales de la serie, la cual obtuvimos con* Mathematica, *no solamente es un elemento revelador del comportamiento asintótico, sino que puede jugar un papel importante en la adquisición de este conocimiento.*

Summary: *In this paper we examine the divergent behavior to infinity of the harmonic series* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ *as well as its asymptotic behavior which is related to the natural logarithm function and the well-known Euler's constant. The graphic representation of the partial sums of the series, obtained with the aid of* Mathematica, *not only reveals fundamental features of the asymptotic behavior, but it might play an important resource in the acquisition of that knowledge.*

Introducción

Hoy en día las computadoras personales son una excelente herramienta para incursionar en las matemáticas. Mucho de lo que antes no nos atrevíamos a hacer, por ejemplo, tediosos cálculos y gráficas inimaginables, ahora es completamente posible.

Podríamos decir que las computadoras personales están modificando los procesos de aprendizaje y el mismo quehacer matemático. Por una parte, durante el aprendizaje de las matemáticas, la graficación de funciones y realización de laboriosos cálculos, en ocasiones convertidas en intenciones frustradas, pueden ser determinantes para la mejor comprensión y aprehensión de conceptos y resultados. Por otra parte, en el quehacer matemático las gráficas o resultados numéricos pueden ser reveladores de situaciones o fenómenos interesantes. En el presente artículo la gráfica de las sumas parciales de la serie armónica, la cual obtuvimos con *Mathematica*, juega este papel dual: nos permite descubrir el comportamiento asintótico de la serie armónica y ayuda al aprendizaje del resultado matemático correspondiente. Si bien la gráfica no muestra el resultado de manera estricta, y mucho menos una demostración, si comunica el significado del comportamiento asintótico de la serie.

Es usual que los libros de texto universitarios atiendan principalmente la divergencia a infinito de esta serie, probablemente porque la prueba se reduce a una agrupación adecuada de sus términos y el comportamiento asintótico requiere un poco más de teoría sobre sucesiones. Por esta razón, además de ilustrar gráficamente el comportamiento asintótico, presentamos una prueba analítica, misma que ha sido inspirada en las propiedades gráficas. La divergencia a infinito se obtiene como corolario inmediato de este comportamiento.

Divergencia de la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Es conocido el hecho de que la serie armónica diverge a infinito. La prueba que comúnmente se encuentra en los libros de texto, se basa en la siguiente agrupación de sus términos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{16}\right)+\dots$$

Precisemos cómo se construye esta agrupación. Cada expresión entre paréntesis es de la forma

$$c_k=\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}}$$
$$=\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\dots+\frac{1}{2^k}$$

para $k\geq 1$.

Por ejemplo, para $k=1$ obtenemos el término $\frac{1}{2}$. Para $k=2$obtenemos $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, etc.

La expresión anterior define la sucesión $c_1, c_2, c_3, \dots$ El primer término de la serie que es igual a 1 no está incluido en esta sucesión, para incluirlo definamos $c_0=1$.Observemos que para $k\geq 1$,la fórmula para c_k tiene $2k^{-1}$ sumados, de los cuales el menor es $\frac{1}{2^k}$, así que

$$c_k\geq 2\,k^{-1}\,\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\quad (k\geq 1).$$

Pero también es cierto que , por lo tanto tenemos

$$\sum_{n=1}^{2^m}\frac{1}{n},=\sum_{k=0}^{m}c_k\geq\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{2}}_{\text{m + 1 veces}},$$

es decir

$$\sum_{k=0}^{m}c_k\geq\frac{m+1}{2}$$

Por lo tanto

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}c_k\geq\lim_{m\to\infty}\frac{m+1}{2}=\infty$$

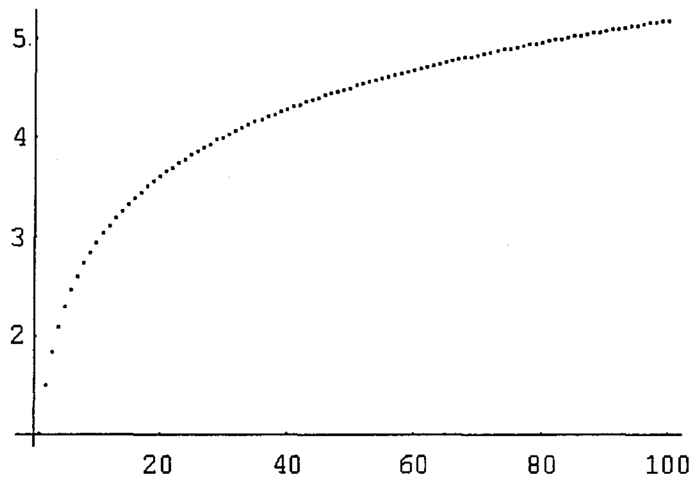
De donde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\lim\sum_{k=1}^{m}c_k=\infty.$$

Esto prueba que la serie armónica diverge a infinito.

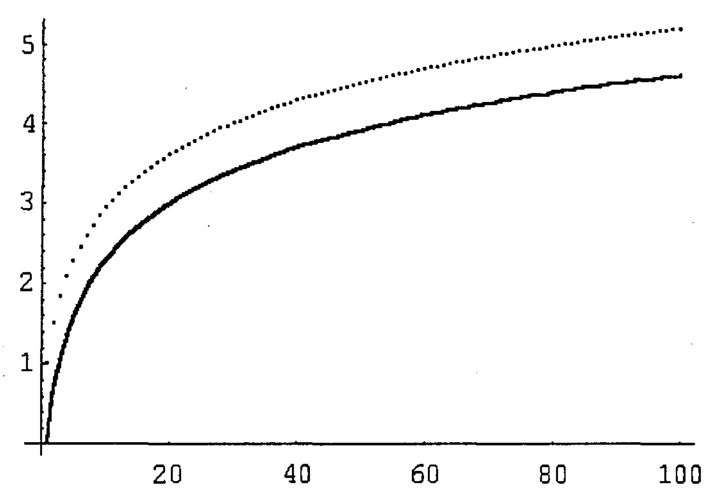
Representación gráfica. Una conjetura. La divergencia a infinito de una sucesión creciente puede darse con diferentes "velocidades", por ejemplo $x_m = \log m$ tiende a infinito más lentamente que $y_m = e^m$ y la divergencia de esta última todavía es más lenta que la sucesión $z^m = e^m$. Esto lo deducimos de la comparación de las funciones $x(t) = \log t$, $y(t) = t^2$ y $z(t) = e^t$,pero las gráficas correspondientes dan cuenta de ello.

Para tener una idea sobre cómo tiende a infinito la serie armónica, grafiquemos la sucesión de sumas parciales $s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$. La siguiente gráfica la obtuvimos con *Mathematica* haciendo $m = 1, \ldots ,100$.



Si bien se trata de un conjunto discreto de puntos, éstos "describen" una curva muy parecida a la familiar gráfica de $y = \log x$, ¿no le parece?

Graficando en el mismo sistema de ejes cartesianos la función $y = \log x$, obtenemos



Según la figura, podríamos conjeturar que los puntos de la sucesión se encuentran sobre una traslación de la gráfica de $y = \log x$. En la siguiente sección analizamos esta situación.

Comportamiento asintótico. Constante g de Euler. La gráfica anterior sugiere que estudiemos la diferencia

$$s_n - \log n = 1\ \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n,$$

Dado que $\log n$ podemos representarlo por

$$\log n = \int_n^1 \frac{1}{u}\,du,$$

con el propósito de combinar este término con la sumatoria

$$\frac{1}{2} \cdots + \frac{1}{n},$$

expresemos cada sumando como una integral definida apropiada. Esto lo hacemos en la siguiente proposición, en donde denotamos por la parte entera de x, esto es, el mayor entero que no excede a x. Por ejemplo, y .

Proposición. Para todo entero $n \geq 2$, tenemos

$$(1) \int_{n-1}^{n} \frac{[x]}{x^2}\,dx = \frac{1}{n},$$

$$(2)\ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \text{long}\, n = 1 + \int_1^n \frac{[x] - x}{x^2}\,dx$$

DEMOSTRACION:

PRUEBA DE 1): Dado que $[x] = n-1$ para tenemos

$$\int_{n-1}^{n} \frac{[x]}{x^2}\,dx = \int_{n-1}^{n} \frac{n-1}{x^2}\,dx$$

$$= (n-1)\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{n-1}^{n}$$

Por lo tanto

$$\int_{n-1}^{n} \frac{[x]}{x^2}\,dx = \frac{1}{n}.$$

Esto prueba el inciso 1).

PRUEBA DE 2): Del inciso 1) se sigue

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \text{long}\, n = 1 + \int_1^2 \frac{[x]}{x^2}\,dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{[x]}{x^2}\,dx - \int_1^n dx$$

$$= 1 + \int_1^n \frac{[x]}{x^2}\,dx - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx.$$

Es decir.

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \text{long}\, n = 1 + \int_1^n \frac{[x] - x}{x^2}\,dx.$$

Esto prueba el inciso (2) y por lo tanto la proposición.

Dado que para todo entero positivo n se cumple

$$\left|\int_1^n \frac{[x] - x}{x^2}\right| \leq \int_1^n \left|\frac{[x] - x}{x^2}\right| dx \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx = 1 - \int_1^n \frac{1}{n},$$

tenemos

$$\int_1^n \left|\frac{[x] - x}{x^2}\right| dx \leq 1$$

para toda , por lo tanto, se sigue de los teoremas sobre integrales impropias (Apostol 1967, pág. 418) que la integral

$$\int_1^\infty \left|\frac{[x] - x}{x^2}\right| dx \tag{1}$$

es convergente.

La existencia de la integral impropia (1) implica a su vez la existencia del límite

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right] = 1 + \int_1^\infty \frac{[x] - x}{x^2}\, dx \tag{2}$$

Otra prueba de este hecho también aparece en Apostol (1967, págs. 404-405), Rivera (1993, págs. 50-52) y a nivel de problema es planteado en Spivak (1980, pág. 430)

El límite del miembro izquierdo de (2) es conocido como la CONSTANTE γ DE EULER y, según la relación anterior, podemos expresarla como

$$\gamma = 1 + \int_1^\infty \frac{[x] - x}{x^2} dx = 1 - \int_1^\infty \frac{[x] - x}{x^2}\, dx.$$

A continuación presentamos los primeros 24 decimales de γ, los cuales obtuvimos con *Mathematica*:

$$\gamma = 0.577215664901532860606512\ldots$$

Es notable que a la fecha aún no se sabe si g es racional o irracional. La relación

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right] = 0$$

la describimos diciendo que la serie armónica $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ **tiende asintóticamente** a $\gamma + \log n$.

En lenguaje menos preciso, decimos que "a la larga" $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ es aproximadamente y escribimos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \simeq \gamma + \log n,$$

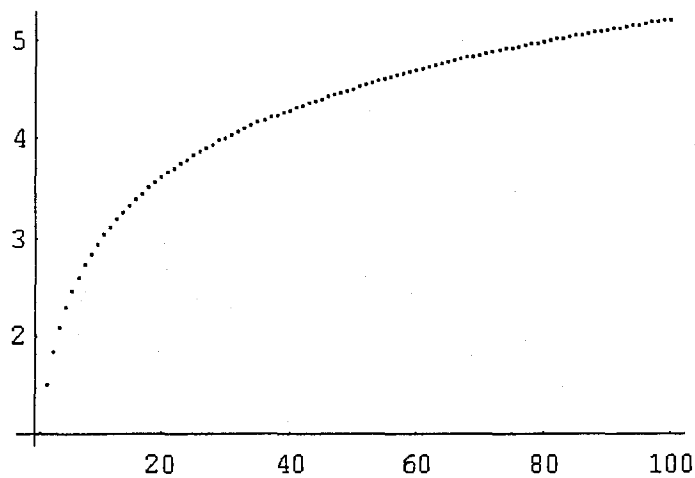
Por ejemplo, si deseamos calcular la suma para $n = 1000$, esto es $\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k}$, podemos usar como aproximación

$$\gamma + \log 1000 = \gamma + 3\log 10 \approx 0.577 + 3(2.3) = 7.487.$$

El valor que se obtiene con *Mathematica* para la suma es 7.48547, así que el valor que hemos obtenido es bastante aproximado a este último.

Tenemos entonces que para n "grande", los puntos correspondientes a la sucesión $sn = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, se encuentran aproximadamente sobre la gráfica de la función $f(x) = \gamma + \log x$. Esta se obtiene trasladando hacia arriba la gráfica de $\log x$ una cantidad γ, como lo habíamos conjeturado a partir de las gráficas que obtuvimos con *Mathematica*.

En la siguiente figura presentamos conjuntamente la gráfica de la sucesión y la de la función , donde se muestra el comportamiento asintótico de la serie. Observemos que en nuestra escala, para $n = 40$ los puntos de la serie se encuentran prácticamente sobre la curva.



Referencias.

Apostol, T. M. (1967), *Calculus*, Vol. 1, Second Edition, John Wiley, New York

Rivera, A. (1993), *Lecturas Sobre Sucesiones y Series Infinitas*, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México, D.F.

Spivak, M. (1980), *Calculus*, Second Edition, Publish or Perish, Inc., Berkeley, CA.