Las representaciones geométricas como un medio para cerrar la brecha entre la aritmética y el álgebra

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 11 No. 3 Diciembre 1999 pp. 69-78

Fecha de recepción: Junio, 1998

Alfinio Flores Peñafiel
Curriculum & Instruction
Arizona State University
alfinio@asu.edu

Resumen *El objetivo de este artículo es proporcionar a los maestros de secundaria elementos que faciliten la transición de los alumnos de la aritmética al álgebra. Representaciones geométricas de relaciones numéricas son utilizadas para ayudar a los alumnos a aprender a hacer razonamientos matemáticos de tipo general utilizando primero números particulares. Estas actividades tienen también la finalidad de ayudar a los alumnos a familiarizarse con el uso de símbolos para variables y dar representaciones pictóricas de los términos que aparecen en algunas ecuaciones algebraicas.*

Abstract *The purpose of this article is to give teachers in the middle grades means to facilitate the transition of the students from arithmetic to algebra. Geometric representations of number relations are presented to help students to learn to do mathematical reasoning of general nature using particular numbers first. These activities also have the purpose to help students become familiar with the use of symbols for variables, and give pictorial representations of the terms that appear in some algebraic equations.*

Introducción

La transición de la aritmética al álgebra puede ser difícil para muchos alumnos por múltiples razones. Las diferencias y semejanzas entre el pensamiento aritmético y el algebraico son complejas y deben ser abordadas desde varios puntos de vista. En este artículo describimos uno de tales enfoques, el uso de representaciones geométricas para facilitar la transición.

Las representaciones geométricas proporcionan un contexto en el cual los alumnos pueden desarrollar su pensamiento algebraico en los siguientes aspectos que son importantes para la transición y que la investigación ha mostrado como problemáticos (ver por ejemplo Kieran, 1990; Kieran y Chalouh, 1993; Lodholz, 1990; Wagner y Parker, 1993):

- aprender a extraer relaciones matemáticas a partir de situaciones y problemas, y a expresar tales relaciones usando símbolos algebraicos;

- hacer explícitos los procedimientos que usan para resolver problemas aritméticos;
- considerar cadenas de números y operaciones como objetos matemáticos, y no sólo como procesos para obtener una respuesta;
- estar conscientes del método matemático que se simboliza por medio de números y letras;
- poner atención al método o proceso y no sólo a la respuesta;
- hacer conjeturas y predicciones, y sacar conclusiones

En este artículo daremos algunos ejemplos que pueden ayudar a los alumnos a lidiar en especial con dos fuentes de dificultades. La primera es que en álgebra los alumnos necesitan desarrollar la habilidad de razonar sobre afirmaciones que se hacen acerca de todos los números o acerca de números en un conjunto específico, más que sobre afirmaciones acerca de números particulares. La segunda es que los alumnos necesitan desarrollar la habilidad para tratar con símbolos para variables y no sólo con símbolos para números. Los maestros en el nivel medio pueden ayudar a los alumnos a desarrollar pensamiento de naturaleza general en matemáticas aún cuando usen números ordinarios para ilustrar el razonamiento. La clave es que en la cadena de razonamientos no se utilicen propiedades particulares del número específico utilizado, sino sólo propiedades que son comunes a toda la clase de números para los cuales la afirmación es cierta.

Verbalizar los pasos, así como usar dibujos y otras representaciones concretas pueden ayudar a los alumnos a seguir la cadena de razonamientos. Con ayuda de las figuras los alumnos pueden verificar que no se utilizaron propiedades especiales del número escogido. Otra ventaja es que los dibujos y los números particulares usados ayudarán a los estudiantes a darle sentido a los diferentes términos que aparecen en la fórmula algebraica usada para describir la situación general.

Ejemplo 1. Cuadrados consecutivos.

Al trabajar con los cuadrados de números naturales, un alumno observa los siguientes resultados:

$$3^2 + 3 + 4 = 4^2$$

$$4^2 + 4 + 5 = 5^2$$

$$5^2 + 5 + 6 = 6^2$$

El alumno se pregunta si el patrón será válido para otros números. Él prueba algunos pocos de los siguientes números, algunos más al azar, y luego algunos números más grandes tales como $100^2 + 100 + 101 = 101^2$.

Esto nos da alguna evidencia empírica de que el resultado es cierto en general. La evidencia empírica es un elemento importante para convencernos. Sin embargo, también debemos guiar a los alumnos para que utilicen razonamiento matemático, para que vean que el patrón es válido para todos los números naturales. Una representación geométrica de esta situación puede ayudar a los alumnos a entender por qué el resultado es cierto. Al cuadrado de 4 se añaden dos rectángulos de área 4 y 5 respectivamente para formar el cuadrado de 5.

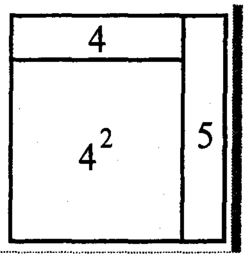

Figura 1 $4^2 + 4 + 5 = 5^2$

El dibujo, aunque hecho para un caso particular, 4, no utiliza ninguna propiedad particular de este número. El mismo principio de sumar dos rectángulos de ancho 1 al cuadrado de un número para formar el siguiente cuadrado puede ser usado siempre, de modo que el patrón puede ser generalizado. Podemos expresar el resultado mediante el siguiente enunciado: el cuadrado de un número natural, más el número, más el siguiente número es igual al cuadrado del siguiente número. El enunciado puede más tarde ser traducido como $n^2 + n + (n + 1) = (n + 1)^2$

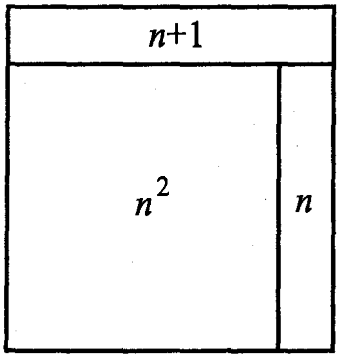

Figura 2 $n^2 + n + (n + 1) = (n + 1)^2$

La situación de cuadrados consecutivos puede ser abordada de otras formas. Una es considerando las diferencias de cuadrados consecutivos y notar que la diferencia es siempre un número non, o sea de la forma $2n + 1$ (ver fig. 3). Otra es partiendo de la suma de números impares $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ (ver figura 4).

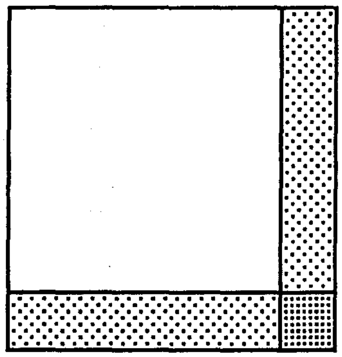

Figura 3 $(n + 1)2 - n^2 = 2 \times n + 1$

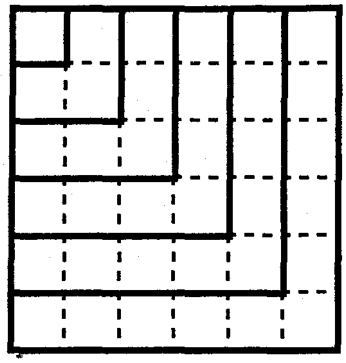

Figura 4 $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$

Ejemplo 2. Números triangulares.

Los alumnos trabajan con el siguiente patrón. Se les pide predecir cuántos cuadrados tendrá el décimo término.

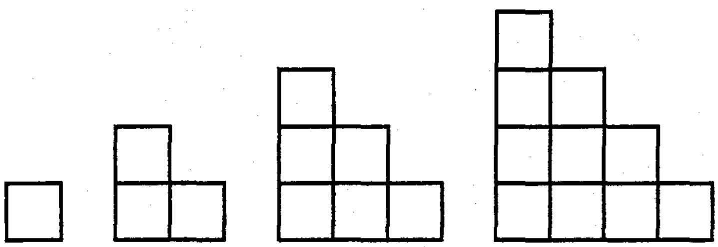

Figura 5 Números triangulares

Los alumnos pueden contar el número de cuadrados en los primeros términos. Si se fijan en los «pisos» de los «edificios», los alumnos se pueden dar cuenta que la respuesta está dada por la suma de los primeros números naturales consecutivos

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.$$

Para números grandes, los alumnos pueden querer encontrar un procedimiento más eficiente para hacer tales sumas. Para esto, los alumnos pueden tomar dos copias para formar un rectángulo.

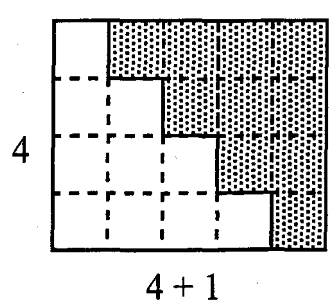

Figura 6 Un rectángulo de 4×5

Los lados del rectángulo son cuatro por cinco, o en general, el número del término por el siguiente número. Los alumnos pueden ver que el número de cuadrados que se requieren sumar será la mitad del área del rectángulo. Así que $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \times 5}{2}$. El mismo razonamiento se puede utilizar también para otros números. Así, para obtener la suma de los números hasta el diez, uno necesita la mitad de un rectángulo de 10 por 11. Esto es, $1 + 2 + \ldots + 10 = \frac{10 \times 11}{2}$. Aunque lo hemos hecho con casos particulares, el razonamiento es de naturaleza general. La suma de los números enteros hasta un número n es igual a la mitad del área de un rectángulo de n por $(n + 1)$..Más tarde los alumnos pueden enunciar que para cualquier número n, vale la igualdad $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$.

Ejemplo 3. Un resultado numérico notable.

El maestro pide a los alumnos que tomen un número impar cualquiera, lo eleven al cuadrado, le resten uno, y luego dividan el resultado entre 8. Los alumnos se sorprenderán de ver que en todos los casos la división no arrojó residuo. Si todos los alumnos utilizaron un número distinto, esto dará evidencia empírica para sospechar que el resultado es cierto para cualquier número impar. Los alumnos pueden probar diferentes números impares de manera sistemática, y organizar los datos.

Tabla 1 Cuadrados de números impares, menos uno

Número impar	elevado al cuadrado	menos uno	dividido entre ocho
1	1	0	0
3	9	8	1
5	25	24	3
7	49	48	6
9	81	80	10
11	121	120	15

Algunos estudiantes reconocerán los números triangulares en la última columna. Basándose en esta observación pueden predecir cuál será el siguiente resultado.

También podemos representar la situación mediante el dibujo de un cuadrado (cuyo lado es un número impar), al que le falta un cuadrado unitario.

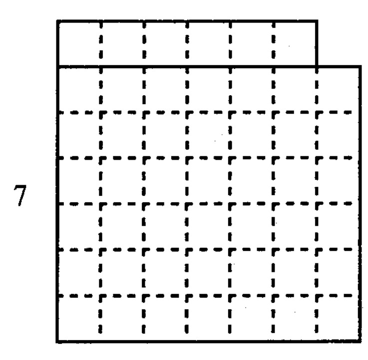

Figura 7. $7^2 - 1$

Si cortamos la tira de arriba y la pegamos a un lado, obtendremos un rectángulo. Los alumnos deben notar que ambos lados del rectángulo tienen una longitud que es un número par, y que el lado mayor es dos unidades más largo que el lado menor. Esto sucede no sólo con el caso particular, 7, ilustrado aquí, sino que siempre podemos formar un rectángulo con estas características a partir del cuadrado de un número impar menos un cuadrado unitario. En términos algebraicos, $(2n + 1)^2 - 1 = 2n \times (2n + 2)$.

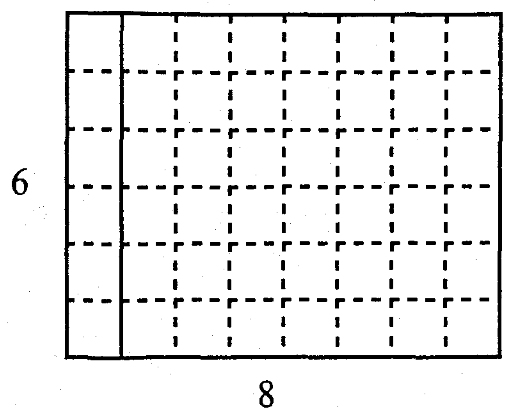

Figura 8. $7^2 - 1 = 6 \times 8$

Como ambos lados del rectángulo son divisibles entre 2, éste puede ser dividido en cuatro rectángulos iguales, cuyos lados son números enteros. Los alumnos notarán que los rectángulos pequeños tienen la propiedad de que un lado es una unidad mayor que el otro lado, o sea son de la forma $n \times (n + 1)$. Podemos recordar del ejemplo anterior que tales rectángulos se pueden descomponer en dos números triangulares, de modo que

$$4 \times n \times (n + 1) = 8 \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

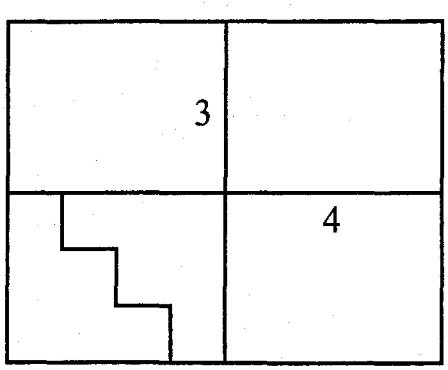

Figura 9. $4 \times (3 \times 4) = 8 \frac{3 \times 4}{2}$

De esta manera una figura equivalente en área al cuadrado de un número impar menos uno, ha sido dividida en ocho números triangulares. Por tanto, el resultado de elevar un número impar al cuadrado y restarle uno es siempre divisible entre ocho. La figura 10 sugiere otra forma de ver este resultado.

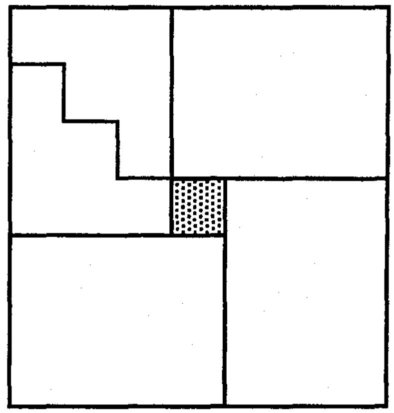

Figura 10.

Después de hacer las actividades descritas arriba, los alumnos podrán darle sentido concreto a los símbolos que aparecen en una demostración algebraica del hecho de que el cuadrado de un número impar menos uno siempre es divisible entre 8. Un número impar puede ser expresado como $2n + 1$, donde n es un número entero. Al elevarlo al cuadrado obtenemos $(2n + 1)^2 = (2n + 1) \times (2n + 1) = 4n^2 + 4n + 1$, restando uno tenemos $4n^2 + 4n$. Esto puede ser escrito como $4 \times n \times (n + 1)$ [cuatro rectángulos]. También puede ser escrito como $8 \frac{n(n+1)}{2}$ [ocho números triangulares]. Otra forma de darnos cuenta que $\frac{n(n+1)}{2}$ es un número entero es notando que si tenemos dos números consecutivos, uno de ellos tiene que ser un número par, de modo que el producto $n \times (n + 1)$ es siempre par.

Ejemplo 4. Suma de números enteros consecutivos.

El número de pequeños cuadrados en las formas de la figura 11 está dado por los números consecutivos 9, 10, 11, 12. El total de cuadraditos es por tanto $9 + 10 + 11 + 12$. Si descomponemos el primer cuadrado en columnas y añadimos una de estas columnas a las otras formas, obtenemos una representación de los números consecutivos 13, 14, 15 (fig. 12). Como el número total de cuadraditos no cambió tenemos la igualdad $9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$.

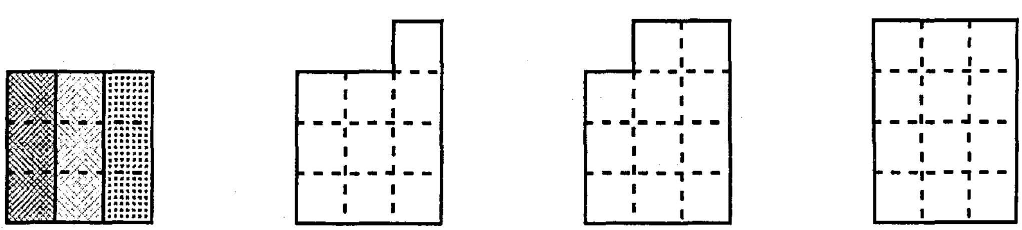

Figura 11. $9 + 10 + 11 + 12$

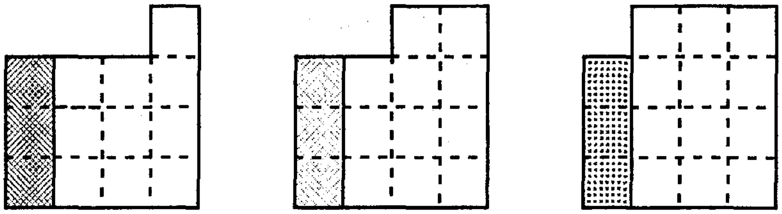

Figura 12. $13 + 14 + 15$

Los alumnos pueden tratar con otros ejemplos y ver que éste es un caso particular de una serie de igualdades de sumas de números consecutivos. Ellos pueden anotar las igualdades en una tabla.

Tabla 2 Sumas de números consecutivos

$1 + 2 = 3$
$4 + 5 + 6 = 7 + 8$
$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$
$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$

Los alumnos pueden dibujar las figuras que corresponden a las dos primeras igualdades. Pueden también escribir la igualdad numérica que corresponde a los números que siguen. Pueden describir verbalmente la relación sugerida por estas igualdades. En general, en la parte izquierda tenemos $(n + 1)$ términos, y empezando con el cuadrado de un número, n^2, sumamos los siguientes n números enteros consecutivos. El último término que se suma será por tanto $n^2 + n$. La suma de estos términos es igual a la suma de los siguientes n números enteros consecutivos, empezando con $n^2 + n + 1$, y terminando con $n^2 + 2n$. Los alumnos deben notar que este último término es lo mismo que $(n + 1)^2 - 1$. Los alumnos pueden recordar que el término n^2 se ha descompuesto en n sumandos de tamaño n. De modo que podemos reescribir n^2 como $n + n + ... + n$, y tomar una n para cada uno de los otros términos de la parte izquierda. Esto nos dará los términos de la parte derecha. Usando símbolos algebraicos,

$$n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + ... + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + ... + (n^2 + 2n)$$

Ejemplo 5. Sumas de números enteros consecutivos y suma de cubos.

El número de pequeños cubos en las formas de la columna izquierda de la figura 13 es respectivamente 10, 11, 12, 13, 14, 15, y 16. Los pequeños cubos de color en las primeras tres rebanadas se reacomodan sobre las rebanadas que están detrás. Las de enfrente se reducen a tres rebanadas iguales, con caras en forma de cuadrado, y con 9 cubos cada una. Las de atrás son aumentadas para formar rebanadas iguales con 16 pequeños cubos, de modo que ahora se tienen cuatro rebanadas de ese tamaño. Las de enfrente se juntan para formar un cubo de $3 \times 3 \times 3$. Las de atrás forman un cubo de $4 \times 4 \times 4$. Como el número total de pequeños cubos no ha cambiado, tenemos la igualdad $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 3^3 + 4^3$. Los alumnos pueden ver que éste es un caso particular de una serie de igualdades entre sumas de números consecutivos y sumas de dos cubos consecutivos (ver tabla 3).

Tabla 3 Sumas de números consecutivos y sumas de cubos consecutivos

$$2 + 3 + 4 = 1^3 + 2^3$$
$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 2^3 + 3^3$$
$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 3^3 + 4^3$$
$$17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 = 4^3 + 5^3$$

Los alumnos pueden construir con cubos pequeños (o dibujar) las formas que corresponden a las primeras dos ecuaciones. Pueden escribir las siguientes igualdades de la serie. Pueden describir verbalmente la relación sugerida por estos ejemplos. En general, empezamos con el cuadrado de un número más uno, $n^2 + 1$, y seguimos con los siguientes $2n$ números consecutivos hasta $(n + 1)^2$. Del lado derecho tenemos la suma de dos cubos consecutivos, $n^3 + (n + 1)^3$. La igualdad queda descrita mediante símbolos algebraicos como $(n^2 + 1) + (n^2 + 2) +...+ (n + 1)^2 = n^3 + (n + 1)^3$. Siguiendo la idea sugerida por la figura 13 podemos reescribir el lado izquierda como

$$(n^2 + 1) + (n^2 + 2) +... + (n^2 + n) + [(n + 1)^2 - n] + ... + [(n + 1)^2 - 1] + (n + 1)^2.$$

Vemos que la cantidad que los primeros n términos tienen como exceso de n^2 es precisamente lo que les falta a los siguientes n términos para ser $(n + 1)^2$. Tenemos ahora n rebanadas con n^2 cubos cada una, y $(n + 1)$ rebanadas con $(n + 1)^2$ cubos cada una. Consecuentemente la suma es igual a $n \times n^2 + (n + 1) \times (n + 1)^2 = n^3 + (n + 1)^3$.

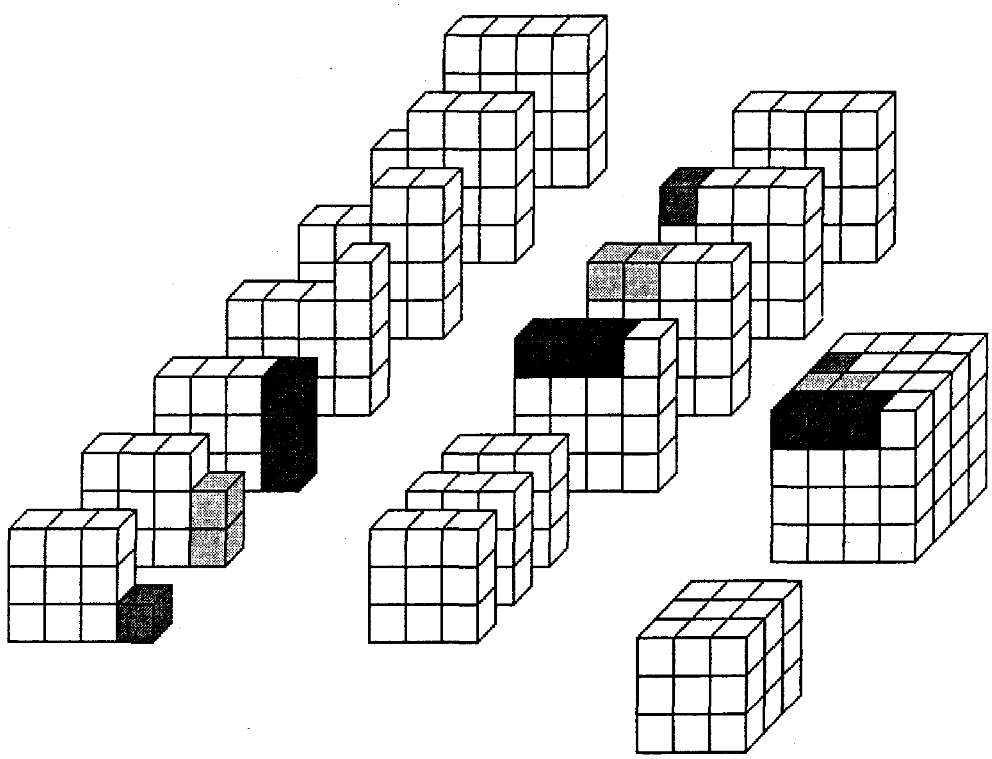

Figura 13 $10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 3^3 + 4^3$

Conclusión.

En los ejemplos mostrados, algunos números particulares fueron utilizados para ilustrar enunciados generales. Aunque el razonamiento para ver por qué el enunciado es verdadero fue hecho con números particulares, sin embargo, el mismo razonamiento puede ser hecho en general. El uso de variables implica un razonamiento de tipo general, sin embargo, muchos estudiantes no están preparados para dar un salto que conlleva simultáneamente el uso de razonamientos matemáticos de tipo general y el uso de variables. Para facilitar el proceso pueden hacer primero el razonamiento con números particulares. Los alumnos pueden desarrollar sus habilidades para razonar en términos generales antes de utilizar variables. Al mismo tiempo, utilizando las representaciones geométricas de las relaciones numéricas, los alumnos tendrán experiencias concretas que darán sentido a los términos algebraicos que serán usados más tarde.

Referencias

Kieran, Carolyn. (1990). Cognitive processes in learning school algebra. En Pearl Nesher y Jeremy Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (p. 96-112). Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Kieran, C., y Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. En D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (p. 179 - 198). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lodholz, Richard D. (1990). The transition from arithmetic to algebra. En Edgar L. Edwards (Ed.), *Algebra for everyone* (p. 24 - 33). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wagner, S., y Parker, S. (1993). Advancing algebra. En P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (p. 119 - 139). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.