Acerca de las dificultades encontradas en alumnos de 12-13 años en el aprendizaje de la isometría plana[1]

Fecha de recepción: Marzo, 1998

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 12 No. 2 Agosto 2000
pp. 63-80

Rosa Iaderosa - Nicolina A. Malara
Grupo de Investigación en Educación Matematica
Departamento de Matemáticas - Universidad de Modena
iade@dada.it - malara@mail.unimo.it

Síntesis: *Se reportan algunos resultados de una investgación de innovación didáctica sobre las isometrías planas, realizada con el apoyo de la computadora y poniendo atención a dificultades de los alumnos. La hipótesis de investigación fue que la visualización dinámica de la acción de transformaciones geométricas sobre diversas figuras -no necesariamente convexas o limitadas- y sobre un conjunto de puntos dispersos, puede llevar a los alumnos a:*
a) Construir imágenes mentales apropiadas para la superación de dificultades bien conocidas que surgen al trazar el correspondiente[2] *de figuras, dada cierta isometría. b) Obtener el significado de* invariante *y* elemento unitario *en una transformación, y llegar a conceptualizarlo como una correspondencia entre puntos del plano. La investigación ha demostrado que, no obstante el recurso de las visualizaciones en computadora haya permitido a los alumnos interiorizar bien la visión de clases de figuras unidas por traslación o rotación, muchos tuvieron dificultades al representar el correspondiente de una recta con base en un vector paralelo, o el de un par de figuras tales como un círculo y una tangente, con base en determinadas rotaciones o traslaciones. Más aun, en lo tocante a la extensión de la transformación a todo el plano, varios alumnos mostraron persistencia de una visión local.*

Abstract: We report some results of a research of didactical innovation on direct plane isometries, realized using the computer, focusing on some difficulties met by pupils. The hypothesis of the research was the dynamic visualization of the action of a geometrical transformation on various figures, not necessarily convex or limited, and on sets of loose points, can lead the pupils to: a) construct the appropriate mental images for overcoming well know difficulties met by them in realizing the correspondent of figures according to a certain isometry; b) achieve the meaning of invariant and unite element in a transformation and arrive at the concept of this as a correspondence between points of the plane. The research has evidenciated that, even if resorting to the visualizations on the computer has allowed the pupils to achieve a good interiorisation of the vision of classes of figures united by translation or rotation, several of them met conflicts in representing the correspondent of a translation of a right line according to a vector parallel to it on in realizing the correspondence of a certain couple of figures, such as a circle and an a right line tangent to it, according to particular translations or rotations. Moreover, as to the extension of the transformation to the whole plain, several pupils showed the persistence of a local visions.

[1] Trabajo realizado con la contribución del MURST y CNR (contract. n. 96.00191.CTO1)

[2] Usaremos éste como un término técnico que significa figura correspondiente [Nota del T.]

Introducción

Las transformaciones geométricas fueron introducidas en la curricula de muchos países en los años 60, a la luz de una visión que refleja la idea estructuralista del tiempo. Empero, las razones históricas y culturales que motivaron ésto (véase al respecto Gallo, 1997) han sido poco notadas por los profesores y, en consecuencia, muchos de ellos consideran dichos argumentos como extraños a la geometría , lo que a menudo redunda en la trasmisión escueta y apresurada de las propuestas contenidas en los libros de texto (Malara, 1992). A fin de superar dichas dificultades, hemos trabajado con los profesores de nuestro grupo de investigación, el problema de la enseñanza de las transformaciones geométricas, y hemos realizado diversas investigaciones experimentales en el marco de un proyecto orgánico para la enseñanza de la geometría con alumnos de 11-14 años (Malara 1994; Pincella y Malara 1995; Iaderosa y Malara 1994).

Son pocas las investigaciones sobre el aprendizaje de la isometría plana (Ver Hart 1981; Nasser er.al. 1995; Gallou-Domiel 1987; Jaime y Gutiérrez 1989; y en Italia el estudio de Bartolini y Mariotti 1996); muchos de ellos concernientes principalmente a la simetría axial y no centrados en las dificultades de los alumnos. A este respecto, el estudio de referencia sigue siendo el clásico coordinado por Hart (1981), en el cual se estudian las dificultades que los alumnos enfrentan al construir el *correspondiente* de un par de figuras que tienen o no elementos en común.

Estudios recientes subrayan la influencia positiva que la computadora ha tenido sobre el aprendizaje de las transformaciones geométricas (Ver Clemente y Batista 1992). Nuestra investigación se ubica en este rubro. En ella se reportan algunos resultados concernientes a las dificultades de los alumnos y a una amplia búsqueda de innovaciones didácticas relativas a transformaciones, centrada en la imagen de la computadora que muestra los efectos de datos isométricos sobre clases de figuras (Malara 1995b). Los resultados resportados aquí, relativos a las isometrías planas directas, se obtuvieron a partir del trabajo con dos grupos de la Escuela Secundaria Cesano Boscone (Milán), siendo profesora Rosa Iaderosa, que involucró a 45 alumnos de 12-13 años durante un periodo de tres meses. Otros resultados tocantes a la simetría axial plana, se pueden consultar en Iaderosa (1997).

Hipótesis de la Investigación

En la presente investigación se analizan los comportamientos, las respuestas y las producciones de los alumnos bajo las siguientes hipótesis:

- Visualizar en la computadora los efectos de diversas transformaciones isométricas sobre diversas figuras favorece la formación de apropiadas imágenes mentales que ayudan al alumno a evitar ciertas dificultades reportadas en la literatura (Hart, 1981), lo que coadyuva a la formación de conceptualizaciones más correctas.
- Inducir la observación de lo que muta y lo que se conserva en numerosas clases de figuras incluso no limitadas (polígonos, circunferencias, líneas quebradas, rectas, etc...) en posiciones diversas y no especiales, lleva al alumno a adquirir el concepto de invariante y a ver una figura modificada en una transformación dada como privilegiada respecto a otras, respecto de dicha transformación.

- Es posible, hasta cierto punto, superar el concepto de transformación como acción sobre una figura para pasar al de transformación como una correspondencia entre todos los puntos del plano.

Tales hipótesis abrevan de la idea de que en un programa didáctico de tipo estático, basado exclusivamente en imágenes reproducidas del libro de texto refuerzan, en nuestra opinión, la tendencia del alumno a ver la transformación únicamente como acciones sobre polígonos o incluso sobre el contorno, con el cual los alumnos lo identifican. Se pierde así la idea de extender una transformación a figuras no limitadas (rectas, **figuras alargadas**, u otras partes análogas del plano) y a la acción simultánea sobre la totalidad de los puntos del plano.

Por otro lado, utilizar la computadora para dar una visión dinámica de la transformación -pero privilegiando al inicio el aspecto de "movimiento físico"- permite a los alumnos captar más fácilmente y reelaborar de la manera más autónoma posible los aspectos que caracterizan cada tipo de isometría y el concepto de propiedad invariante. En particular, es posible visualizar y favorecer la conceptualización de puntos **unidos**[3] **y de figuras unidas.**

A continuación, después de describir brevemente el programa didáctico desarrollado en clase, nos detendremos a describir algunas fichas de trabajo sobre las isometrías directas, proyectadas por nosotros, sacando a la luz los objetivos y las dificultades que previmos. En seguida abordaremos las dificultades detectadas en alumnos y concluiremos haciendo algunas observaciones acerca de los resultados generales de nuestra investigación, resaltando algunos aspectos problemáticos que surgieron.

Programa didáctico

El programa didáctico para cada una de las principales isometrías puede ser sintetizado de la siguiente manera:

- periodos de visualización en la computadora
- recolección de observaciones e ideas a priori por parte de los alumnos
- uso de fichas tendientes a construir conceptos y a sacar a la luz posibles conflictos entre imágenes mentales y conceptos que están en juego. Las fichas se elaboraron teniendo en cuenta los meollos didácticos y dificultades de aprendizaje previstas en análisis anterior.
- discusiones colectivas en las que se analiza junto con los chicos los resultados de su trabajo y se corrigen errores y resuelven dificultades mediante la socialización del conocimiento.
- uso de fichas para verificar la interiorización de las visualizaciones, las discusiones y las reflexiones llevadas a cabo; fichas de dificultades surgidas.

Por lo que respecta a las isometrías directas, el hilo conductor en la planeación y el desarrollo del programa ha sido la vinculación entre traslación y rotación, por analogía entre el desplazamiento a lo largo de una recta y a lo largo de una circunferencia.[4]

[3] Tere R. corrigió al traductor al traducir unito por unido y lo cambió por unitario, pero creo que sí es *unido* [Nota del T].

[4] Aquí no comprendo la idea matemática que entraña el texto original. Me parece que falta una coma aclaratoria o algo así [Nota del T]

Dicha analogía es reforzada e incluso muestra, gracias a la visualización, el vínculo entre clases de figuras unidas por traslación -tales como familias de rectas paralelas al vector de traslación- y clases de figuras unidas por rotación -tales como familias de circunferencias concéntricas al centro de rotación.

Una importante elección cultural y didáctica en este programa fue la desvinculación de las actividades de medición y de referencia cartesiana en las actividades propuestas. Se privilegiaron tanto el uso de papel blanco como el de regla y compás, y también al final de una reflexión sobre la construcción de figuras con tales instrumentos o con la computadora, y para preparar la analogía ilustrada anteriormente.

Fichas de trabajo

Las fichas de trabajo en las que nos detendremos aquí son seis: dos dedicadas específicamente a la traslación; dos a la rotación y dos a ambas. Las primeras dos fichas, reportadas en el Apéndice 1, se refieren a la traslación y se colocan en una fase central del programa didáctico relativo a esta isometría.

Como se puede observar en Apéndice 1, en la primera ficha se pide a los alumnos **individuar**[5] el vector de traslación en varias situaciones, incluso en el caso de que haya trazos de segmentos unidos en la transformación. Los objetivos de esta ficha son: verificar la conceptualización del vector libre de traslación, en el que se trabajó anteriormente; pasar de la observación de segmentos (limitados) a la recta de pertenencia (ilimitada), e intuir en una traslación la existencia de rectas unidas, pasando por la ulterior dificultad de compaginar la visión global de la figura y sus diversas partes, en relación a los puntos mostrados.

Las demás fichas, Apéndice 3, se basan en un cuestionario de verificación final sobre las dos isometrías. Se trata de las más complejas, sea desde un punto de vista conceptual como de representación. El objetivo de la quinta ficha -en la cual se presentan seis situaciones, dos dedicadas a la rotación de círculos[6] y cuatro dedicados a traslación y rotación de la recta- es el de verificar si se han superado las dificultades mostradas anteriormente, como la de imaginar la traslación de una recta en el caso de vectores paralelos a ella, o la construcción de la rotación de una recta y de un círculo.

La ficha presenta varias dificultades relacionadas a: la ausencia de puntos privilegiados sobre la recta e sobre la circunferencia; la construcción del *correspondiente* de un punto respecto de una rotación hasta de 90^0; imaginar los efectos de una rotación sobre figuras respecto a un centro fuera de éstas.

La sexta ficha es la más delicada definitivamente. En ella se proporciona una figura constituida por un círculo y una tangente a ella con el punto de tangencia bien señalado. Se presentan dos situaciones, en la primera se pide realizar la traslación de la figura respecto a un vector paralelo a la tangente; en la segunda se pide realizar la rotación de la misma figura respecto al centro del círculo.

El objetivo de la ficha es verificar la capacidad para ver la transformación de las figuras compuestas y no limitadas; de reconocer en varios casos los elementos unidos;

[5] La traducción de este término será mejor propuesta por un matemático [Nota del T.]

[6] A menudo hemos centrado más la atención en los círculos que en las circunferencias para forzar a los alumnos a que visualicen los puntos internos del mismo y así evitar en general la identificación de la figura con su perímetro.

de individuar analogías y diferencias en las diversas situaciones; de indagar acerca de las conceptualizaciones principales en la actividad de visualización en computadora - como la *invarianza* de un manojo de rectas individuadas a partir de una recta dada y de tiras del plano o a partir de familias de circunferencias concéntricas y de círculos.

Las dificultades de esta ficha son mútiples y de distinto nivel:

a) Imaginar y construir la parte transformada de un solo elemento de la figura (punto, recta, circunferencia) en las dos transformaciones;
b) Coordinar los varios elementos transformados ya sea en el caso de la traslación o de la rotación, por ejemplo, reconocer que para individuar la figura transformada en la dirección asignada paralela a la del vector.[7]

Las dificultades previstas se refieren a la representación del vector de traslación (aplicado o libre), a la incapacidad de distinguir los segmentos de las rectas de pertenencia, y a la falta de reconocimiento del paralelismo en el caso de rectas sobrepuestas.

En la segunda ficha se pide trasladar una recta de acuerdo a direcciones iguales o diferentes a la del vector de traslación. El objetivo de esta ficha es la de verificar si las actividades de visualización en computadora (orientadas a la comprensión de la *invarianza* de las rectas respecto de la traslación en su misma dirección) han llevado a los alumnos a la conceptualización deseada. Las dificultades previstas involucran: el posible conflicto éntre la dirección del vector de traslación y la dirección de la recta en la representación de la traslación de la misma; y la conceptualización de que un punto de la recta es llevado a un punto de esa misma recta en el caso de un vector paralelo y, por ende, en el desplazamiento de la recta sobre sí misma.

La tercera y la cuarta ficha, reportadas en el Apéndice 2, se refieren a la rotación y son colocadas en la fase inicial del programa relativo a dichas transformaciones después de la primera visualización en computadora de los efectos de diversas rotaciones sobre banderolas y otras figuras limitadas. En ambas fichas se representa la visualización en computadora de una banderola de forma triangular, y de su rotación respecto a un punto fuera de ella (nótese que los procedimientos usados funcionaban de modo que resaltaban el papel del centro de rotación y a uno de los segmentos que unen el centro con un punto de la figura).

El objetivo de la tercera ficha es el reconocimiento guiado de los elementos característicos de una rotación en el plano y la realización de una primera indagación acerca de la capacidad de los alumnos para identificar, mediante la observación autónoma, los ángulos como elementos invariantes. Entretanto, la cuarta se enfoca más específicamente: a la explicitación del procedimiento que se sigue para rotar una figura en el plano; a la observación de la invarianza del ángulo individuado por rayos que unen parejas de puntos que corresponden al centro de rotación.

La principal dificultad radica en el reconocimiento de la invarianza del ángulo de rotación en contraposición con la variabilidad del arco subyacente (es ya clásico el concepto equivocado que considera que la amplitud de un ángulo depende de la longitud de los segmentos que representan las semirectas que lo delimitan).

En la cuarta ficha se ve la rotación donde basta individuar el punto de tangencia transformado, mientras que en el caso de la traslación basta individuar el translado del

[7] Falta un verbo en la frase original por lo que parece "coja" la oración [Nota del T].

centro del círculo; c) Ver la tangente como figura unida en el caso de la traslación y, lo más difícil, asímismo de todas las rectas paralelas a ella. d) Concebir la circunferencia y todas las circunferencias concéntricas como figuras unidas en la rotación respecto al centroe) Reconocer el centro de rotación como único punto unido en la rotación. La solicitud de confrontación entre las dos situaciones involucra pues el control metacognitivo sobre lo que se aprendió.

Más allá de las dificultades específicas existen otras dificultades generales como la que implica el uso de regla, compás y demás herramientas (para eliminarlas, al menos en parte, se ha permitido a los alumnos completar la figura contenida en la ficha esbozando las configuraciones deseadas, sin requerirles la precisión que únicamente podría obtenerse con las debidas herramientas) y, mucho más relevantes, las dificultades de carácter expositivo que surgen al explicar las observaciones y las consideraciones.

Dificultades de los alumnos

Las fichas de trabajo que hemos dispuesto nos han permitido poner la lente sobre las dificultades de aprendizaje . Algunas de las cuales no habían sido vislumbradas anteriormente.

En lo que respecta a la traslación, reportamos algunas producciones de alumnos que dan testimonio de:

Tabla 1.- Dificultades para visualizar el vector que representa la traslación que opera sobre la banderola, como lo indica la ficha, y su acción sobre otros elementos que no se presentan en la figura. En particular se pueden observar algunos obstáculos entre la dirección de la traslación y la del asta de la banderola o la de otros elementos (Ver fig. 1c); la incapacidad para individuar el módulo del vector de traslación (Ver fig.1b) y la que extiende el resultado de la traslación a la recta a la cual pertenece el segmento (Ver también fig. 1a)

Figura 1.a

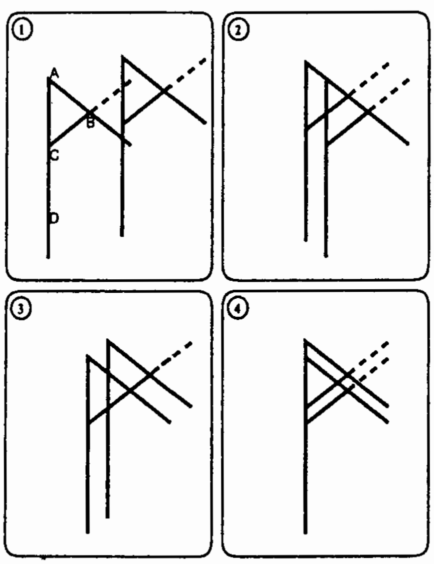


Figura 1.b

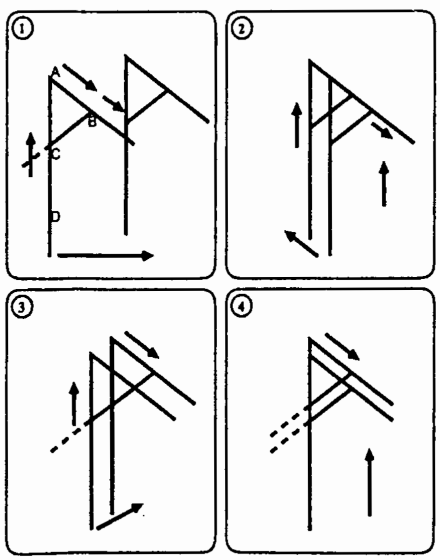


Figura 1.c

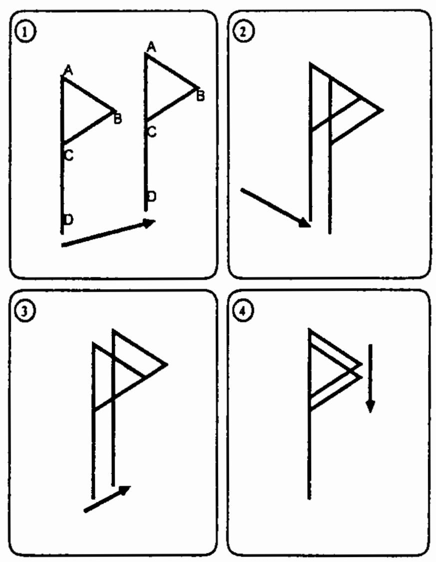


Tabla 2 .- La dificultad para construir la figura correspondiente de una recta dada según un vector asignado (Ver fig. 2a), especialmente en el caso de que haya paralelismo entre el vector de traslación y la recta (Ver fg. 2b) y la incapacidad para construir la figura correspondiente de una recta después de construir los *correspondientes* de dos de sus puntos (Ver fig. 2c)

Figura 2.a

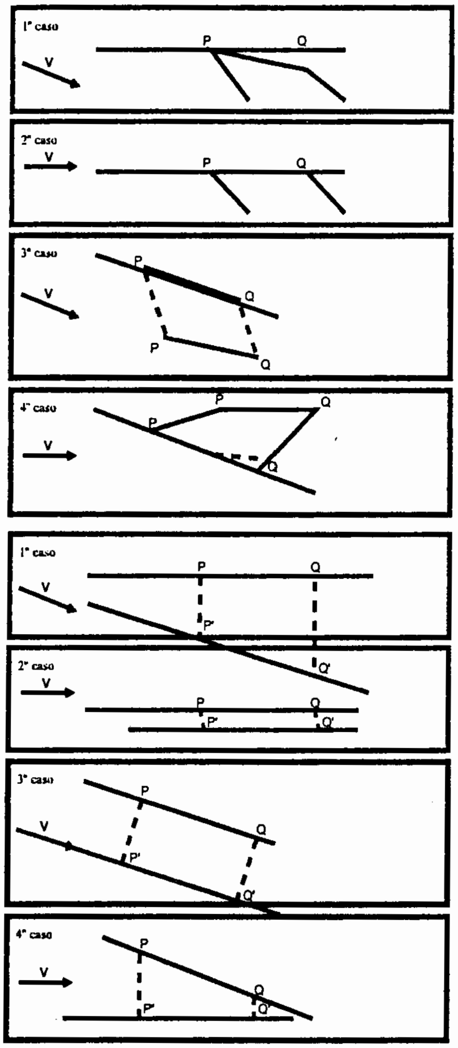


Figura 2.b

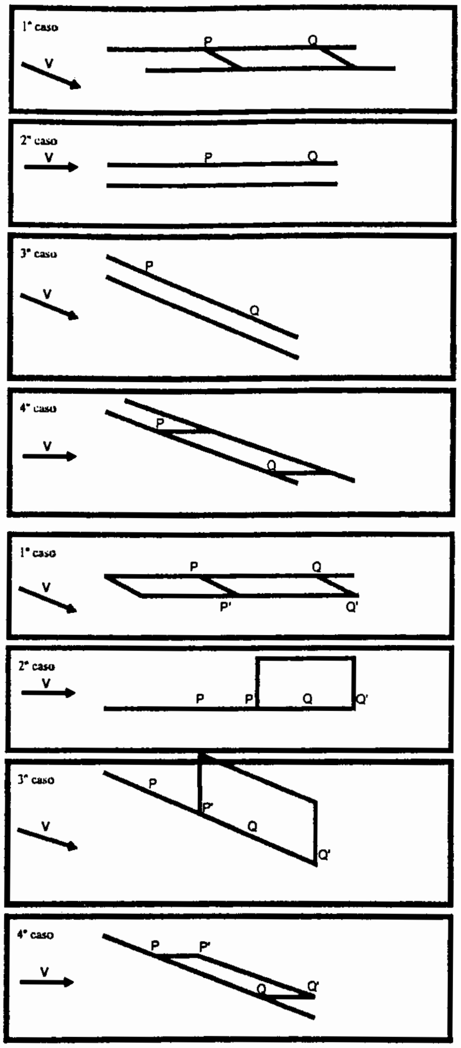
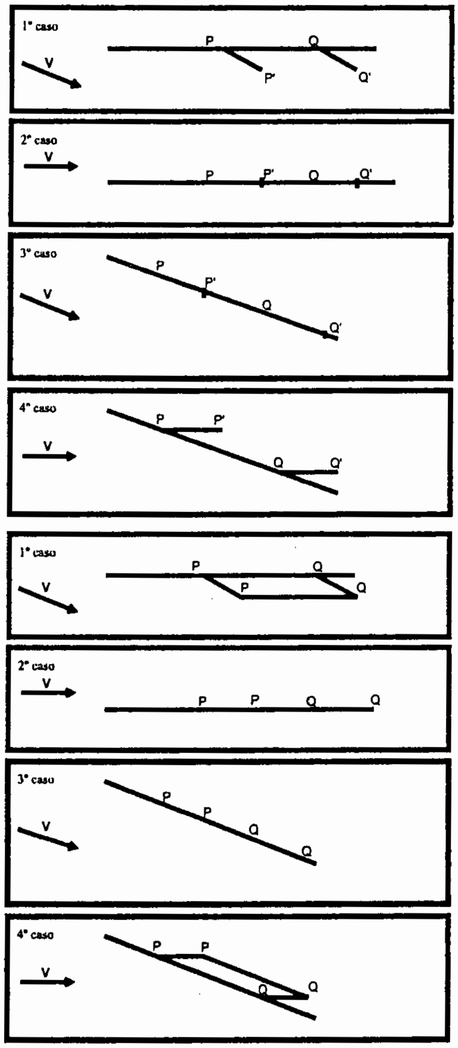


Figura 2.c



Por lo que respecta a la traslación en general, los alumnos mostraron en las diversas fases del estudio:

- Incapacidad para extender la visión de la acción de una traslación que va de un segmento a la recta a la que pertenece (ello está documentado tanto en la ficha presentada como en otras elaboradas también para exponer tal extensión);
- La dificultad para individuar y representar el vector libre de una traslación respecto al vector aplicado y de concebir en forma abstracta la traslación asociada a un vector dado (los chicos lograron comprender que una traslación es asignada síntética y completamente a través del vector libre de traslación.

Sin embargo, las respuestas de muchos de ellos ponen en evidencia que no conciben como asignada la traslación si no se asigna por lo menos un punto sobre el cual ella actúe y si esto no se materializa gráficamente en el dibujo).

- La incapacidad para trasladar una recta; en muchas producciones es documentado el evidente y persistente conflicto entre la dirección del vector de traslación y la de las rectas sobre las que éste actúa
- La dificultad para concebir la mutación simultánea de las posiciones de diversos puntos del plano (por ejemplo, al pedir que se traslade un cuadrado respecto a un vector equipolente a uno de sus lados, algunos de los alumnos menos aplicados hablaron de un punto unido, expresando la idea de la superposición de un punto con el *correspondiente*, que era identificado con el que en la configuración inicial era colocado en un lugar donde el punto era desplazado por el efecto de la traslación, sin advertir su desplazamiento simultáneo).

Figura 3.a

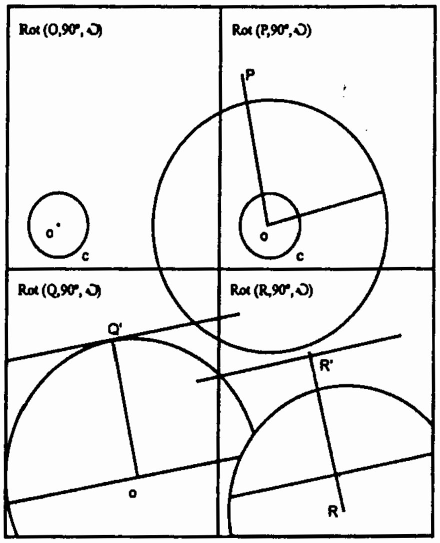


Figura 3.b

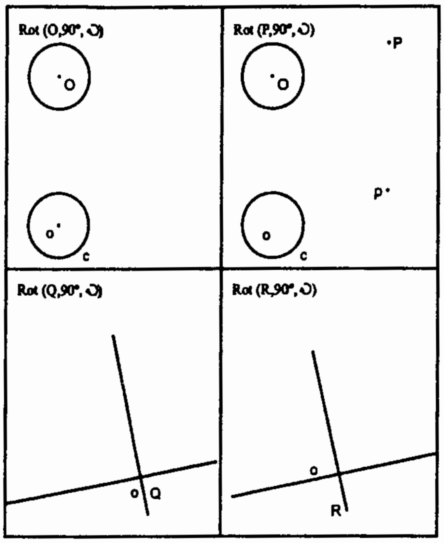


Figura 3.c

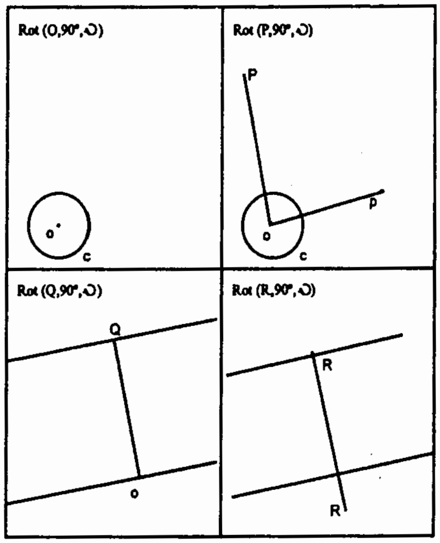


Figura 4.d

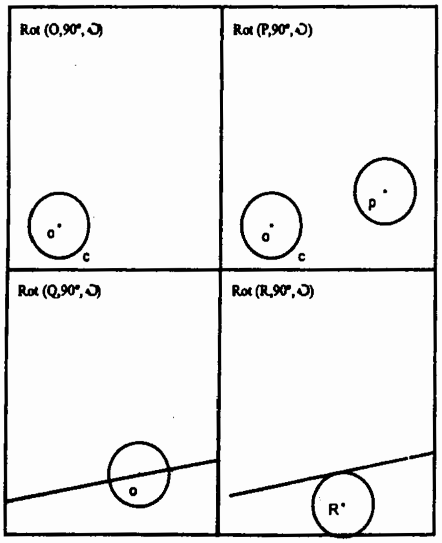


Figura 4.e

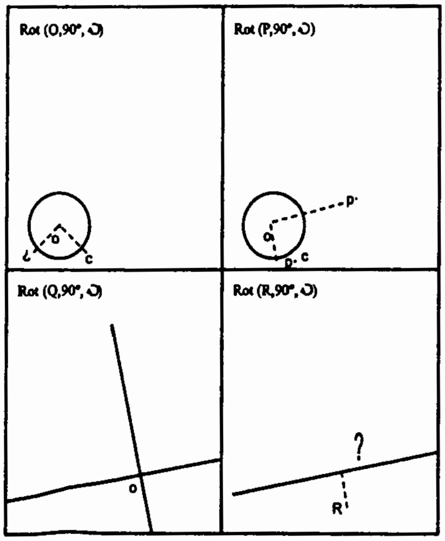
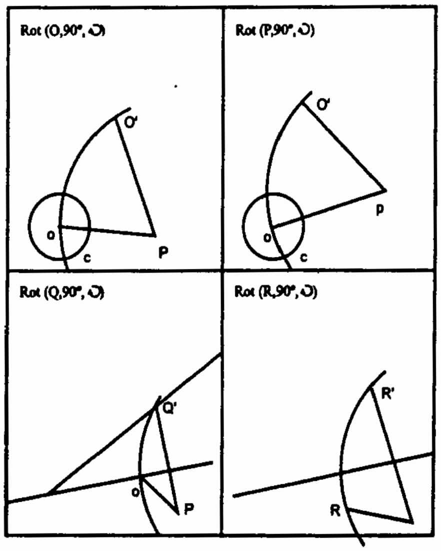


Figura 4.f



Por lo que toca a la rotación, al inicio del estudio se encontró en muchos alumnos el clásico error de asociar la amplitud del ángulo de rotación con el largo de los arcos que unen un par de puntos correspondientes, o mejor dicho, al largo de los rayos de dichos arcos, lo que les impedía captar la *invarianza* del ángulo respecto a los puntos sobre los cuales se realizaba la rotación.

Otra dificultad típica relacionada a la rotación (que lleva a los alumnos a interpretar el efecto que tiene una rotación sobre una figura respecto a un punto fuera de aquella, como resultado de la composición de una rotación respecto a un punto privilegiado de la misma y de una oportuna traslación) ha sido superada por muchos. Gracias a la visualización en computadora ha sido posible inducir en los alumnos imágenes mentales de una figura rotada respecto de un centro externo a ella.

Aún existe la dificultad, una vez asignada una pareja de figuras que se corresponden por rotación, de individuar el centro de rotación cuando éste no se encuentre en posición privilegiada respecto a ellas.

En algunos trabajos se ha comprobado que prevalecen en los alumnos visualizaciones respecto a las construcciones aprendidas hechas con regla y compás: los chicos trazaban todos los arcos que unían puntos especiales de la figura con los respectivos *correspondientes*, y después procedían intuitivamente a individuar el centro de rotación como un punto al cual los diversos rayos del arco deberían concurrir.

Las producciones de los alumnos relacionadas a las últimas dos fichas sobre rotación y traslación juntas son sumamente interesantes. Algunas producciones respecto a la quinta ficha, que aparecen en la figura 3, muestran evidentes dificultades aún tras repetidas visualizaciones: se ha detectado que baja la captación de los alumnos cuando se les pide que, dado un vector, trasladen una recta dada sobre la cual no se había remarcado ningún punto, o rotar un círculo 90° sobre su propio centro o en torno a un punto fuera de él.

Figura 4.a

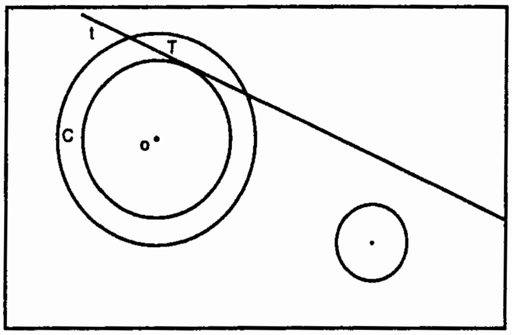


Figura 4.b

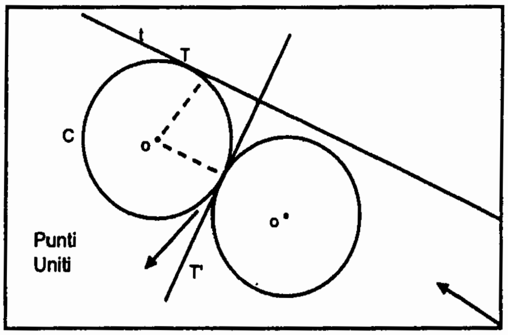


Figura 4.c

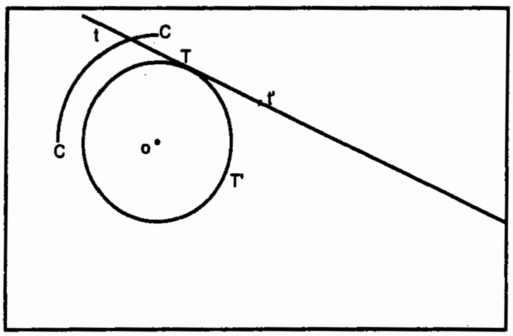


Figura 3.d

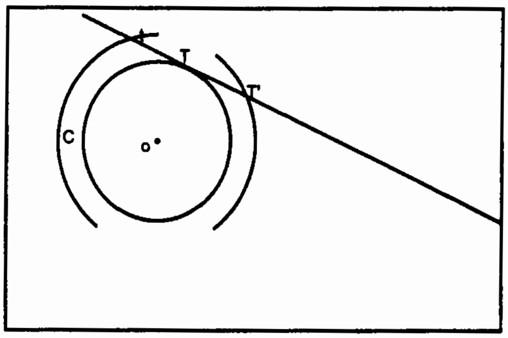


Figura 3.e

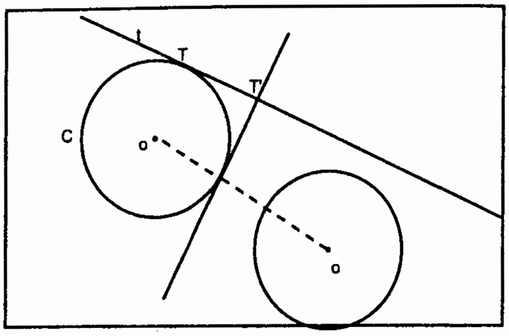
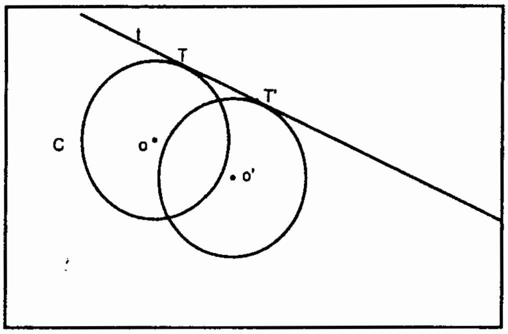


Figura 3.f



Con todo, las mayores dificultades son las que surgen en relación a la sexta ficha en la cual los alumnos deben controlar simultáneamente la acción de traslación y rotación sobre una pareja compuesta de círculo y recta. Sólo el 30% de los alumnos respondió correctamente. En la figura 4 se reportan algunos prorocolos mediante los cuales es posible observar el conflicto generado en los alumnos al tener que confrontar la traslación y la rotación juntas, si bien los mayores errores ocurren en relación a la rotación.

Cabe subrayar que al aplicar la rotación ningún alumno reconoce que el centro de rotación es un punto unido en la transformación, a pesar de las atenciones prestadas a estos aspectos y a las preguntas contenidas en la ficha.

Conclusiones

No obstante las dificultades surgidas con respecto a los resultados de la investigación, el recurso de observar en la computadora ha permitido que los alumnos interioricen la visión de clases de figuras unidas por traslación o rotación y adquieran el concepto de figura unida respecto a una isometría. Dicho concepto resulta esencial para conferirle sentido al problema de caracterizar en una figura asignada las isometrías respecto de las cuales está unida.

Por otro lado, la mayoría de los alumnos logran hacer una buena conceptualización de la transformación como correspondencia, no obstante la secuencialidad al construir la figura en las visualizaciones propuestas, que se pensaba podría inhibir la concepción de la simultaneidad de la acción de la transformación sobre la propia figura.

En cambio, ha resultado problemática la extensión de la transformación en el plano entero. Ello se ha debido en nuestra opinión, más allá de la limitación del instrumento de representación, a la prevalencia de una visión local de los hechos observados en diversos alumnos, misma que se extendía a los casos considerados, pero distaba de la visión global la cual es difícil de alcanzar incluso debido a la debilidad de conceptos como recta y plano a este nivel de enseñanza.

[Corrigió traducción Cinthia De Gortari]

Bibliografía

Batolini Bussi M, Mariotti M. A., (1996). Geometrical Reasoning in the Mathematical Classroom, in Malara N. A. *et. al.* (eds.), *Italian Research in Mathematics Education: 1988-1995*, Litoflash, Roma.

Clements D. H., Battista M. T., (1992). Geometry and Spatial reasoning, in Grouws D. A. (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Mc Millan, NY, 420-464.

Hart K., (1981). *Children undertanding of Mathematics 11-16*, Londres Murray.

Gallo E., (1997). Continuità e dscontinuità nella costruzione delle conocenze geometriche, in Micale B., Pluchino S. (a cura di) atti XVIII Convegno Nazionale UMI-CIIM, *Notiziario UMI* suppl. n. 7, 21-34.

Gallou Doumiel E., (1987) Symmétrie orthogonale et micro-ordinateur, *Recherches en Didactique des Mathematiques, vol. 8, n. 1/2, 5-60.*

Iaderosa R., in stampa L'incidenza della visualizzazione attraverso il computer nella concettualizzazione delle simmetrie assiali piane, in Grugnetti L. (a cura di) *Atti del II Convegno Nazionale Internuclei Scuola dell' obbligo* (aprile 1997, Salsomaggiore-Parma).

Iaderosa R., Malara N. A., (1994). Le isomtrie piane: problemi di insegnamento-apprendimento, in B. Micale y S. Pluchino (a cura di), Atti XVII Convegno nazionale UMI-CIIM *"L'insegnamento della geometria: temi di attualità"*, suppl. Notiziario UMI xxII, n. 8-9, 168-175. Iaderosa R., Malara N. A. (1995). How much does "common sense" influence the teacher's ability in recognizing pupils'difficulties?, proc. *CIEAEM 47*, 361-369

Jaime A., Gutierrez A., (1989). The learning of plane isometries from the viewpoint of the Van Hiele Model, proc. PME XIII, vol. 2, 131-138.Krainer K. (1991). Consequences of a low level of acting and reflecting in geo-metry learning—Findings of interviews
on the concept of angle, Proc. *PME XV*, Assisi, vol. 2, 254-261

Malara N. A. (1992). Ricerca Didattica ed Insegnamento, *Ins. Mat. Sci. Int.*, vol. 12, n. 2, 107-136

Malara N. A. (1994). Didactical innovations in geometry for pupils aged 11-14, in Malara N. A., Rico L. (eds.), *Proc. First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*, AGUM, Modena, 59-66

Malara N. A. (1995a). La geometria nei programmi scolastici di alcuni paesi europei per allievi dai 6 ai 16 anni, *Ins. Mat. Sci. Int.*, n. 6, 675-700.

Malara N. A. (1995b). Didactical innovations in geometry throgh the use of computer: Some results of a research on the plane isometries, in Mammana C. (a cura di) *pre-proc. ICMI Study on Geometry*, 166-170.

Malara N. A., in stampa, L'insegnamento della geometria: questini teoriche didattico metodologiche, in *Atti seconda scuola estiva per insegnanti ricercatori* *in didattica della matematica*, Viareggio (novembre 1995 febbraio 1996)

Mariotti A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspect, *Topologie Structurale/Structural Topology*, n. 18, 9-18.

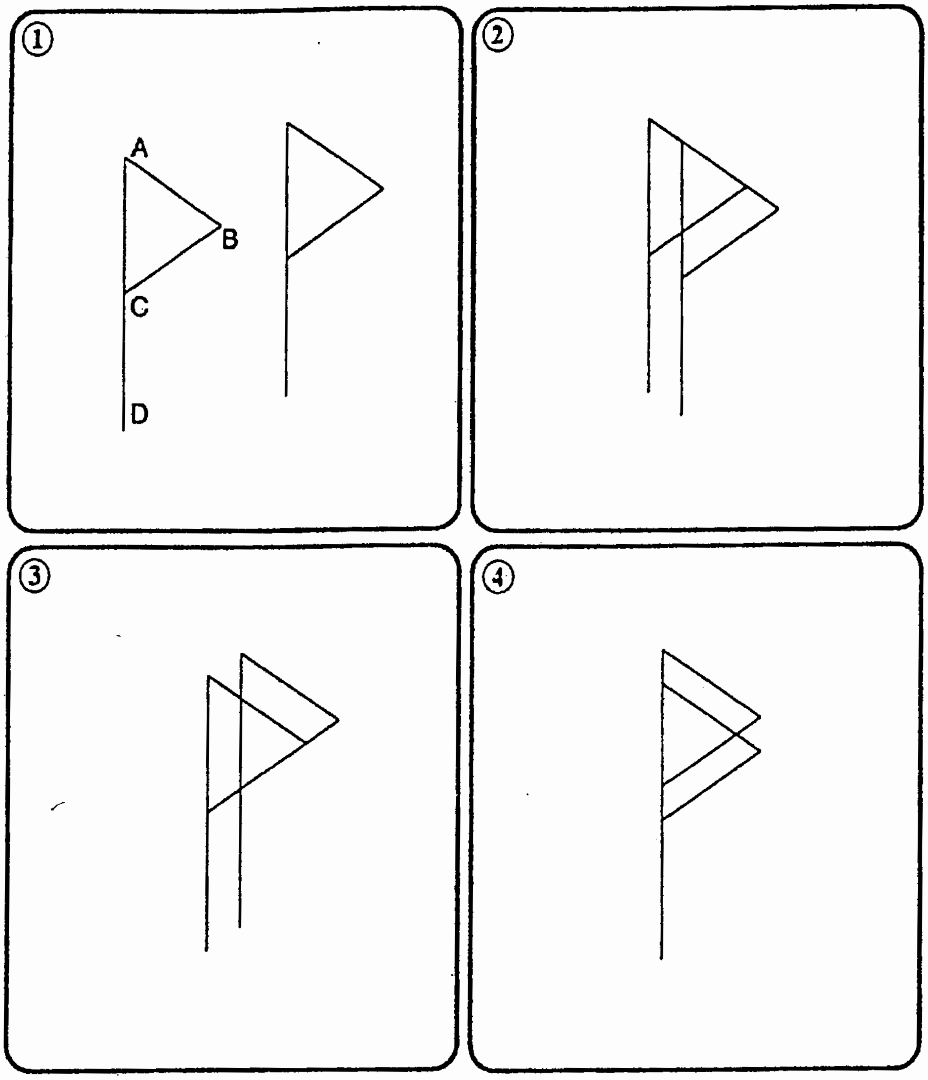
Nasser L., Sant'Anna N., Sant'anna A. P., (1995). Student assessment of an alternative approach to geometry, proc. PME 20, vol. 4, 59-67.

Pincella M. G. Malara N. A. (1995). Lo studio informale delle transformazioni e degli invarianti come approccio alla geometria nella scuola media, *La matematica e la sua Didattica*, n. 4, 446-462.Speranza F. (1988). Salviamo la geometria, *La Matematica e la sua didattica*, vol. 2, n. 2, 6-13

Speranza F. (1992). La "revoluzione" di F. Klein, in Speranza F. (ed), *Epistemologia della matematica: Seminari 1989-1991*, CNR TID, vol. 10, 269-286.

Apendice 1

Nombre ______________________________



En el recuadro (1) marca con rojo el segmento AB, con amarillo el segmento BC y con verde el segmento AD.

En los cuatro casos presentados en las figuras, marca de la misma manera cada una de las parejas de segmentos correspondientes e indica el vector de traslación.

Problemas

1) ¿Por qué motivo, según tu opinión, en algunos casos los segmentos correspondientes se sobreponen parcialmente?

____

____

2) ¿Si extiendes los diversos segmentos usando los mismos colores, qué puedes decir de las rectas que tienen el mismo color?

____

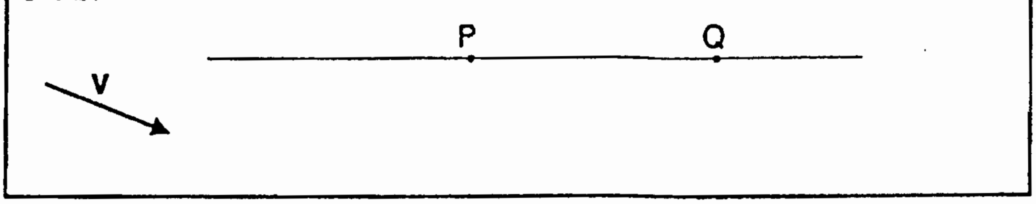
____

Apendice 1

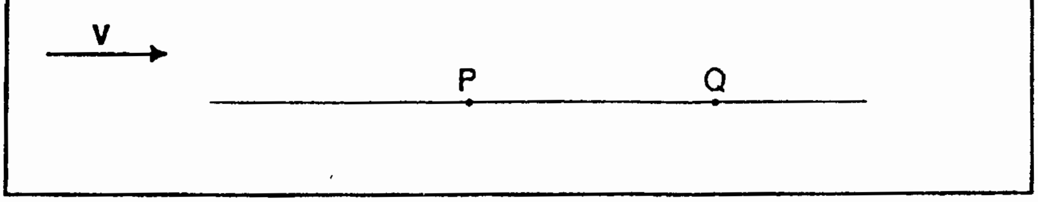
Nombre ______________________________

En cada uno de los siguientes casos, considera los puntos correspondientes a los puntos P y Q de la recta r, respecto a la traslación del vector v. Caracteriza la recta que corresponde a r en la traslación considerada.

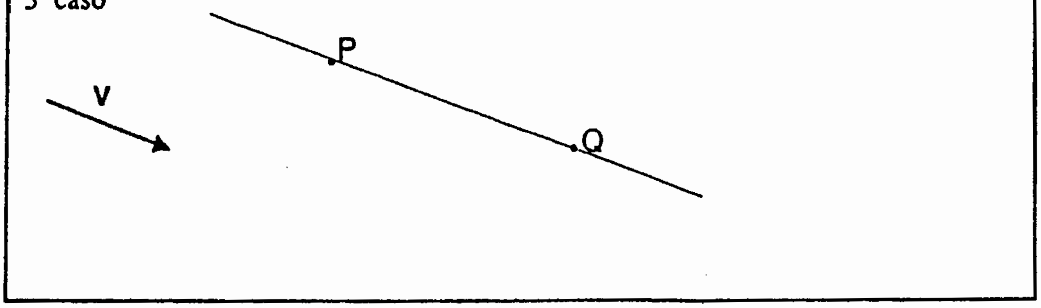
1° caso



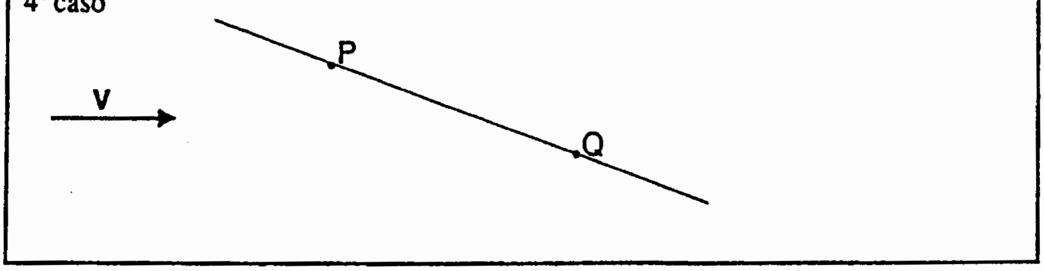
2° caso



3° caso



4° caso



¿Qué notas?

1° caso______________________________

2° caso______________________________

3° caso______________________________

4° caso______________________________

¿Qué puedes decir en general?

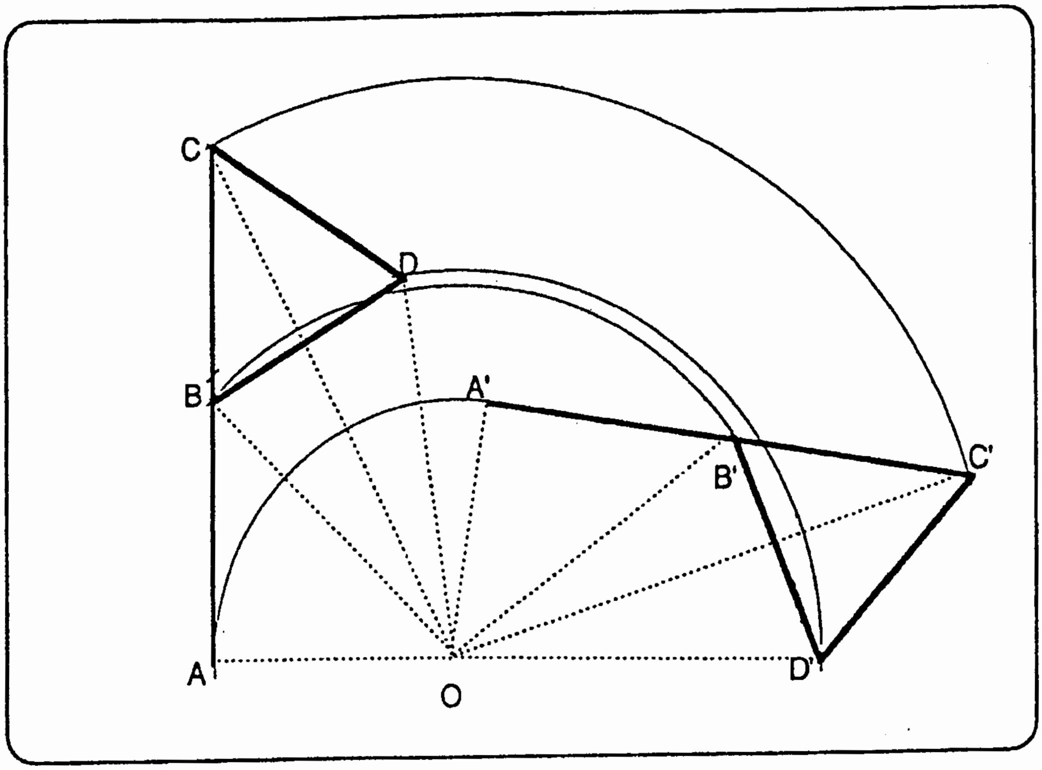
____

____

____

Apendice 2

Nombre ________________________________



Debes ilustrar a un amigo acerca de qué representa esta figura. Para ayudarlo a entender, marca con rojo los segmentos OD y OD OB'. Explícale qué representa esta figura y, en particular, qué representan los arcos y los ángulos indicados. También, explícale:

1) qué tienen en común las circunferencias a las cuales pertenecen los arcos AA′, BB′, CC′, DD′.

2) qué se puede notar confrontado entre ellos los arcos AA′, BB′, CC′, DD′ y confrontando entre ellos los ángulos AOA′, BOB′, COV′, DOD′ que los mismos han caracterizado.

____

____

____

____

____

____

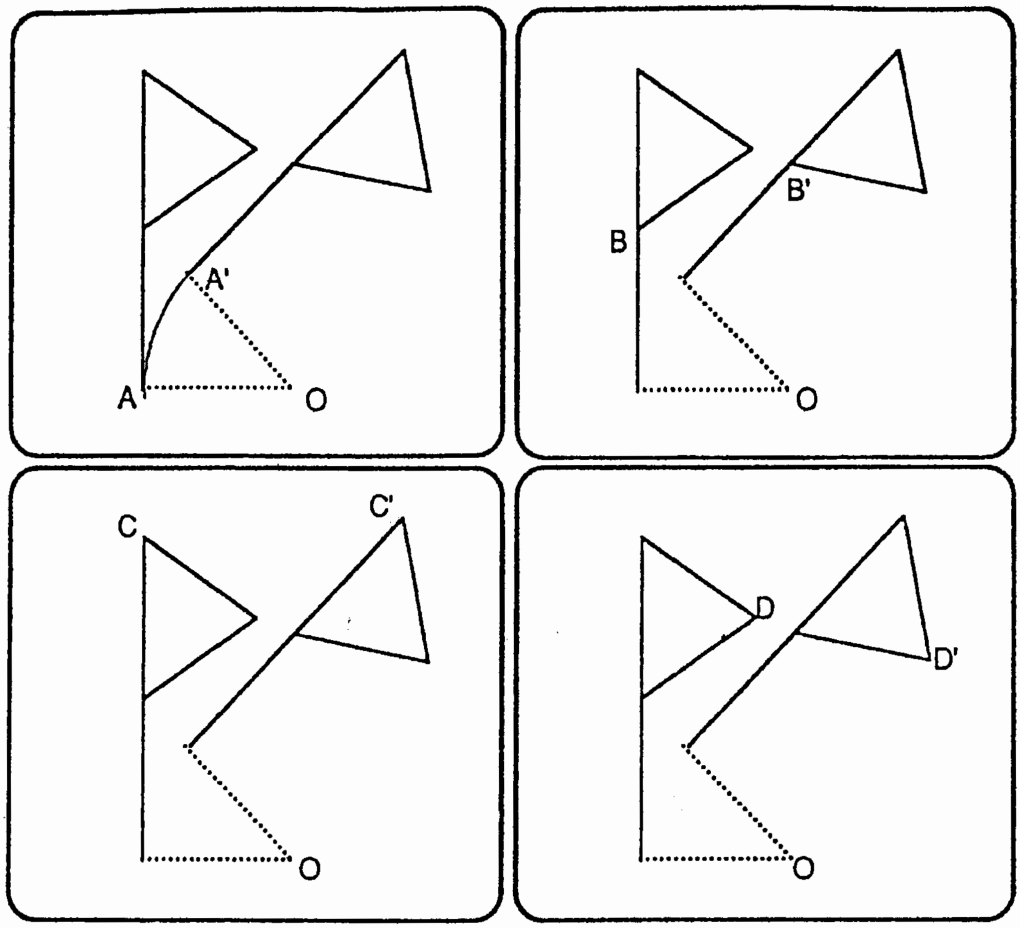
____

____

____

Apendice 2

Nombre ______________________________



Fijando la punta del compás en el punto O, traza-en los diversos casos- un arco que una cada punto indicado con su punto correspondiente.

Mediante un lápiz de color, une cada una de las parejas de puntos correspondientes con el punto O. ¿Qué representan los segmentos obtenidos?

____

____

Observa los arcos que has dibujado: ¿según tu opinión, son iguales? ¿Y los ángulos con vértice en O, caracterizados por las parejas de segmentos coloreados, según tu opinión, son iguales? Justifica tu respuesta:

____

____

____

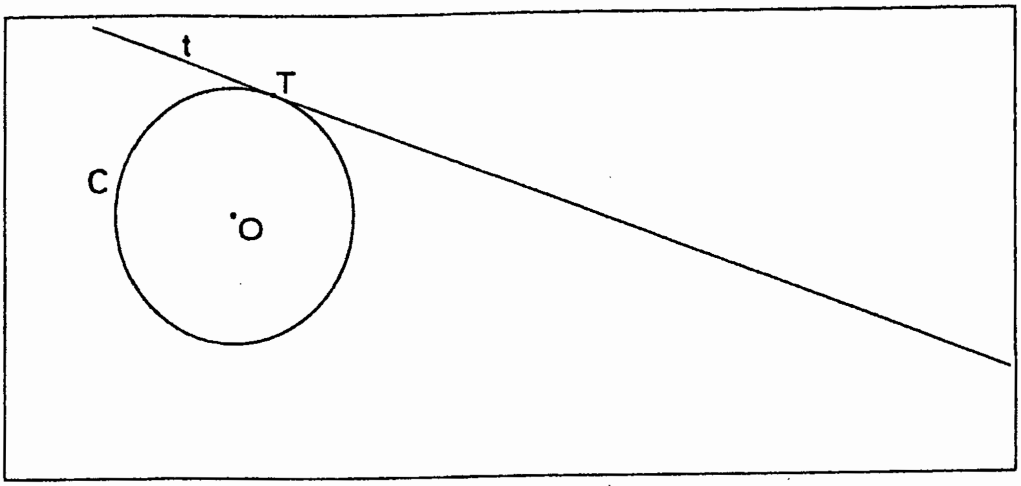
____

____

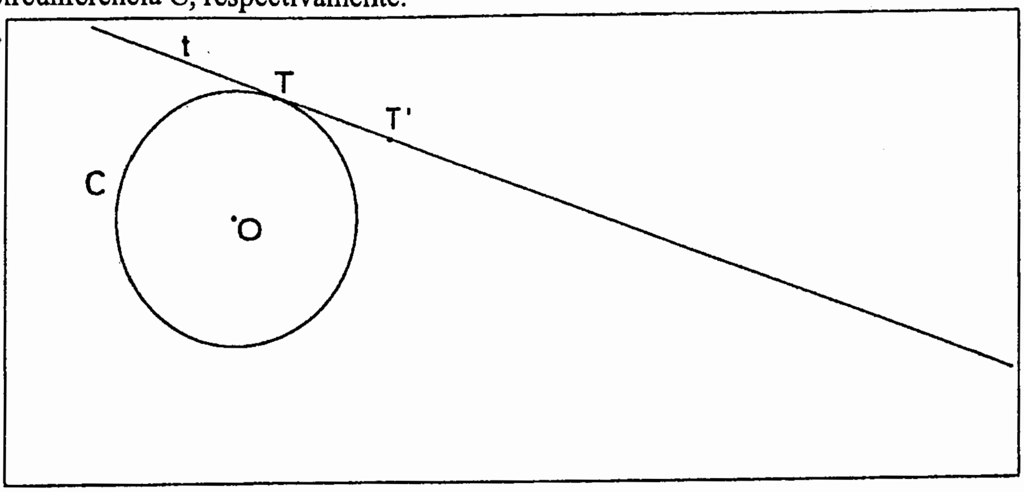
____

Apendice 3

Nombre ______________________________



1) A la figura se la ha de aplicar la rotación de 90° en sentido horario y con centro en O. Indica los puntos correspondientes de T′, t′ y C′ y del punto T, de la recta y de la circunferencia C, respectivamente.



2) A la figura se le ha de aplicar la traslación que lleva al punto T al punto T′. Indica los puntos correspondientes de la recta t, del punto O y de la circunferencia C.

En (1) y (2) has actuado sobre la misma figura, respectivamente con una rotación y una traslación.

¿En la traslación hay rectas o circunferencias unidas? ¿Y puntos unidos? Si la respuesta es sí, indícados:

____

____

¿En la traslación hay rectas o circunferencias unidas? ¿Y puntos unidos? Si la respuesta es sí, indícalos:

____

____

¿Qué puedes decir confrontando las dos situaciones?

____

____

Apendice 3

Nombre ______________________________

Aplica a cada figura la transformación indicada