Representación y resolución de problemas geométricos por profesores de matemáticas en formación

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 12 No. 2 Agosto 2000
pp. 5-26

Fecha de recepción: Julio, 1999

Luis Rico, Isidro Segovia
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España
María José González-López
Universidad de Cantabria, España
lrico@ugr.es

Resumen. *El presente trabajo muestra la diversidad de representaciones consideradas por un grupo de profesores de matemáticas en formación ante el enunciado de un problema geométrico elemental no convencional. Las estrategias movilizadas por estos profesores destacan por su dependencia del tipo de geometría que seleccionan para representar el problema. Las relaciones entre figuras geométricas elementales, cuadrados y triángulos, y las propiedades consideradas varían según el tipo de geometría elegida. Surgen diversas geometrías: sintética, de transformaciones, analítica, vectorial, métrica, dinámica, de lugares geométricos, automática. Cada uno de estos marcos establece unas relaciones diferentes y proporciona modos diversos de interpretar el enunciado, de seleccionar procedimientos y de ensayar heurísticos, es decir, de encontrar estrategias de resolución para problemas geométricos elementales.*

Abstract. *This paper shows the diversity of representations that a group of preservice teachers of mathematics considers when is faced with the statement of an elementary geometrical problem. The mobilized teachers' strategies underline its dependence from the kind of geometry selected to represent the problem. Relationships between elementary geometrical shapes (squares and triangles) and the correspondent properties change following the chosen geometry. Several kinds of geometry appear: synthetic, transformational, analytic, vectorial, metric, dynamic, automatic. Each one of these frames establishes its own relationships and provides several ways to interpret the statement, to select the procedures and to try the heuristics, that's say, to find the useful strategies to solve elementary geometrical problems.*

Introducción

En la década de los 80 el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) recomendó la resolución de problemas como objetivo prioritario para el currículum escolar de matemáticas (Krulik & Reys, 1980). Textos como *How to solve it* (Polya, 1945), recobraron su interés y, acordes con este planteamiento, se desarrollaron numerosos programas de investigación sobre el currículum de matemáticas (Charles & Silver, 1989). Debido a que la resolución de problemas era reconocida como meta primordial de la enseñanza de las matemáticas los investigadores en educación matemática enfocaron su atención sobre el estudio de la resolución de problemas de matemáticas en los sistemas educativos (Schoenfeld, 1985; Puig, 1993). Este interés hizo proliferar los trabajos para delimitar qué es un problema y caracterizar métodos de resolución; se publicaron estudios sobre tipos de problemas, tipos de resolutores y sobre las estrategias y heurísticos utilizados. Desde entonces, la resolución de problemas ha informado multitud de proyectos, se ha convertido en uno de los organizadores curriculares (Rico, 1997) y ha sido integrado en investigaciones sobre formación de profesorado (Blanco, 1991, Carrillo, 1996; Contreras, 1998).

La enseñanza sobre resolución de problemas obliga al profesor a considerar nuevas opciones metodológicas y de evaluación. El profesor que enseña de manera sistemática mediante la resolución de problemas tiene posibilidad de analizar, comparar y clasificar los sistemas de representación y las estrategias que utilizan los alumnos para resolver ciertos tipos de problemas en un determinado nivel y utilizar este conocimiento para orientar el trabajo posterior en el aula (Fernández, 1997). Esta información permite determinar la comprensión de los alumnos sobre el contenido en estudio y, como consecuencia, permite al profesor asesorar a sus alumnos, ayudarles en la construcción de su conocimiento y organizar las enseñanzas posteriores.

Aunque el término problema tiene un amplio campo semántico, los expertos reconocen que todas las tareas no son igualmente adecuadas para promover un pensamiento matemático de calidad; la elección de una buena cuestión es parte del éxito en cualquier estudio sobre resolución de problemas. La geometría del plano constituye un ámbito donde encontramos enunciados especialmente significativos. Concretamente, hay problemas de enunciado sencillo, adaptables a distintos niveles formativos, que hacen que los alumnos pongan en juego un amplio abanico de estrategias de resolución y de heurísticos. En consecuencia, proporcionan al profesor información interesante sobre cómo trabajar en el aula y desarrollar el conocimiento matemático. Este es el caso del problema geométrico que planteamos en la Sección 1, basado en una construcción geométrica sobre el cuadrado. En la Sección 2 ofrecemos una clasificación de la amplia variedad de estrategias que tres grupos de alumnos de cursos de formación inicial de profesores de secundaria han utilizado para su resolución. La clasificación de dichas estrategias ha sido realizada atendiendo al ámbito de conocimientos y técnicas matemáticas utilizados, según lo cual hemos obtenido estrategias basadas en técnicas de geometría sintética, estrategias basadas en transformaciones geométricas, estrategias que plantean el problema en términos de geometría analítica y estrategias que utilizan técnicas de geometría métrica; además contemplamos el problema desde la perspectiva de los lugares geométricos, lo generalizamos, utilizamos técnicas computacionales para analizarlo y estudiamos una versión del problema recíproco; terminamos la clasificación presentando algunas estrategias fallidas. Destacamos la gran variedad de maneras de resolver que se han conseguido y resaltamos la posibilidad de combinarlas entre sí, dejando abierta la puerta a nuevos procedimientos. En la Sección 3 enumeramos una serie de heurísticos que han sido observados en las producciones del grupo de profesores en formación estudiado. Terminamos con una serie de reflexiones generales y conclusiones sobre los resultados obtenidos (Secciones 4 y 5): el contexto en que se planteó el problema, algunas características significativas de cada estrategia y ciertas actitudes de los alumnos considerados ante la resolución de problemas. Realizamos estas reflexiones con el propósito de que puedan ayudar a adaptar el problema a la enseñanza de los conceptos implicados, en distintos contextos o niveles formativos.

1. Un problema sobre el cuadrado

El cuadrado es una figura geométrica básica que, no obstante su sencillez, proporciona una gran riqueza conceptual y procedimental. La forma cuadrada se observa en la naturaleza, en la arquitectura, en el arte, en el deporte, y en muchos otros contextos, como ponen de manifiesto las más de 300 ilustraciones sobre el cuadrado que encontramos en Munari (1999) o la serie de cuadros en Homenaje al cuadrado de J. Albers (1985).

Desde el punto de vista de las matemáticas, el cuadrado sirve de referencia para presentar aspectos variados: así es utilizado en Gagnaire (1973) como hilo conductor para introducir la geometría lineal (aplicaciones lineales, isometrías, grupo de las simetrías del cuadrado), aspectos de trigonometría; para explicar la geometría vectorial de IR^2, una vez caracterizado el cuadrado como modelo local y acotado del plano, así como aspectos de geometría métrica plana.

En el ámbito de la enseñanza de las matemáticas diversos autores recogen la amplia variedad de usos del cuadrado: Coriat y otros (1989) lo utilizan como referente en un ámbito de resolución de problemas, observando que el cuadrado aparece, desde sus primeras concepciones intuitivas en la etapa infantil, en las que se manipula como simple dibujo, hasta etapas más avanzadas en las que proporciona soporte para el estudio de propiedades geométricas más elaboradas, como el paralelismo, la perpendicularidad, los ángulos o el estudio de las simetrías; sin olvidar el papel fundamental del cuadrado como unidad de medida de superficie. A partir del cuadrado y otras figuras, (como el triángulo y el círculo) podríamos reconstruir la mayoría de los tópicos de la geometría escolar.

En el ámbito de la geometría plana elemental encontramos numerosos problemas que involucran al cuadrado, y que, a pesar de su planteamiento sencillo, sorprenden por la riqueza y variedad de estrategias de resolución con que pueden ser afrontados. Un ejemplo significativo sobre el que desarrollamos nuestro trabajo es el problema siguiente, que podemos encontrar enunciado en Wells (1988) o en Coriat y otros (1989):

Sobre cada uno de los lados de un cuadrado se construyen triángulos rectángulos iguales, de hipotenusa igual al lado del cuadrado, que se colocan alternativamente "hacia adentro" y "hacia afuera" (como indica la Figura 1). Demostrar que los cuatro vértices de los triángulos que no son del cuadrado se encuentran alineados.

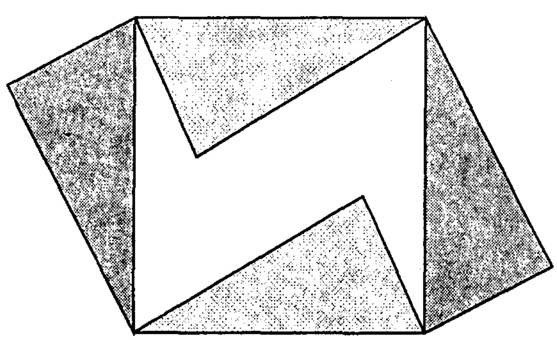

Figura 1.

Este problema ha sido propuesto durante tres años consecutivos a alumnos de cursos de formación inicial de profesores de secundaria (Licenciatura de Matemáticas), en el contexto de una asignatura de Didáctica de la Matemática, en el bloque correspondiente a la resolución de problemas. El problema se propuso entregando a cada alumno un folio que contenía la Figura 1 y se explicó verbalmente el enunciado del problema.

No se aportó ningún tipo de pauta ni indicación que orientase a los alumnos a usar una técnica concreta, con el fin de que tuvieran total libertad y manifestasen el mayor número posible de estrategias de resolución. Tampoco se dieron datos sobre posibles medidas de magnitudes (lados o ángulos) ni se indicó ningún ámbito en que el problema hubiese aparecido. Los alumnos se llevaron el problema a casa para su resolución y entregaron sus resultados por escrito al día siguiente; no se trató de una prueba que fuera a ser calificada en el contexto de una asignatura.

2. Clasificación de estrategias

El término estrategia es ampliamente usado en distintas actividades matemáticas, en particular, en el ámbito de la resolución de problemas. Desde las acepciones del término para la educación matemática establecidas por Bell (1976) en su tesis, han sido varios los autores que lo han recogido y matizado, siendo su fundamento los procedimientos o modos de actuación que conducen a la resolución de un problema (véase, por ejemplo, el informe Cockcroft (1985, p. 87) o Rico y otros (1990, p. 9)).

En las producciones realizadas por los estudiantes para profesor en la resolución del problema anterior hemos identificado una gran variedad de estrategias que han sido clasificadas según las técnicas matemáticas empleadas, obteniendo los apartados que exponemos a continuación, donde comentamos las características más significativas observadas en el proceso y distinguimos los distintos matices encontrados en los argumentos propuestos.

A. Estrategias de geometría sintética

Englobamos en este apartado aquellas soluciones del problema a las que se llega realizando nuevas construcciones geométricas a partir de la figura original para completarla o ampliarla, y después emplear sobre ellas razonamientos deductivos. En bastantes ocasiones algunas de las propiedades fundamentales que debían ser deducidas o razonadas han sido consideradas por los alumnos como evidentes o han sido justificadas apelando al dibujo con frases como *"observamos en la figura que ..."*.

Las relaciones de paralelismo y perpendicularidad que se dan entre las rectas que contienen a los catetos de los triángulos rectángulos (véase la Figura 2) son un buen ejemplo de esto. Esta propiedad, que justificamos a continuación, ha sido utilizada a discreción, sin mencionarla explícitamente, en las soluciones:

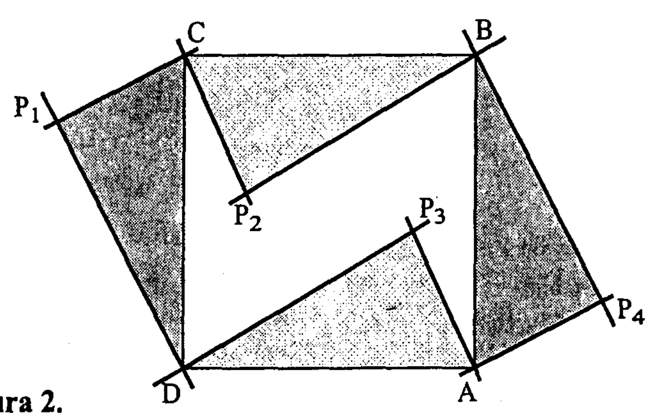

Figura 2.

Denotamos cada recta por un par de puntos sobre ella. Las rectas P_1C, P_2B, P_3D y P_4A son paralelas entre sí ya que, tomadas dos a dos, se encuentra fácilmente una secante común que forma con ellas ángulos alternos-internos iguales; así, por ejemplo, P_2C es secante común a P_1C y P_2B, y forma con ellas ángulos rectos. Análogamente, las rectas P_1D, P_2C, P_3A y P_4B son también paralelas. Además, cualquier recta del conjunto $\{P_1C, P_2B, P_3D, P_4A\}$ es perpendicular a cualquier recta de $\{P_1D, P_2C, P_3A, P_4B\}$, como es obvio tras los paralelismos anteriores y teniendo en cuenta que algunas de dichas parejas ya son perpendiculares, por hipótesis.

Deducimos directamente de estas propiedades que, prolongando catetos de los triángulos rectángulos, conseguimos completar algunas figuras geométricas cuyas componentes estaban parcialmente dadas en la figura original; estas figuras geométricas son las marcadas en trazo grueso en las Figuras 3.1 y 3.2, y cuentan a los puntos P_i entre sus vértices.

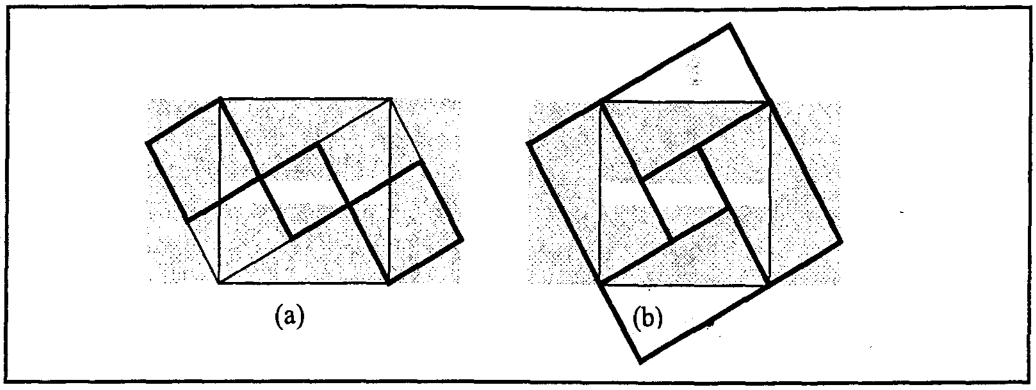

Figura 3.1

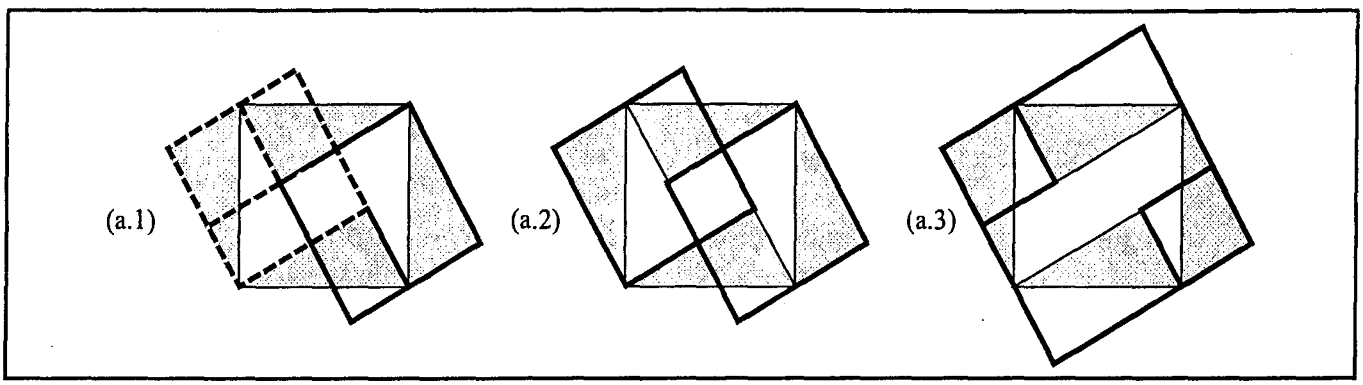

Figura 3.2

Cada una de estas construcciones dará lugar a los tipos de argumentos propuestos por los alumnos que enumeramos a continuación, argumentos que comparten entre sí la justificación de la alineación de los puntos por su pertenencia a diagonales de cuadrados.

- **Argumento A.1:** Los tres *cuadrados consecutivos* de la Figura 3.1(a) comparten un vértice y tienen sus lados paralelos entre sí, por tanto sus diagonales respectivas, cuyos extremos son los puntos P_i, están sobre la misma recta.

- **Argumento A.2**: La disposición de cuatro rectángulos iguales en la forma indicada en la Figura 3.1(b) determina un cuadrado exterior y otro interior, de *lados paralelos* y con el *mismo centro*, por lo que tienen su diagonal sobre la misma recta.

- **Argumento A.3**: En la Figura 3.2 tenemos distintos ejemplos de lo que llamamos *cuadrados anidados*, es decir, pares de cuadrados que comparten un vértice y (parte de) los lados correspondientes. Dos cuadrados anidados comparten la diagonal. Utilizando esta propiedad obtenemos la alineación de los cuatro puntos considerados en cualquiera de los casos (a.1), (a.2) y (a.3).

La pertenencia de las diagonales de estos cuadrados a la misma recta puede razonarse apelando a una propiedad geométrica fundamental que, con frecuencia, se asume como evidente: *los puntos de la diagonal de un cuadrado equidistan de los lados correspondientes del mismo; recíprocamente, si un punto equidista de dos lados consecutivos de un cuadrado, entonces pertenece a la (recta que contiene a la) diagonal del mismo.*

Este tipo de estrategias que completan y amplían la figura dada pueden enmarcarse en la línea de pensamiento de la Gestalt, en la que un fundamento esencial en el proceso de resolución de un problema es *completar* una situación incompleta desde una *perspectiva global*; en Wertheimer (1991) se pone de manifiesto que la realización de operaciones de "*agrupamiento, reorganización*, y *estructuración* de división en subtotales", sin perder la perspectiva global de las figuras, es una operación característica del *pensamiento productivo*; en esta filosofía la argumentación no es una sucesión inconexa de operaciones, sino que conforma una *línea de pensamiento coherente*. En nuestro problema concreto, completar total o parcialmente la figura dada, en la intención de razonar después parcialmente sobre la coincidencia o la alineación de diagonales, indica este punto de vista global desde el que contemplar el proceso que, posteriormente, se resuelve en subproblemas geométricos más simples y de solución más sencilla.

Este tipo de razonamientos ha sido utilizado por algo más de la mitad de los alumnos con los que hemos trabajado. Requieren sólo conocimientos básicos de geometría, que se imparten en el primer ciclo de Secundaria Obligatoria.

B. Estrategias de transformaciones geométricas

Agrupamos bajo este epígrafe aquellas estrategias en las que se observa la existencia de transformaciones geométricas que relacionan ciertas partes de la figura con otras. Conviene destacar que, en este tipo de razonamientos, los alumnos sienten escasa o nula necesidad de demostrar sus afirmaciones; el hecho de *percibir en un dibujo* que dos puntos son simétricos o que dos figuras son homotéticas ha hecho que en la mayoría de los casos no se razone la existencia de una simetría ni de una homotecia, ni se determinen sus elementos constituyentes. En estos casos parece que se ignoran los datos del problema y domina el efecto visual que la figura dada produce. Este tipo de estrategias las han seguido una cuarta parte de los alumnos, aproximadamente. Los conocimientos implicados se imparten en el segundo ciclo de Secundaria Obligatoria.

B.1 Homotecia

Consideremos el punto O de intersección de las rectas AD y P_3P_4 (según la notación de la Figura 4), y la homotecia de centro O y razón r: $= \overline{DP_3}/\overline{AP_4}$. Observamos que los triángulos ΔAP_3P_4 y ΔDP_1P_3 son semejantes, siendo r su razón de semejanza, ya que son rectángulos e isósceles. De la alineación de los tres puntos O, A, D y de O, P_3, P_4, se deduce, por la homotecia, la alineación de los terceros vértices de los triángulos, es decir, de O, P_3 y P_1. Por tanto P_1, P_3 y P_4 están alineados. Análogamente se prueba la alineación de P_1, P_2 y P_4, y, en definitiva, de los cuatro puntos considerados.

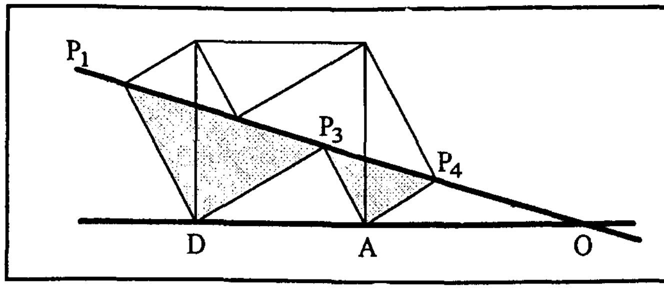

Figura 4

B.2 Simetría central

Una simetría central con centro G en el centro del cuadrado original transforma uno de los triángulos exteriores en el otro triángulo exterior y uno de los triángulos interiores en el otro triángulo interior (véase la Figura 5). En particular, transforma el punto P_2 en P_3, y el punto P_1 en P_4. Si se prueba que los puntos G, P_1 y P_2 están alineados, se concluye por la simetría, que los cuatro puntos P_i están alineados.

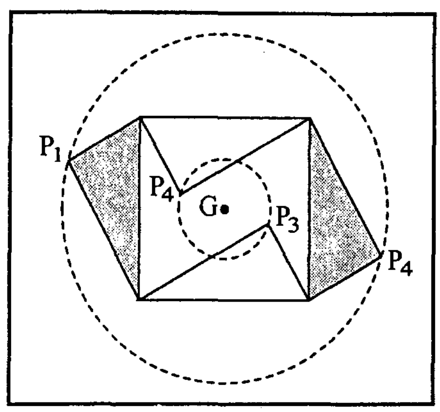

Figura 5

Esta idea parece muy intuitiva, pero su demostración no la ha completado ningún estudiante. En lo que sigue aportamos una posible solución.

Según la notación de la Figura 6, (donde hemos trazado las diagonales del cuadrado y H denota al punto de corte entre el cateto P_2B y una diagonal) tenemos que:

a) Los triángulos ΔP_2HC y ΔHGB son semejantes, ya que son rectángulos y tienen otro ángulo igual (el de vértice en H),

b) Los triángulos ΔP_2GH y ΔHBC son semejantes, ya que tienen igual el ángulo de vértice H y los lados en que éste se apoya son proporcionales por (a),

c) deducimos que el ángulo HP_2G (de vértice en P_2) mide 45°,

d) Por otro lado el ángulo CP_2P_1 mide 45°, ya que el segmento P_1P_2 es diagonal del correspondiente cuadrado.

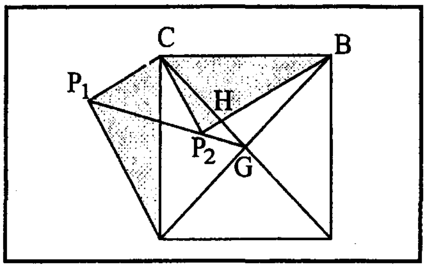

Figura 6

Concluimos que el ángulo $GP_2P_1 = HP_2G + BP_2C + CP_2P_1$ mide 45° + 90° + 45° = 180°, y así los puntos G, P_2 y P_1 están alineados.

B.3 Composición de dos giros

También algunos alumnos han obtenido la simetría central anterior como producto de dos giros de 90°, centrados en vértices consecutivos del cuadrado, tal como indica la Figura 7:

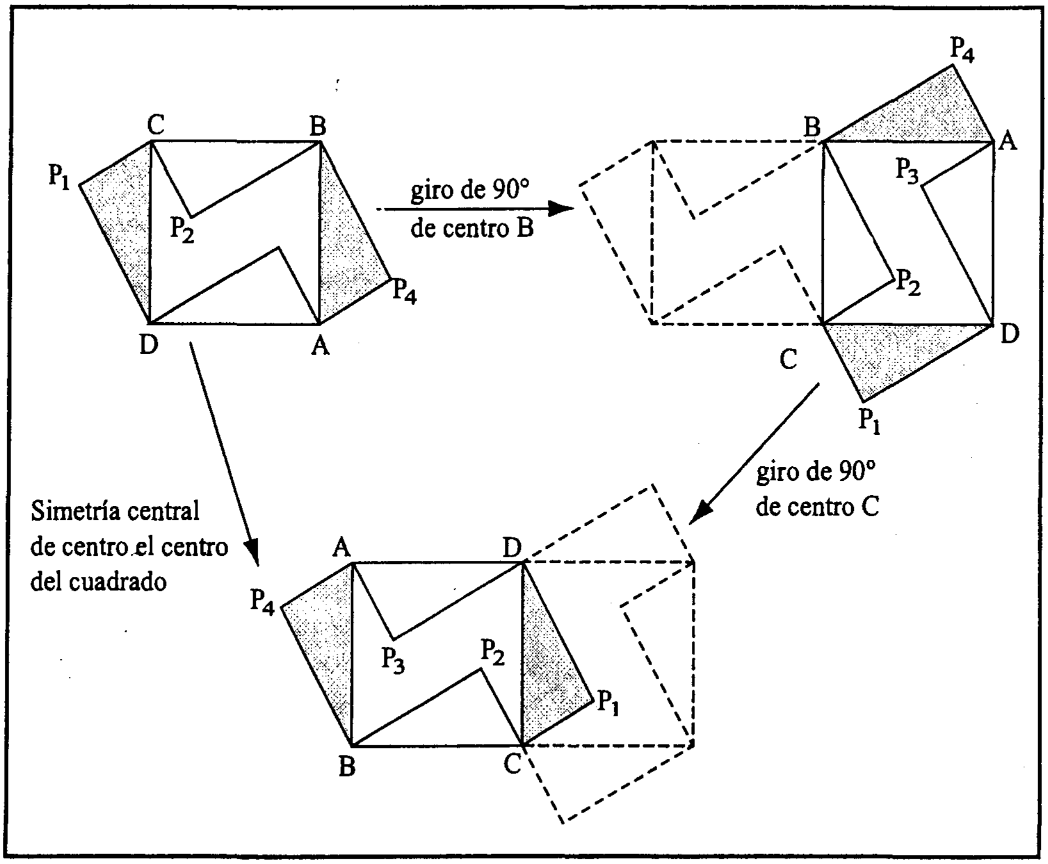

Figura 7

B.4 Simetría axial

Los dos cuadrados iguales marcados en trazo grueso en la figura contigua (Figura 8), comparten un cuadrado en una de sus "esquinas", por tanto son simétricos respecto del eje de simetría que lleva a los vértices opuestos de dicho cuadrado compartido. Esta simetría transforma P_2 en P_3 y P_1 en P_4. Además la recta que pasa por P_1 y P_2 es perpendicular al eje de simetría ya que la diagonal del cuadrado grande contiene a P_1 y P_2, coincide con la diagonal del cuadrado pequeño y ésta es perpendicular al eje de simetría.

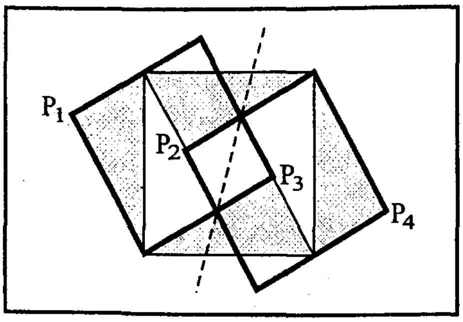

Figura 8

C. Estrategias de geometría analítica

Bajo este epígrafe colocamos las soluciones en las que el planteamiento del problema pasa por establecer un sistema de referencia y determinar las coordenadas de los puntos considerados para razonar con ellas. Con posterioridad a este planteamiento las estrategias de resolución han sido, en unos casos, puramente algebraicas y, en otros, geométricas. Menos de la cuarta parte de los alumnos ha seguido este tipo de argumentos y es de destacar que en ellos se han encontrado menos errores que en los correspondientes a construcciones geométricas y se ha conseguido argumentar el proceso de solución hasta el final (es un ejemplo de "*la vía lenta pero segura de la operatoria con expresiones algebraicas, en coordenadas, en los problemas geométricos*" Recio (1998, p. 24)).

Estructuralmente, los argumentos que siguen han estado caracterizados por los tres aspectos siguientes, siendo los dos primeros condicionantes de la dificultad de los cálculos posteriores:

1. La habilidad de los alumnos para situar sobre el dibujo el sistema de referencia, que se ha distinguido por su colocación:
   - "fuera" de la figura dada,
   - sobre un vértice del cuadrado dado, o
   - sobre un vértice de un triángulo-rectángulo.
2. Las magnitudes elegidas en la construcción para escribir las coordenadas en función de las medidas de dichas magnitudes, a saber:
   - longitudes de los catetos,
   - longitudes de la hipotenusa y de un cateto, y medida de uno de los ángulos,
   - longitud de la hipotenusa y vector v en la dirección de uno de los puntos P_i.
3. El tipo de argumento usado para comprobar que cuatro puntos dados por sus coordenadas están alineados, contabilizándose las siguientes posibilidades:
   - vectorial: los vectores formados por cada par de puntos tienen la misma dirección,

- analítico: la ecuación de la recta que pasa por dos de los puntos es satisfecha por los otros dos puntos,
- algebraico: el producto mixto de los correspondientes vectores (tomados de tres en tres) se anula.

La combinación de cada una de las posibilidades indicadas en 1, 2 y 3 da lugar a estrategias variadas, de las que ofrecemos a continuación un extracto. Los conocimientos necesarios para abordar este tipo de estrategias se imparten en Bachillerato.

Argumento C.1: El alumno que ha propuesto la siguiente solución ha comenzado por girar el dibujo dado, de forma que los ejes del sistema de referencia que desea colocar queden en posición canónica (abscisa horizontal-ordenada vertical), con el origen en un punto fuera de la construcción dada, tal como se indica en la Figura 9. De esta forma, y utilizando las longitudes a y b de los catetos del triángulo rectángulo, las coordenadas de los puntos P_i, escritas en la figura, son especialmente sencillas: (0, a + b), (a, b), (b, a) y (a + b, 0).

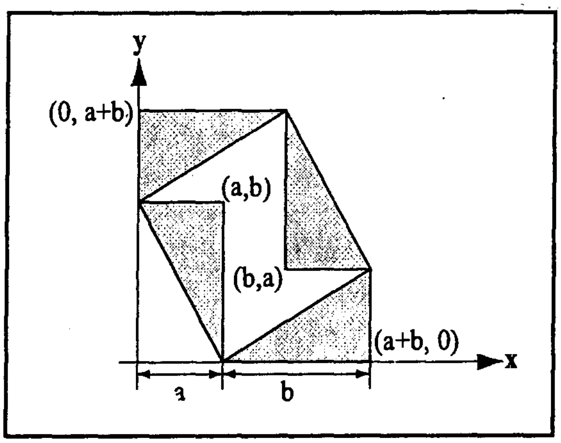

Figura 9

Una vez que tenemos los puntos así descritos se justifica su alineación observando que los tres vectores v_i que se forman con origen en el punto (0, a + b) y extremos en cada uno de los otros tres puntos, es decir,

$$v_1: = (a, b) - (0, a + b) = (a, -a),$$
$$v_2: = (b, a) - (0, b + a) = (b, -b),$$
$$v_3: = (a + b, 0) - (0, a + b) = (a + b, -(a + b))$$

tienen la misma dirección y el mismo origen, por lo que sus extremos están alineados.

Argumento C.2: El alumno que propone la siguiente estrategia coloca el origen del sistema de referencia en un vértice del cuadrado original y los ejes a lo largo de dos lados (véase la Figura 10); utilizando la medida q de uno de los ángulos del triángulo rectángulo, el cateto b y la hipotenusa L, obtiene las expresiones siguientes:

$$P_1 = (-b\ \mathrm{sen}(q), b\cos(q))$$
$$P_2 = (L - b\cos(q), L - b\ \mathrm{sen}(q))$$
$$P_3 = (b\cos(q), b\ \mathrm{sen}(q))$$
$$P_4 = (L + b\ \mathrm{sen}(q), L - b\cos(q)),$$

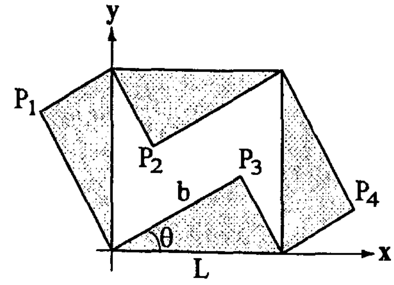

Figura 10

A partir de las cuales sigue un razonamiento algebraico, calculando el valor del producto mixto de los vectores correspondientes:

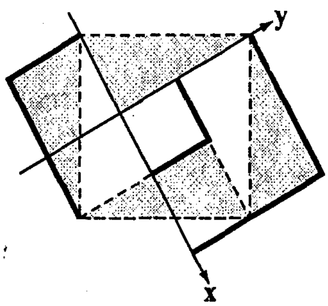

Figura 11

$$\begin{vmatrix} -b\,\mathrm{sen}(\theta) & b\cos(\theta) & 1 \\ L-b\cos(\theta) & L-b\,\mathrm{sen}(\theta) & 1 \\ b\cos(\theta) & b\,\mathrm{sen}(\theta) & 1 \end{vmatrix} = 2b^2 - 2bL\cos(\theta)$$

$$\begin{vmatrix} L-b\cos(\theta) & L-b\,\mathrm{sen}(\theta) & 1 \\ b\cos(\theta) & b\,\mathrm{sen}(\theta) & 1 \\ L+b\,\mathrm{sen}(\theta) & L-b\,\mathrm{sen}(\theta) & 1 \end{vmatrix} = -2b^2 + 2bL\cos(\theta)$$

expresiones que son iguales a 0, ya que cos(q) = b/L.

Argumento C.3: En este caso el alumno coloca el origen del sistema de referencia en un vértice de uno de los triángulos rectángulos "interiores", y los ejes a lo largo de los catetos (Figura 11). Posteriormente hace un razonamiento métrico observando que los puntos P_i equidistan de los ejes (se forman los cuadrados, marcados en trazo grueso en la figura); concluye argumentando que los puntos están alineados sobre la recta y = x por ser vértices de dichos cuadrados.

Argumento C.4: El siguiente alumno comienza rotando el dibujo y coloca el origen del sistema de referencia sobre uno de los vértices del cuadrado original, y los ejes a lo largo de sus lados. Utiliza un vector unitario $v = (v_1, v_2)$ en la dirección de OP_4 y la longitud L de la hipotenusa, para escribir en función de estos datos las ecuaciones de todas las rectas paralelas y perpendiculares que intervienen en la construcción. Calcula así las cuatro rectas paralelas L_i (véase la Figura 12) y las perpendiculares correspondientes Rj:

$$L_1: \quad \frac{x-L}{v_1} = \frac{y-L}{v_2} \qquad R_1: \quad \frac{x}{-v_2} = \frac{y-L}{v_1}$$

$$L_2: \quad \frac{x-L}{v_1} = \frac{y}{v_2} \qquad R_2: \quad \frac{x-L}{-v_2} = \frac{y-L}{v_1}$$

$$L_3: \quad \frac{x}{v_1} = \frac{y-L}{v_2} \qquad R_3: \quad \frac{x}{-v_2} = \frac{y}{v_1}$$

$$L_4: \quad \frac{x}{v_1} = \frac{y}{v_2} \qquad R_4: \quad \frac{x-L}{-v_2} = \frac{y}{v_1}$$

Los puntos P_i quedan descritos como intersecciones de las parejas correspondientes de rectas, en función de v y L:

$$P_1 = L_1 \cap R_1 = (Lv_2^2, L(1 - v_1v_2))$$

$$P_2 = L_2 \cap R_2 = (L(1 + v_1v_2), Lv_2^2)$$

$$P_3 = L_3 \cap R_3 = (-Lv_1v_2, Lv_1^2)$$

$$P_4 = L_4 \cap R_4 = (Lv_1^2, Lv_1v_2)$$

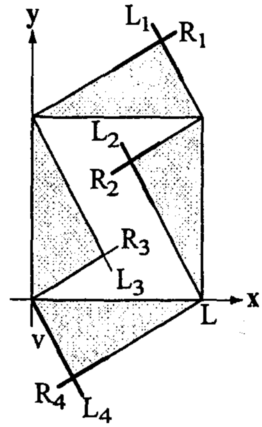

Figura 12

Concluye el proceso calculando la expresión de la recta que pasa por dos de ellos (por ejemplo $(x + Lv_1v_2)(v_2 - v_1) = (y - Lv_1^2)(v_1 + v_2)$ pasa por los puntos P_3 y P_4) y verificando que los otros dos puntos también satisfacen dicha ecuación.

Argumento C.5: Colocando el origen del sistema de referencia sobre uno de los vértices de uno de los triángulos rectángulos (por ejemplo, P_3), y situando los ejes de forma que el de ordenadas pase además por otro de los puntos (por ejemplo P_2), tal como indica la Figura 13, el problema se reduce a probar que las abscisas de los otros dos puntos (P_1 y P_4) también son 0. En efecto, los triángulos ΔAP_3P_4 y ΔDP_1P_3 son isósceles rectángulos, por lo que en ambos el ángulo de vértice P_3 es de 45°. Utilizando el ambiente LOGO, con la tortuga situada en el origen de coordenadas, orientada hacia el eje **y**, podemos comprobar que los desplazamientos del tipo:

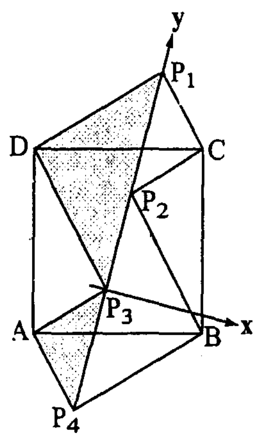

Figura 13

Gira Izquierda 45 Avanza X Gira Derecha 90 Avanza X

(que describen un triángulo isósceles rectángulo, en este caso DDP_1P_3) vuelven a colocar a la tortuga en el eje y, es decir, con abscisa 0; (análogamente reemplazando 45° por 135° obtenemos el triángulo DAP_3P_4).

D. Estrategias de geometría métrica

En el método siguiente, que ha sido propuesto por un alumno, el razonamiento geométrico permite deducir (Figura 14) que:

1. los puntos P_1 y P_2 están en vértices opuestos de un cuadrado de lado a,
2. los puntos P_1 y P_3 están en vértices opuestos de un cuadrado de lado b,
3. los puntos P_2 y P_3 están en vértices opuestos de un cuadrado de lado b – a, (suponiendo. sin perder generalidad, que b es mayor o igual que a);

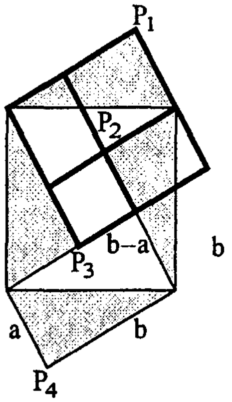

Figura 14

debido a esto, se observa que:

$$d(P_1, P_2) = a\sqrt{2}$$
$$d(P_2, P_3) = (b - a)\sqrt{2}$$
$$d(P_1, P_3) = b\sqrt{2}$$

es decir, que $d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$. Del hecho de que se iguale la desigualdad triangular se deduce que los puntos P_1, P_2 y P_3 están alineados; análogamente se procedería para probar que P_2, P_3 y P_4 también están alineados, de donde se sigue la alineación de los cuatro puntos.

E. Lugares geométricos

Pasamos a presentar algunas de las estrategias que surgen de un planteamiento dinámico basado en la idea de lugar geométrico: consideración clásica de los lugares geométricos, construcción, demostración automática y recíproco; sólo la primera de ellas fue esbozada por algunos alumnos.

E.1 Planteamiento clásico

Algunos alumnos han observado que los puntos P_i pertenecen a semi-circunferencias centradas en los puntos medios de los lados de los cuadrados, de radio la mitad del lado (Figura 15(a)), lo que les ha inducido a indagar qué ocurre al "mover" dichos puntos a lo largo de las semicircunferencias. Así han estudiado algunos casos particulares en posición límite, como los dos siguientes:

1. que los puntos P_i coincidan, de dos en dos, con un par de vértices opuestos del cuadrado, en cuyo caso tenemos sólo dos puntos (Figura 15(b)),
2. que los catetos del triángulo rectángulo sean iguales, en cuyo caso coinciden los dos puntos P_i de los triángulos interiores (Figura 15(c)).

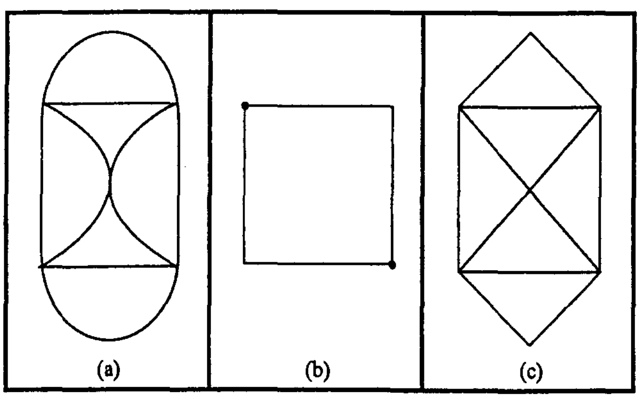

Figura 15

E.2 Construcción geométrica

Siguiendo con la perspectiva dinámica observamos que a partir del cuadrado original y de un punto cualquiera de una circunferencia centrada en el punto medio de un lado del cuadrado y radio la mitad del mismo, (pongamos el punto P_1 en la circunferencia C_1), podemos trazar las paralelas y perpendiculares correspondientes (como se indica en la Figura 16) y obtener la construcción dada originalmente en el problema. Con este planteamiento el lugar geométrico de cada uno de los otros tres puntos (P_2, P_3 y P_4) cuando P_1 recorre su circunferencia, es otra circunferencia centrada en cada uno de los otros lados del cuadrado.

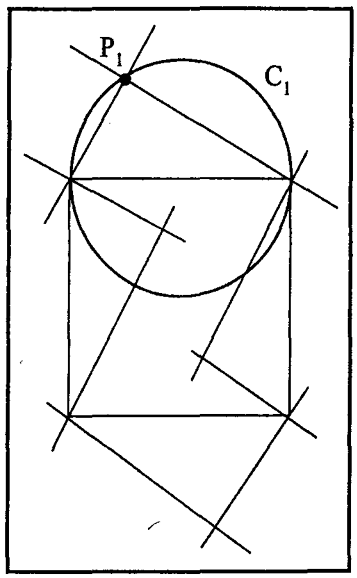

Figura 16

La comprobación de estos argumentos resulta especialmente cómoda usando algún software de Geometría Dinámica (por ejemplo Cabri-Géomètre (http://www.cabri.net)), donde podemos realizar esta construcción y comprobar, experimentalmente, que hay una recta que contiene a los cuatro puntos. Aunque este tipo de argumento no constituye una prueba formal, permite garantizar la alineación de los puntos en un buen número de ejemplos distintos de la misma construcción (haciendo variar P_1 a lo largo de su circunferencia, considerada ésta como un conjunto discreto de puntos en la pantalla de un ordenador). Además, este tipo de manipulación, adaptado a las circunstancias de cada contexto, podría ser utilizado como elemento inspirador de una posterior prueba formal.

La obtención de elementos básicos a partir de los cuales reconstruir la figura dada no solo surge de estrategias geométricas, sino que también puede extraerse de los planteamientos analíticos; así observamos que el argumento C.3 es válido para una construcción realizada a partir de *un cuadrado de lado L y de un vector unitario v*, en la que se respeten las relaciones de paralelismo y perpendicularidad correspondientes (según se indica en la Figura 17): al "mover" v alrededor de la circunferencia unidad, la construcción (cuadrado y triángulos rectángulos) permanece y los puntos P_i se mantienen alineados. También Cabri-Géomètre permite simular este proceso de construcción geométrica y experimentar con él.

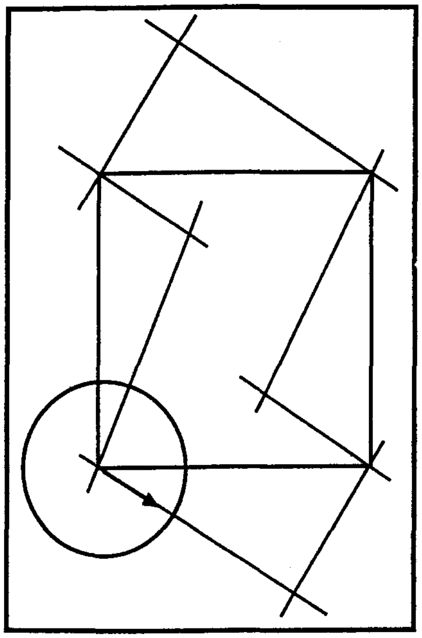

Figura 17

E.3 Demostración automática

La perspectiva dinámica en la experimentación con problemas geométricos puede ser abordada también desde la Demostración Automática de Teoremas Geométricos (Chou, 1988; Recio, 1998). El problema propuesto en este artículo constituye una propiedad geométrica que puede establecerse en términos de hipótesis de partida y tesis a deducir, donde tanto las hipótesis como la tesis, inicialmente descritas en términos geométricos, pueden describirse mediante ecuaciones polinomiales (de segundo grado). A modo de ejemplo, y sin entrar en detalles técnicos, indicaremos el proceso que se puede seguir para demostrar la propiedad enunciada en el problema:

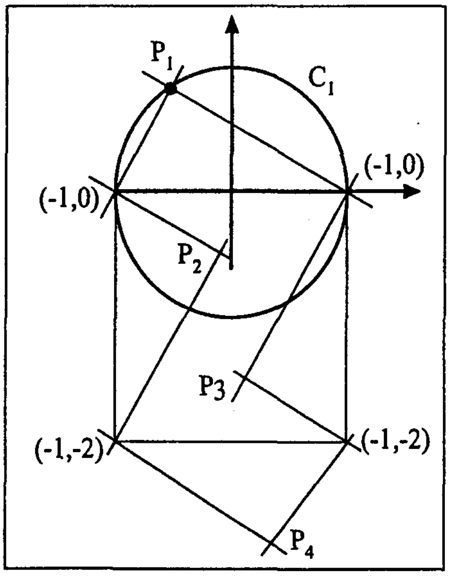

Figura 18

Hipótesis: *Sea* $P_1 = (p_1, p_2)$ *un punto sobre la circunferencia* C_1*; consideremos los puntos* P_i, $i = 2, 3, 4$, *definidos por la intersección de dos rectas perpendiculares, construidas a partir de* P_1 *y el cuadrado* (como se indicó en la Figura 16).

La transcripción algebraica de esta hipótesis puede realizarse colocando un sistema de referencia como en la Figura 18, y suponiendo, sin perder generalidad, que el lado del cuadrado mide 2 unidades; así las coordenadas de P_1 verifican:

$$p_1^2 + p_2^2 - 1 = 0.$$

El punto $P_2 = (q_1, q_2)$ verifica las dos ecuaciones:

$$q_2 + q_2 p_1 - p_2 q_1 + 2 + 2 p_1 - p_2 = 0,$$
$$-q_2 + q_2 p_1 - p_2 q_1 - p_2 = 0,$$

$P_3 = (r_1, r_2)$ verifica las dos ecuaciones:

$$r_2 + r_2 p_1 - p_2 r_1 + p_2 = 0,$$
$$-r_2 + r_2 p_1 - p_2 r_1 - 2 + 2 p_1 + p_2 = 0,$$

y finalmente $P_4 = (s_1, s_2)$ verifica las ecuaciones:

$$s_2 + s_2 p_1 - p_2 s_1 + 2 + 2 p_1 + p_2 = 0,$$
$$-s_2 + s_2 p_1 - p_2 s_1 - 2 + 2 p_1 - p_2 = 0.$$

Tesis: *Los puntos* P_i *están alineados.* Escribiremos esta condición a través de dos ecuaciones, cada una de las cuales corresponde a la alineación de una terna de entre dichos puntos. Así tenemos:

- P_1, P_2 y P_3 están alineados si y sólo si sus coordenadas verifican:
  $$q_2 p_1 - r_2 p_1 - p_2 q_1 + q_1 r_2 + p_2 r_1 - r_1 q_2 = 0,$$
- P_2, P_3 y P_4 están alineados si y sólo si sus coordenadas verifican:
  $$q_1 r_2 - q_1 s_2 - r_1 q_2 + r_1 s_2 + s_1 q_2 - s_1 r_2 = 0.$$

Manipulando algebraicamente estas expresiones (con ayuda de distintos paquetes de Cálculo Simbólico, entre los que cabe mencionar Maple (http://www.maplesoft.com), Mathematica (http://www.wolfram.com), o el más específico CoCoa (cocoa@dima.unige.it)), se puede probar que los polinomios de la tesis pueden escribirse como combinación polinomial de los polinomios de las hipótesis, lo que permite concluir que siempre que tengamos puntos cuyas coordenadas anulen las condiciones de las hipótesis, anularán también la tesis, es decir, los puntos estarán alineados.

E. 4 Recíproco

La experimentación geométrica también puede conducirnos a estudiar una versión del problema recíproco del planteado inicialmente:

Cualquier recta que pase por el centro del cuadrado y corte al lado AB del mismo (resp. CD), determina cuatro puntos sobre las semi-circunferencias, que son vértices de cuatro triángulos rectángulos iguales.

La demostración formal de este resultado podría seguir los pasos que mostramos a continuación (siguiendo la notación de la Figura 19):

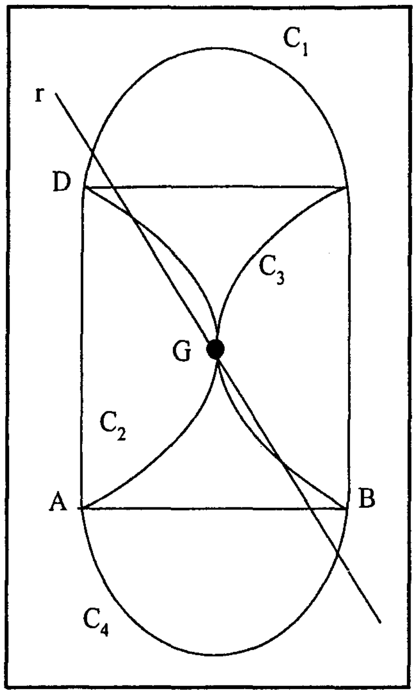

Figura 19

- Cualquier recta r que pase por el centro G del cuadrado y corte al lado AB, cortará también al lado CD (basta tener en cuenta la simetría del cuadrado respecto de su centro). Pero cualquier recta que tenga puntos del interior y del exterior del cuadrado y corte a AB, corta también a la semi-circunferencia correspondiente a ese lado. Así tenemos que r corta a C_1 y C_4 en puntos P_1 y P_4, respectivamente, que, argumentando otra vez con la simetría del cuadrado, son uno transformado del otro por la simetría central de centro G.
- Puesto que r pasa por G, que es un punto de tangencia de las semi-circunferencias C_2 y C_3, corta a ambas en al menos un punto. La recta r es tangente a C_2 por G si y sólo si es tangente a C_3 por G. Si se diera esta tangencia, estaríamos en un caso degenerado en el que los puntos P_2 y P_3 coinciden; en otro caso r corta a cada semi-circunferencia C_2 y C_3 en dos puntos distintos: P_2 en C_2 y P_3 en C_3, que son uno transformado del otro por la simetría central de centro G.
- La simetría de los pares de puntos (P_1, P_4) y (P_2, P_3) permite concluir que los triángulos rectángulos que se forman con vértices en dichos puntos son iguales.
- Si r pasa por A, también lo hará por C; entonces los cuatro puntos P_i se reducen a dos, triviales, que definen una diagonal del cuadrado.

También la Demostración Automática podría usarse para establecer este resultado recíproco, globalmente o cualquiera de los subproblemas aparecidos. Es esta una tarea que dejaremos abierta para el lector interesado.

F. Estrategias fallidas

Finalmente, queremos dejar constancia de algunas otras estrategias que, pese a transitar por caminos cerrados, han sido intentadas por los estudiantes para profesor. Entre ellas destacamos los intentos por resolver en el espacio la cuestión planteada, con métodos que "recortan" partes de la figura para sacarlas del plano y colocarlas sobre un cubo; y el uso de la relación de congruencia entre algunas de las partes de la figura propuesta o de alguna de sus ampliaciones, intentando deducir la alineación de los puntos mediante razonamientos basados en el cálculo de áreas.

3. Heurísticos observados en la resolución del problema

En el desarrollo de una estrategia identificamos algunos procesos específicos de pensamiento (Coriat y otros, 1989, pg. 31) o heurísticos, que son caracterizados por Polya (1945) Schoenfeld (1985) o Puig (1992/93) en el contexto de la resolución de problemas.

En Coriat y otros (1989) podemos encontrar una lista de heurísticos que han aparecido en problemas diversos con el cuadrado. Nosotros hemos detectado la existencia de algunos de ellos y hemos encontrado otros más analizando las resoluciones propuestas por los estudiantes para profesor a nuestro problema concreto, observando que un mismo heurístico puede ser compartido por distintas estrategias. Enumeramos todos ellos a continuación.

- *Completar/ampliar* la figura, en sus distintas versiones, ha sido el heurístico más usado en las resoluciones clasificadas de Geometría Sintética (Sección A). En estos casos el pensamiento dominante ha sido la observación de que se pueden formar otras figuras geométricas más útiles que las propuestas, para conseguir un argumento convincente.
- *Destacar/resaltar* algunas partes de la figura original también ha sido un heurístico útil y mayoritario, ya que podemos observarlo tanto en las resoluciones de tipo completar y ampliar como en las transformaciones geométricas o en argumentos de tipo analítico.
- Algunos alumnos han descubierto la forma de resolver el problema tras *colocar el dibujo en otra orientación*, de forma que las figuras propuestas estuvieran colocadas en una posición "más canónica". Un ejemplo de esta situación lo constituye el planteamiento realizado en la Sección C.1, donde se aprecia que la colocación de un sistema de referencia tras un cambio de punto de vista u orienta-ción simplifica considerablemente las expresiones algebraicas posteriores.
- La *asignación de valores concretos a las magnitudes* de la construcción dada (lados y ángulos) ha servido a algunos alumnos para argumentar estrategias del tipo C (Geometría analítica). Dicha asignación ha sido arbitraria en algunos casos, y en otros se han medido los segmentos en el dibujo dado con una regla.
- El *análisis de casos particulares* en que los triángulos rectángulos verifican ciertas restricciones (longitudes iguales de los catetos o un cateto de longitud cero) también han sido utilizados como análisis previo a la posterior resolución general.

- La *elección de las magnitudes* en función de las cuales va a ser resuelto el problema ha condicionado también la dificultad de la argumentación posterior; así observamos en la Sección C las diferencias que hay en las expresiones de las coordenadas si utilizamos las longitudes de los catetos, o la longitud de la hipotenusa, o la medida de un ángulo.
- La *descomposición del problema en partes* cuya solución es más fácilmente abordable ha sido un heurístico comúnmente utilizado en cualquiera de las estrategias. Por poner un ejemplo significativo mencionaremos las estrategias de geometría sintética (Sección A), en las que probar *la alineación de puntos por su pertenencia a la diagonal* de una nueva figura geométrica ha sido el heurístico compartido por todos los argumentos.
- La *interpretación del problema en un contexto dinámico* permite transformar el problema en un problema de reconstrucción de la figura a partir de algunos elementos básicos, asociarlo con el estudio de determinados lugares geométricos o plantear el problema recíproco.
- Finalmente el heurístico consistente en *"ir hacia atrás"* ha impregnado todas las estrategias ya que el problema tratado incluye en su enunciado la propiedad a demostrar (la solución al mismo); además la forma de presentarlo, mediante un dibujo en el que se visualiza la alineación pedida, sitúa al alumno frente a la solución y lo conduce a encontrar una justificación a dicho suceso.

4. Reflexiones en torno al proceso

El objetivo de este estudio se centra en presentar las diversas estrategias detectadas en la resolución del problema inicial, analizar su riqueza heurística y compartir unas reflexiones derivadas de este análisis. Las estrategias no han sido desarrolladas en su totalidad por los alumnos, sino que nosotros hemos completado lo que, muchas veces, era un simple esbozo. Cuando algún estudiante ha desarrollado una estrategia por completo así lo hemos mencionado. No hemos pretendido hacer una clasificación general sobre estrategias en la resolución de problemas geométricos, nuestro propósito es sistematizar y organizar las estrategias detectadas en la resolución de este problema. Como se desprende del análisis anterior, los resultados presentados en este trabajo no se han ajustado a un formato convencional, con diseño, muestra, resultados y análisis de datos. Los estudiantes para profesor a los que se ha propuesto al problema tienen conocimientos matemáticos suficientes como para enmarcar la resolución del problema propuesto en alguna teoría matemática (geometría euclídea, geometría analítica o geometría métrica); por ello no se han encontrado estrategias de resolución que respondan a planteamientos casuales. Por el contrario, los conocimientos matemáticos se han empleado para explicar los métodos propuestos, no encontrándose soluciones procedentes de un planteamiento empírico. La visualización que muestra el dibujo ha hecho que muchos alumnos descuiden la necesidad de realizar una demostración formal de la tesis del problema, a pesar de que son numerosos los ejemplos de "ilusiones visuales" que, usadas en razonamientos deductivos, conducen a resultados erróneos. En estos casos un enunciado verbal del problema, en ausencia del dibujo o con un dibujo imperfecto realizado por el alumno, podría haber evitado argumentos del tipo "sobre la figura", tales como: *"comprobemos la alineación de los puntos con una regla"* o *"doblemos el* *papel haciendo coincidir determinados puntos"*, planteamientos en los que no se percibe la necesidad de utilizar los datos del problema (los puntos podrían provenir de cualquier otro tipo de construcción). Esta es una constatación más de la escasa importancia que se da en la enseñanza a la conexión entre imagen visual y estructura o teoría matemática en que se sustenta. Con frecuencia se ha observado en las resoluciones falta de rigor en la expresión verbal y también en la argumentación de algunos razonamientos geométricos; sin dejar de valorar negativamente este hecho, podemos atribuirlo al carácter de tarea abierta con el que (intencionadamente) se propuso el problema, reconociendo así que el rigor viene dado por un contexto, con un punto de partida convenido y unas reglas del juego acordadas. Los tres ejes fundamentales que han permitido distinguir las distintas estrategias han sido: la teoría matemática ó el enfoque geométrico en los que se ha enmarcado la resolución (en base a los cuales hemos hecho la clasificación), la perspectiva de completar o no la estructura dada, el planteamiento estático o dinámico del problema. Comparando estos planteamientos con los observados al proponer este mismo problema a alumnos de otros niveles, tenemos que alumnos de secundaria de 13-14 años contemplaron el problema desde una perspectiva estática y trataron de completar parcialmente la figura, para después comparar las formas geométricas obtenidas a modo de puzzle, buscando relaciones de congruencia (y no de linealidad). La perspectiva estática también predominó en las resoluciones propuestas por alumnos de Magisterio en el contexto de una asignatura de Resolución de Problemas, siendo las estrategias de geometría sintética las seguidas por la gran mayoría de estos alumnos.Aunque no se pueda argumentar que unas estrategias sean mejores que otras, sí es cierto que cada una denota un tipo de razonamiento y de conocimiento distinto. Así, a nuestro juicio, las estrategias basadas en razonamientos geométricos denotan un nivel de creatividad mayor, constatado en la variedad de construcciones posibles propuestas por los alumnos para mostrar el alineamiento de los puntos (Figura 3). El hecho de que los argumentos dados estén fundamentados en la axiomática euclídea implica una predilección por los argumentos deductivos y mayor capacidad de razonamiento lógico. Los conocimientos necesarios para desarrollar este tipo de estrategias se imparten en los primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria e incluso en los últimos cursos de la Educación Primaria. El grupo de estrategias basadas en transformaciones geométricas ha conducido a subproblemas geométricos de mayor dificultad que los encontrados con las estrategias anteriores (por ejemplo, la alineación de dos de los puntos P_i con el centro del cuadrado); sin embargo, también en estos casos, argumentos aparentemente originados en la visualización han bastado a los alumnos para argumentar el cumplimiento de dichas propiedades geométricas no triviales. Los conocimientos necesarios para desarrollar este tipo de estrategias se imparten en los últimos cursos de la Educación Secundaria Obligatoria. Las estrategias que parten de un sistema de referencia denotan una predilección por la manipulación algebraica y algorítmica de los símbolos; en estos casos el alumno reconoce que la ejecución de un algoritmo le conducirá al éxito. Una vez elegida la teoría en la que resolver el problema, la toma de decisiones en el proceso de desarrollo de los argumentos se simplifica o es prácticamente nula; es el método menos creativo y elegante. Algunos de los conocimientos requeridos en el desarrollo de estas estrategias se imparten en Bachillerato. Finalmente, la estrategia propuesta dentro del ámbito de la geometría métrica puede considerarse un planteamiento aislado y particular, obtenido por un alumno de nivel universitario.

5. Conclusiones

Interesa destacar algunas contradicciones que hemos detectado en el grupo de alumnos estudiantes para profesor de matemáticas con sus expectativas como estudiantes de matemáticas. La sencillez del enunciado y la dificultad de encontrar una respuesta sencilla inmediata hacen que la mayor parte de los resolutores contemplen el problema como un problema "con trampa" o de "idea feliz", viéndolo con cierta desconfianza si no con abierta desgana. Por un lado, es un problema muy sencillo y, por otro, parece resistirse a una solución rápida. Estos son, a nuestro juicio, dos ingredientes básicos para que un problema resulte atractivo. La falta de interés mostrada en su resolución pone, sin embargo, de manifiesto una formación alejada de planteamientos de resolución de problemas. Si consideramos que la mayoría son futuros profesores de matemáticas de secundaria podemos preocuparnos por las carencias con que van a asumir esta tarea. Son pocos los estudiantes que tratan de abordar sistemáticamente el problema. Si bien la mayor parte de ellos hace una primera aproximación correcta, enmarcando y representando el problema en una teoría matemática adecuada, con una gran riqueza de posibilidades, posteriormente muestran escasa capacidad argumentativa, son poco cuidadosos en sus razonamientos, tienen exceso de confianza en el dibujo y exhiben un dominio parcial y fraccionado de los heurísticos más usuales en la resolución de problemas, lo que hace que en muy pocos casos lleven la estrategia hasta el final. En ningún caso han contemplado esta tarea en conexión con su formación como docentes, ni han valorado su interés formativo y su valor heurístico.Por otro lado, el sistema educativo español en las etapas de secundaria ha dejado tradicionalmente de lado la demostración (geométrica) como objeto de enseñanza. No es este el caso en otros países, entre los que cabe mencionar la educación matemática estadounidense en la que, como pone de manifiesto Herbst (1999), se tiene muy en cuenta la necesidad de aprender a demostrar y, en particular, los modos de demostración en geometría.Como se ha visto hay tareas que ofrecen una gran riqueza de posibilidades para trabajar en resolución de problemas; parece necesario conocer y analizar estas opciones e introducirlas en los procesos de reflexión para la formación de profesores. Sólo a partir de ahí se comenzará a modificar la práctica escolar sobre resolución de problemas.

Bibliografía

Albers J. (1985) *Homenaje al cuadrado.* Granada: Universidad de Granada.

Bell A. G. (1976) *The learning of general mathematical strategies. Doctoral Thesis.* Nottingham: Shell Center of Mathematical Education. University of Nottingham.

Blanco L. (1991) *Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas, de profesores de E.G.B. y estudiantes para profesores.*

Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Carrillo J. (1996) *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y el estudio de posibles relaciones.* Sevilla: Universidad de Sevilla.

Contreras L. C. (1998) *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula.* Huelva: Universidad de Huelva.

Cockcroft (1985) *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia (traducción del original de 1982).

Coriat y otros (1989) M. Coriat Benarroch, C. García Arribas, A. Lara Porras, A. Pérez de Madrid, R. Pérez Gómez, P. Sandoval Sierra, M. Vela Torres. *Seis para cuadrar*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Charles, R. & Silver, E. (1989) *The Teaching and Assesssing of Mathematical Problem Solving*. Reston VA: Lawrence Erlbaum Associates- NCTM.

Chou S. C. (1988) *Mechanical geometry theorem proving*. Dordrecht: D. Reidel Pub. Co.

Fernández, F. (1997) *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Granada: Universidad de Granada.

Gagnaire P. (1973) *Geometrie autour d'un carre*. París: CEDIC.

Herbst P. G. (1999) *Acerca de la demostración y la lógica de la práctica en la enseñanza de la geometría: observaciones sobre la prueba a dos columnas*. International Newslètter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, March/April 1999, (http://www-cabri.imag.fr/Preuve/Newsletter).

Krulik, S. & Reys, R. (1980) *Problem Solving in School Mathematics*. Reston VA: NCTM.

Munari B. (1999) *El cuadrado*. Mexico: Ediciones G. Gili, (traducción del original de 1978).

Polya G. (1945) *How to solve it*. U.S.A.: Princeton University Press.

Puig L. (1992/93) *Elementos para la instrucción en resolución de problemas de matemáticas. Tesis doctoral*, Valencia: Universidad de Valencia.

Recio T. (1998) *Cálculo simbólico y geométrico* Madrid: Síntesis.

Rico y otros (1990) L. Rico, E. Castro, A. Fernández, J. M. Fortuny, J. Valenzuela, Valldaura. *Guía Didáctica Matemáticas 5° E. G. B*. Sevilla: Algaida.

Rico, L. (1997) *Bases teóricas del Curriculo de Matemáticas en Secundaria*. Madrid: Síntesis.

Shoenfeld A. H. (1985) *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press, Inc.

Wells D. (1988) *Hidden connections, double meanings: a mathematical exploration*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wertheimer M. (1991) *El pensamiento productivo*. Barcelona: Paidós.