Gráficas y ecuaciones en un curso de algebra universitaria con calculadoras graficas[1]

Fecha de recepción: Junio, 2000

Educación Matemática
Vol. 12 No. 3 diciembre 2000
pp.41-51

Armando M. Martínez Cruz
California State University
amartinez-cruz@fullerton.edu

Resumen: *Nuestra investigación busca ganar una mejor comprensión sobre como los alumnos integran ideas asociadas con el concepto de función. Aquí reportamos la concepción de dos representaciones, las gráficas y las ecuaciones, y sus relaciones en alumnos que usan calculadoras gráfica en un curso de algebra universitaria. Durante el curso (verano de 1997), seleccionamos tres alumnos para estudios de caso y construimos una red individual de ideas funcionales. Estas tres redes sugieren que las ideas asociadas con el concepto de función en estos alumnos eran débiles, sin relación y a veces contradictorias. Tanto el interés en el curso como su naturaleza podrían explicar parte de esta situación. Por una parte, el último curso en matemáticas influye en cómo los alumnos retienen e integran el contenido del curso, y por otra parte, un curso de álgebra universitaria (10 semanas) proporciona pocas oportunidades para integrar las ideas presentadas. Las redes construidas sugieren las relaciones que los alumnos establecen entre las gráficas y las ecuaciones de funciones.*

Abstract: *We seek a better understanding of student integration of function ideas. We report college-algebra student perception of two function representations (graph and equation) and their relationships when graphing technology is available. Three students were selected for case studies of these ideas during Summer 1997. We built an individual network of function ideas. Networks suggest that these students' function ideas were extremely weak, unrelated and contradictory. Affective factors and course nature might explain this. Terminal courses in mathematics greatly influence the way students retain and integrate the content. Also, a summer college algebra course provides with little opportunities to integrate math ideas. Student networks suggest students' establishment of function representations.*

Introducción

El papel central del concepto de función en el currículo ha atraido la atención de la comunidad de educadores matemáticos (Tall, 1992). A pesar de esta importancia, los estudios de investigación sobre la conceptualización de funciones reportan que tanto alumnos (Dreyfus & Vinner, 1989) como maestros en formación (Even, 1989) tienen una comprensión pobre de

[1] Porciones de este trabajo se reportaron en la reunión del PME que se celebró en Releigh, NC en 1998.

este concepto. Estos reportes indican que estos participantes, por una parte, perciben a las funciones como ecuaciones sin tomar en consideración el dominio y el rango, o como gráficas que se espera sean continuas, regulares o familiares, y por otra parte, usan algoritmos familiares (como el criterio de la línea vertical) o fórmulas (por ejemplo las rectas a veces aparecen como $y = mx$) para identificar funciones. Más aún los estudiantes pueden aprender estas ideas sin relacionarlas aún cuando representan el mismo objeto. La ausencia de relaciones entre representaciones de funciones le puede ser útil al alumno para resolver ciertos problems, pero tiene el potencial de ser un obstáculo en la construcción del concepto formal de función (Herscovics, 1989). Recíprocamente, la integración de ideas asociadas con el concepto de función le puede ayudar al alumno en varias formas. Por ejemplo, los alumnos pueden adquirir una mejor comprensión del concepto de función, usar diferentes representaciones y empezar su formalización. Un vehículo que permite utilizar varias representaciones de funciones son las calculadoras gráficas. Estas permiten visualizar, por ejemplo, variaciones algebraicas, las cuales a su vez favorecen el establecimiento de relaciones entre diferentes representaciones del concepto de función (Dunham & Dick, 1994).

Nuestra investigación se puede ubicar en este contexto. Anteriormente, estudiamos lo que siete alumnos del nivel medio superior saben acerca del concepto de función en una clase de precálculo apoyada con calculadoras gráficas. Encontramos que existen tres concepciones de las funciones: gráficas, ecuaciones, o correspondencia única (Martínez Cruz, 1993). Estas tres concepciones aparecieron en todos los alumnos pero una dominó a las otras. Puesto que las tres ideas son comunes a todos los alumnos, nos referiremos a ellas como representaciones y la concepción de cada alumno es la representación domi-

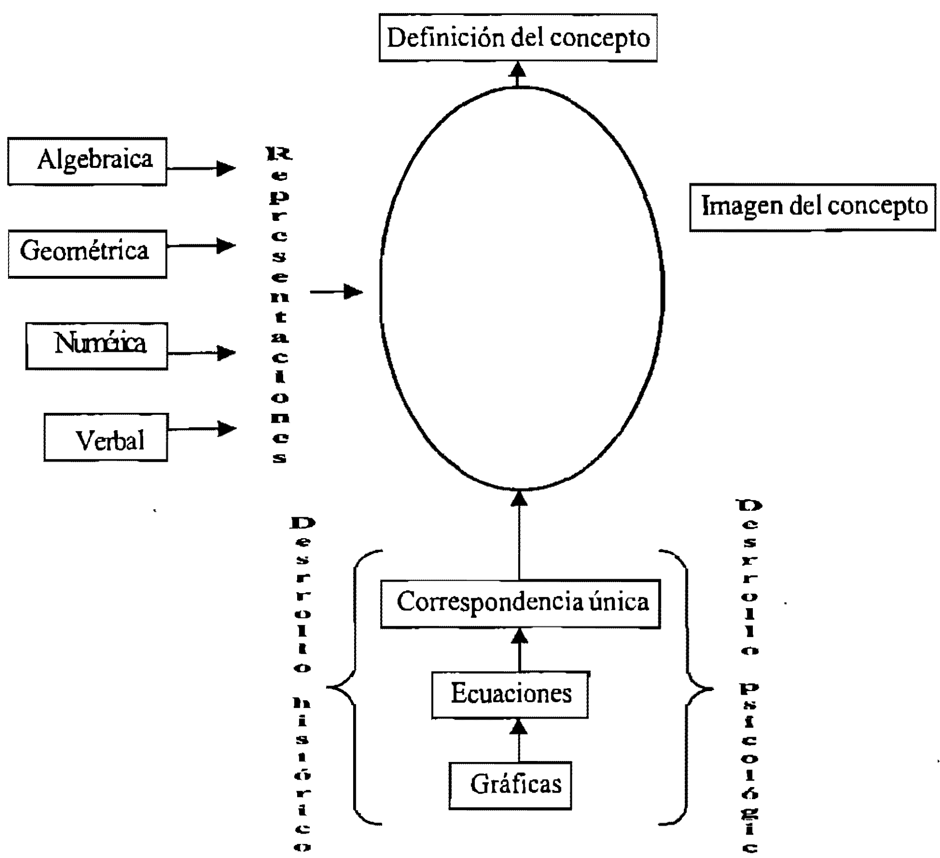

Fig. 1. El marco teórico para la investigación del desarrollo de concepto de función en alumnos de educación media superior que usan calculadoras gráficas en precalculo.

nante. Con nuestros datos construimos una red que describe las relaciones entre las tres representaciones. Esta red nos da una mejor comprensión de cómo los alumnos integran ideas asociadas con el concepto de función. Esta comprensión tiene implicaciones para la enseñanza de las matemáticas, ya que percibir la comprensión como un conocimiento conexo (es decir como una red) sugiere que es crítico conectar nuevo conocimiento que aparece en la enseñanza con conocimiento que ya existe en los alumnos (Carpenter & Fennema, 1991). Sin embargo, todavía sabemos poco sobre la comprensión de estas ideas entre los alumnos o la manera en que las establecen (Bright & Hoeffner, 1993).

El trabajo que aquí reportamos es parte de una agenda de investigación que busca contribuir a la enseñanza y al aprendizaje del concepto de función mediante tecnología. En este estudio es nuestro interés el obtener una mayor comprensión sobre dos representaciones del concepto de función: las gráficas y las ecuaciones, las relaciones que los alumnos establecen entre ellas, y cómo aparecen cuando las calculadoras gráficas se usan en la instrucción de las matemáticas. Nuestra investigación se realizó en un curso de algebra universitaria durante el verano de 1997.

Marco teórico

El marco teórico que usamos en la investigación que realizamos en 1993 incorporó el desarollo tanto histórico (Kleiner, 1989) como psicológico (proceso y objeto) (Sfard, 1989) del concepto de función; la imagen del concepto y la definición del concepto (Dreyfus & Vinner, 1989); y las representaciones múltiples (figura 1).

Nuestra revisión literaria encontró que los alumnos tienen varias ideas asociadas con el concepto de función (ecuaciones, gráficas, continuidad, regularidad, correspondencia única, el criterio de la línea vertical y familiaridad) (referencias) pero no encontramos estudios que describieran conexiones entre estas ideas (figura 2).

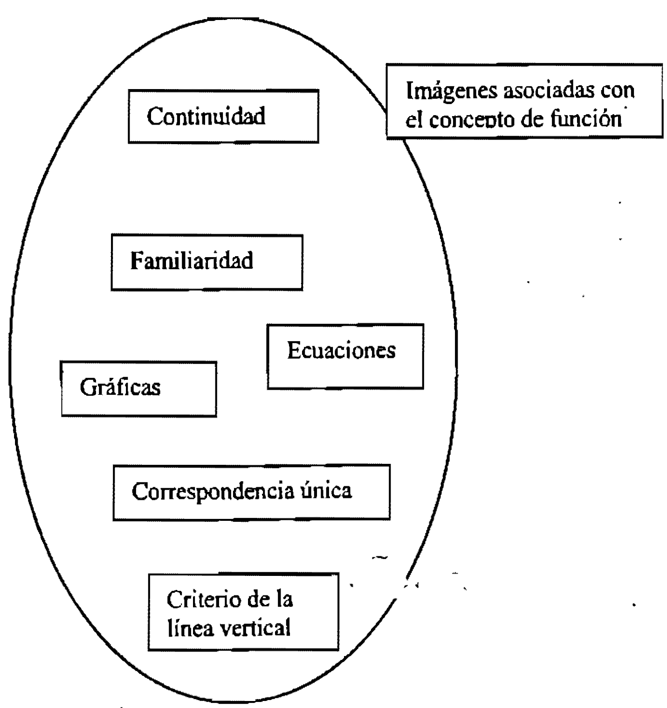

Fig. 2. Imágenes asociadas con el concepto de función.

Una contribución de esa investigación fue la construcción de una red individual que describe las ideas asociadas con el concepto de función en cada uno de los participantes. En la figura 3 aparece la red construida para una estudiante. En este caso, la concepción como ecuación (que da una relación) es la imagen más fuerte (indicada con una frontera más gruesa) que las otras imágenes. Las flechas indican cómo leer las relaciones que esta estudiante estableció. Por ejemplo, en la esquina superior derecha se puede observar que esta estudiante decía «la gráfica es una función si ésta pasa el criterio de la línea vertical». Las siete redes se agruparon en tres áreas (gráficas, ecuaciones, y correspondencia única) a las que nos referimos como concepciones. El conocimiento de estos concepciones o modelos nos permite usar un mejor marco teórico para este nuevo estudio. Imagínese el lector que ponemos siete redes (todas distintas) como la presentada en la figura 3, en la elipse que aparece en la figura 1.

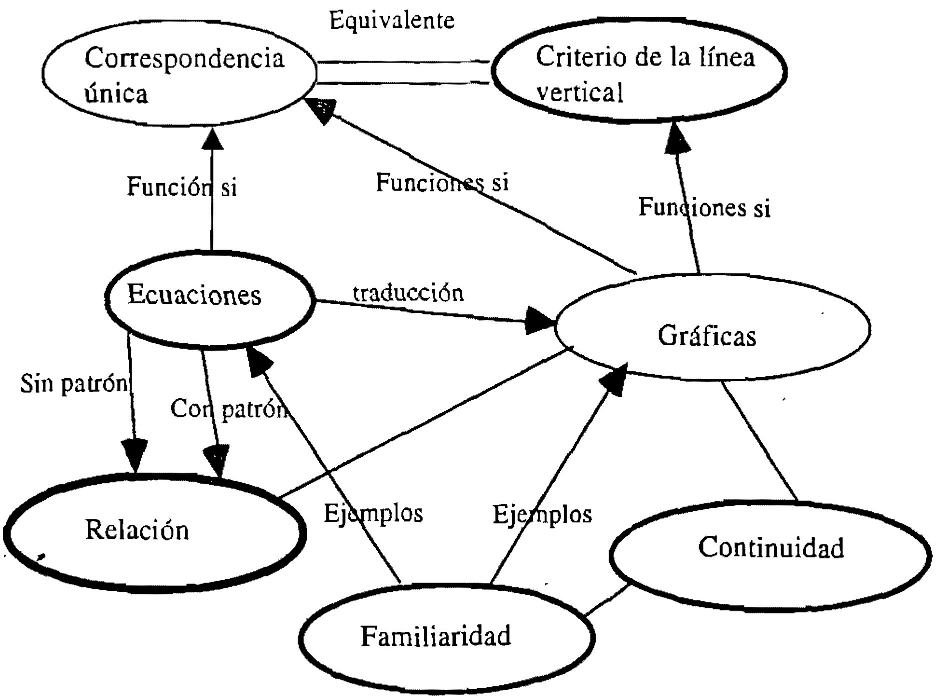

Fig. 3. Red de las ideas asociadas con el concepto de función en una alumna de precálculo (nivel medio superior) que usa calculadoras gráficas.

El estudio y su metodología

Este estudio se realizó en un curso de algebra universitaria apoyada con calculadoras gráficas en una universidad del suroeste de los Estados Unidos. El curso se impartió en el verano de 1997 durante 10 semanas. Cada sesión tenía una duración de dos horas. El curso lo impartió un matemático con amplia experiencia en el uso de esta tecnología. Cada alumno tuvo acceso a una calculadora gráfica (TI-83) en calidad de préstamo. El instructor se esforzó en presentar todos los tópicos posibles desde una perspectiva gráfica y una perspectiva algebraica haciendo explícitas sus conexiones. El instructor presentaba estas conexiones, cuando era posible, con una calculadora para proyector que tuvo a su disposición durante todo el estudio. Esta calculadora se usó en todas las sesiones, aunque con duración variable (entre 5 a 30 minutos). Seleccionamos tres estudiantes usando muestreo intencional (Lincoln & Guba, 1985) para estudios de caso de su conocimiento de funciones y sus reprsentaciones. Las preguntas de investigación propuestas fueron las siguientes.

(1) ¿Cuál es el conocimiento que estos alumnos tienen de la representación gráfica de funciones (las gráficas)?

(2) ¿Cuál es el conocimiento que estos alumnos tienen de la representación algebraica de funciones (las ecuaciones)?

(3) ¿Qué relaciones establecen estos alumnos entre estas dos representaciones?

Como las ideas de los alumnos cambian con respecto al tiempo, nos apoyamos en la tradición interpretativa de la investigación etnográfica para estudiar la evolución de los cambios en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La colección de datos para cada estudio de caso incluyó cuatro entrevistas, observaciones diarias en el salón de clases, exámenes desarrollados por el autor, los exámes administrados por el instructor, e interacciones con los alumnos durante horas de oficina. Puesto que éste fue un estudio cualitativo, se consideron cuatro criterios para garantizar la confiabilidad del estudio. Estos cuatro criterios son la credibilidad, la transferencia, la dependencia y la confirmación (Lincoln & Guba, 1985). Consultamos literatura relevante para desarrollar los cuatro protocolos usados en este estudio. En general, las preguntas y los problemas incluidos investigaban la relación entre las ecuaciones y las funciones, la relación entre las gráficas y las funciones, las decisiones que los alumnos toman para determinar si una gráfica representa una función, y la clase de ejemplos de funciones que los alumnos proporcionan. Las funciones que se usaron en los protocolos son las funciones que tradicionalmente aparecen en un curso de algebra universitaria (líneas rectas, parábolas, funciones polinomiales de mayor grado, funciones racionales, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y funciones logarítmicas). Para identificar las relaciones (o la ausencia de éstas) que los alumnos establecen entre representaciones de funciones (gráficas y ecuaciones), usamos un análisis de dominio (Spradley, 1979) y una asignación de códigos (Lincoln & Guba, 1985) en los exámenes, las transcripciones de las entrevistas y en otros materiales de los alumnos (por ejemplo, las observaciones en clase). Con estas relaciones, construimos, para cada uno de los tres participantes, una red que representa las relaciones entre las gráficas y las ecuaciones de funciones. En este trabajo reportamos las ideas de uno de los estudiantes, Zafu.

Las ideas de función

Desde el inicio del curso, Zafu percibió principalmente a las funciones como gráficas. Aunado a esta idea estaba el criterio de la línea vertical (CLV): "Una función uno a uno es cuando una línea recta pasa por un solo punto de la línea"[2]. Aunque Zafu conocía este criterio, no podía explicar por qué el método funcionaba. Esta familiaridad con el CLV le ayudaba a establecer ciertas relacions entre las funciones y las gráficas. Por ejemplo, Zafu

[2] Nótese que Zafu usa la terminología uno a uno, lo cual sugiere que tal vez está pensando en una función que tiene inversa y que se refiere a la gráfica como «una línea». Las entrevistas se realizaron en inglés y aquí se presentan citas en español realizadas por el autor.

indicó que "las gráficas de una línea pueden usarse para determinar si la línea es una función uno a uno, o una función dos a uno, etcétera". Es claro que Zafu conocía las expresiones "uno a uno" y "dos a uno" pero no sabía lo que significaban. La confusión entre el CLV y el criterio de la línea horizontal (CLH) apareció varias veces en las entrevistas y caracterizó su uso del CLV durante todo el estudio. Queremos ofrecer la interpretación de que la familiaridad con ambos criterios, CLV y CLH, creó un obstáculo para entender el CLV. Por ejemplo, cuando le presentabamos dos parábolas (una horizontal y otra vertical), Zafu no podía decidir cuál era función y cuál no. A veces aplicaba ambos criterios y a veces aplicaba uno.

Al inicio del estudio, Zafu también tenía una imagen algebraica de las funciones. Esta imagen apareció con menos frecuencia al principio pero se tornó la representación dominante al final del estudio. Su primer ejemplo de una función fue la ecuación "$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$" (con A, B, y C los coeficientes). En general sus ideas sobre el concepto de función se apoyaban en la familiaridad (con ejemplos) y en procedimientos (como el CLV) como lo indica la siguente cita de una entrevistas en la que se le pidió dar una definición de función.

> Bueno, también recuerdo que necesitas aplicar algo como el criterio de la línea vertical u horizontal y no recuerdo si es uno, u otro o los dos. Y eso. Sabes? No puede ser una parábola o un círculo por eso. Tienes tu criterio de la línea vertical, de todas las líneas verticales. Pero realmente no puedo decir si es una función. [Minutos más tarde indicó] Hmmmm. [en una actitud pensante sin escribir nada]. Puedo pensar en ejemplos. Realmente no puedo [dar una definición de función, anotando f(x)]. Expresiones como x pueden ser al cuadrado [escribiendo "= "] o podría ser y [escribiendo abajo de lo anterior "= "]. Es un procedimiento que tú decides, ¿sabes?, o alguien inventa un problema matemático.

Este procedimiento (una cadena de operaciones algebraicas) emergió como una prueba que tenía que pasar una expresión algebraica para ser una función. "$[(x)^2 + y]$ sólo es un procedimiento que le aplicas a [pensando] cualquier número, creo". Entonces Zafu añadió y para obtener $y = (x^2 + y)$. Sin embargo, no notó que la expresión $y = (x^2 + y)$ implica $0 = x^2$ e indicó que "$f(x) = (x)^2$" es un ejemplo de una función porque su maestro lo había dicho la semana anterior" [riéndose][3].

Ideas acerca de las gráficas

Zafu veía a las gráficas como una "representación visual de la ecuación de una línea". Esta noción incluía varias ideas. Para él, una gráfica es "una representación visual y no necesita ser una gráfica". Una representación visual podía incluir figuras, mientras que "una gráfica" era una curva (a la cual él se refería a veces como "una línea").

Zafu relacionaba las ecuaciones con las gráficas: "una gráfica es una representación (visual) de una ecuación" (con lo que parece indicar que las gráficas se obtienen de ecuaciones). Las gráficas también estaban relacionadas con las funciones y el CLV provenía un vínculo entre ellas como ya lo discutimos anteriormente. Zafu demostró varias ideas asociadas con las gráficas (por ejemplo podía reconocer gráficas familiares y usar vocabulario

[3] Se puede observar que aquí Zafu usa la autoridad del maestro como criterio para decidir que una ecuación es una función.

para describir propiedades como gráficas crecientes, graficas decrecientes, máximo y mínimo). En una entrevista se le presentó la gráfica presentada en la figura 4 y se le pidió que indicara la información que la gráfica daba. Su respuesta ilustra la existencia de ideas separadas.

> Bueno, podrían ser dos parábolas conectadas. O podría ser una curva de seno. Tal vez el seno y las parábolas están relacionadas. No tengo ni idea. Sólo estoy tratando de adivinar. Cada uno de eso puntos tiene un vértice. Tal vez haya dos parábolas aquí. Eso es todo lo que sé.

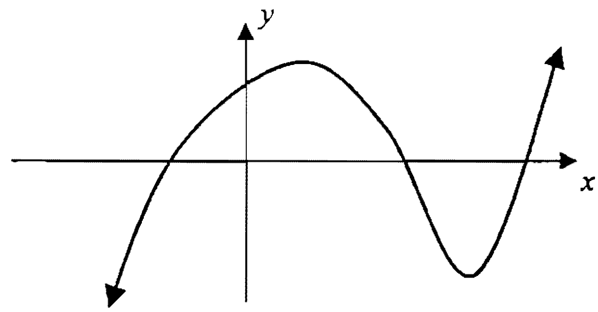

Fig. 4.

Zafu no pudo decir si esta gráfica representaba una función ya que no supo cuál criterio usar (el vertical o el horizontal). Su respuesta al menos indica que hay que usar uno de éstos. "Bueno. Si sólo tienen que pasar el criterio de la línea vertical, entonces sí es una función".

Zafu no recordó el término ceros de una función pero recordó que una función podía ser creciente, pero no fue capaz de indicar si la gráfica en este caso era creciente. Para ello necesitaba una ecuación "No puedo decirte con sólo mirar a la gráfica. No puedo...Si me das la ecuación y me preguntas si la ecuación es creciente, a lo mejor lo puedo decir". Zafu señaló el máximo y el mínimo de la gráfica. Sin embargo, no pudo indicar el dominio. Parece ser que más bien estaba tratando de encontrar el intervalo solución a una desigualdad. Otra dificultad para Zafu al leer información de gráficas era resolver ecuaciones de la forma f(x) = constante. En este caso, Zafu tendía a invertir los papeles de x y de y constantemente. Sin embargo, pasaba a otros ejercicios y regresaba a éstos para resolverlos finalmente.

Ideas acerca de las ecuaciones

Desde el principio del estudio, Zafu tenía una concepción dual de las ecuaciones. Primero, las ecuaciones eran "una igualdad. Un problema matemático que que tiene un signo igual" y segundo, "el de un problema que hay que resolver". La primera concepción daba una relación entre las ecuaciones y las funciones ya que "la función de una variable puede ponerse igual a problema matemático". Esta "función de una variable [se indica como] f(x), función f de la variable x. En breve, como todos sus ejemplos de funciones estaban dados como una "función de una variable igual a una ecuación (o problema matemático)", él veía una relación entre las ecuaciones y las funciones. Esta relación estaba indicada por el signo igual, es decir las funciones están dadas por ecuaciones, como "f(x) = y, función de x". Su concepción de una función como una "máquina trituradora" está enraizada en un procedimiento, ya que las máquinas "dan un producto" y la ecuación es la "trituración". Muchos alumnos tienden a creer que todas las ecuaciones son funciones (Martínez Cruz, 1993). No es claro, si el siguiente paso en las ideas funcionales de Zafu sea éste. Por ejemplo, él no pudo decidir si "$f(x) = x^5 + 7x + 3$ " era una función solamente basado en la ecuación. Mi conjetura es que el trabajo extensivo con ecuaciones es el que hace que los alumnos vean a todas las ecuaciones como funciones, y viceversa en algun momento del aprendizaje de funciones. Sería interesante guiar estudios en esta dirección.

Una relación más entre las ecuaciones y las funciones es que las ecuaciones proporcionan información sobre las funciones. Por una parte, su explicación demuestra que es posible anticipar la gráfica dada una ecuación y por otra pare, sugiere una tabulación de puntos, para poder graficar, basada en el dominio y en los valores de salida de la función.

> La información que obtengo? Las ecuaciones dicen de las funciones su forma y su tamaño relativo. [Con forma quiero decir], bueno, si me das una ecuación, no importa qué variables pones para x y y, siempre obtienes una parábola. Esa es la forma. ¿Cuáles otras formas obtienes?] Un círculo, ah sí. ¿Había otras formas? No me acuerdo. Una línea. "El tamaño relativo [incluye] la posición [en el plano], el dominio y tal vez la escala. Sí, porque usamos valores de entrada. Y también su posición relativa porque estamos usando como valores de entrada cualquier valor que queramos para la x y para la y, sólo para que esté cerca del origen, y la podamos graficar y sea fácil verla. No sabemos los valores de las unidades. Pueden ser millas [riéndose]. Son sólo los números que usarías como valores de entrada.

Otras relaciones entre las ecuaciones y las gráficas se encontraron posteriormente. Zafu expresó que las ecuaciones y las gráficas estaban relacionadas ya que "las líneas pueden representarse como ecuaciones. Y las ecuaciones pueden producir líneas en las gráficas" Sin embargo, no sabía si las ecuaciones pudieran no producir líneas.

La habilidad de ver a y y a $f(x)$ como idénticas, le permitió resolver ciertos problemas (como y = constante) que otros alumnos no pudieron resolver. Zafu también entendía lo que era la pendiente de una recta y la podía determinar de las ecuaciones y de las gráficas. En general, Zafu parecía haber adquirido un sólido conocimiento de líneas rectas (aun las constantes, que usualmente generan dificultades en los alumnos), pero tenía dificultades con funciones cuadráticas sobre todo cuando aparecían como gráficas. Dada la ecuación, podía explicar el efecto de cada parámetro pero no podía representar gráficamente lo que expresaba verbalmente. Zafu tenía que hacer una tabla para graficar una parábola en lugar de usar las transformaciones que había expresado como efecto de los valores de los parámetros. Al final del estudio, su conocimiento de funciones cuadráticas había declinado hasta el grado de no recordarlas. Otra indicación del aprendizaje de procedimientos sin comprensión está ilustrado por la habilidad para resolver algebraicamente un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables. Sin embargo, Zafu no podía brindar una interpretación gráfica de la solución.

Relaciones entre funciones, ecuaciones y gráficas

Basado en los datos de este estudio, podemos indicar que Zafu asociaba dos ideas al concepto de función. Una idea es la idea gráfica y la otra idea es la idea de las ecuaciones. Esta segunda idea parece ser más fuerte que la primera. Zafu parecía percibir las funciones como ecuaciones (principalmente e indicada en negritas) y por lo tanto podían graficarse. El criterio de la línea vertical daba una conexión entre las gráficas y las ecuaciones. Sus ejemplos incluían familiares ejemplos de ecuaciones y de gráficas (éstas en menor cantidad). La figura 5 representa estas ideas. De nuevo, las flechas proveen la dirección para leer los enunciados incluidos.

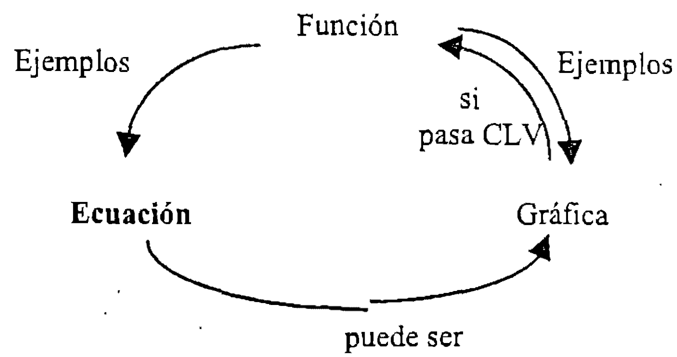

Fig. 5. Red de ideas asociadas con dos representaciones funcionales en un alumno de algebra universitaria.

Antes de pasar a las conclusiones, queremos hacer un breve comentario sobre los tres participantes en este estudio. Comparados con Zafu, los otros dos alumnos tenían más debilidades en sus concepciones funcionales. Uno de los alumnos, Sparky, empezó el curso sólidamente pero a medida que pasó el tiempo las ideas se volvieron circulares, llenas de contradicciones y sin mucho crecimiento. Hubo una característica comun en los tres alumnos. Este curso es el único requisito matemático para obtener un grado universitario. En los tres casos, los participantes expresaron su deseo de aprobar el curso y esto se tornó en el único objetivo en tomar esta clase. La parte afectiva dominó a la parte cognitiva al grado de crear un total desinterés en asimilar el contenido del curso. Los alumnos sólo querían aprobar los exámenes y con ello aprobar el curso. Este factor afectivo influye la forma en que los alumnos asimilan el contenido de los cursos y no debe ignorarse especialmente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Conclusiones

Este estudio se avocó a investigar la concepción de dos representaciones de funciones, las gráficas y las ecuaciones, y sus las relaciones. Este enfoque tiene ventajas y desventajas. Una ventaja es ganar mayor claridad en cómo los alumnos perciben estas ideas. Otra ventaja es el potencial de este enfoque para evaluar el aprendizaje de los alumnos. Entre las desventajas se encuentra el ignorar otras representaciones funcionales que les alumnos desarrollan. En general, los participantes mostraron ideas entre las ecuaciones y las gráficas. Estas ideas variaron en grado entre los alumnos pero fueron débiles, contradictorias y a veces sin relación. Los datos también sugieren que factores afectivos (tales como el curso de álgebra universitaria sea un curso terminal) influye fuertemente la manera en que los alumnos retienen e integran el contenido matemático. Los particpantes en el estudio no parecían estar motivados en asimilar las ideas discutidas y por ello las debilidades en sus redes funcionales se produjeron por la motivación. Más aún, un curso de diez semanas proporciona pocas oportunidades para integrar esas ideas. No se puede negar que ganamos conocimiento sobre concepción de la representación gráfica y la representación algebraica de las funciones en un curso de álgebra universitaria. La red producida para el alumno descrito da una idea de cómo se integran esas representaciones. El potencial de la tecnología en un curso como éste es todavía una pregunta abierta. Sin embargo, la actitud de los alumnos en el curso sugiere que una revisión significativa del contenido debe hacerse. Quizá esa revisión podría incluir el uso de las calculadoras gráficas

REFERENCIAS

Bright, G., & Hoeffner, K. (1993). Measurement, probability, statistics, and graphing. In D. T. Owens (Ed.) *Research ideas for the classroom. Middle grade mathematics*. pp. 78-98. Reston, VA: NCTM.

Carpenter, T., & Fennema, E. (1991). Research and cognitively guided instruction. In E. Fennema, T. Carpenter, & S. Lamon (eds.). *Integrating research on teaching and learning mathematics*. Albany, NY: SUNY.

Dreyfus. T., & Vinner, S. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356-366.

Dunham, P. & Dick, T. (1994). Research on graphing calculators. *The Mathematics Teacher* 87(6), 440-445.

Even, R. (1989). *Prospective secondary mathematics teachers' knowledge and understanding about mathematical functions*. Unpublished doctoral dissertation. Lansig, MI: Michigan State.

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.) *Research issues in the learning and teaching of algebra. Research agenda for mathematics education*, v. 4, pp. 60-86. Reston, VA: Lawrence Erlbaum and NCTM.

Kleiner, E. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20(4), 282-300.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Newbury Park, CA: Sage Pubs.

Martinez-Cruz, A. M. (1993). Knowledge and development of functions in a technology-enhanced high-school precalculus class. A case study. Unpublished doctoral dissertation. Columbus, OH: The Ohio State University.

Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. *Proceedings*. PME, v. 3, pp. 151-158. Paris, France.

Spradley, J. P. (1979). *The ethnographic interview*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws (Ed.)