Dificultades en los proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite y su relación con los sistemas de representación

Juan Carlos Palomino[1], Julio Hurtado Márquez[2] y Eder Barrios Hernández[3]
Universidad Tecnológica de Bolívar, Colombia

Resumen

En el presente trabajo, se muestran relaciones entre los sistemas de representación utilizados por los docentes en la enseñanza del concepto de límite y los sistemas de representación donde los estudiantes tienen mayor y menor dificultad en el aprendizaje. Para establecer estas relaciones, se determinó el grado de precisión de la idea numérica, gráfica, analítica y verbal del concepto de límite de una función en un punto por parte de los estudiantes y se contrastó con los sistemas de representación utilizado con mayor frecuencia por los docentes. Posterior mente, se describe los resultados y el análisis hecho a la información obtenida sobre los estudiantes y docentes. Se enuncian las conclusiones, en las que se evidencias estrechas relaciones entre los sistemas utilizados por los docentes y los sistemas de representación utilizados por los estudiantes.

Palabras clave: Limite, Sistemas de representación.

Marco Teórico

El desarrollo de las matemáticas, así como lo muestra "la historia de los números", la del álgebra, de la geometría e incluso la del análisis se hace en el sentido de una diversificación

[1]Email: jpalomin@unitecnologica.edu.co
[2]Email: jhurtado@unitecnologica.edu.co
[3]Email: ebarrios@unitecnologica.edu.co

muy amplia de sistemas de representaciones; numérico, algebraico, gráfico y verbal.
En ese sentido, toda iniciación en las matemáticas pasa por una apropiación individual de estos sistemas, apropiación que ha llegado a ser tan necesaria como el aprendizaje de las escritura. En el caso particular del concepto de límite, se evidencia a lo largo de la historia la importancia de éstas representaciones en la evolución del concepto. Esto se puede evidenciar en las distintas definiciones que se han dado sobre el concepto. Por ejemplo, en la siguiente definición dada por D'Alambert, según Boyer (1999 .p. 567) postula:

Una cantidad es el limite de otra cantidad variable, si la segunda puede aproximarse a al primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca ha coincidir con ella).

En ella, se observan aspectos dinámicas del concepto, se muestra una estrecha relación con los fenómenos reales. Estas características son propias del sistema de representación verbal, que es el primer medio de acceso para formular, explicar y comunicar dichos fenómenos basado en el concepto de límite. En esta definición la magnitud que se aproxima no puede superar al límite, es decir es monótona, y por no tener un carácter algebraico no tuvo el reconocimiento en la época.

En los intentos por construir una fundamentación del análisis matemático el concepto de límite es redefinido por Augustine Louis Couchy, convirtiéndolo de manera definitiva en un concepto aritmético sin apoyo geométrico, como puede constatarse en la definición siguiente:

. . . ,cuando los valores sucesivos que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos este ultimo valor se llama límite de todos los demás. (1993.p.312).

Esta definición da cuenta de la idea intuitiva de límite pero es verbal más que numérica. Couchy se sirve de esta definición para definir un infinitamente pequeño, que resulta ser simplemente una cantidad variable dependiente con un límite igual a cero:

. . . cuando los sucesivos valores de una misma variable decrecen indefinidamente de manera que disminuye por debajo de todo número dado, esta variable resulta ser lo que se

llama un infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene como limite cero (1993.p.312).

La definición dada por Couhy ha trascendido en la enseñanza del concepto y es actualmente muy frecuente en textos de bachillerato y aun en textos universitarios con la siguiente modificación:

Sea f una función y a un número real, el numero L es el límite de la función f en el punto a, y se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (se lee límite de $f(x)$ cuando tiende a a es L), si cuando x tiende a a, siendo x distinto de a, $f(x)$ tiende a L.

La definición anterior, ha sido objeto de muchas investigaciones a nivel de enseñanza-aprendizaje. Esta ha dado origen a la nueva definición de límite propuesta por Sansoles Belazquez y Tomas Ortega:

El límite de una función f en $x = a$ es L si para cualquier aproximación K de L, existe una aproximación H de a, tal que las imágenes de todos los puntos que están más cerca de a que H están más próximo a L que a K.

En esta definición tiene implícito el lenguaje del sistema de representación numérico, que hace referencia a todas las representaciones de los conceptos matemáticos en forma numérica, por ejemplo; la tabulación de una función como la que se muestra en la figura 2

x	$g(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

figura 1

x	$y = f(x)$
1,998	1,0003
2,004	0,9995
1,9999	1,0002
2,0002	0,9997
2,0001	0,9998
2,00001	0,9999
2,000001	0,99999
2,0000001	0,999999

figura 2

representa el concepto de función y de límite numéricamente de una forma no tan formal, basado en ella podemos afirmar que $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.

En el sistema de *representación numérico* se muestran características de aproximación, dinámicas y locales del concepto de límite, que están muy relacionada con la realidad. Por ejemplo, la definición dada por D'Alambert, en la que expresa el carácter variable, induce al calculo de velocidades instantánea como proceso de límite a partir de la observación de una tabla de espacios recorridos y tiempos.

Para eliminar la parte subjetiva que tiene implícito la definición de Couchy se le dio un carácter formal basado en la definición métrica de Weierstrass (1815-1897):
Si, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un η_0, tal que para $0 < \eta < \eta_0$, lo diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ϵ, entonces se dice que L es limite de $f(x)$ para $x = x_0$. *(Boyer, 1999, p. 696).*

Posteriormente se reemplaza la η de Waierstrass por δ, notación que se usa en la actualidad y que dio origen a la siguiente definición tomada de Michaeel Spivak (1981, P, 111):

La función f tiende hacia el límite L en a significa: para todo $\epsilon > 0$ existen algún $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

En la definición dada por Waierstrass, se privilegia el sistema de representación algebraico, denominado por muchos autores como *sistema de representación analítico* o simbólico. Hace énfasis en el lenguaje algebraico utilizado. Por ejemplo, la funciones representadas por $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $g(x) = x^x$ y $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ y los limites $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, $\lim_{x \to 0} x^x$ y $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x}$ están representados en un lenguaje algebraico. Las operaciones realizadas en este sistema de representación, se hacen teniendo en cuenta las propiedades de los reales como propiedades de orden, de completitud y de igualdad. Este sistema muestra una concepción formal del concepto de límite, con un elevado grado de abstracción, con características muy estáticas y es uno de los sistemas de representación con mayor precisión.

El concepto adquiere un carácter mucho más abstracto al definirlo topológicamente de la forma:
El límite de la función f en el punto $x = a$ es L, si para todo intervalo $(L - \epsilon, L - \epsilon)$ existe

un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$*, tal que si* $x \in (a-\delta, a+\delta)$ *entonces* $f(x) \in (L-\epsilon, L-\epsilon)$.
Esta definición se apoya en la topología generada por la métrica del valor absoluto, sin embargo al utilizar una topología cualquiera se obtiene la definición:
El límite de la función f *en el punto* $x = a$ *es* L *si para todo conjunto* G *que contiene a* L *existe un conjunto abierto* H *que contiene a* $x = a$*, tal que* $f(H) \subseteq G$.

La definición antes mencionada, tiene un lenguaje algebraico, sin embargo, la visualización del concepto se complementa con el *sistema de representación gráfica* que hace referencia a todas las representaciones de los conceptos matemáticos en forma gráfica, por ejemplo; la gráfica de una función y el mismo concepto de límite

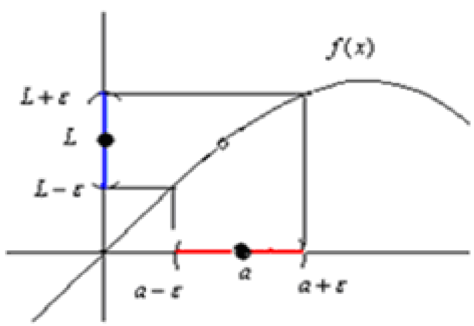


Figura 3

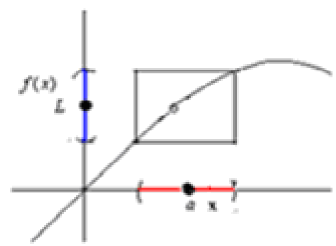


figura 4

En el *sistema de representación gráfica* el concepto de límite tiene un carácter mucho mas estático que el numérico y menos formal que el algebraico, recoge el aspecto visual del concepto de límite y muestra las tendencias de ambas variables (siempre que se entienda la gráfica como una relación entre ellas).

Las definiciones de limite ya mencionas tienen implícito altos grados de abstracción y complejidad. Quizás, esta característica hace que el concepto de límite sea de mucha importancia en campos distintos al de las matemáticas (Ingeniería, Cinesias Económicas, Sociales etc), pero a la vez esta característica se convierte en obstáculo para su comprensión y su enseñanza. Muchas de estas dificultades se han intentado resolver utilizando formas metodológicas apoyadas en situaciones fenomenológicas que dieron origen al concepto. Entre estas podemos mencionar;

- la aplicación geométrica del concepto de límite para determinar la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado.
- la ilustración el concepto de límite en un punto como velocidad instantánea.
- la ilustración el concepto de límite en un punto como una razón de cambio instantánea.
- la ilustración el concepto de límite como una suma infinita de áreas.

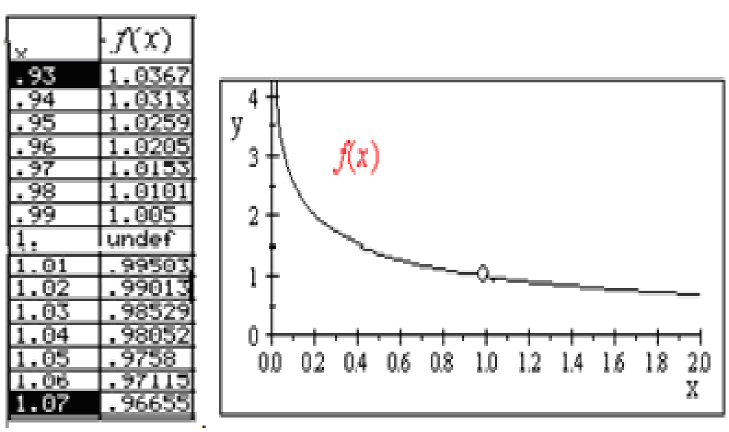
La lista anterior no agota las posibilidades de cómo se pude dar sentido y significado al concepto, sin embargo, en cualquiera de las situaciones utilizada, la explicación se apoya por lo menos en uno de los sistemas de representación ya mencionados. En ese sentido, el uso de los sistemas de representación ha sido un eje transversal en la evolución de concepto y en los procesos de enseñanza- aprendizaje, debido que éstos son el medio de acceso a los conceptos matemáticos (Duval, 2004,p.26). Respecto a lo anterior, Encarnación Castro y Enrique Castro hace un estudio bibliográfico sobre la noción de representación y muestra que para pensar y razonar sobre ideas matemáticas es necesario hacer representaciones internas de las mismas, mientras que para comunicar se necesitan representaciones externas de las mismas por medio de signos. Duval sostiene, (1998, pp.15-21) que las primeras se desarrollan al interiorizar las segundas y la diversidad de representaciones del mismo objeto o concepto desarrolla la capacidad cognitiva de los alumnos. En concordancia con Duval, Encarnación Castro y Enrique Castro (1997, p.103), considera que *dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con cada una de las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, destacando que sistema es mas ventajoso para trabajar con determinadas propiedades.*

Para estos autores, la comprensión del concepto está relacionada con la coordinación de los diferentes sistemas de representación, pues con uno sólo no se obtiene la compresión integral del concepto. “El grado de comprensión viene determinado por el número y las fuerzas de las conexiones (de una red de representaciones). Una idea matemática, hecho o procedimiento se entiende completamente si está conectadas con redes previas” (Hiebert y Carpenter, 1992; 67). En ese sentido, el término comprensión está ligado a los sistemas de representación y, según Luis Rico Romero (2000), la comprensión se caracteriza a partir de una serie de actividades asociada a los sistemas de representación, como las que se

enuncian a continuación:
Formación de representaciones identificable en un sistema dado. Dentro de un mismo sistema hay multitud de representaciones para un mismo concepto, dando lugar a lo que Janvier llama representaciones sinónimas.
Transformación dentro de un sistema de representación (Tratamiento), consiste en la transformación de una representación en otra representación dentro del mismo sistema de representación, conservando las reglas sintácticas. Por ejemplo, en el sistema algebraico, para representar el límite se deben tener en cuenta ciertas propiedades de los números reales, y al pasar de la definición métrica a la definición topológica se hace necesario el conocimiento de estas propiedades.

Notación Algebraica	Definición Métrica	Definición Topológica
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$	para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \mathbb{R}$, $0 < \|x - a\| < \delta$ entonces $\|f(x) - L\| < \varepsilon$	para todo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ existe $(a-\delta, a+\delta)$, tal que si $x \in (a-\delta, a+\delta)$, entonces $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Traducción entre sistemas de representación (conversión). Puesto que así como existe distintas representaciones dentro de un mismo sistema, también existen múltiples sistemas de representación relacionados con un mismo concepto. Por ejemplo, el concepto de límite representado numéricamente (ver figura 7), al traducirlo a una representación gráfica, se le denomina a este proceso conversión.



x	f(x)
.93	1.0367
.94	1.0313
.95	1.0259
.96	1.0205
.97	1.0153
.98	1.0101
.99	1.005
1.	undef
1.01	.99503
1.02	.99013
1.03	.98529
1.04	.98052
1.05	.9758
1.06	.97115
1.07	.96655

Figura 7

Según Duval, la actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de las representaciones, en este sentido, todo progreso de conocimiento en matemática pasa por este trabajo de transformación.

Consolidación de relaciones y procesos en objetos conceptuales (cristalización). Es un paso más general que la simple traducción de un sistema a otro, supone la formación de relaciones y característica de la estructura conceptual representada. Una vez que se consigue la traducción entre todos los sistemas de representación asociados, el concepto surgirá como aquello que tienen en común todas sus representaciones, y en ese sentido el concepto se habrá consolidado (cristalizado).
La modelización; construcción y prueba de modelos matemáticos. Es el hecho de traducir situaciones a uno o a varios sistemas de representación, de utilizar la estructura conceptual creada en la mente para modelizar determinadas situaciones.

Teniendo en cuenta el marco conceptual anterior, este proyecto de investigación tiene como objetivo establecer relaciones entre los sistemas de representación utilizados como estrategias de enseñanza en el concepto de límite y la comprensión del concepto de límite por parte de los estudiantes en cada uno de estos sistemas. Para la consecución del mismo se propusieron los siguientes objetivos específicos:

- determinar el grado de precisión de la idea numérica, gráfica, analítica y verbal del concepto de límite de una función en un punto por parte de los estudiantes.
- identificar los sistema de representación donde se evidencia con mayor y menor frecuencia una idea precisa del concepto de límite por par te de los estudiantes.
- determinar cual o cuales son los sistemas de representación utilizados con mayores o menores frecuencias como estrategia de enseñanza.

La investigación fue orientada teniendo en cuenta los siguientes interrogantes; ¿qué influencia tiene la utilización de los sistemas de representación numérico, gráfico, verbal y algebraico, en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite de una función?,

¿cuál es el grado de precisión de la idea numérica, gráfica, analítica y verbal del concepto de límite de una función en un punto por parte de los estudiantes?,

¿cuál es el sistema de representación donde se evidencia con mayor y menor frecuencia una idea precisa del concepto de límite por parte de los estudiantes?, ¿tiene relación con el sistema utilizada en la enseñanza del concepto de límite?,

¿cuál o cuales son los sistemas de representación utilizados con mayor y menor frecuencia como estrategia de enseñanza?

¿qué incidencia tiene tener una idea precisa del concepto de límite en un sistema de representación X, con relación a la apropiación del concepto límite en un sistema de representación Y?.

Metodología

El presente trabajo está enmarcado dentro de una metodología cualitativa y pretende por un lado, determinar el grado de precisión que tienen los estudiantes sobre la idea numérica, gráfica, analítica y verbal del concepto de límite de una función en un punto, y por otro lado, establecer relaciones con los sistemas de representación utilizados como método de enseñanza.
Para establecer éstas relacione se determinó el grado de precisión de la idea numérica, gráfica, analítica y verbal del concepto de límite de una función en un punto por parte de los estudiantes. Para lo cual, se aplicó un test, basado en el diseño hecho por Sonsoles Belazquez y Tomas Ortegas, en la que se evalúan la conceptualización de límite a través de ciertas categorías de contenidos matemáticos. En el se tienen en cuenta los niveles de respuestas de los alumnos sobre las categorías de contenido matemáticos;

INPL: idea numérica precisa de límite de una función en un punto.
IGPL: idea gráfica precisa de límite de una función en un punto.
IAPL idea algebraica precisa de límite de una función en un punto.

El test se le aplicó 246 estudiantes de ingeniería matriculados en la asignatura de Calculo I, en la Universidad Tecnológica de Bolívar, los cuales estaban a cargo de siete docentes. La prueba se le realizo después que los docentes desarrollaron los contenidos respecto al concepto de límite y posteriormente se realizaron encuestas a los docentes responsables de la enseñanza de estos conceptos, en los que se indaga sobre los sistemas de representación utilizados con mayor y menor frecuencias en la enseñanza.

Resultados

A continuación se presenta el resumen y el análisis de los resultados obtenidos en la investigación sobre las dificultades en los proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de límite y su relación con los demás sistemas de representación.

Los resultados obtenidos se desglosan en el siguiente orden;

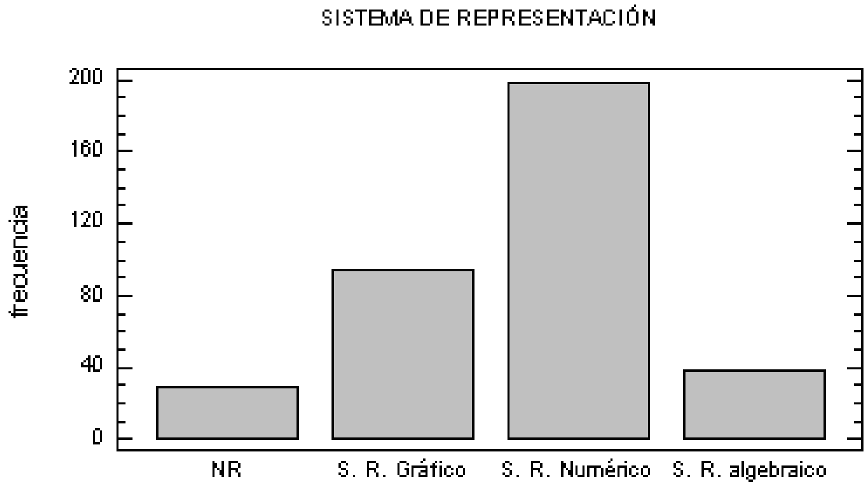
- resultados obtenido en cada sistema de representación (Tabla 1)
- relación entre los resultados obtenidos en sistema X, con relación a los demás sistemas (Tabla 2,3,4)
- resultados sobre los niveles de respuestas de los alumnos sobre las categorías de contenido matemáticos (INPL, IGPL, IAPL) (Tabla 5,6,7)
- resultados sobre los sistemas de representación utilizados por los docentes (8)

En la tabla 1 se observan los resultados obtenidos por los estudiantes en los sistemas de representación Numérico, gráfico y algebraico. De donde se obtiene:

- cursos sometidos a prueba: 11 cursos,
- estudiantes que se sometieron al estudio: 246 estudiantes
- estudiantes que evidenciaron tener una idea numérica del concepto de el límite de una función: 199 estudiantes, constituyendo un 80.8 % del total encuestados
- estudiantes que evidenciaron tener una idea gráfica del concepto de el límite de una función: 94 estudiantes, constituyendo un 38.2 % del total encuestados.
- estudiantes que evidenciaron tener una idea algebraica del concepto de el límite de una función: 39 estudiantes, constituyendo un 15.8 % del total.
- estudiantes que evidenciaron no tener idea algebraica, gráfica ni algebraica del concepto de el límite de una función (NR): 29 estudiantes, constituyendo un 11.7 % del total.

Total de estudiantes	S. R. Numérico	S. R. Gráfico	S. R. Algebraico	NR
246	199	94	39	29

Tabla 1: Resultados obtenidos por los estudiantes en cada sistema de representación

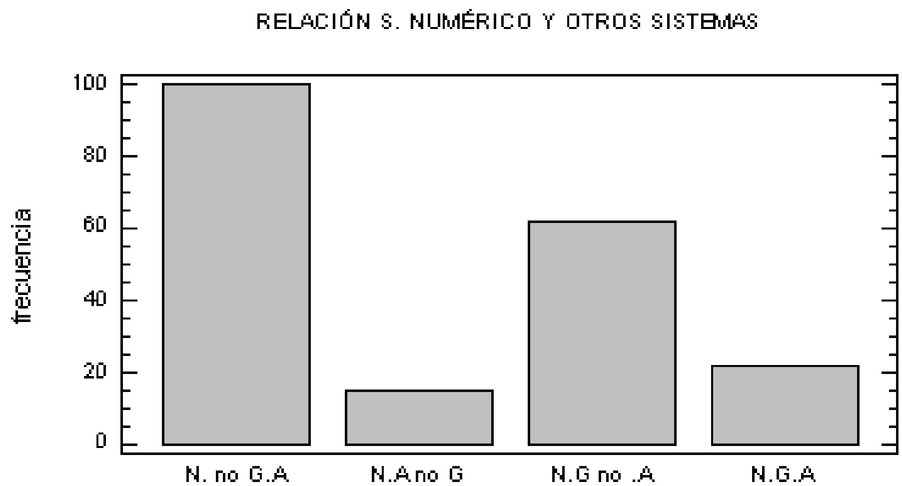


En la tabla 2 se observan la relación entre los resultados obtenido en el sistema de representación numérica y los demás sistemas. De donde se obtiene:

- Estudiantes que evidenciaron tener una idea numérica del concepto de límite de una función: 199 estudiantes.
- Estudiantes que evidenciaron tener una idea numérica del concepto de límite pero que no tienen idea gráfica ni algebraica: 100 estudiantes, constituyendo 50,3 % del total.
- Estudiantes que evidenciaron tener una idea numérica, gráfica pero no algebraica: 62, constituyendo 31.1 % del total.
- Estudiantes que evidenciaron tener una idea numérica, algebraica pero no gráfica: 15, constituyendo 7.6 % del total.
- Estudiantes que evidenciaron tener una idea numérica, gráfica y algebraica: 22, constituyendo un 11 %.

S. de representación	S. Numérico	N. no G.A	N.G no .A	N.A no G	N.G.A
# Estudiante.	199	100	62	15	22

Tabla 2: Relación entre los resultados obtenido en el sistema numérico y los demás sistemas

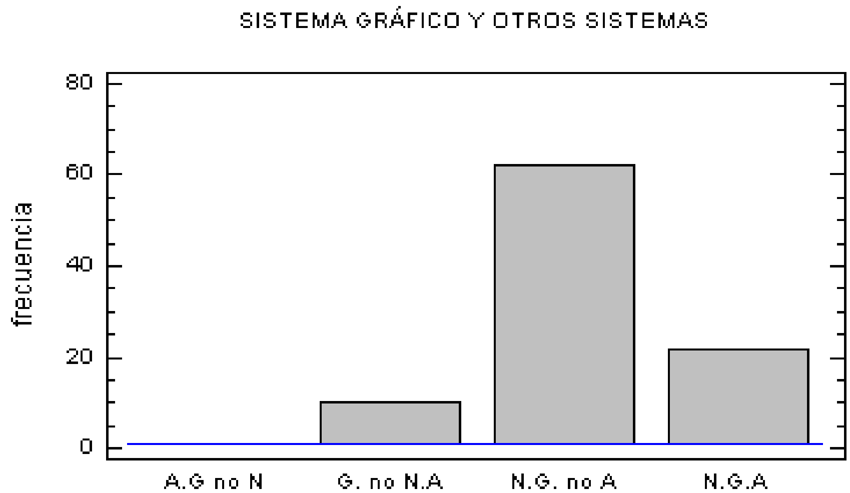


En la tabla 3 se observan la relación entre los resultados obtenido en el sistema de representación gráfica y los demás sistemas. De donde se obtiene:

- Estudiantes que evidenciaron tener una idea gráfica del concepto de límite de una función: 94 estudiantes.
- Estudiantes que evidenciaron tener una idea gráfica pero no numérica ni analítica (G. no N.A): 10 estudiantes, constituyendo un 10.6 % del total encuestados.
- Estudiantes que evidenciaron tener una idea Numérica y gráfica pero no algebraica (N.G. no A.): 62 estudiantes, constituyendo un 66. % del total Estudiantes que evidenciaron tener una idea algebraica, Gráfica, pero no numérica (A.G no N): 0 estudiantes.
- Estudiantes que evidenciaron tener una idea numérica, gráfica y algebraica (N.G.A): 22 estudiantes, constituyendo un 23.4 %.

S. de representación	S. Gráfico	G. no N.A	N.G no .A	A.G no N	N.G.A
# Estudiante.	94	10	62	0	22

Tabla 3: Relación entre los resultados obtenido en el sistema gráfico y los demás sistemas

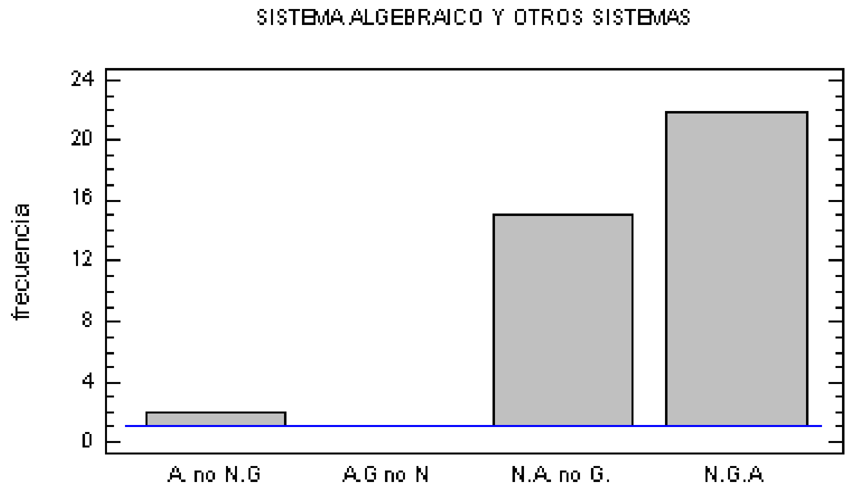


En la tabla 4 se observan la relación entre los resultados obtenido en el sistema de representación algebraica y los demás sistemas. De donde se obtiene:

- Estudiantes que evidenciaron tener una idea algebraica: 39 estudiantes.
- Estudiantes que evidenciaron tener una idea algebraica pero no numérica ni gráfica(A no N.G): 2 estudiantes. Constituyendo, un 5.1 %.
- Estudiantes que evidenciaron tener una idea Numérica, algebraica pero no gráfica (N.A no G): 15 estudiantes, constituyendo un 38.5 % del total.
- Estudiantes que evidenciaron tener una idea algebraica, Gráfica, pero no numérica (A.G no N): 0 estudiantes.
- Estudiantes que evidenciaron tener una idea numérica, gráfica y algebraica (N.G.A): 22 estudiantes, constituyendo un 56.4 %.

S. de representación	S. Algebraica	A. no N.G	N.A no G.	A.G no N N	N.G.A
# Estudiante.	39	2	15	0	22

Tabla 4: Relación entre los resultados obtenido en el sistema algebraico y los demás sistemas



En la tabla 5, 6 y 7 se presentan los resultados sobre los niveles de respuestas de los alumnos sobre las categorías de contenido matemáticos (INPL, IGPL, IAPL) que corresponde al cuestionario 1 que aparece en el anexo.

INPL: Idea numérica precisa de límite de una función en un punto.

INPL1: Dan todos los pasos correctamente para determinar el límite y lo justifican.

INPL2: Determinan el límite, buscan las imágenes que se aproximan al límite y encuentran sus contra imágenes pero no trabajan con intervalo.

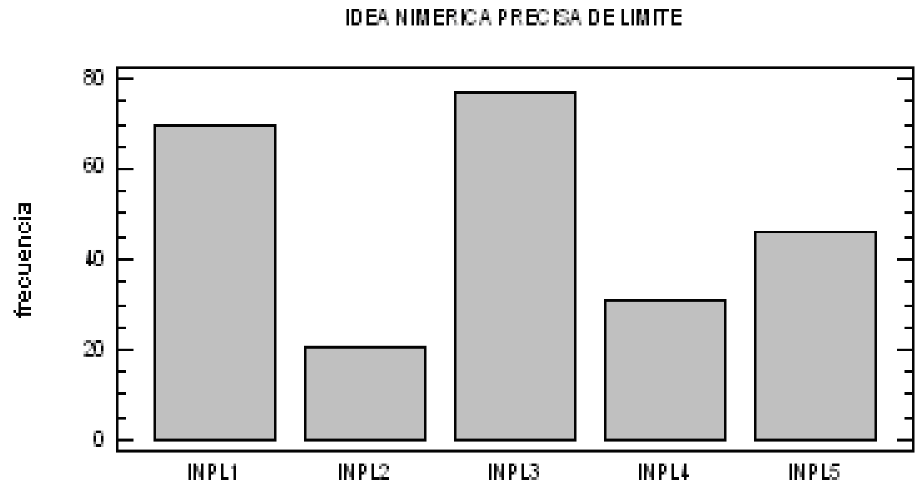
INPL3: Determinan el límite, buscan las imágenes que se aproximan al límite pero no encuentran su contra imagen, confunde imagen con contra imagen y no trabajan bien con intervalos.

INPL4: Determinan el límite pero no determinan las imágenes que se aproximan al límite, por consiguiente no encuentran su contra imagen, no entienden que es una aproximación, no trabajan con intervalo.

INPL5: No contesta o contestan lo más intuitivo

Categorías de contenidos mat.	Total	INPL1	INPL2	INPL3	INPL4	INPL5
# Estudiante.	246	70	21	77	31	47

Tabla 5: Relación entre los resultados obtenido en el sistema algebraico y los demás sistemas



En la tabla 6 se presentan los resultados sobre los niveles de respuestas de los alumnos sobre la categoría de contenido matemáticos IGPL,

IGPL: Idea gráfica precisa de límite de una función en un punto.

IGPL1: Dan todos los pasos correctamente para determinar el límite y lo justifican.

IGPL2: Saben determinar el límite, proyectan números próximo a un punto "a " sobre el eje Y, identifican su imagen, representan correctamente los intervalos, pero no establecen la relación entre el intervalo del punto y el intervalo del límite.

IGPL3: Saben determinar el límite, proyectan números próximo a un punto "a" sobre el eje Y, identifican su imagen, pero no representan correctamente los intervalos, ni establecen la relación entre el intervalo del punto y el intervalo del límite.

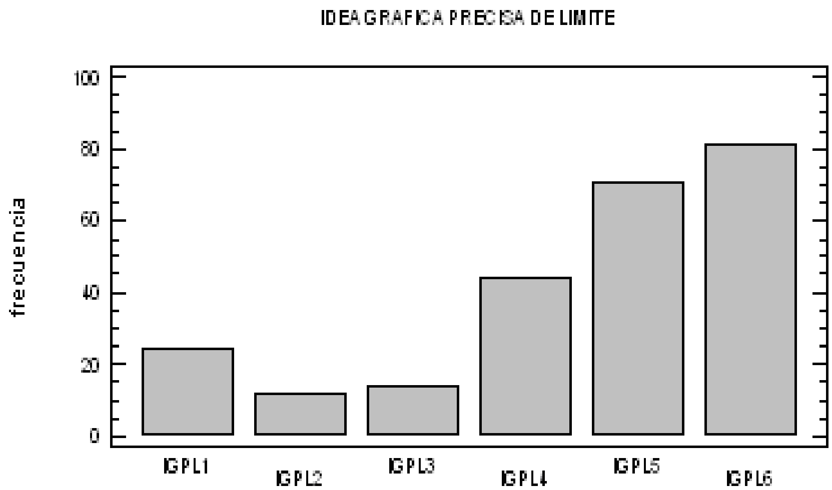
IGPL4: Saben determinar el límite, pero no proyectan números próximo a un punto "a" sobre el eje Y, no representan correctamente los intervalos y no establecen la relación entre el intervalo del punto y el intervalo del límite.

IGPL5: No determina el límite correctamente, o en su defecto lo confunde con la definición de la función en el punto, sin embargo proyecta números próximos al punto o proyectan los intervalos correctamente.

IGPL6: No hacen nada o escriben únicamente la definición de la función en el punto "a" o cualquier otro número.

Categorías de contenidos mat.	Total	INPL1	INPL2	INPL3	INPL4	INPL5	INPL6
# Estudiante.	246	24	12	14	44	71	81

Tabla 6: Idea gráfica precisa de límite (IGPL)



En la tabla 7 se presentan los resultados sobre los niveles de respuestas de los alumnos en la categoría de contenido matemáticos IAPL,

IAPL: Idea algebraica precisa de límite de una función en un punto.

IAPL1: Determinan el límite, obtienen una expresión general para el error y son capaces de relacionarlo con el entorno del punto.

IAPL2: Determinan el límite, pero no obtienen una expresión general para el error y no son capaces de relacionarlo con el entorno del punto.

IAPL3: No determinan el límite. Sustituye correctamente, pero tiene dificultades al realizar operaciones algebraicas.

IAPL4: No determinan el límite, tienen dificultades al sustituir una expresión por otra, confunde la evaluación de la función con la función, o evalúan incorrectamente.

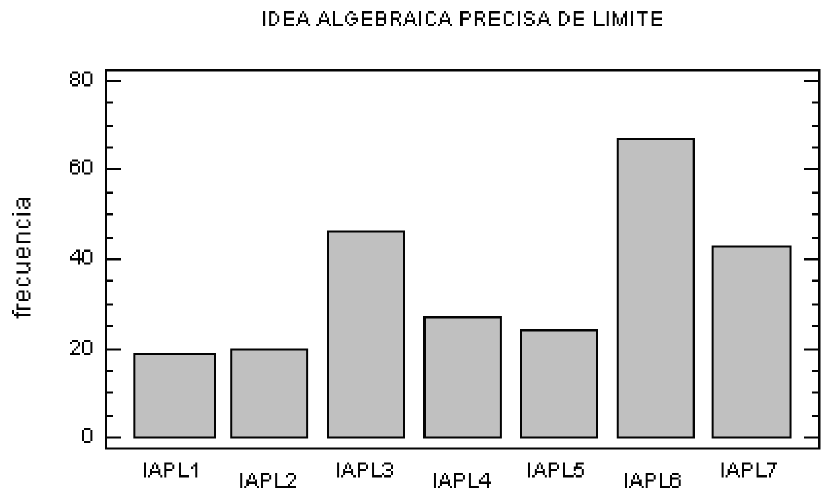
IAPL5: No determinan el límite. Afirman que el límite no existe o que es indefinido.

IAPL6: No determinan el límite. No es consiente de la indeterminación, simple mente sustituye y Admite la expresión como resultado.

IAPL7: No hace nada.

Cat. de contenidos mat.	Tot.	INPL1	INPL2	INPL3	INPL4	INPL5	INPL6	INPL7
# Estudiante.	246	19	20	46	27	24	67	43

Tabla 7: Idea algebraica precisa de límite (IAPL)



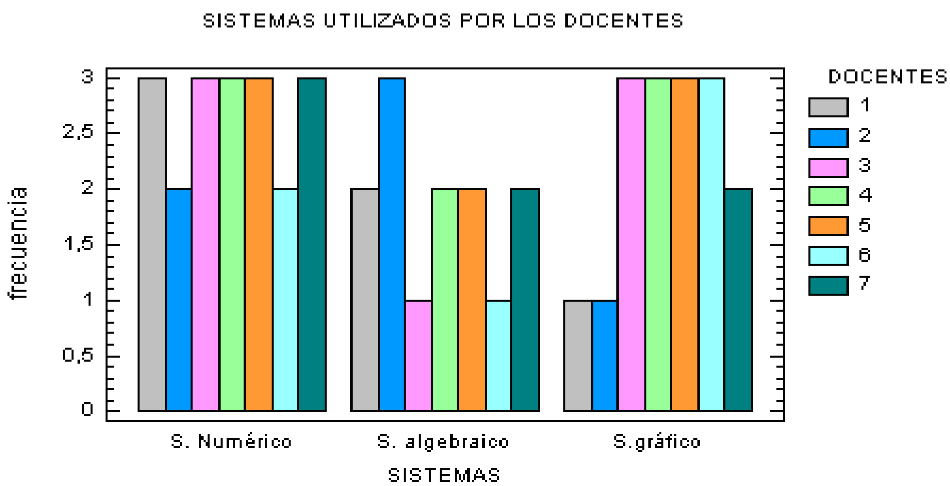
Las entrevistas realizadas a los estudiantes dan cuenta de la representación verbal del concepto de límite por parte de los estudiantes y ponen en evidencia dificultades en la apropiación del concepto. Debido a que son muy extensas, se reproduce un pequeño segmento de una entrevista realizada a un estudiante. Para el análisis, se utilizarán las categorías de contenidos matemáticos diseñados por Sonsoles Belazquez y Tomas Ortegas, en las que se denotan por:

D: Docente
A: Alumno
P.I.F: Pérdida de la idea de función.
L.C.R.C: Límite como el resultado de un cálculo A continuación se reproduce parte de la entrevista realizada sobre el sistema gráfico.
P: Según la gráfica cuál es el límite de $f(x)$ cuando x tiene a 2.
A: Profe... no tengo la función.... para esta parte necesito los datos de $f(x)$ (P.I.F)
P: y ¿Por qué no te apoyas en la gráfica?
A: Si pero... profe... ¿Como voy ha remplazar? (L.C.R.C)
P: Osea que para ti ¿el límite se calcula cuando te dan una ecuación? (P.I.F)
A: bueno... yo se con la función... o sea con la gráfica... no sé (P.I.F).

	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7
S. Numérico	3	2	3	3	3	2	3
S. gráfico	1	1	3	3	3	3	2
S.algebraico	2	3	1	2	2	1	2

Tabla 8: Sistemas de representación utilizado con mayor y menor frecuencia en la enseñanza

En la tabla 8, se observa los sistemas de representación utilizados por los docentes con mayor, con frecuencia intermedia y menores frecuencias. La valoración se hiso teniendo en cuenta lo siguiente:



La utilización del sistema con mayor frecuencia el docente le da una valoración de 3, el sistema utilizados con frecuencia intermedia el docente le da una valoración de 2 y se le asigna una valoración de 1 al sistema con menos frecuencia.
Para explicar el concepto de límite los docentes utilizan:

1. El S. Numérico;
   Con mayor frecuencia: 5 docentes
   Con frecuencia intermedia: 2 docentes

2. El S. Gráfico;
   Con mayor frecuencia: 4 docentes
   Con frecuencia intermedia: 1 docente
   Con menor frecuencia el S. 2 docente

3. S. Algebraico:
   Con mayor frecuencia: 1 docentes
   Con frecuencia intermedia: 4 docente
   Con menor frecuencia: 2 docentes

En la tabla 9, se observa los sistemas de representación donde los docentes consideran que el estudiante tiene mayor dificultad, dificultad intermedia y menor dificultad para la comprensión del concepto de límite. La valoración se hiso teniendo en cuenta lo siguiente:
El sistema donde el docente considera que el estudiante tiene mayor dificultad se le da una puntuación de 3 (tres).
El sistema donde el docente considera que el estudiante tiene una dificultad intermedia se le da una puntuación de 2 (dos).
El sistema donde el docente considera que el estudiante tiene menor dificultad se le da una puntuación de 1 (uno).
En la comprensión del concepto de límite los docentes consideran:

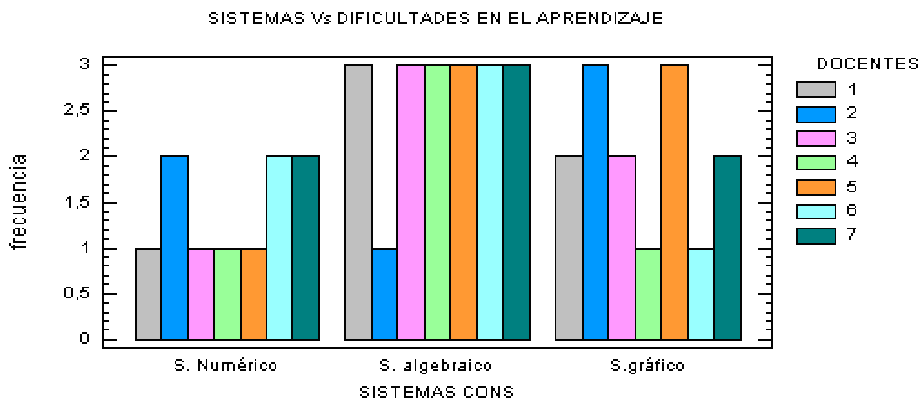
1. El S. Algebraico;
   los estudiantes tienen mayor dificultad: 6 docentes
   los estudiantes tienen menor dificultad: 1 docentes

2. El S. Gráfico;
   los estudiantes tienen mayor dificultad: 2 docentes
   los estudiantes tienen dificultad intermedia: 3 docentes
   los estudiantes tienen menor dificultad: 2 docentes

3. El S. Numérico;
   los estudiantes tienen dificultad intermedia: 3 docentes
   los estudiantes tienen menor dificultad: 4 docentes

Docentes	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7
S. Numérico	1	2	1	1	1	2	2
S. gráfico	2	3	2	1	3	1	2
S. algebraico	3	1	3	3	3	3	3

Tabla 9: Sistemas de representación donde el profesor percibe mayor y menor dificultad en el aprendizaje



Conclusión

El sistemas de representación utilizados con mayor frecuencia por los docentes es el numérico, seguido del sistema grafico, estos sistemas inciden en la apropiación del concepto de limite por parte de los estudiantes, pues en estos sistemas se observa una mayor "comprensión del concepto de límite". Sin embargo, sigue siendo muy deficiente la conceptualización en estos sistemas.

Se observó que la comprensión del concepto de límite en los sistemas gráficos y algebraicos conlleva a que los estudiantes tengan cierto dominio en el sistema numérico. Es decir, si un estudiante en el sistema algebraico determina el límite, obtienen una expresión general para el error y es capaz de relacionarlo con el intervalo del punto, pero además, si en el sistema gráfico tiene una buena conceptualización del límite, se pudo comprobar que tiene una buena conceptualización en el sistema numérico.

La mayor dificultad que tienen los estudiantes se presenta en el sistema algebraico. Hacer transformaciones en este sistema, en donde se ponen en juego operaciones; de factorización, propiedades de orden, de igualdad, distancia entre dos números, (error), dependencias de variables, dependencia de una distancia en termino de otra, se convierte en uno de los grandes obstáculos para la comprensión del concepto.

Al calcular el límite de una función, la dificultad mas frecuente es el no domino del concepto de distancia entre el límite y una aproximación al limite, (dificultad para calcular (error).

Los docentes perciben que los estudiantes tienen mayor dificultad en el sistema algebraico, sin embargo, enfatizan en los sistemas numéricos y gráficos seguidos del algebraico, y admiten que la mayor dificultad para combinar todos los sistemas de representación es el factor tiempo.

Reflexiones y recomendaciones

Teniendo en cuenta la variedad de contenidos matemáticos que intervienen en el sistema algebraico, y el poco tiempo previsto para hacer conversiones entre sistemas de representación, se vuelve necesario, la utilización de recursos tecnológicos (software, graficadoras, etc) como un mediador en la enseñanza, de manera que permitan economizar tiempo, pero al vez, imprimirle dinamismo a las representaciones numéricas y graficas, ganando con esto mucho mas tiempo para que los estudiantes aprovechen las ideas numéricas, graficas y verbales del concepto de límite y pueden tener un mayor éxito el aprendizaje algebraico del concepto de límite.

Teniendo en cuenta que el medio de acceso al concepto de función son las representaciones, por consiguiente, el concepto de límite de una función admite estas representaciones, lo cual sugiere que en la enseñanza del concepto de función se enfatice en estos sistemas para que se desarrollen capacidades de visualización y a al momento de abordar la enseñanza del concepto de límite se facilite la comprensión.

Cuando se pide calcular el límite de una función se observa mucha dificultad en el domino del concepto de distancia entre dos puntos, (error), se recomienda abordarlo en las representaciones numéricas, gráficas y posterior mente en la representación algebraica.

Referencias

[1] Duval Raymond, Los Problemas Fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las Formas superiores en el desarrollo cognitivo. Edición e impresión, Merlin I. D, Cali Colombia, 2004.

[2] Belázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Banega J. "*Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad*". Revista Relime Vol. 9, Num. 2, 2006. Pp 189-209.

[3] Duval, R. (1999) Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *Actas del PME 23*, pp. 3-26.

[4] Belázquez, S. y Ortega, T. (2002). *Nueva definición de límite funcional*. Uno. Vol. 30, pp. 67-82. Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona.

[5] Belázquez, S (1999): *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Tesis doctoral*. Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de Las Matemáticas, Universidad de Valladolid. Valladolid.

[6] Belázquez, S. y Ortega, T. *Los Sistemas de Representación en la Enseñanza del Límite*. Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 4, Num. 3, Novembre, 2001, pp, 219-236

[7] Paul Collatte. J. *Historia de las matemáticas*. Tercer edición, Madrid siglo xxi de españa editores, 1993

[8] Rico, L. et all. *La Educación Matemática En La Enseñanza Secundaria 12*. Segunda edición . 1997.