La criba de la parábola

Britany Johana Salazar Salazar[1]
Diana Isabel Quintero Suica[2]

A través de los tiempos los matemáticos han propuesto múltiples formas, todas fallidas, para intentar conocer la forma de los números primos. Sin embargo, aunque estas formas no han funcionado para este propósito, de estas producciones se obtienen resultados importantes, como lo son las cribas para determinar los números primos menores de cierta cantidad dada. Una de las cribas más conocida es la de Eratóstenes, también tenemos la criba de K.P Swallow y la criba de la parábola, entre otras. En este trabajo presentaremos esta última criba mencionada, que fue creada por Yuri Matiyasevich y Boris Stechkin.

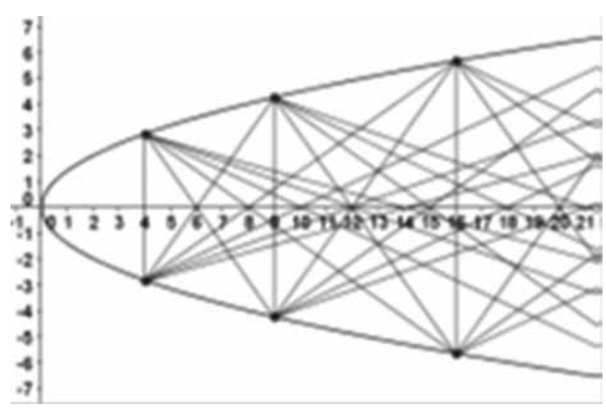
Los números primos, a través de los siglos, han fascinado a muchos matemáticos; especialmente porque no responden a algún patrón hasta ahora conocido. En los intentos de encontrar dicho patrón se han producido diferentes métodos, para tratar de conocer nuevos números primos o incluso para conocer los de números primos menores a cierta cantidad dada. Atendiendo a esta última intención se generan las llamadas cribas.

Una de las definiciones de criba en la Real Academia de la Lengua Española la describe como una 'selección rigurosa'; y justamente eso es lo que hacen las cribas en matemáticas: seleccionar, a partir de un número dado, los números que son primos y los que no los son, es decir, separar los números que son compuestos de los números primos.

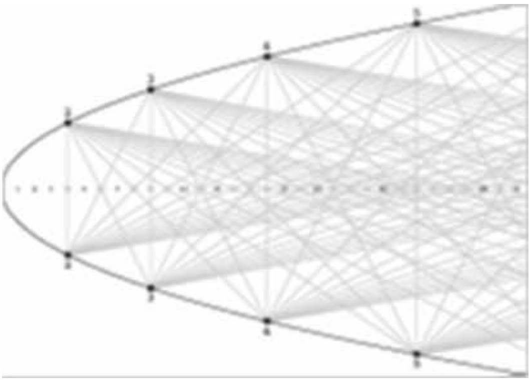
Como lo mencionamos anteriormente, una de las cribas más conocidas es la de Eratóstenes. Sin embargo, existe un método geométrico que es bastante curioso e interesante, llamado la criba de la parábola, presentada en este trabajo, que tiene el mismo fin de seleccionar los números primos dado un cierto número.

Los creadores de esta parábola son el matemático Yuri Matiyasevich y el científico Boris Stechkin, ambos de nacionalidad rusa. El primero, nacido el 2 de marzo de 1947 en Leningrado, no tan conocido por ser el creador de esta parábola sino por resolver el décimo problema de Hilbert en 1970, demostrando que dicho problema es irresoluble. El segundo, nacido el 5 de agosto de 1891, igualmente que el primero, no tan conocido por la criba de la parábola, sino especialmente por ser el padre de la teoría del sistema de motor de aire para respirar.

El funcionamiento de la criba de la parábola consiste en representar gráficamente la parábola $2x = y^2$. Luego, sobre el eje *x* para cada número natural mayor que dos tal que sea número cuadrado perfecto, se trazan rectas perpendiculares al eje de las abscisas tal que cada una de ellas contenga uno de dichos números. La intersección de cada una de estas perpendiculares con la parábola generan dos puntos, uno en el primer cuadrante y otro en el cuarto cuadrante. Por último, se trazan segmentos cuyos extremos sean los puntos del primer y cuarto cuadrante, es decir, cada punto del primer cuadrante será extremo de tantos segmentos como puntos en el cuarto cuadrante haya. Las siguientes imágenes muestran lo dicho anteriormente:



[1] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C. dma_bsalazar058@pedagogica.edu.co
[2] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C. dma_dquintero472@pedagogica.edu.co



Como podemos ver, los segmentos construidos al intersecarse con el eje nunca lo hacen en los números primos. Esto es fascinante!!!

La demostración de que el método funciona, en nuestra fuente de consulta, se presenta en especial para esta parábola en particular, sin embargo, en nuestro trabajo logramos identificar dos familias de parábolas (pueden no ser las únicas), para las cuales el método sigue funcionando. Dichas familias de parábolas son: $y^2 = (2n)x$ y $y^2 = (2n+1)x$, con $n \in \mathbb{Q}$ y $n \geq 1$ para el primer caso, ó $n > -\frac{1}{2}$ para el segundo caso. El argumento de la demostración la presentamos a continuación para una de estas familias:

Sean los puntos *E* y *C* tales que $E_i = (i^2, \sqrt{(2n)i^2})$ y $C_j = (j^2, -\sqrt{(2n)j^2})$, con $i, j \geq 2$ .Toda recta que contiene a E_i y C_j será:

- Si $i = j$ entonces $x = ij$ o lo que es lo mismo $x = i^2$.

- Si $i \neq j$ entonces $\frac{y}{\sqrt{2n}} = -\frac{x}{(j-i)} + \frac{ij}{(j-i)}$

Llamemos *C* al punto de intersección de los segmentos contenidos en estas rectas con el eje , de lo cual puede pasar:

- Si $i = j$ entonces las coordenadas de *C* son $(ij, 0)$.

- Si $i \neq j$ entonces las coordenadas de *C*, igualmente serán $(ij, 0)$.

Con lo cual se demuestra que los segmentos cuyos extremos son los puntos y intersecan al eje en los puntos $(ij, 0)$, es decir en los puntos cuya primera coordenada es producto de dos números enteros positivos mayores o iguales que dos, por lo cual esta coordenada no será un número primo.Es importante resaltar que si bien, nuestro trabajo se ha hecho para dos familias de parábolas, aún sospechamos que puede funcionar para otras tantas parábolas, algo en lo que el lector puede profundizar caracterizando todas las parábolas que cumplen con estas reglas.

También hacemos ver que en las ecuaciones $y^2=(2n)x$ y $y^2=(2n+1)x$, aunque determinamos que $n \in \mathbb{Q}$ no descartamos la posibilidad de que $n \in \mathbb{R}$. Esta es otra buena posibilidad en la cual el lector interesado puede profundizar.

Referencias

Alcaide, J. (2009). Lo racional no interesa. Recuperado de: http://verso.mat.uam.es/web/index.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=279&tmpl=component&format=raw&Itemid=191%E3%80%88%3Des&lang=es.

Gracián, E. (2010). *Los números primos: un largo camino al infinito.* Cádiz, España: RBA Libros.

Morales, M. (2013, 21 de enero). La sorprendente criba de la parábola [web log post]. Recuperado de: http://gaussianos.com/la-sorprendente-criba-de-la-parabola/