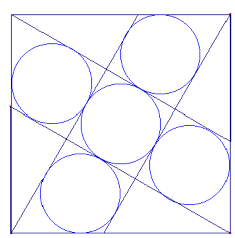
Haciendo geometría a partir de los sangaku

Martha Cecilia Mosquera[1]
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Teoria Sangaku

Los típicos problemas Sangaku:

los problemas sangakus normalmente implican problemas de círculos dentro de círculos tangentes entre sí o bien círculos inscritos en otras figuras, como por ejemplo elipses. También hay problemas que tratan de esferas dentro de otras esferas u otras figuras también tangentes entre sí.



Apuntes y notas sobre problemas sangaku

Tres cuadrados anaranjados se trazan según se muestra en el triángulo rectángulo grande de color verde. ¿Cómo se relacionan los radios de los tres círculos azules?

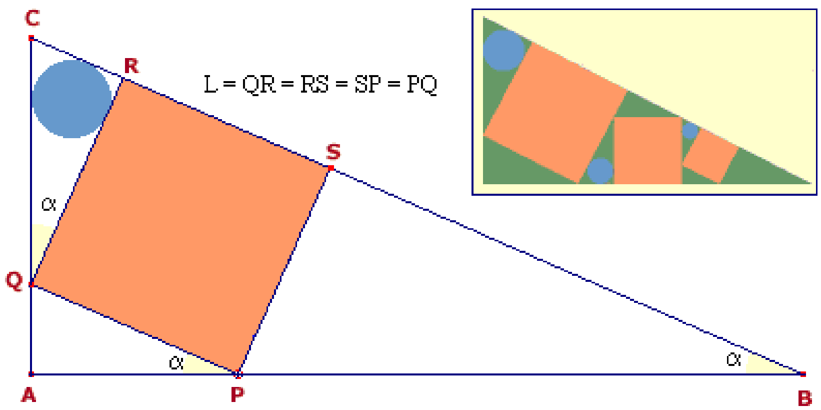
Todos los triángulos rectángulos formados son semejantes. (justifica) En el triángulo APQ se verifica

$$\cos(\alpha) = \frac{AP}{QP} = \frac{AP}{L} \quad \Rightarrow \quad AP = L\cos(\alpha)$$

En PBS

$$\sin(\alpha) = \frac{PS}{PB} = \frac{l}{AB - AP} = \frac{L}{c - L\cos(\alpha)}$$

[1]Docente HC Área Matemáticas Aplicadas a la Química. Email: tangrams49@yahoo.es



De donde $L = \frac{c\ \sin(\alpha)}{1+\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$ que corresponde al lado del primer cuadrado que deseamos inscribir, siendo $c = AB$ el cateto sobre el que se apoya el vértice P (cateto contiguo del ángulo).

Radio del círculo inscrito en el triángulo QRC

En el triángulo QMO $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{QM}$, como $L = QM + r$ y $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$ resulta

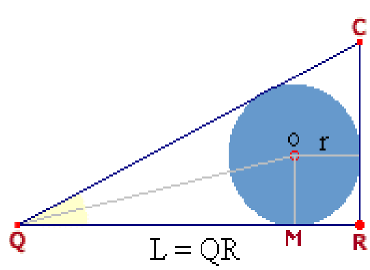
$$r = \frac{L\ \sin(\alpha)}{1 + \sin(\alpha) + \cos(\alpha)}$$

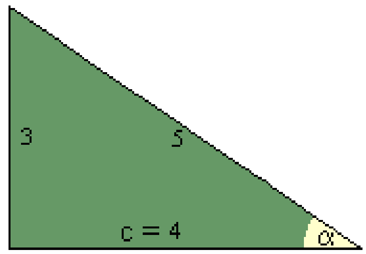
Repitiendo este procedimiento se llega a solucionar el problema.

Si r_1, r_2, y r_3 son los radios de los círculos, el radio del segundo es media proporcional de los otros dos, es decir

$$r_2^2 = r_1 \times r_3$$

Como a continuación vamos a comprobar para el triángulo rectángulo (3, 4, 5)

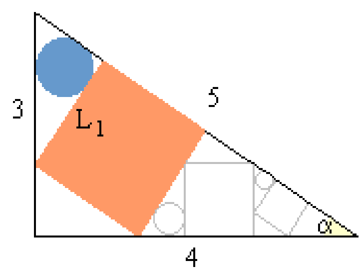




$\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$, $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$, $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$

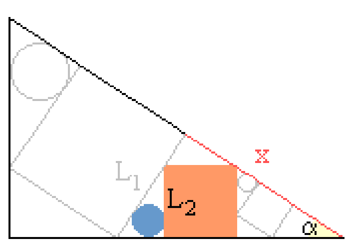
$$k_1 = \frac{\sin(\alpha)}{1+\sin(\alpha)\cos(\alpha)} = \frac{15}{37} \qquad k_2 = \frac{\sin(\alpha)}{1+\sin(\alpha)\cos(\alpha)} = \frac{1}{4}$$

1. Primer cuadrado y primer círculo



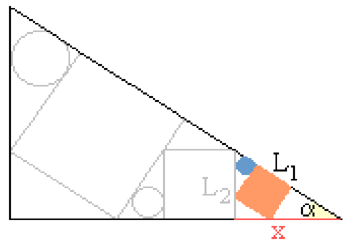
$L_1 = 4 \times k_1 = \frac{60}{37}$, $r_1 = L_1 \times k_2 = \frac{60}{37} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{37}$

2. Segundo cuadrado y segundo círculo



$\tan(\alpha) = \frac{L_1}{x} \Rightarrow x = \frac{L_1}{\tan(\alpha)} = \frac{3}{4} \times L_1$, por lo tanto $L_2 = x \times k_1 = \frac{4}{3} \times L_1 \times k_1 = \frac{1200}{37^2}$ o bien $L_2 = \frac{4}{3} \times L_1 = \frac{4}{3} \times c \times k_1 \times k_1 = \frac{4}{3} \times c \times k_1^2$, y el segundo radio $r_2 = L_2 \times k_2 = \frac{4}{3} \times c \times k_1^2 \times k_2 = \frac{300}{37^2}$

3. Tercer cuadrado y tercer círculo



$\tan(\alpha) = \frac{L_2}{x} \Rightarrow x = \frac{L_2}{\tan(\alpha)} = \frac{4}{3} \times L_2$, por lo tanto $L_3 = x \times k_1 = \frac{4}{3} \times L_2 \times k_1 = \frac{24000}{37^3}$ o bien

$$L_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times c \times k_1^3 \times k_2 = \frac{6000}{37^3}$$

Resultando, efectivamente, que

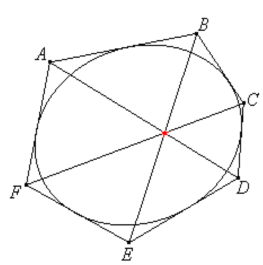
$$r_2^2 = r_1 \times r_3$$

A manera de ejercicio:

1. ¿Qué pasa si el triángulo ABC es isósceles?
2. ¿Qué pasa si en el triángulo ABC, $AC = 1/2CB$?
3. ¿Qué pasa si el triángulo ABC NO ES RECTÁNGULO?

Veamos pues algunos teoremas

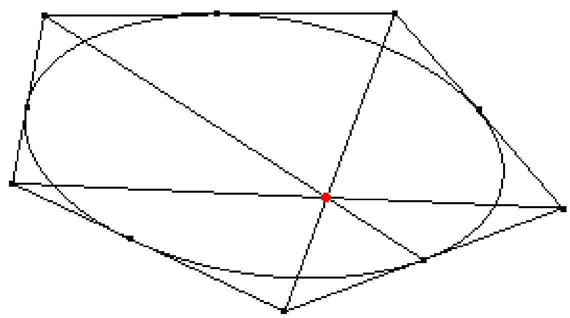
El **teorema de Brianchon** se debe a Charles Julien Brianchon (1783-1864) y afirma que: Las diagonales de un hexágono circunscrito a una cónica se cortan en un punto. La siguiente figura muestra una elipse inscrita en un hexágono. Al punto común a las tres diagonales, coloreado en rojo, en la figura se le conoce como **punto de Brianchon**.



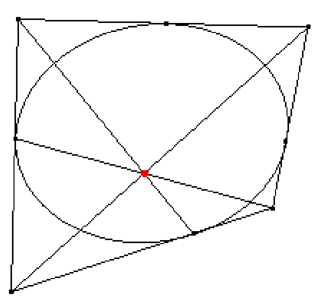
El teorema de Brianchon es el teorema dual del teorema de Pascal. ¿Qué es un teorema dual? Consulta el tema Geometría proyectiva y dualidad.

Casos limites

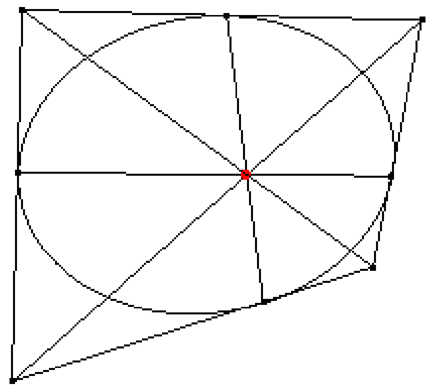
Haciendo coincidir dos lados consecutivos del hexágono en uno solo y sustituyendo el vértice desaparecido por el punto de contacto, obtenemos que en todo pentágono circunscrito a una cónica, la recta que une un vértice con el punto de contacto del lado opuesto, y las diagonales que unen los otros vértices no consecutivos, son tres rectas que concurren en un mismo punto.



Aplicando el mismo procedimiento, podemos obtener que:
En todo cuadrilátero circunscrito a una cónica, si se toman los puntos de contacto de dos lados que se cortan en un vértice, la recta de unión de este con su opuesto y las de unión de los puntos de contacto con los otros dos vértices son tres rectas que concurren en un mismo punto.

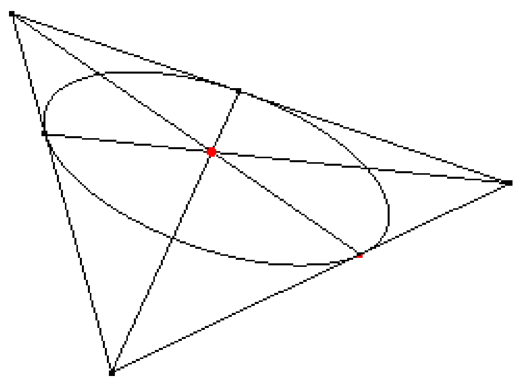


O también, en todo cuadrilátero circunscrito a una cónica, las dos diagonales y las rectas que unen los puntos de contacto de lados opuestos son cuatro rectas que concurren en un punto.



Por último,

En todo triángulo circunscrito a una cónica, las rectas que unen los vértices con los puntos de contacto de los lados opuestos son tres rectas que concurren en un punto.



El **teorema de Ptolomeo** es uno de los muchos resultados relacionados con cuadriángulos cíclicos (inscritos en una circunferencia).

Si el cuadriángulo $ABCD$ está inscrito en una circunferencia (Fig. 1), entonces la suma de los productos de lados opuestos es igual al producto de las diagonales:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

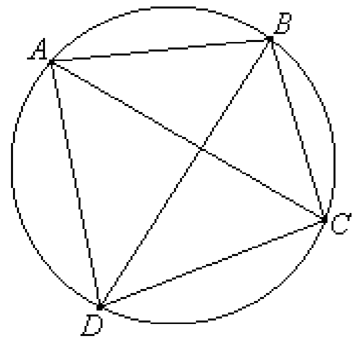


Fig. 1

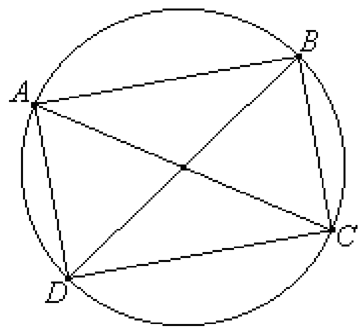
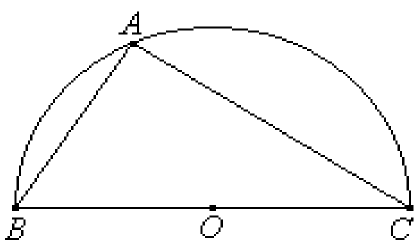
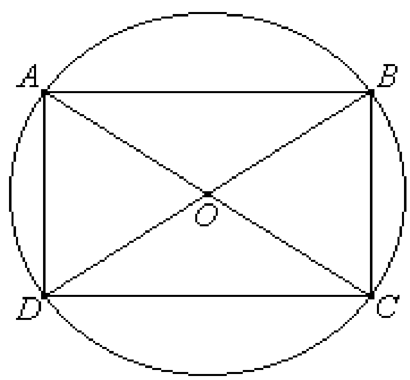


Fig. 2

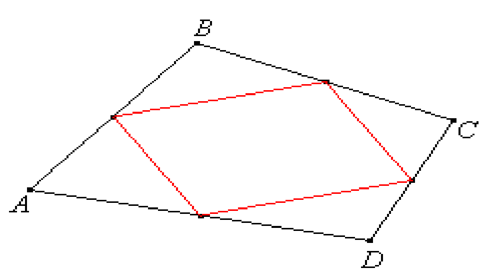
En el caso particular en que $AB = BC$ el teorema se convierte en el teorema de Pitágoras: $AB^2 + BC^2 = AC^2$

El **teorema de Thales** dice que el ángulo inscrito en una semi circunferencia es recto y para probarlo, bien pudo utilizar esta figura.





Del teorema de Varignon, según puede leerse en el libro de Coxeter y Greitzer, lo que sorprende es encontrar que su fecha de publicación no llegó hasta 1731. Se debe a Pierre Varignon (1654-1722). La figura formada cuando se unen en el orden dado los puntos medios de un cuadriángulo, es un paralelogramo, y su área es la mitad de la del cuadriángulo.

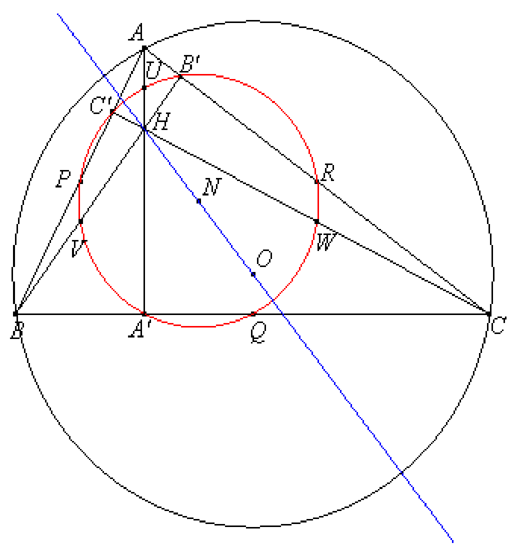


La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo, llamada así por J. V. Poncelet, queda definida por el siguiente teorema:

En cualquier triángulo, los pies de las tres alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices con el ortocentro, están en una misma circunferencia, cuyo radio es la mitad del de la circunferencia circunscrita.

A la circunferencia de los nueve puntos se la conoce también como circunferencia de Euler o circunferencia de Feuerbach (Karl Feuerbach, 1800-1834).

En la siguiente figura, en la que hemos dibujado el triángulo ABC, las alturas AA', BB' y CC' se cortan en el ortocentro H y P, Q y R son los puntos medios de los lados AB, BC y CA. Asimismo, U, V y W son los puntos medios de los segmentos AH, BH y CH. La circunferencia de los nueve puntos se muestra en rojo.



En esta figura pueden observarse algunas propiedades. Por ejemplo,

El centro N de la circunferencia de los nueve puntos está situado en la recta de Euler, equidistante del ortocentro H y del circuncentro O.

Recordemos que la recta de Euler contiene al ortocentro, baricentro y circuncentro de cualquier triángulo.

Otra propiedad de la circunferencia de los nueve puntos es el teorema de Feuerbach:

La circunferencia de los nueve puntos es tangente tanto a la circunferencia inscrita como a las tres circunferencias exinscritas al triángulo.