Defilippe M. (1992) *Alianza entre ciencia, tecnología e industria,* Segunda Edición, Trillas, México D.F.

Kaput J . (2001) *Technology and Mathematics Education,* e n: Gómez P. & Carulla C. *Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas,* ASOCOLME – GAIA. Santafé de Bogotá D.C. Colombia.

Lupiáñez J.L. & Moreno Armella L.E. (2001) *Estudios de Doctorado: Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática,* Universidad de Granada. España.

Ministerio de Educación Nacional. (1998) *Matemáticas: Lineamientos Curriculares,* Primera Edición. Santafé de Bogotá D.C, Colombia.

Moreno Armella L. & Waldegg G. (2001) *Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas,* CINVESTAV – IPN, México, D.F. 2001. En prensa.

Vygotski, L. S. (1995) *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores,* Crítica, Barcelona, España.

Wertsh J. (1993) *Voces de la mente*. Madrid. España, e n: Moreno Armella, L. & Waldegg, G.(2001) *Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemática,* . CINVESTAV – IPN, México D.F.

Exploraciones acerca de ángulos congruentes a partir de *ambientes de aprendizaje dinámicos*

Lorenza Lozano Moreno

Colegio Distrital Repúbica de Costa Rica, Bogotá

Leonor Camargo Uribe

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá

Resumen. El artículo presenta una experiencia de aula sobre un tema geométrico abordado como una propuesta de Situación Problema. Se plantearon importantes estrategias de solución en la exploración de ángulos congruentes, en el contexto de Geometría Dinámica del programa Cabri. Este nuevo ambiente hizo que los roles de los estudiantes y el profesor fueran más dinámicos, haciendo del aprendizaje en geometría un proceso más significativo.

Introducción

La enseñanza de la geometría en la educación tradicional se aborda generalmente mediante la presentación de un compendio de definiciones y fórmulas proporcionadas por el maestro, seguidas de algunos ejemplos. El papel de los alumnos consiste en consignar lo que el profesor explica para luego memorizar dichas definiciones y fórmulas y responder las preguntas en las evaluaciones. En este ámbito, nociones como la de ángulo, son asociadas frecuentemente por los estudiantes con apreciaciones de tipo perceptual, como posición y tamaño y la congruencia de ángulos con igualdad en la medida. Esto debido quizás, a la pobreza del tratamiento de los objetos de estudio, ya que el ambiente rígido de trabajo en el aula de clase limita el tratamiento de los objetos de estudio a unas pocas representaciones, propuestas por el docente la mayoría de veces. El estudiante entonces se limita en su acción y por lo tanto en la posibilidad de ampliar su conocimiento.

La experiencia de aula que se presenta, tuvo como propósito modificar el ambiente de aprendizaje a partir de un enfoque didáctico diferente, que parte de una situación problemática relativa a la construcción de ángulos congruentes, en la cual, la acción del estudiante cambia y el objeto de estudio se convierte en fuente para el establecimiento de relaciones y la identificación de invariantes geométricos. Este ambiente es posible gracias a los contextos tecnológicos que movilizan y amplían el campo experiencial del estudiante. El programa Cabri Géomètre se presenta como una alternativa de exploración dinámica y experimentación de una realidad virtual en la cual el estudiante exterioriza sus creencias acerca de los ángulos y su medida, enriquece sus argumentos acerca de la justificación de la congruencia de ángulos y propone la solución al problema mediante la identificación de las propiedades de los objetos geométricos y sus relaciones.

Hipótesis. El arrastre y la traza activada en el entorno computacional, permitieron identificar propiedades geométricas relevantes en la construcción de ángulos congruentes.

Marco teórico

Las ideas que enmarcan la propuesta y sirven como referente para la evaluación y el análisis de la experiencia de aula, se puede sintetizar en tres afirmaciones:

- la comprensión en geometría se logra a partir de la articulación de diversas representaciones,

- el aprendizaje significativo se logra a través de un ambiente de situación problema y,

- los contextos de geometría dinámica favorecen la construcción de ambientes de situación problema y permiten la articulación de diversos sistemas de representación, contribuyendo así al aprendizaje de las matemáticas.

La primera afirmación está sustentada por diversos investigadores quienes manifiestan que sin recurrir a la idea de representación es imposible estudiar los fenómenos relativos al aprendizaje. Una persona aprende cuando *domina los distintos sistemas de representación y los diferentes tipos de actividades asociadas a estos* (Rico y Romero, 1999). En matemáticas, esta idea cobra mayor peso pues, como lo plantea Duval (1996), en el aprendizaje de un objeto o concepto matemático las representaciones tienen un carácter imprescindible, pues los objetos de conocimiento no son perceptibles por lo que solo pueden estudiarse mediante sus representaciones. El aprendizaje en matemáticas implica pasar de un tipo de representación a otra, avanzando en el nivel de formalización de las representaciones que se usan (Moreno y Waldegg,1992).

Es cuestionable pensar bajo estos presupuestos, que la enseñanza de las matemáticas a partir de la presentación formal de los conceptos, produzca buenos resultados. La pobreza representacional, sobre todo si la única versión de los conceptos que se tiene es la formulación en un lenguaje sintáctico poco significativo para los alumnos, conduce a la dificultad de su aplicación en la resolución de problemas en un contexto de la realidad o de una disciplina. Dada la naturaleza de ese aprendizaje, adquirido generalmente de manera restringida y memorística, los alumnos no logran transferir sus conocimientos a situaciones nuevas.

Proporcionar ambientes enriquecidos se convierte en una responsabilidad de los docentes, en donde los estudiantes tengan la oportunidad de explorar ideas, socializar sus indagaciones y construir conocimiento colectivamente, a partir de la utilización de diversas representaciones.

Esto se logra si se favorece un ambiente de *situación problema* como contexto dentro del cual tenga lugar el aprendizaje.

El enfoque didáctico de *situación problema* aplicado a la geometría, propone entonces privilegiar la actividad del alumno sobre la contemplación pasiva de figuras, símbolos y memorización de conceptos para desarrollar la comprensión de estos a partir de la identificación de invarianzas bajo distintas transformaciones. Se trata de que el aprendiz avance progresivamente en la comprensión y el conocimiento de la geometría mediante la formulación de problemas que le brinden múltiples oportunidades de diseñar, explorar, modelar, conjeturar, definir y argumentar para que posteriormente y cuando esté abonado el camino para ello, entienda mejor la necesidad de las definiciones y la rigurosidad de las demostraciones, en un contexto puramente matemático.

Al favorecer la indagación, el análisis y la propuesta de alternativas de solución, los problemas se constituyen en un desafío de carácter atrayente, divertido, y creativo, que permiten al estudiante exteriorizar sus conocimientos previos para generar hipótesis. Al estudiar la información que aparece en un problema, organizarla e identificar las regularidades presentes en la situación, surgen aspectos matemáticos relevantes y se genera nuevo conocimiento.

Construir estos ambientes se convierte en un reto para los educadores quienes no sólo deben formular problemas interesantes para que los estudiantes se motiven y pongan a prueba su curiosidad, sino que permanentemente deben orientar el trabajo hacia la construcción conceptual, la participación libre y espontánea, la aceptación y valoración de los aportes individuales y la expresión de las ideas, en un ambiente de buena comunicación. Afortunadamente se cuenta hoy en día con programas de geometría dinámica que no sólo favorecen el trabajo con múltiples representaciones sino que, al estar instalados en calculadoras graficadoras con dispositivos para socializar en público las construcciones individuales, favorecen ambientes de aprendizaje de situación problema.

En contextos de geometría dinámica, como el programa Cabri Géomètre, la conceptualización de los objetos geométricos no se hace a partir de algunas pocas representaciones pues la posibilidad de transformar de manera continua las construcciones, mediante la opción *arrastre* de una figura, permite barrer un basto campo de representaciones asociadas. Las propiedades de las figuras emergen como los invariantes de las representaciones cuando se someten al movimiento. La posibilidad de exploración del comportamiento de las figuras geométricas permite una interpretación matemática de las mismas y favorece la conceptualización.

Al tener un contexto de exploración se favorece además en la clase, un ambiente de construcción de conjeturas y el deseo de presentar a los compañeros las producciones individuales o grupales. Las propuestas a los problemas matemáticos son validadas mediante la argumentación, la socialización y el intercambio colectivo de experiencias llegando por último, a la generalización de acuerdos conceptuales orientados por el profesor en un ambiente de *situación problema* diseñado por él.

Diseño de la experiencia

La situación problema c *onstruir un par de ángulos congruentes, cuya congruencia se conserve ante cualquier movimiento de los objetos de la construcción,* fue propuesta a los estudiantes de grado octavo de básica secundaria del Colegio Distrital República de Costa Rica, los cuales trabajaron por parejas, con una calculadora. Previamente a la aplicación de esta situación didáctica, los estudiantes trabajaron en el estudio de las alturas de un triángulo y puntos de concurrencia, el estudio de ángulos suplementarios y la conservación de las áreas de un rectángulo. Es decir, se realizaron aproximadamente diez sesiones previas que permitieron que los estudiantes adquirieran cierta habilidad instrumental al usar la calculadora y conocieran las opciones básicas de indagación acerca de propiedades geométricas.

La propuesta didáctica abordada para el trabajo en el aula fue la de situación problema. Los alumnos propusieron construcciones, resultado de la exploración libre con la calculadora. Luego, el grupo validó dichas propuestas y finalmente se generalizó el conocimiento. A través de este tratamiento se avanzó hacia la construcción de estrategias para obtener ángulos congruentes, cuya congruencia no fuera ocasional, basada en la igualdad en la medida, sino en la búsqueda de criterios de mayor validez, basados en propiedades geométricas como ser opuestos por el vértice o ser alternos internos y externos o correspondientes entre paralelas, que permitieran a los estudiantes reconocer este tipo de ángulos en cualquier contexto y sin medirlos. Se emplearon dos unidades de clase de 90 minutos cada una.

Estrategias usadas por los alumnos

Los estudiantes tuvieron dificultades desde el mismo momento de iniciar la experimentación en la calculadora. Sus apreciaciones acerca de los ángulos que construyeron y de su medida estaban fuertemente influidas por la percepción de propiedades irrelevantes, dependientes de factores físicos como forma, tamaño y posición, producto de un uso muy limitado de las representaciones. Estos son algunos ejemplos:

- *Este no es un ángulo porque esta de para abajo*- (ver figura 1)

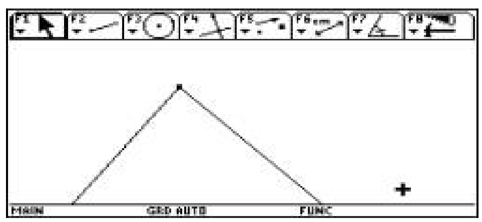


Figura 1

- *Estos ángulos no son congruentes porque no tienen la misma posición* - (ver figura 2)

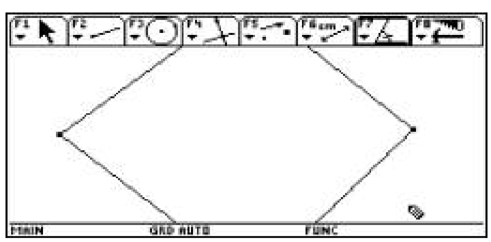
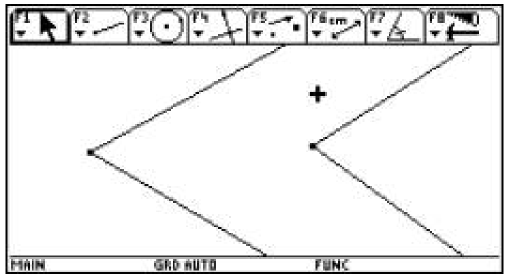


Figura 2

- *¿Cómo hacer para que dos ángulos midan lo mismo por todos los lados*? (ver figura 3)



F igura 3

La posibilidad de *arrastre* de los objetos de la construcción, en la calculadora, proporcionó a los estudiantes un contexto que les permitió experimentar sobre sus creencias acerca de las propiedades de los ángulos y su medida para comenzar a apreciar las propiedades geométricas más que las características perceptuales.

Las estrategias empleadas por los estudiantes se clasifican en los siguientes tres tipos: construcción de ángulos opuestos por el vértice, identificación de pares de ángulos interiores de un polígono regular y obtención de ángulos a partir de una recta que intercepta a dos rectas paralelas.

Estrategia 1: **Construcción de ángulos opuestos por el vértice**

Una primera estrategia consistió en considerar que el ángulo ABC, podía relacionarse con otro ángulo, el opuesto por el vértice, mediante la prolongación de sus lados formando dos rectas que se intersecan por un punto (vértice B).(ver figura 4)

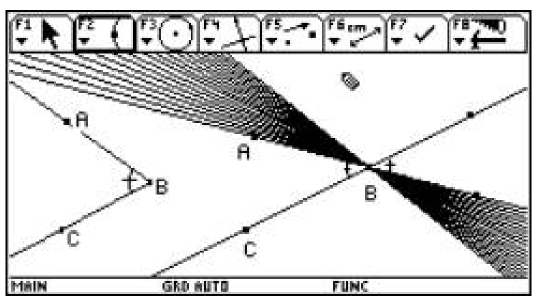


Figura 4

Al mover uno de los lados, por ejemplo $\overline{BA}$, notaron que aumentaba la amplitud del ángulo ABC, pero al hacer esto, simultáneamente una de las rectas (s) se movía en sentido contrario haciendo que la amplitud del ángulo opuesto también aumentara; de esta forma, los dos ángulos en mención permanecían congruentes. De igual manera ocurría si se reducía la amplitud del ángulo ABC. En esta experimentación, los estudiantes aprovecharon la opción *Traza* del programa Cabri Géomètre , para validar esta conjetura (ver figura 4)

Ahora bien, el esfuerzo de socializar la propuesta contribuyó a que los estudiantes mejoraran las formas de expresión al introducir lenguaje matemático buscando precisar sus ideas. Poco a poco fueron haciendo uso de un lenguaje más elaborado tanto gramatical como matemáticamente. Ejemplo de esto lo constituye el siguiente fragmento de una conversación en clase, en la que se evidencian problemas iniciales para nombrar el vértice de los ángulos:

A: (Al arrastrar una de las rectas del ángulo ABC (ver figura 4) dice a sus compañeros) *Miren que lo muevo* (el ángulo) *y vean que los ángulos tienen la misma medida. Voy a explicar por qué no cambia la medida. Porque el ángulo está en el centro, entonces no cambia la medida.*

P: *¿Cuál ángulo?*

A: *Ah, no, el punto.*

P: *¿Cuál punto?*

A: *Ah, el vértice.*

P: *En esa construcción, ¿hay otros ángulos con la misma medida?*

(A muestra los otros dos ángulos de la construcción y dice: *Estos tienen la misma medida porque el vértice está en el centro*.

P: *O sea que estos cuatro ángulos , ¿tienen la misma medida?*

A: *Si*

Los estudiantes en coro manifiestan no estar de acuerdo y un estudiante demuestra que no lo son haciendo la medición de ellos.

Un caso especial de esta estrategia fue considerar el caso de la construcción de dos rectas perpendiculares (ver figura 5)

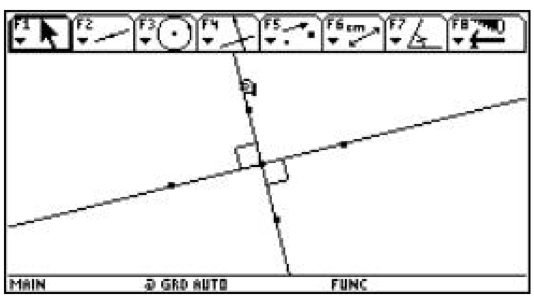


Figura 5

Los estudiantes descubrieron que se formaban cuatro ángulos congruentes, cuya congruencia se conservaba ante el movimiento de las rectas. A pesar de no aportar nuevos elementos para resolver el problema, esta propuesta fue importante pues permitió discutir acerca de los ángulos rectos. Solo hasta ese momento algunos alumnos asimilaron e interiorizaron el significado de la perpendicularidad de los ángulos rectos como propiedad fundamental de ellos. Esta nueva caracterización de los ángulos rectos desplazó la idea de congruencia de ángulos a partir de su medida, por una mas confiable y menos ocasional.

Estrategia 2: **Identificación de pares de ángulos interiores de un polígono regular**

Otra estrategia que se dio fue la de aprovechar las representaciones de los polígonos regulares y estudiar sus ángulos interiores. Se estudiaron los ángulos interiores de un cuadrado, después de un pentágono y posteriormente de un hexágono. (ver figura 6)

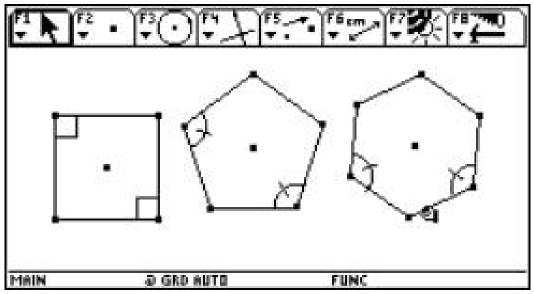


Figura 6

Los estudiantes usaron la opción *arrastre* para variar el tamaño y verificar si la congruencia se conservaba al variar las dimensiones de los polígonos. Esta situación no se ajustaba del todo a la situación problema planteada, ya que no se daba la posibilidad de variar la amplitud de los ángulos, en cada uno de los polígonos estudiados. Sin embargo, la conservación de la medida de los ángulos interiores de los polígonos regulares al variar el tamaño de los mismos, así como la congruencia de sus ángulos interiores, se constituyeron en descubrimientos importantes para algunos de los estudiantes. Otros desviaron su atención hacia el estudio de los polígonos estrellados dejando abierto un amplio espacio de exploración.

Estrategia 3 : **O btención de ángulos a partir de una recta que intercepta a dos rectas paralelas.**

La tercera estrategia propuesta por los estudiantes surgió cuando la profesora formuló la pregunta: *¿Existirán pares de ángulos congruentes que no compartan el vértice, pero cuya congruencia se conserve ante el movimiento de los objetos de la construcción?*

Unos estudiantes hicieron una representación como la que aparece en la figura (ver figura 7)

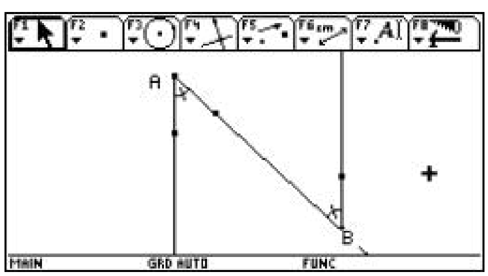


Figura 7

Aparentemente las líneas verticales parecían paralelas y los ángulos A y B medían lo mismo. Pero al *arrastrar* los objetos de la construcción no se conservaba la congruencia, lo que evidenció que los estudiantes seguían basándose en dibujos que se deformaban con el movimiento. Se originó así un conflicto cognitivo porque al descuadrarse la estrategia propuesta, obligó a los estudiantes a proponer otras que soportaran la prueba del arrastre. Construyeron entonces rectas paralelas cortadas por una transversal (ver figura 8)

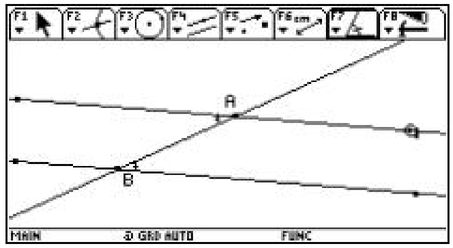


Figura 8

En esta representación, los ángulos estudiados fueron A y B inicialmente. Al intentar hacer una caracterización de estos ángulos que permitiera identificar pares de ángulos congruentes sin medirlos, concluyeron que tendrían que compartir un lado y tener los otros lados paralelos. Esta conjetura fue confirmada al comprobar la congruencia de los ángulos alternos internos. Posteriormente generalizaron la propiedad concluyendo que los lados deberían ser paralelos dos a dos, como en el caso de los ángulos correspondientes.

Conclusiones

El uso del programa de geometría dinámica en la situación problema propuesta, creó un ambiente favorable para que los estudiantes propusieran sus propias estrategias para encontrar ángulos congruentes sin medirlos. De esta manera lograron el reconocimiento de la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice y de los alternos internos, alternos externos y correspondientes entre paralelas. La exploración permitió adicionalmente aclarar propiedades geométricas importantes como la congruencia de los ángulos en los polígonos regulares y la perpendicularidad de los ángulos rectos.

Propiedades del Cabri como el *arrastre* de los objetos de la construcción y la opción *traza activada* favorecen la exploración de propiedades de los objetos geométricos inicialmente relacionadas con las características perceptuales de las figuras, o basando la verificación de las mismas únicamente en la medida, para dar paso a la identificación de propiedades geométricas relevantes. Como los estudiantes no estaban acostumbrados a establecer propiedades geométricas propiamente dichas, inicialmente construyeron ángulos aparentemente congruentes utilizando como comprobación, la medida. Pero más adelante y gracias a que la calculadora les amplió el campo de experimentación, pudieron generar estrategias de aprendizaje que hicieron de este algo más significativo.

Los nuevos roles asumidos por estudiantes y docentes en un ambiente de situación problema, desarrollan y mejoran la comunicación hablada y escrita. El clima de confianza, respeto y tolerancia que se creó, permitió a los estudiantes aprender matemáticas socialmente. Es decir, a través de diálogos inicialmente espontáneos, fruto de sus vivencias y conocimientos previos, empleando un lenguaje cotidiano. Y posteriormente, poco a poco y con la orientación del docente, construyeron un lenguaje más elaborado, el cual incluía vocabulario matemático.

Referencias

Santos L. M . (1996) Didáctica, *Lecturas. Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica.

De Guzmán M. (1991). *Para pensar mejor* , editorial Labor, España.

Moreno L . (1999) *Acerca del Conocimiento y sus mediaciones en la Educación Matemática*. Revista EMA, vol. 4 # 2, p. 103 - 1 16

Moreno L., Waldegg G (s.f.*). Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas* . En RICO L (eds.) *Didáctica de las Matem áticas*, Capítulo 3, editorial Síntesis, Madrid.

Una experiencia de "descubrimiento" en clase de geometría

Leonor Camargo Uribe

Incorporación Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas, MEN

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá

Resumen. En este artículo se presenta una alternativa para aprovechar el papel protagónico del software Cabri como instrumento de reorganización de las actividades en clase en geometría. A partir de una dinámica de resolución de problemas en la que se propone la exploración de la relación pitagórica, se da lugar a la generación de conjeturas que permite a los alumnos poner en juego sus conocimientos informales y avanzar hacia la construcción del conocimiento geométrico genuino. Bajo la orientación del profesor, se revisan aquellas ideas que se creían interiorizadas y se construyen lo que hemos denominado reglas de procedimiento, que permiten a los alumnos el acercamiento conceptual a nuevas propiedades geométricas.

Introducción

El proyecto de *Incorporación de Nuevas Tecnologías en el Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia* que desarrolla el Ministerio de Educación en coordinación con universidades y colegios públicos, está basado en la premisa según la cual, los computadores y las calculadoras a lgebraicas que incorporan paquetes de geometría dinámica tienen gran potencial para cambiar las prácticas de aula en matemáticas. En particular, en geometría, el proyecto considera que el software Cabri Géomètre se convierte en una fuente de exploración que modifica la forma de concebir los objetos geométricos y las estrategias de resolución de problemas, contribuyendo a construir el puente entre la geometría de los dibujos y la geometría de los objetos geométricos (Moreno, 2002a).