Moreno L. (2002b) *Instrumentos matemáticos computacionales*. En MEN (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*. Serie Memorias.

Moreno L. (2002c) *Nueva matemática Experimental*. En MEN (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*. Serie Memorias.

Moreno L; Waldegg G (s.f.*) Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas*. En RICO L (ed) *Didáctica de las Matemáticas* , Capítulo 3, Editorial Síntesis, Madrid.

Noss R ; Hoyles C (1996) *Windows on mathematical meaning, learning cultures and computer.* En MORENO L; WALDEGG G (s.f.*) Fundamentación cognitiva del currículo de Matemáticas*. En RICO (ed) *Didáctica de las Matemáticas,* Capítulo 3 del libro, Editorial Síntesis, Madrid.

NCTM (1991). Estándares curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Editorial: Grupo Thales, Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Madrid.

Exploración, construcción, argumentación y demostración en la solución de un problema [1]

Ernesto Acosta Gempeler

Escuela Colombiana de Ingeniería, Bogotá

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Fabiola Rodríguez García

Instituto Pedagógico Nacional, Bogotá

Leonor Camargo Uribe

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá **[2]**

Resumen . En este artículo mostramos cómo la interacción de un individuo con el programa de geometría dinámica Cabri al enfrentarse con la solución de un problema, permite el reconocimiento de relaciones implícitas en el enunciado que le ayudarán a construir la solución y a argumentar sobre su validez. Una vez más se ejemplifica la idea de que la geometría dinámica se constituye en un dominio de abstracción que permite al aprendiz utilizar la calculadora (o el computador), como socia cognitiva, facilitando su participación en la construcción del conocimiento.

Introducción

En diversos trabajos se ha presentado el potencial didáctico del software de geometría dinámica. Se muestran sus bondades en la construcción de ambientes de aprendizaje que favorecen actividades de exploración de propiedades y relaciones geométricas, seguidas de la verificación de las mismas, con el uso de mecanismos de control que vienen incorporados al programa. Sin desconocer estas actividades como esenciales en el aprendizaje escolar, algunos críticos han manifestado su preocupación por la pertinencia de éstas como actividades matemáticas genuinas que, por no ser fruto de una construcción deductiva no conducen al desarrollo de conocimiento matemático propiamente dicho. Esta inquietud ha llevado a los educadores matemáticos a plantearse el siguiente interrogante: *¿cómo tratar con la naturaleza descontextualizada de las proposiciones matemáticas que forman parte de una cultura matemática universal y, al mismo tiempo, con la necesidad de admitir que el conocimiento que un estudiante construye, produce, asimila, se da siempre mediado por un contexto?* (Moreno, s.f.)

En este artículo queremos mostrar que el uso de un software de geometría como CABRI permite, a partir de la dinámica entre la exploración y la sistematización de propiedades y relaciones geométricas presentes en la solución de un problema, generar argumentos para comprobar afirmaciones y validarlas dentro del contexto geométrico en que se trabaja. Estas actividades conforma n parte esencial de la sistematización y el refinamiento de la argumentación para dar sentido a lo que se entiende en matemáticas como *sistema axiomático* y *demostración.* El uso del software se convierte así en un puente entre el conocimiento empírico que se valida a través de la ostensión y el conocimiento formal que se valida a través de la deducción.

Hemos podido detectar que para aprovechar al máximo el potencial del software es necesario conjugar cuatro momentos estrechamente relacionados que se combinan permanentemente en el trabajo matemático: *la exploración, la construcción*, *la argumentación y la demostración.* Para ejemplificar estas ideas vamos a presentar la manera como tres profesores de matemáticas se enfrentan individualmente a la solución del siguiente problema: ***Construir un triángulo equilátero de tal forma que cada uno de sus vértices esté sobre cada una de tres rectas paralelas dadas.*** Haremos una descripción, de manera sucinta pero lo más fiel posible de las estrategias utilizadas en cada una de las soluciones y sus argumentaciones, procurando destacar los momentos mencionados anteriormente. Cada una de las soluciones se diferencia esencialmente en la estrategia empleada que depende principalmente de la exploración inicial. De esta manera pretendemos mostrar la riqueza de alternativas que surgen en el ambiente CABRI para enriquecer el aprendizaje ya que los aprendices tienen la posibilidad de desarrollar diversas estrategias de solución a un mismo problema y convencerse de que los problemas de matemáticas no tienen necesariamente un único camino de solución. Esperamos que el lector pueda tomar elementos de lo expuesto aquí para enriquecer su trabajo en el aula.

Marco Teórico

Este trabajo asume los presupuestos teóricos desarrollados en el proyecto *Incorporación de Nuevas Tecnologías en el Currículo de Matemáticas de la Educación Básica de Colombia* (MEN, 2000) centrándose en lo que se ha denominado un *dominio de abstracción* (Moreno, 2002) y en la conceptualización de la argumentación desde una perspectiva más amplia que la tradicional.

La noción de *dominio de abstracción* surge en el panorama educativo cuando se aborda el reto de construir significado de nociones matemáticas que en esencia son abstractas (Moreno, s.f.). Al aceptar que la cognición de un estudiante no se adapta de modo natural a la organización formal de una disciplina, y que la exigencia cognitiva que significa el enfrentarse al aprendizaje de las matemáticas a partir de este tipo de organización es enorme, se ha visto la necesidad de aceptar que el conocimiento y el aprendizaje son por naturaleza *situados,* es decir, dependen en su construcción y en su interpretación, de la especificidad del contexto en el que surgen (Wertsh, 1993).

Al usar contextos que posibiliten acceder al tratamiento de problemas matemáticos a partir de los conocimientos que se poseen, se desencadena una exploración sistemática que da lugar al establecimiento de asociaciones, regularidades, invariantes, etc., y a una posterior creación de nuevos entes matemáticos. Se dice que el contexto se constituye en un dominio de abstracción pues pone a disposición del estudiante los recursos que estimulan la construcción de significados, brinda un soporte para establecer conexiones entre porciones aisladas de conocimiento, permite conectar el conocimiento informal con fragmentos de conocimiento matemático y permite avanzar hacia la abstracción de la esencia de las relaciones encontradas, dando lugar a construcciones intelectuales de mayor estatus conceptual. El conocimiento avanza hacia proposiciones generales cuyo rasgo característico es estar descontextualizadas y se accede así, a mayores niveles de complejidad.

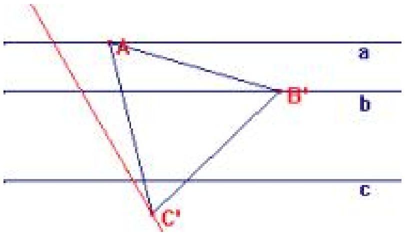
Los recursos computacionales se constituyen en sí mismos en un dominio de abstracción. Estos contextos han modificado profundamente la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático, al estructurar la exploración favoreciendo una mayor capacidad de cálculo, un mayor poder expresivo y flexibilidad en la transferencia entre sistemas de representación (Moreno, 2002). El estudiante puede expresar la generalidad matemática, inicialmente en dependencia del medio, para luego orientar sus expresiones más allá, hacia las descripciones abstractas de las estructuras matemáticas. Se hace posible partir de la exploración de ideas dentro de ámbitos particulares, concretos y manipulables pero que contienen la semilla de lo general y lo abstracto. Con el tiempo, es posible articular los resultados de las exploraciones de manera tal que éstos puedan ser llevados más allá del medio computacional hacia dominios de teorías matemáticas abstractas.

Al poner de presente la necesidad de constituir dominios de abstracción en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, se pone en evidencia la necesidad de replantear la noción de argumentación, pues ésta debe verse como una herramienta eficaz y confiable para establecer la validez de una proposición y no como una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto definido de esquemas impuestos por la comunidad matemática. Dentro de un dominio de abstracción es posible construir argumentos a favor de una proposición que si bien no constituyen una demostración formal, sí constituyen, en el interior del dominio de abstracción correspondiente, una argumentación para resultados expresados en el lenguaje del medio y cuyo sentido proviene de él, aunque puedan tener un nivel de generalidad mayor (Moreno, 1996). Así por ejemplo, al trabajar con CABRI en un ambiente de resolución de problemas, se delimita un contexto cuyos argumentos provienen del mundo de la geometría dinámica y los recursos del software. La argumentación utiliza la información, los hechos aceptados en el entorno CABRI y las posibilidades de construcción geométrica constituyéndose así en un socio cognitivo que apoya a los estudiantes en su paso hacia la formalización dentro de una teoría geométrica. De esta manera se va construyendo de manera simultánea la racionalidad matemática a partir de un dominio de abstracción y la actividad de validar, que exige la solución de un problema.

Aunque la demostración, entendida como mecanismo de incorporación de un hecho matemático a una teoría de tal manera que éste sea resultado de la misma, constituyeel método de validación por excelencia de las proposiciones matemáticas, el énfasis en las demostraciones ha comenzado a cambiar en el ámbito educativo ante el interés por el estudio de las prácticas matemáticas que resaltan la importancia de la argumentación como mecanismo de explicación, verificación, constatación de hechos, y validación, con un sentido de interesar más que de formalizar. Los ejemplos del trabajo de profesores alrededor de un problema matemático, propuestos a continuación apuntan en esa dirección.

Solución 1

El profesor 1 comenzó su *exploración* construyendo tres rectas paralelas *a, b, c* y un segmento *AB'* de tal forma que *A* estuviera sobre *a* y *B'* estuviera sobre *b*. Luego construyó el punto *C'* de tal forma que el triángulo *AB'C'* fuera equilátero (ver figura 1). Al mover el punto *B'* sobre la recta *b*, el punto *C'* se movía en la pantalla, lo que permitió visualizar relaciones existentes entre el lugar geométrico de *C'*, las rectas paralelas y el triángulo equilátero buscado. Aparentemente este lugar geométrico era una recta que cortaba a las otras tres. Además, uno de los vértices del triángulo buscado debía ser el punto de corte del lugar geométrico y la recta *c*.



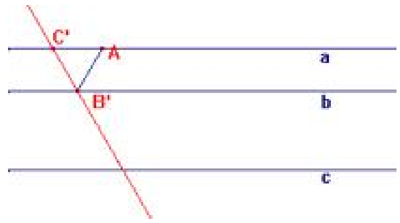
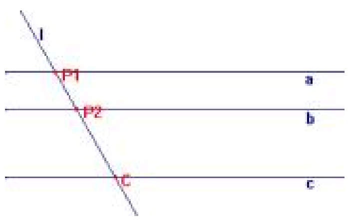


Figura 1

Figura 2

En un instante de la exploración (ver figura 2) el profesor 1 observó que cuando *C'* estaba sobre la recta *a*, *B'* parecía estar en el lugar geométrico de *C'*, lo que indicaba que el lugar geométrico de *C'* debía ser una recta que formaba un ángulo de 60^{o} con las rectas paralelas dadas, pues *AB'C'* era equilátero.

Construyó entonces una recta *l* formando un ángulo de 60^{o} con las rectas paralelas y nombró con P_1, P_2 y *C* los puntos de intersección (ver figura 3). El punto *C* debía ser uno de los vértices del triángulo buscado pues correspondía a la intersección de la recta *c* con el lugar geométrico de *C'.*



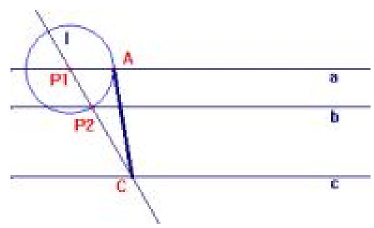
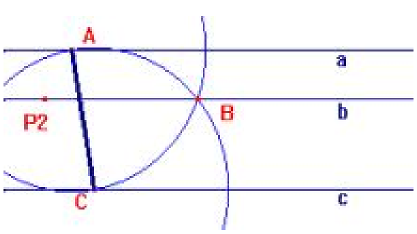


Figura 3

Figura 4

El punto *A* del triángulo que se estaba buscando debía estar sobre *a* y además $\overline{P_1P_2}$ debía ser congruente con $\overline{P_1A}$ (ver figura 2). El profesor 1 construyó *A* sobre *a* con esas características. Así, $\overline{AC}$ debía ser uno de los lados del triángulo buscado (ver figura 4). Después trazó dos circunferencias con centros en *C* y *A* y radio *AC*, respectivamente. El punto de intersección *B* de estas circunferencias debía ser el tercer vértice buscado (ver figura 5).



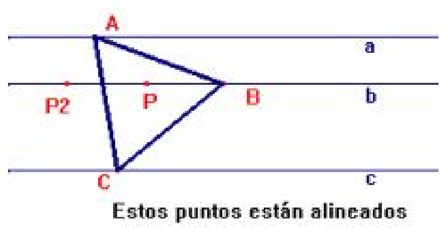


Figura 5

Figura 6

La construcción mostraba explícitamente que el triángulo *ABC* era un triángulo equilátero. Lo que no sabía con certeza era si *B* estaba o no en la recta *b*. Para *argumentar* este hecho usó los recursos del programa Cabri, aceptados como válidos en este dominio de abstracción. Tomó un nuevo punto *P* sobre *b* y preguntó al programa si P_2, *B* y *P* estaban alineados. En efecto, el programa respondió que así era (ver figura 6).

Solución 2

El profesor 2 comenzó la *exploración* construyendo tres rectas paralelas *b, c, a* y el segmento *CB´* de tal forma que *C* estuviera sobre *c* y *B'* estuviera sobre *b*. Luego construyó el punto *A´* de tal forma que el triángulo *A´B´C* fuera equilátero. Al mover el punto *B´* sobre la recta *b*, el punto *A´* se movía en la pantalla y esto le permitió explorar las relaciones existentes entre el lugar geométrico de *A´* y las rectas paralelas. Uno de los vértices del triángulo buscado era el punto de corte del lugar geométrico y la recta a. Aparentemente este lugar geométrico era una recta que cortaba a las tres rectas formando un ángulo de 60 grados (ver figura 7). Con el ánimo de verificar si el ángulo era efectivamente de 60 grados trazó la recta *d* perpendicular a *c* pasando por *C* tratando de buscar una relación trigonométrica en los triángulos involucrados. Sin embargo, observó que el punto *P* de intersección entre el lugar geométrico y *d* era el simétrico de *C* con respecto a *b*. (ver figura 8). Con estas observaciones decidió hacer su *construcción* .

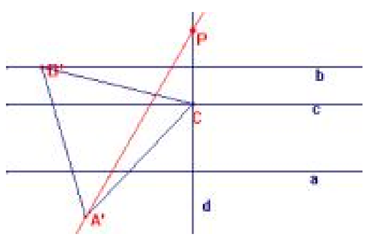


Figura 7

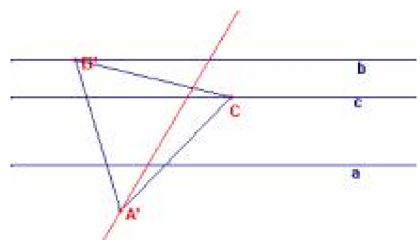


Figura 8

Construyó el punto *P* simétrico de *C* con respecto a *b* y un triángulo equilátero como el construido en la figura 7 (ver figura 9). *A'P* sería el lugar geométrico de *A'* cuando *B´* se mueve sobre *b*, y como el punto *A* de intersección entre *A'P* y *a* debía ser uno de los vértices que se estaba buscando, *AC* debía ser uno de los lados del triángulo (ver figura 10).

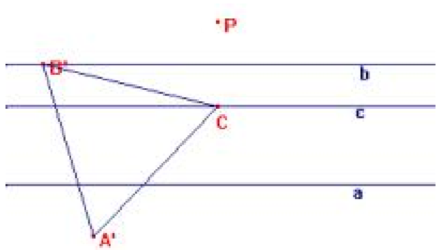


Figura 9

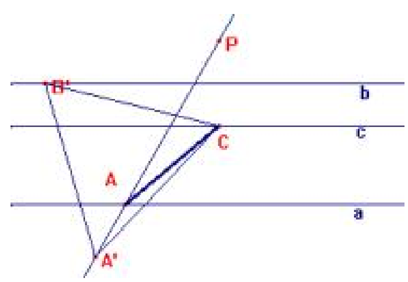


Figura 10

Bastaba trazar una circunferencia con centro en *C* pasando por *A*. El punto *B* de intersección con *b* debía ser el tercer vértice y *ABC* el triángulo buscado (figura 11).

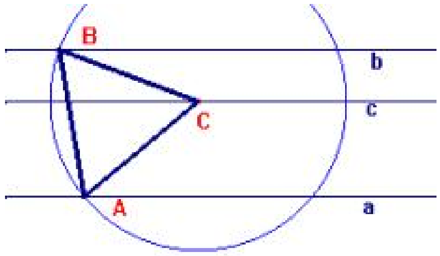


Figura 11

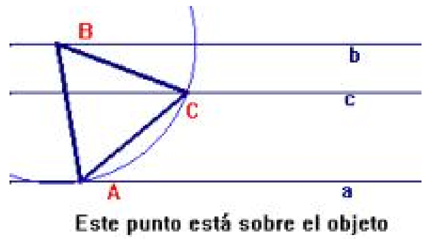


Figura 12

Para *argumentar* este hecho el profesor partió de aceptar que la construcción mostraba explícitamente que *B* estaba en *b*, *C* estaba en *c*, *A* estaba en *a* y que *AC* era congruente con *BC*. Lo que no sabía con certeza era si *AB* era congruente con los anteriores. Construyó la circunferencia con centro en B pasando por C y preguntó al programa si *A* pertenecía a esta circunferencia. En efecto, el programa respondió que así era (ver figura 12).

Solución 3

El profesor 3 comenzó su *exploración* con una construcción igual a la del profesor 2 y llegó a las mismas relaciones iniciales entre las rectas paralelas y el lugar geométrico, pero también observó que el lugar geométrico de *A'* era la recta que pasa por dos vértices *A* de dos triángulos equiláteros construidos como *A'B'C* y *A''B''C*(ver figura 13) y que la intersección de la recta *A'A''* con a era el segundo vértice *A* buscado (ver figura 14).

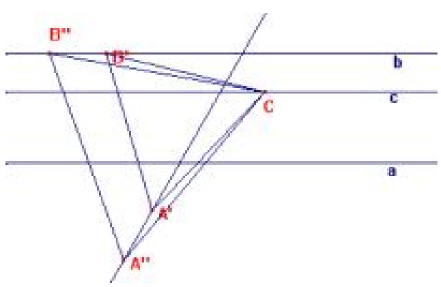


Figura 13

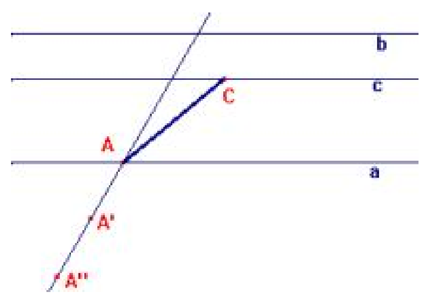


Figura 14

Realizó la *construcción* de dos triángulos equiláteros *A'B'C* y *A''B''C* para obtener el lado *AC* del triángulo buscado (ver figura 15).

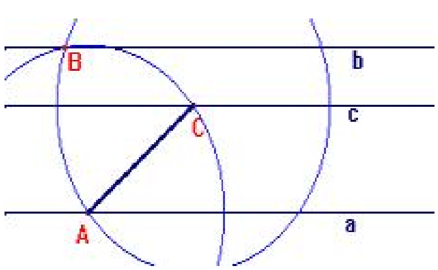


Figura 15

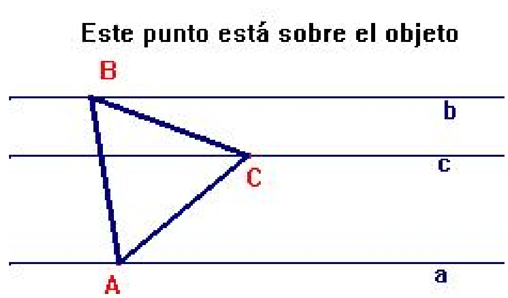


Figura 16

La construcción mostraba explícitamente que el triángulo *ABC* era equilátero. Lo que no sabía con certeza era si el punto *B* estaba o no en *b*. Para demostrarlo, preguntó al programa si *B* estaba en *b*. En efecto, el programa respondió que así era (ver figura 16).

Paso a la demostración

El primer profesor se puso en la tarea de demostrar el hecho de que el triángulo obtenido al realizar la construcción era en realidad equilátero. Obsérvese que esto no quiere decir que no pudiera serlo, ya que lo hecho hasta el momento no deja ninguna duda. El uso de las palabras ...*en realidad...* quiere decir que el hecho ya obtenido se puede incorporar a una teoría geométrica para que se vea como resultado de la misma. El profesor lo que hizo fue realizar una nueva construcción, a partir de la evidencia recopilada en su primer intento, que permitiera una manera más sencilla de deducir el hecho de resultados de una teoría geométrica. La teoría geométrica a la que nos referimos aquí es cualquiera que acepte los siguientes hechos como *verdaderos*, en el sentido de que se han deducido de un conjunto de axiomas que no vamos a especificar:

1. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

2. Diagonales correspondientes de paralelogramos congruentes son congruentes.

Estos hechos se deducen de las proposiciones que se refieren a la congruencia de triángulos a partir de la congruencia de ciertos lados y ángulos correspondientes de los mismos (lado-ángulo-lado, lado-lado-lado, etc.) y las correspondientes a los ángulos alternos internos formados por una recta que corta dos paralelas. Al profesor no le interesaba hacer una demostración con todo detalle del hecho, sino mostrar la posibilidad de hacerlo.

La construcción que realizó el profesor, que dentro de su narración describió como natural a partir de la exploración que había hecho inicialmente, es la siguiente.

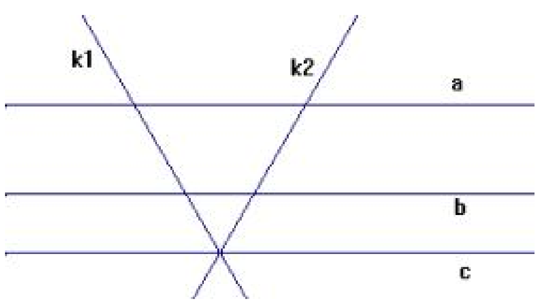


Figura 17

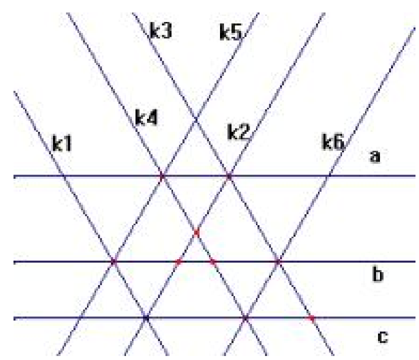


Figura 18

La recta k_1 forma un ángulo de 60^o con las rectas a, b, y c, y la recta k_2 forma a su vez un ángulo de 60^o con k_1 (figura 17). Las rectas k_3, k_4, k_5, y k_6 se construyeron todas mediante paralelismo con k_1 y k_2 (figura 18). Por consiguiente, los paralelogramos de la figura 19 son congruentes, de donde el triángulo de la figura 20 es equilátero.

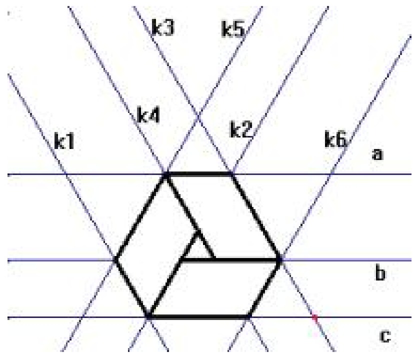


Figura 19

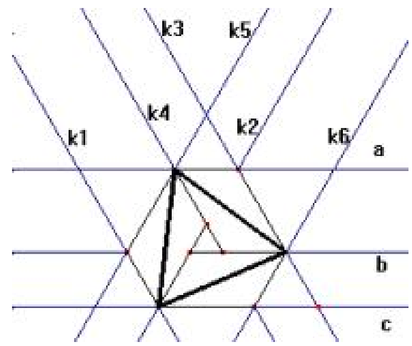


Figura 20

A pesar de que los profesores propusieron otras demostraciones acordes con sus exploraciones no las expusimos aquí por economía de espacio. Sin embargo, el razonamiento presentado ilustra con claridad lo que queremos plantear.

Conclusiones

Como se puede apreciar en el trabajo de los profesores, la riqueza didáctica generada por la interacción con el programa CABRI va más allá de la exploración y la comprobación de propiedades. La interacción con el programa da ideas al aprendiz (profesor o estudiante) de las relaciones implícitas en las condiciones del problema, de la lógica particular de construcción y de los argumentos que se deben usar para una demostración formal dentro de una teoría geométrica. Esta experiencia motiva a estudiar más a fondo las posibilidades de formalización a partir de un conjunto de *axiomas* (proposiciones implícitas) propios de CABRI que serán el punto de partida para realizar un trabajo de argumentación y demostración formal en este contexto.

Como dominio de abstracción, el ambiente CABRI se convierte en una fuente inagotable de experiencias en las que el aprendiz se siente capaz de hacer geometría, pues el ambiente le proporciona elementos para activar su cognición a partir de actividades de exploración, construcción y argumentación. Hemos podido detectar que la dinámica entre la exploración y la sistematización conjuga cuatro momentos estrechamente relacionados que se combinan permanentemente en el trabajo matemático y que discriminamos para efectos de claridad en la exposición de las ideas: (i) la *exploración,* que surge al intentar enfrentarse a la solución de un problema y que da pie a la formulación de conjeturas para generar estrategias de solución, (ii) la *construcción*, que pone en evidencia las propiedades geométricas en juego y las relaciones entre ellas, constituyéndose en la semilla de la deducción, (iii) la *argumentación,* entendida como mecanismo para validar afirmaciones dentro del contexto en el que se está trabajando, a partir de la elaboración de inferencias de carácter deductivo y (iv) *la demostración* con la cual, las proposiciones geométricas se incorporan a una teoría geométrica.

Referencias

MEN (2000) *Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas.* Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media. Documento interno.

Moreno L , Waldegg G (s.f.). *Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas* . En RICO L (eds.) *Didáctica de las Matemáticas*, Capítulo 3, editorial Síntesis, Madrid.

Moreno L (2002). ***Instrumentos matemáticos computacionales*****. En MEN (2002)** ***Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*****. Serie Memorias.**

Moreno L (1996). ***La epistemología genética: una interpretación.*** **Revista Educación Matemática, vol. III (3).**

Wersh J (1993). *Voces de la Mente.* editorial Visor, Madrid

Nuevas posibilidades de razonamiento geométrico

en un ambiente de geometría dinámica

Martín Eduardo Acosta Gempeler
Incorporación Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas, MEN

Resumen. En este artículo presentamos la posibilidad de usar la geometría dinámica como un instrumento para resolver problemas, más que como un instrumento amplificador. Ilustramos esto con un ejemplo en el que se resuelve un problema de regresión lineal con Cabri.

Introducción

El proceso de incorporación de la tecnología a la enseñanza de las matemáticas es lento y complejo. Uno de los factores clave de esta incorporación es la asimilación que el profesor hace de la tecnología, no solamente desde el punto de vista técnico (habilidades de manejo) sino sobre todo desde el punto de vista matemático y pedagógico. La tecnología, como instrumento nuevo en la actividad de la clase, entra a competir con otros medios de representación, con otras maneras de concebir las matemáticas y con otras formas de concebir la enseñanza. Por lo tanto, la primera asimilación que el profesor hace de ella es para complementar su labor, es decir, como auxiliar amplificadora, sin provocar una reorganización de sus concepciones matemáticas y practicas pedagógicas.

Sin embargo, el verdadero potencial de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas esta en la posibilidad de transformar las concepciones sobre las matemáticas y las practicas pedagógicas. Para lograr esta transformación, es necesario identificar y explicitar los usos novedosos de la tecnología, en los que las matemáticas cobran un nuevo sentido (tanto para el alumno como para el profesor), posibilitando nuevas formas de hacer matemáticas.

En el caso especifico de la geometría, la situación actual muestra una subordinación total de la geometría al álgebra y el análisis, subordinación que la reduce al papel de ilustración o aproximación heurística a la solución del problema, dejando toda la operacionalidad o el peso del razonamiento al planteamiento y la solución de ecuaciones. En este artículo nos proponemos describir un enfoque diferente, en el que la geometría juega un papel protagónico en la resolución de un problema, sin recurrir al álgebra.

Según Luis Moreno, la incorporación de la tecnología en la enseñanza pasa por un proceso en dos etapas: la amplificación y la transformación, equiparables a los conceptos de asimilación y acomodación descritos por Piaget. Es decir, en su práctica de enseñanza, los profesores primero buscan realizar con la tecnología las tareas que realizaban sin ella. En esta etapa la tecnología juega un papel amplificador, se pueden realizar tareas con mayor exactitud, rapidez, etc. Sin embargo, no implica una transformación de la práctica, las actividades de