Moreno L (2002). ***Instrumentos matemáticos computacionales*****. En MEN (2002)** ***Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*****. Serie Memorias.**

Moreno L (1996). ***La epistemología genética: una interpretación.*** **Revista Educación Matemática, vol. III (3).**

Wersh J (1993). *Voces de la Mente.* editorial Visor, Madrid

Nuevas posibilidades de razonamiento geométrico

en un ambiente de geometría dinámica

Martín Eduardo Acosta Gempeler
Incorporación Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas, MEN

Resumen. En este artículo presentamos la posibilidad de usar la geometría dinámica como un instrumento para resolver problemas, más que como un instrumento amplificador. Ilustramos esto con un ejemplo en el que se resuelve un problema de regresión lineal con Cabri.

Introducción

El proceso de incorporación de la tecnología a la enseñanza de las matemáticas es lento y complejo. Uno de los factores clave de esta incorporación es la asimilación que el profesor hace de la tecnología, no solamente desde el punto de vista técnico (habilidades de manejo) sino sobre todo desde el punto de vista matemático y pedagógico. La tecnología, como instrumento nuevo en la actividad de la clase, entra a competir con otros medios de representación, con otras maneras de concebir las matemáticas y con otras formas de concebir la enseñanza. Por lo tanto, la primera asimilación que el profesor hace de ella es para complementar su labor, es decir, como auxiliar amplificadora, sin provocar una reorganización de sus concepciones matemáticas y practicas pedagógicas.

Sin embargo, el verdadero potencial de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas esta en la posibilidad de transformar las concepciones sobre las matemáticas y las practicas pedagógicas. Para lograr esta transformación, es necesario identificar y explicitar los usos novedosos de la tecnología, en los que las matemáticas cobran un nuevo sentido (tanto para el alumno como para el profesor), posibilitando nuevas formas de hacer matemáticas.

En el caso especifico de la geometría, la situación actual muestra una subordinación total de la geometría al álgebra y el análisis, subordinación que la reduce al papel de ilustración o aproximación heurística a la solución del problema, dejando toda la operacionalidad o el peso del razonamiento al planteamiento y la solución de ecuaciones. En este artículo nos proponemos describir un enfoque diferente, en el que la geometría juega un papel protagónico en la resolución de un problema, sin recurrir al álgebra.

Según Luis Moreno, la incorporación de la tecnología en la enseñanza pasa por un proceso en dos etapas: la amplificación y la transformación, equiparables a los conceptos de asimilación y acomodación descritos por Piaget. Es decir, en su práctica de enseñanza, los profesores primero buscan realizar con la tecnología las tareas que realizaban sin ella. En esta etapa la tecnología juega un papel amplificador, se pueden realizar tareas con mayor exactitud, rapidez, etc. Sin embargo, no implica una transformación de la práctica, las actividades de clase siguen siendo en el fondo las mismas, aparte de la presencia de las herramientas que ayudan a realizarlas.

Pero si los profesores utilizaran regularmente las herramientas tecnológicas podrían llegar a descubrir cómo las herramientas tecnológicas pueden trasformar su práctica, produciendo actividades radicalmente nuevas.

Este proceso de transformación no es necesariamente espontáneo, y los profesores pueden permanecer indefinidamente en una fase de amplificación, es decir de asimilación de la tecnología a su práctica, sin una transformación de fondo. Es necesario que descubran nuevas posibilidades, usos novedosos de las herramientas tecnológicas, y que reconozcan en ellos la presencia del razonamiento matemático, para que comiencen a apreciar el potencial de las herramientas, y comiencen un proceso de acomodación de los propios esquemas para aprovechar todo ese potencial.

Un ejemplo

El ejemplo que presentamos a continuación pretende mostrar cómo el software de geometría dinámica Cabri Géomètre se puede utilizar de manera que la geometría desempeñe un papel fundamental en todo el proceso de resolución del problema, sin recurrir al planteamiento y resolución de ecuaciones. Es una modificación del trabajo sobre la regresión lineal publicado en Internet por José A. Mora (http://teleline.terra.es/personal/joseantm). Textualmente se plantea lo siguiente:

En los nuevos curricula de matemáticas en secundaria se hace especial hincapié en la enseñanza de la Estadística, esto es actualmente posible gracias a la tecnología que incorporan las calculadoras y los diferentes programas implementados en los ordenadores. Un ejemplo de la importancia del uso de la tecnología en la enseñanza de estos tópicos es la regresión, el uso de muchos datos lo más reales posible hace que muchas veces parte del alumnado se quede en el algoritmo de construcción y no acabe de ver qué es lo que hay detrás. Vamos a presentar un par de ejemplos de construcción geométrica de las rectas de mínimos cuadrados y mediana-mediana que hacen que se visualice el proceso de construcción y ayude al alumnado en la construcción de los conceptos para mejorar su comprensión .

Después de este planteamiento el profesor Mora da unas instrucciones para hacer unas construcciones en Cabri con las que espera ilustrar su punto . Podemos describir sucintamente su propuesta como sigue:

1. Construir algunos puntos que representan datos sobre los cuales se desea aplicar la regresión lineal.

2. Construir una recta a partir de un punto en el eje de las ordenadas que se ajuste aproximadamente a los puntos.

3. Construir los segmentos verticales que conectan los puntos con la recta.

4. Construir los cuadrados que tienen como lado los segmentos anteriores y sumar sus áreas.

5. Modificar la pendiente de la recta y el punto de corte con el eje de las ordenadas hasta obtener un valor mínimo de esa suma.

6. A partir de la fórmula estadística de la recta de mínimos cuadrados, deducir que la recta de regresión pasa por el punto que representa el promedio de los datos.

En esta actividad podemos ver cómo la tecnología funciona como amplificadora, es decir, sirve para ilustrar algunos aspectos de la teoría (en qué consiste el método de los mínimos cuadrados, y el hecho de que la fórmula contenga el promedio de los datos), aspectos que serían difíciles de ilustrar sin la herramienta, en términos de tiempo y precisión de las construcciones necesarias. El dinamismo se puede utilizar para ilustrar la idea de aproximación sucesiva a un valor mínimo.

Sin embargo, no hay una transformación cualitativa del trabajo de enseñanza: el objetivo es la comprensión de una fórmula, los razonamientos de cálculo son analíticos. Incluso podríamos decir que en la actividad está ausente una problemática, pues no se plantea ninguna pregunta: es una actividad de mostración, de ilustración. Una de las razones para este enfoque es la complejidad de los cálculos necesarios para la deducción de la fórmula, ya que se busca minimizar dos variables simultáneamente, y los alumnos pueden carecer de las herramientas matemáticas para comprender o desarrollar por sí mismos ese procedimiento.

Pero si tomamos en cuenta las potencialidades de la herramienta Cabri, esta actividad puede transformarse de manera significativa, permitiendo la exploración del problema desde el punto de vista geométrico, sin necesidad de desarrollar procedimientos analíticos complejos. Es lo que nos proponemos ilustrar en lo que sigue.

Enriquecimiento de la actividad

Comencemos por plantear un problema relacionado con la actividad el profesor Mora: *dado un conjunto de seis puntos (que representan parejas de datos), ¿es posible construir una recta de manera que las distancias de esos puntos a la recta sean mínimas? Si es posible, ¿cómo determinar esa recta?*

Partimos luego de la misma situación. Representación de los seis puntos, trazo de la recta de manera que pueda variarse la pendiente y el punto de corte de las ordenadas (para lo cual hay que construir primero un punto sobre el eje de las abscisas, una circunferencia con centro en dicho punto, un punto sobre la circunferencia para modificar la pendiente; la recta pasará por esos dos puntos), construcción de los cuadrados sobre los segmentos verticales que conectan los puntos con la recta y la suma de las áreas de esos cuadrados.

Una primera manipulación de la recta permite ver que es posible hacer variar la suma de los cuadrados, llegando aparentemente a un valor mínimo. Sin embargo, cabe la pregunta: ¿existe realmente un valor mínimo (o podemos encontrar de manera indefinida mejores aproximaciones)?

Procedamos entonces a fijar una de las variables en juego para estudiar el efecto de variación de la otra. Dejando fija la pendiente de la recta vamos a variar el punto de corte con el eje de ordenadas y analizar el efecto de esta variación en la suma de los cuadrados de las distancias:

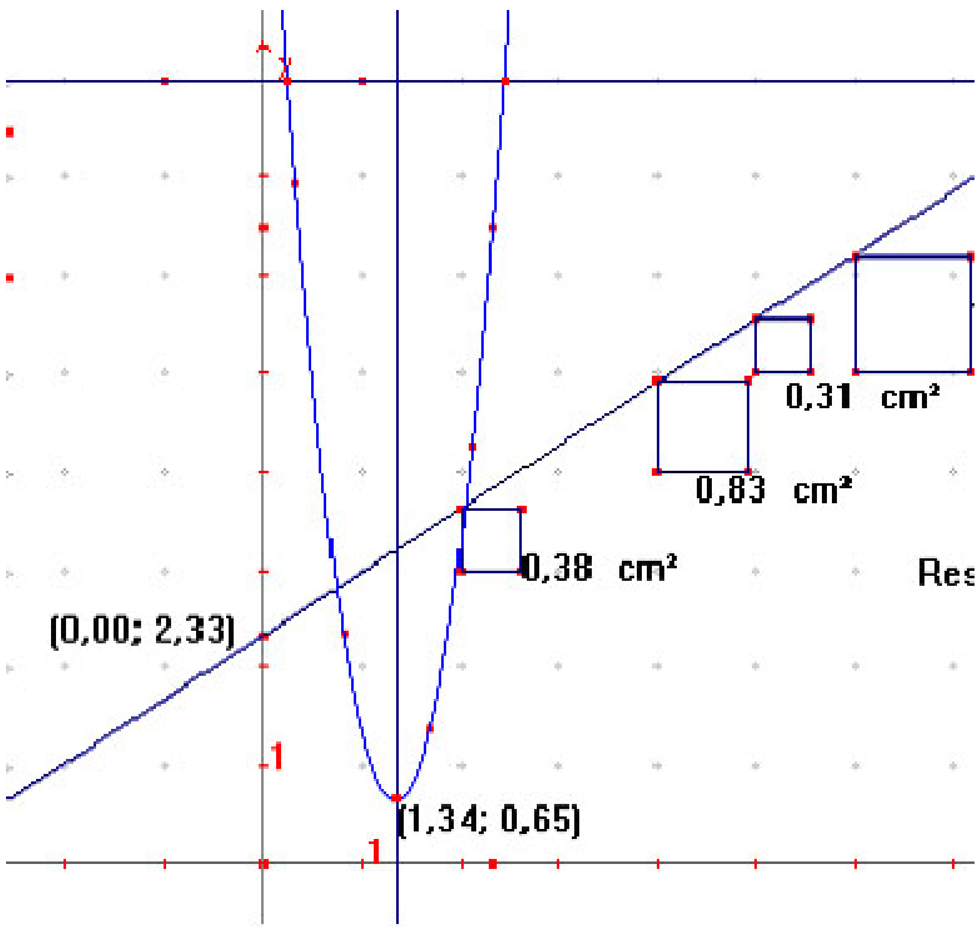
1. Determinar el punto de corte de la recta con el eje de las ordenadas, utilizando la herramienta Mostrar Coordenadas.

2. Transferir esa ordenada sobre el eje de las abscisas como variable independiente.

3. Transferir la suma de los cuadrados sobre el eje de ordenadas como variable dependiente.

4. Construir el punto que relaciona esas dos variables.

5. Construir el lugar geométrico de ese punto con respecto al punto de corte de la recta con las ordenadas (Nota: es importante definir 500 puntos para el cálculo del lugar geométrico).



Podemos arrastrar el punto de corte de las ordenadas y ver que la suma de los cuadrados disminuye hasta un cierto punto y luego vuelve a crecer. Además podemos asimilar ese lugar geométrico a una parábola, y por lo tanto deducir que tiene un vértice, o punto donde la suma de los cuadrados es mínima. ¿Cómo determinar ese punto? Dado que el vértice de la parábola se encuentra sobre el eje de simetría, basta con construir ese eje y determinar la intersección con la parábola.

1. Construir una cónica que pasa por cinco puntos sobre el lugar geométrico.

2. Trazar una recta horizontal cualquiera y determinar los puntos de intersección con la parábola.

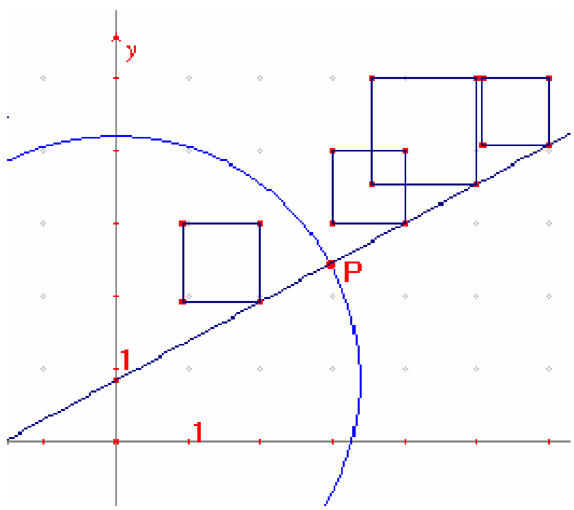
3. Construir la mediatriz de esos dos puntos de intersección.

4. Determinar la intersección de esa mediatriz con la parábola.

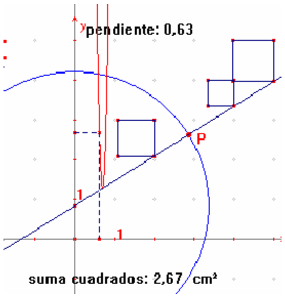
5. Determinar las coordenadas de ese punto.

Hasta aquí hemos logrado "demostrar" que para una pendiente definida existe un valor del corte de la recta con el eje de las ordenadas de manera que la suma de los cuadrados es mínima. También definimos un procedimiento para determinar ese valor.

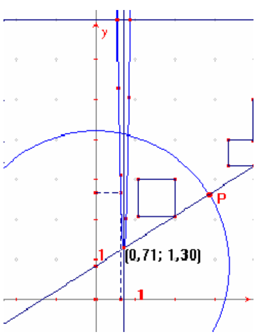
¿Ahora, qué sucede si fijamos el corte con las ordenadas y variamos la pendiente? Podemos utilizar el mismo procedimiento anterior (transferencia de variables a los ejes y construcción del lugar geométrico).



Si transferimos ahora el valor de la pendiente sobre el eje de las abscisas (variable independiente) y la suma de los cuadrados sobre el eje de las ordenadas, obtendremos un punto que relaciona esas dos variables. Podemos entonces construir el lugar geométrico de ese punto con respecto al punto P (que determina el valor de la pendiente).



Utilizando un razonamiento análogo al anterior, podemos "demostrar" que para un corte de las ordenadas definido, es posible encontrar un valor de la pendiente tal que la suma de los cuadrados sea mínima.



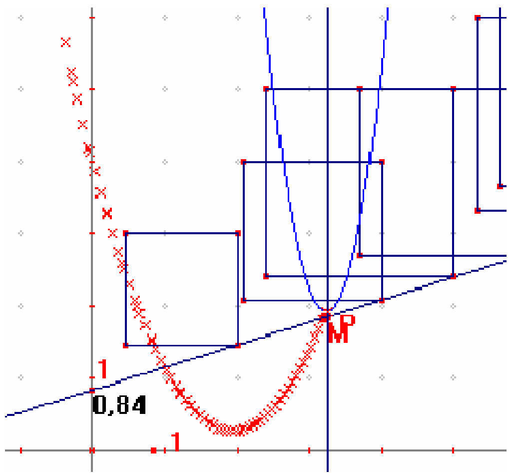
Ya sabemos entonces que fijando una de las dos variables en juego (pendiente y punto de corte con las ordenadas), es posible encontrar un valor de la otra que minimiza la suma de los cuadrados. Pero ¿existe un valor mínimo con respecto a las dos variables simultáneamente, y cómo determinarlo?

Tomemos la primera parte de la pregunta: Utilizando Cabri, podemos determinar todos los valores (razonablemente pequeños) de la suma de los cuadrados para una pendiente dada, variando el corte con el eje de ordenadas: es la parábola obtenida como lugar geométrico.

Además podemos determinar el punto en el que esa suma es mínima: el vértice de la parábola. Podríamos entonces preguntar qué sucede con ese punto a medida que varía la pendiente. es decir, ¿cuál es el lugar geométrico de ese punto con respecto a P?

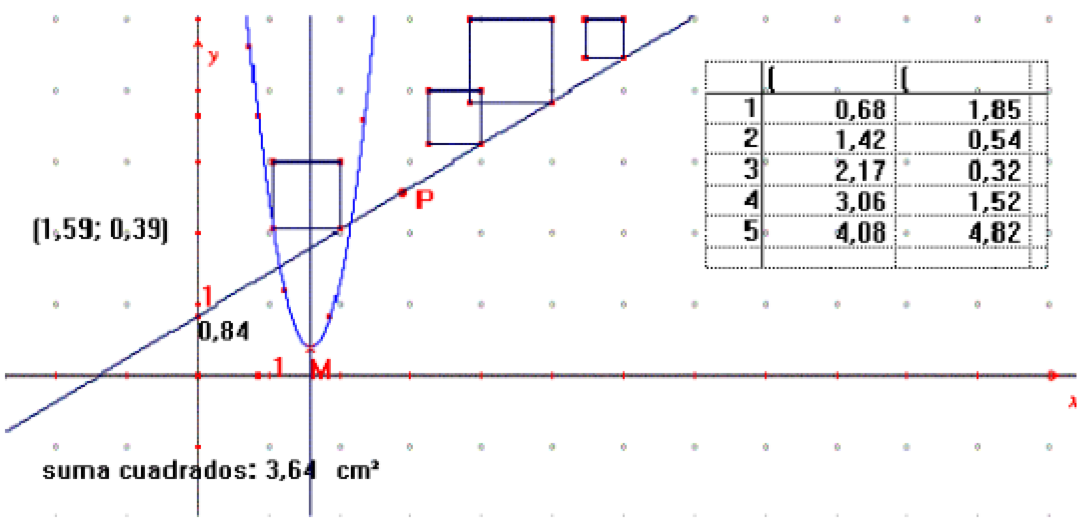
Desafortunadamente la máquina parece llegar al límite de su capacidad de cálculo y el programa se bloquea. No obstante, podemos utilizar otro procedimiento de geometría dinámica para darnos una idea sobre ese lugar geométrico: la traza.

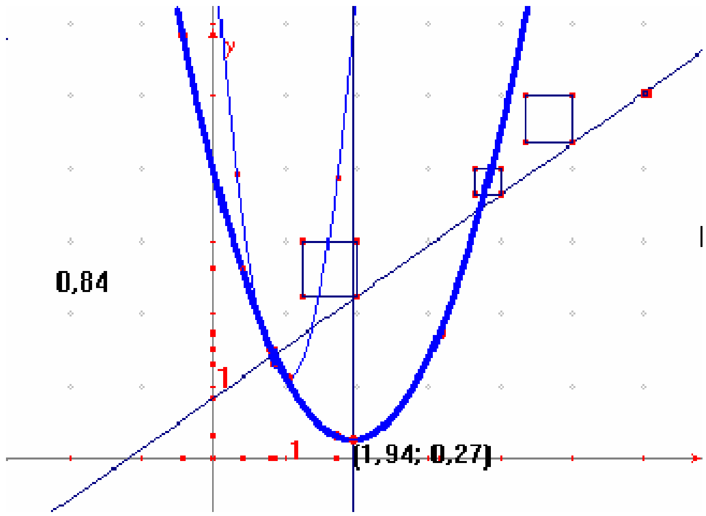
Coloquemos la traza al vértice de la parábola obtenida y apliquemos animación al punto P.



Aparentemente ahí tenemos nuevamente una parábola. El inconveniente es que no podemos construirla de manera explícita utilizando la traza. Así que vamos a utilizar un procedimiento alternativo.

Mostramos las coordenadas del punto M (mínimo de la parábola) y las incluimos en una tabla. Luego arrastramos P y almacenamos en la tabla cinco valores de M.





Luego podemos reconstruir esos cinco puntos para trazar la parábola y encontrar el vértice, es decir el punto para el cual la suma de los cuadrados es mínima con respecto a la pendiente y al corte de las ordenadas de manera simultánea.

Una vez obtenido el punto de corte con las ordenadas para el cual la suma de los cuadrados es mínima, basta con utilizarlo como punto de partida para la parábola de las pendientes para encontrar a su vez la pendiente para la cual esta suma es mínima.

Llegamos así a contestar plenamente el problema planteado sin plantear ninguna ecuación, utilizando únicamente recursos geométricos.

Conclusiones

En este ejemplo puede verse como el Cabri no solo actúa como amplificador, gracias al cual se puede ilustrar el sentido de una fórmula de estadística, sino que transforma la actividad en una solución de un problema matemático utilizando el razonamiento geométrico. Gracias a las herramientas lugar geométrico y cónicas, el Cabri toma a su cargo la complejidad de la construcción, sin eliminar el sentido de la misma. El razonamiento sintético, es decir sobre figuras, se convierte en procedimiento adecuado para la resolución del problema. De esta manera adquiere un nuevo significado no solo el problema en si, sino los conocimientos geométricos utilizados para su solución (parábola, vértice, mediatriz, etc.).

La familiarización de los profesores con ejemplos como éste es indispensable para que superen la utilización de la tecnología como amplificador, y pasen a una etapa de transformación curricular.

Referencias

Moreno L (2002) *Evolución y tecnología, en Seminario Nacional de Formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional, Serie Memorias.

Mora JA *http://teleline.terra.es/personal/joseantm*