Problemas de variación para el aprendizaje de la derivada

Bohórquez, Luis Ángel
labohorqueza@udistrital.edu.co
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Este taller tiene como propósito primordial presentar una introducción a la resolución de problemas como metodología de trabajo en clase, de tal forma que a partir de ello se considere una caracterización de problema matemático y de problema de variación y su utilidad para generar aprendizajes sobre el concepto de derivada.

Palabras clave: Resolución de problemas, aprendizaje derivada, problemas de variación.

1. Temática

La resolución de problemas, los problemas de variación y el aprendizaje de la derivada a partir de los problemas de variación.

2. Objetivos

- Presentar una introducción de la resolución de problemas como metodología de trabajo.
- Caracterizar los problemas de variación y presentar probabilidades de trabajo con estos problemas para el aprendizaje de la derivada.

3. Referentes teóricos básicos

Resolución de problemas

Sobre la resolución de problemas se ha dicho que es un término del cual no existe una caracterización universalmente aceptada (Schoenfeld, 1985, 2007; Stanic y Kilpatrick, 1989; Pérez, 1993; Tortosa, 1999 y Santos-Trigo, 2007). De hecho, en los trabajos de Schoenfeld (1985), Stanic y Kilpatrick (1989), Pérez (1993) y Bohórquez y Sanjuán (2009) se han recopilado más de catorce significados diferentes de este término. Esta situación generó la intención de varios autores, por ejemplo Schoenfeld (1985, 2007) de agrupar por enfoques o tendencias los trabajos asociados a la resolución de problemas.

Los enfoques de los trabajos sobre resolución de problemas que Schoenfeld (1985) identificó a mediados de los ochenta fueron cuatro. En el primer enfoque, este autor, ubica los trabajos donde los problemas son presentados en forma escrita y que a menudo son problemas muy sencillos que ponen la matemática en el contexto del "mundo real". En el segundo ubicó aquellos trabajos donde se privilegia el uso de matemáticas sofisticadas para tratar los problemas que se reflejan en el "mundo real". El tercer enfoque lo conforman aquellos trabajos alrededor del estudio de los procesos cognitivos, los cuales consisten en realizar intentos de exploración detallada de aspectos del pensamiento matemático en relación con problemas más o menos complejos y finalmente en el cuarto grupo se encuentran las propuestas que tienen por propósito la determinación y la enseñanza de los tipos de habilidades requeridas para resolver problemas matemáticos complejos (Schoenfeld, 1985). El enfoque de este último grupo se basa, en su mayoría, en la obra de Polya (1945).

La obra de Pólya (1945) también es base fundamental de uno de los enfoques que identificaron Stanic y Kilpatrick (1989) sobre las formas de trabajar la resolución de problemas. Estos autores señalaron que la resolución de problemas se ha empleado en la escuela de tres maneras. La primera como contexto de aplicación, con fines recreativos o para propiciar la motivación; la segunda como un tema específico del currículo, esto es, para desarrollar la habilidad de resolver problemas [aquí el trabajo de Pólya

(1945) es de vital importancia]; la tercera como aquella en donde la resolución de problemas se identifica con la actividad matemática, es decir, en donde hacer matemáticas es resolver problemas.

Dadas las diferentes formas de trabajar la resolución de problemas, Rivera y Santos-Trigo (1999), Codina y Rivera (2001) y Santos-Trigo (2007) recomiendan que los profesores de matemáticas que deseen trabajar con resolución de problemas reflexionen sobre lo que entiende por una enseñanza-aprendizaje basada en la resolución de problemas e incluso Codina y Rivera (2001) consideran conveniente que se discutan los términos problema, resolución y solución.

Sobre el término problema

El término problema, al igual que la resolución de problemas, no está definido de una manera única. En la literatura se encuentran autores como Kilpatrick (1985), Castro (1991), Schoelfeld (1992), Puig (1996), Codina (2000), Santos-Trigo (2007) y Bohórquez y Sanjuán (2009) que han efectuado recopilaciones de los diferentes significados del término problema, así como de los términos solución y resolución. De hecho, Kilpatrick (1985), Schoelfeld (1992), Puig (1996) y Santos-Trigo (2007), además de presentar diferentes significados de estos términos, proponen definiciones sobre los mismos. Otro autor que propuso una caracterización de problema fue D'Amore (1997), quien sugirió una distinción, en sus palabras muy usual, algo trivial y sin embargo útil, entre problemas y ejercicios.

Para D'Amore (1997), tanto ejercicios como problemas se refieren a situaciones problemáticas debidas a varios factores. En donde los ejercicios pueden ser resueltos utilizando reglas ya aprendidas o en vías de consolidación y, por tanto, entran en la categoría de refuerzo o aplicación inmediata de conceptos. Por su parte los problemas, implican o bien el uso de más reglas (algunas incluso explícitas, en ese momento) o bien una sucesión de operaciones cuya elección implica un acto estratégico, quizás creativo, del propio estudiante. Esto es, según D'Amore, Fandiño y Marazzani (2004) el ejercicio se desarrolla en la zona afectiva de Vygotsky el problema se desarrolla en la zona potencial.

En la caracterización de problema que presenta D'Amore (1997), se hace explicito el hecho que debe haber una relación de interés y creatividad por parte de quien lo aborda. Para Bohórquez, Bonilla, Romero y Narváez (en prensa) el requerimiento de la presencia del resolutor y de su implicación con ese algo acarrea que, sus conocimientos previos, sus intereses, sus experiencias, entre otros aspectos, entran a ser parte de lo que se considera un problema. De esta manera, los problemas se caracterizan porque implican una relación de problematización entre quien percibe el algo y el algo percibido. Santos-Trigo (2007) había hecho alusión a esta relación por medio del listado de criterios que consideró deben intervenir en el diseño de problemas para que éstos tengan potencial matemático en el aula de clase, a saber:

1. Los problemas deben ser accesibles a una diversidad de estudiantes.
2. Los problemas deben exigir a los estudiantes un proceso de reflexión e inserción.
3. Los problemas deben posibilitar acercamientos a su solución a través de emprender caminos diversos, que impliquen el uso de ideas matemáticas ricas y que permitan involucrar aspectos diferentes de la disciplina.
4. Las soluciones de los problemas deben posibilitar que emerjan ideas matemáticas sin que para ello los estudiantes sientan que requieren usar trucos sofisticados.

El diseño de problemas con las características anteriores se facilitaría para el profesor de matemáticas si en su formación los problemas matemáticos se utilizan como instrumentos de aprendizaje que potencien las prácticas de matematización, modelación, conjeturación y demostración de propiedades matemáticas (Bohórquez et al., n.d.). En otras palabras, se requiere que en la formación de profesores la resolución de problemas sea entendida, en la clasificación de Stanic y Kilpatrick (1989), como una actividad ligada al aprender a pensar matemáticamente.

En esta perspectiva, Lesh y Zawojewski (2007) definen la resolución de problemas como "el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones –y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas". Para Santos-Trigo (2008) "lo relevante en esta visión es que el estudiante desarrolle recursos, estrategias, y herramientas que le permitan recuperarse de dificultades iniciales y robustecer sus formas de pensar acerca de su propio aprendizaje y la resolución de problemas" (p. 3). De hecho, para este autor un aspecto importante de la caracterización de resolución de problemas de Lesh y Zawojewski (2007) es que la comprensión o el desarrollo de las ideas matemáticas conllevan un proceso de reflexión donde el estudiante constantemente refina o transforma sus ideas y formas de pensar como resultado de participar activamente en una comunidad de práctica o aprendizaje.

Participar activamente en una comunidad de práctica o aprendizaje implica para Bohórquez et al. (en prensa), que en el ambiente de la clase está incorporada la intencionalidad de que toda producción matemática que el estudiante y/o el grupo realice dentro o fuera de la clase será objeto de análisis y contrastación con las de los otros (estudiantes o grupos). En otras palabras, toda actividad matemática realizada por un individuo debe hacerse pensando en que va dirigida a otro(s), con lo que se tiene en cuenta la perspectiva de que existe una comunidad que colabora en la construcción del conocimiento individual y grupal.

Desde la perspectiva anterior, el ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas se caracteriza por la conformación de una comunidad de aprendizaje que involucra al profesor, a los estudiantes y al objeto matemático, y que tiene como meta común compartida la resolución de un problema matemático y sus transformaciones, acompañado de momentos de metacognición colectiva y de procesos de socialización de la resolución del problema. De esta manera, en palabras de Radford (2006), se espera que el estudiante que resuelva con éxito problemas matemáticos sea capaz de explicarse o de entender o interesarse en las soluciones de los otros o de ayudar a los otros. Esto es, aprender a estar con otros, abrirse a la comprensión de otras voces y otras conciencias, es decir, a ser-con-otros.

Ahora bien, como el ambiente de aprendizaje aquí caracterizado es diseñado para estudiantes para profesor vale la pena recordar que aquí no sólo se resuelve el problema matemático, con todas las implicaciones descritas anteriormente, sino que este estudiante debe también pensar en el problema como un instrumento con el cual es posible generar aprendizaje matemático (Llinares, 2008).

Problema de variación

La caracterización de problema de variación la establecen Bohórquez et al. (en prensa) de la siguiente manera:

> Un problema de variación es una clase que hace parte de una amplia estructura conformada por distintas formas de variación que explican la infinitud de situaciones en la que está presente alguna forma de cambio. Esta clase puede traducirse en proposiciones matemáticas que involucran *el reconocimiento de variables, parámetros, cuantificadores, relaciones funcionales y relaciones de covariación, y un objetivo: la optimización*. (p. 3).

Teniendo en cuenta esa caracterización un ejemplo de problema de variación seria el siguiente:

La resistencia de la viga

La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su ancho *a* por el cuadrado de su altura *h*. Se quiere aserrar un tronco de madera de forma cilíndrica, con diámetro *phi* dado, una viga de sección rectangular. Pierre asegura que es posible encontrar las dimensiones de la viga de mayor resistencia, calculándolas por medio de pequeñas alteraciones a una de las dimensiones. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación?

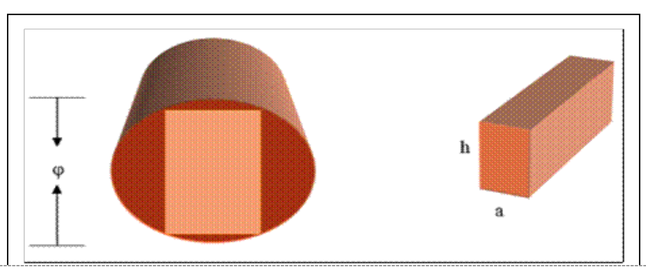

Figura 1. Representación gráfica resistencia de la viga.

El problema de la viga es un problema con características similares a los problemas típicos de optimización. Este tipo de problemas (los problemas de optimización) están presentes en casi todos los libros de cálculo. Además, según Bohórquez et al. (en prensa), la resolución de este tipo de problemas está relacionada el manejo y comprensión de aspectos relativos al modelo del continuo de Cantor-Bolzano-Weierstrass. En particular, está asociado directamente con el concepto derivada, sin embargo su resolución requiere acudir en alguna medida a la estrategia establecida por Fermat quien abordó problemas de optimización como el presentado antes que existiera la derivada y lo hizo a partir de considerar *pequeñas perturbaciones*.

4. Propuesta de actividades

En el taller se propondrán dos problemas de características similares y se pedirá a los asistentes que intenten resolverlo individualmente. Posteriormente se solicitará a que conformen grupos de tres personas para discutir, entre otras cosas, sobre las estrategias de resolución propuestas y sobre las características de los problemas mismos. Los problemas se presentan en la siguiente guía:

Taller: Problemas de variación para el aprendizaje de la derivada

La resistencia de la viga[1]

La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su ancho a por el cuadrado de su altura h. Se quiere aserrar un tronco de madera de forma cilíndrica, con diámetro φ dado, una viga de sección rectangular. Pierre asegura que es posible encontrar las dimensiones de la viga de mayor resistencia, calculándolas por medio de pequeñas alteraciones a una de las dimensiones. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? (Ver figura 2).

[1] Bonilla, Bohórquez, Narváez y Romero (2010). *Construcción del significado de variación en estudiantes para profesor de matemáticas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia).

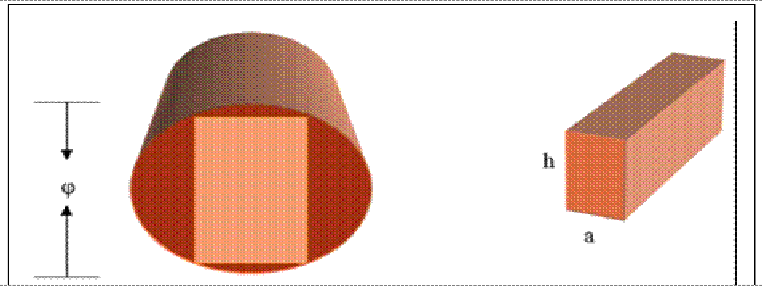

Figura 2. Representación gráfica resistencia de la viga.

Hacia la cabaña

Un turista se encuentra en un bosque a 2 km de una larga carretera recta. Desea caminar a su cabaña, que se encuentra a 10 km. de distancia por el bosque y también a 2 km. de la carretera (ver figura 3). Puede caminar a una velocidad de 8 km/h por la carretera pero solamente a 3 km/h por el bosque. Así decide caminar primero hacia la carretera, después por la carretera y finalmente por el bosque hacia la cabaña. El turista concluye que el ángulo θ que minimizará el tiempo total necesario para que llegue a su cabaña lo puede obtener haciendo pequeñas alteraciones a algunas de las magnitudes involucradas en la información.

¿Estás de acuerdo con el turista? Explica tu respuesta

¿Cuánto tiempo se ahorra en comparación con la ruta directa por el bosque?

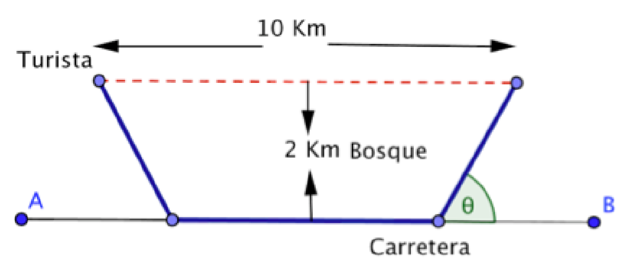

Figura 3. Recorrido del turista

Referencias bibliográficas

- Bohórquez, A. & Sanjuán, A. (2009). Consideraciones sobre la resolución de problemas en la actualidad. En: Memorias noveno encuentro de matemática educativa. Diez años de lineamientos curriculares. Asociación Colombiana de Matemática Educativa ASOCOLME. (p. 35-43). Valledupar. Grupo Editorial Gaia.
- Bohórquez, A., Bonilla, M., Narváez, D. & Romero, J. (en prensa). Los ciclos de resolución deproblemas: ambientes de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas. Cartilla. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Codina, A. (2000). Elementos para una reflexión acerca del uso de la computadora en el aprendizaje de estudiantes de bachillerato vía resolución de problemas, (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Codina, A & Rivera, A. (2001). Hacia una instrucción basada en la resolución de
- problemas: lostérminos problema, solución y resolución. En P. Gómez, y L. Rico (Eds.) Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro (p. 125-135) Granada: Editorial Universidad de Granada.
- D'Amore, B. (1997). Problemas. Pedagogía y psicología de la matemática en la actividad de resolución de problemas. Madrid: Síntesis.
- Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Twenty-five Years of Research on TeachingMathematical Problem Solving'. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical ProblemSolving: Multiple Research Perspective (p. 1-15). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.,Publishers.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003a). Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching. Mahwash, New Jersey: Lawrence ErlbaumAssociation.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003b). Foundations of a models and modeling perspective on mathematicsteaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: Modelsand modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving. Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Lesh, R., Zawojewski, J. & English, L. (2003). A models and modeling perspective on the role of smallGroup learning activities. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: Models and modelingperspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving. Mahwah, NJ: Lawrence ErlbaumAssociates, Inc.
- Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), Second handbookof research on mathematics teaching and learning (p. 763-804). Charlotte, NC: Information AgePublishing.
- Santos-Trigo M. (2007). Cómo plantear y resolver problemas matemáticos. México: Editorial Trillas.

- Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco, (Eds.), Investigación en Educación Matemática 12. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (p. 3-27). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper" / Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Regresar al índice general