

Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

*La transformación de un problema, a partir del
potencial de la calculadora TI-92.*

Fabiola Rodríguez García

Incorporación Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas, MEN

Instituto Pedagógico Nacional, Bogotá

Martín Eduardo Acosta Gempeler

Incorporación Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas, MEN

Resumen. En el presente artículo se describe la evolución de una actividad cuya transformación está determinada por el potencial operativo y representacional de la calculadora y por la necesidad de diseñar actividades de aula que permitan transformar las acciones de los estudiantes en su hacer matemáticas, posibilitando la exploración, el planteamiento y verificación de conjeturas, el trabajo con diferentes representaciones, la generalización y la sistematización. De esta manera se ilustrará el uso de la calculadora empleándola inicialmente como amplificadora en el tratamiento de algunos conceptos matemáticos y posteriormente como elemento reorganizador del desarrollo de los mismos.

Introducción

Como parte del Proyecto de *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas*, el Ministerio de Educación Nacional organiza periódicamente seminarios de formación de docentes, en los que se profundiza en el manejo técnico de la calculadora TI92, se discuten los fundamentos epistemológicos y cognitivos del uso didáctico de dicha herramienta y se socializan los avances del proyecto y las dificultades encontradas. Estos seminarios han servido para intercambiar puntos de vista, experiencias e inquietudes, lo cual ha contribuido a enriquecer las concepciones de los maestros participantes acerca del proyecto mismo, de las matemáticas, de su enseñanza, de su aprendizaje y de la utilización de la tecnología en dichos procesos.

En uno de los primeros seminarios, en los que se pidió a los participantes de las diferentes regiones compartir las actividades propuestas a los alumnos, un docente del departamento de Córdoba dio a conocer el siguiente problema: *Un vehículo A viaja a 30 Km/h y 100 Km atrás otro vehículo B viaja a 40Km/h. Si la vía fuese recta y los vehículos no se detuvieran ¿Al cabo de cuánto tiempo alcanzará el vehículo B al vehículo A?* A partir de esta situación la actividad propuesta consistía en calcular la distancia entre los móviles en diferentes momentos y generalizar este proceso para encontrar la expresión algebraica que relaciona el tiempo y la distancia. La calculadora se emplea para graficar dicha expresión. Debido a que en esta propuesta de actividad la capacidad de la calculadora no se aprovecha suficientemente, surge la idea de enriquecer las posibilidades de exploración de la situación y su tratamiento didáctico, aprovechando el potencial de esta herramienta.

En este artículo nos proponemos mostrar cómo, durante el desarrollo de los diferentes momentos en la solución del problema, el trabajo continuado con la tecnología hizo evolucionar nuestra manera de concebir sus posibles usos y cómo una apropiación de las posibilidades de la misma, amplía el universo de actividades que propician la exploración y la sistematización. En esta descripción se ilustrará la evolución del uso de la calculadora empleada inicialmente en la realización de cálculos y de gráficas y finalmente en la construcción de una simulación.

Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

Se adjuntará como anexo a este artículo, una propuesta de actividad para realizar con estudiantes de secundaria, cuyo propósito es modelar la simulación del movimiento de tres aviones que viajan siguiendo rutas paralelas, lo cual dará lugar al estudio de diversas funciones. Con esta actividad se pretende igualmente realizar un primer acercamiento a las ideas de velocidad instantánea y velocidad media, a través de la exploración de los objetos presentes en la simulación, de las relaciones entre ellos y de la sistematización de las observaciones y los resultados.

Marco Teórico

Una de las tesis planteadas en el marco teórico del proyecto, se fundamenta en el hecho de que la tecnología pone a disposición de los alumnos y de los profesores nuevas formas de expresión, a través de las cuales puede construirse el sentido del quehacer matemático y pueden desarrollarse los principales conceptos que forman el cuerpo de las matemáticas.

Diversas investigaciones han mostrado que la presencia de las tecnologías informáticas en el currículo de matemáticas, no solo contribuye al enriquecimiento del tratamiento de los contenidos, sino que posibilita una re-organización del conocimiento de los estudiantes. *Es posible que el uso sostenido de la herramienta desemboque en cambios a nivel de las estrategias de solución de problemas, en cambios a nivel de la manera misma como se plantea el problema. En otras palabras, puede ocurrir que el pensamiento matemático del estudiante quede afectado radicalmente por la presencia de la herramienta* (Moreno 2002).

Para lograr este efecto reorganizador del conocimiento de los estudiantes, debe tenerse presente que las innovaciones exitosas tendrán la capacidad de erosionar los currículos tradicionales, en la medida en que se conozca y se adquiera un buen manejo de las potencialidades de las herramientas y en la medida en que se alcance la comprensión sobre el conocimiento producido con la mediación de las mismas (Rojano y Moreno 1999). En este sentido, el desarrollo de estrategias como la modelación y la simulación, ofrecen la posibilidad de constituirse en estrategias novedosas que permitirán impactar el currículo y producir cambios en la construcción de conocimientos matemáticos.

La modelación es el proceso de interpretación y captura de las variaciones de un fenómeno a través de la búsqueda de leyes generales que permitan explicarlo y realizar predicciones sobre el mismo. De acuerdo con Vasco (2000), en la modelación se trata de utilizar funciones conocidas, otras ya inventadas pero desconocidas, así como otras nuevas que se van a inventar para simular, representar o modelar procesos reales que están ocurriendo en el mundo. Se trata de capturar sus variaciones por medio de modelos matemáticos de distintos tipos para poder seguirlos, hacer simulaciones y predicciones e intentar controlarlos y modificarlos. Un modelo, según Duarte (1997), es una representación formal de un proceso o de un fenómeno a través de expresiones cualitativas o cuantitativas de las relaciones entre variables que describen el proceso o fenómeno, expresiones que son susceptibles de manipular. A través del modelo se puede explicar el fenómeno y se hace posible predecir situaciones para generar nueva información.

Lo que caracteriza la simulación, según Duarte, es una representación visual de un fenómeno o proceso con mayor o menor fidelidad perceptual. Las simulaciones están construidas sobre modelos matemáticos del fenómeno, que al ser traducidos a la máquina producen una impresión de realidad y guardan una apariencia perceptiva muy cercana al mismo. Este atractivo visual se constituye en una fuente interesante de exploración didáctica que a su vez permite extraer información del fenómeno a través de relaciones, mediciones, variaciones, comparaciones, etc., que pueden ser matematizadas, construyéndose así un modelo matemático muy cercano al fenómeno real. En este sentido, una actividad de simulación se constituye en una situación problemática que parte de un fenómeno físico y que propone su estudio desde el punto de vista matemático para producir un modelo del mismo.

Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

Duarte afirma que la utilización de ambientes de modelación puede potenciar dimensiones del acto de comprender, una vez que el profesor pueda utilizarlos fácilmente para:

- Solicitar a los alumnos un análisis del mismo modelo en contextos diferentes
- Describir verbalmente los modelos
- Identificar analogías
- Corregir modelos incorrectos
- Prever la influencia de variables del modelo.

De otra parte, una modelación computacional permite al alumno familiarizarse con los aspectos formales de los procesos y de los fenómenos. *Debido a que los objetos sobre la pantalla son producidos y controlados desde el universo interno de la herramienta computacional [...], podremos afirmar que estos objetos sobre la pantalla son modelos manipulables de objetos matemáticos. Estos modelos contribuyen a una mayor interrelación entre la exploración y la sistematicidad ya que ofrecen mayor capacidad de cálculo, mayor poder expresivo y flexibilidad en la transferencia entre sistemas de representación.* (Moreno 2002). Por lo tanto, si en tareas que combinan procedimientos de simulación y modelación se incluye el análisis numérico, algebraico y gráfico de los datos tomados de una construcción, se posibilitan tanto los procesamientos al interior de cada registro como las conexiones entre ellos, facilitando así la comprensión de los conceptos matemáticos en juego.

La situación

El problema a desarrollar es:

Un vehículo A viaja a 30 Km/h y 100 Km atrás otro vehículo B viaja a 40Km/h. Si la vía fuese recta y los vehículos no se detuvieran ¿Al cabo de cuánto tiempo alcanzará el vehículo B al vehículo A?

Evolución del desarrollo de la actividad

Primera aproximación:

La actividad propuesta consistía en encontrar, utilizando lápiz y papel, la expresión algebraica que relaciona la distancia entre los móviles en función del tiempo y posteriormente emplear la calculadora para realizar la gráfica producida por esta expresión.

Las acciones puntuales que se espera que los estudiantes realicen, son:

- Calcular la distancia recorrida por cada móvil al cabo de una hora.
- Calcular la distancia entre los móviles al cabo de una hora.
- Describir lo que sucedió a la media hora y predecir lo que sucederá al cabo de una hora y media, de dos horas, de tres horas, etc.
- Determinar la distancia de los móviles al cabo de cada uno de los intervalos de tiempo anteriores.

Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

- Encontrar una expresión general que permita calcular la distancia entre los móviles en un tiempo determinado.
- Introducir la expresión algebraica en el editor de funciones de la calculadora (figura 1)



Figura 1

- Seleccionar una ventana apropiada para visualizar la gráfica producida por esta expresión, de manera que se observen los cortes con los ejes (figura 2)

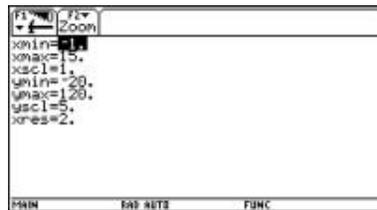


Figura 2

- Observar la gráfica y la tabla producidas por esta función y analizarlas a la luz de la situación (figura 3).



Figura 3

Esta es una actividad típica que ilustra el uso inicial de una nueva herramienta tecnológica, como elemento amplificador. La calculadora es empleada solo al final del proceso y es usada para realizar cálculos dispendiosos, verificar respuestas a operaciones realizadas con lápiz y papel y visualizar las representaciones gráfica y tabular de una función. No se evidencia su potencial transformador del tratamiento de los contenidos ni se explota su capacidad tecnológica. Aún así, su uso propicia un análisis más amplio de la situación al realizado con lápiz y papel.

Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

Segunda aproximación

Con el fin de favorecer un análisis cualitativo propio de la exploración y evitar un tratamiento algebraico desde el inicio de la actividad, se concibió la primera modificación de la situación en la que entra en juego la modelación geométrica del problema en el programa CABRI, utilizando la relación entre las velocidades de los móviles.

Construcción de la simulación

Debido a que existe una distancia inicial entre los móviles, el movimiento de cada uno de ellos se representará sobre dos semirrectas diferentes pero concurrentes y con la misma dirección y sentido (figura 4).



Figura 4

De acuerdo con los datos de la situación planteada, la relación entre las velocidades de los

móviles es de $\frac{3}{4}$, es decir $\frac{v_A}{v_B} = \frac{3}{4}$. En consecuencia la relación entre las distancias es también

de $\frac{3}{4}$, es decir $\frac{s_A}{s_B} = \frac{3}{4}$, lo cual significa que $s_A = \frac{3}{4} s_B$. Esta relación se tendrá en cuenta para representar las posiciones de los móviles. (Para ello se determinan los puntos medios del segmento OB y se considera el punto equivalente a los $\frac{3}{4}$ de \overline{OB}) (figura 5)



Figura 5

Ya que el móvil A se mueve sobre la segunda semirrecta, debe transferirse allí la distancia recorrida por él. De esta manera cada móvil queda representado por puntos que se mueven sobre una semirrecta. El movimiento de uno de ellos (A) dependerá del movimiento del otro (B) en la proporción $\frac{3}{4}$. (figura 6)

Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas



Figura 6

Teniendo en cuenta los datos del problema y considerado la equivalencia de 2 cm por 100 Km, la presentación del archivo para ser trabajado con los estudiantes puede presentarse de la siguiente manera (figura 7):

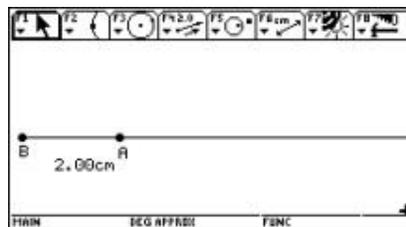


Figura 7

Actividad para los estudiantes

Con esta representación del fenómeno que se puede interactuar con los objetos presentes en la simulación. Se puede mover el punto que representa el móvil B y observar qué sucede con el móvil A. La actividad de los estudiantes girará entonces en torno a las siguientes acciones:

- Observación y descripción del fenómeno.
- Predicción de la distancia entre los móviles en diferentes momentos.
- Descripción de la relación de la distancia entre los móviles a medida que B se mueve.
- Predicción del tipo de gráfica que se producirá al relacionar la distancia entre los móviles.
- Toma automática de los datos en una tabla a partir de la simulación del movimiento (figura 8).

DATA	c1	c2	c3	c4
1	1.	2.		
2	2.	1.940765		
3	3.	1.88153		
4	4.	1.822295		
5	5.	1.76306		
6	6.	1.703826		
7	7.	1.644591		

c2, Title="Dist.AB"

Figura 8

Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

- Análisis de los datos arrojados en la tabla.
- Confirmación de algunas hipótesis.
- Visualización de la gráfica de nube de puntos producida por los datos (figura 9).

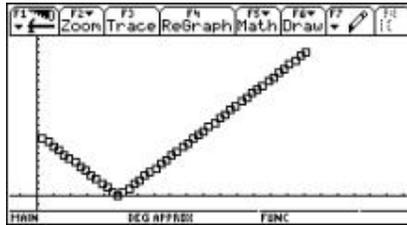


Figura 9

- Descripción de la gráfica a la luz del fenómeno simulado.
- Predicción de la función que mejor relaciona esta nube de puntos (en un intervalo determinado).
- Cálculo de la expresión algebraica de dicha función (en un intervalo determinado).
- Verificación de las estimaciones.
- Análisis de la gráfica de la función.

En este nuevo planteamiento de la actividad hay un cambio radical tanto en el diseño de la misma como en el tipo de acciones que debe realizar el estudiante. Se evidencia desde el comienzo el papel protagonista de la calculadora y con la simulación se propicia el estudio del fenómeno a la luz de la situación real.

Sin embargo, la simulación del fenómeno presenta debilidades ya que el movimiento de uno de los puntos está en función del movimiento del otro y el tiempo es una magnitud cuya presencia no se hace evidente.

Esta dificultad lleva a experimentar más con la calculadora para lograr una mejor representación de la situación y enriquecer su potencial didáctico, sin perder de vista las posibilidades de exploración y sistematización de la misma.

Tercera aproximación

En esta tercera versión se enriquece la simulación por medio de la introducción del tiempo como variable independiente. En efecto, en Cabri es posible animar un número y realizar cálculos a partir de él, creando así una simulación del transcurso del tiempo. Teniendo en cuenta que además podemos efectuar cálculos utilizando este número y transferir esas medidas a objetos geométricos de la pantalla, podemos hacer la simulación de dos puntos que representan el movimiento de los móviles.

La simulación consiste entonces en definir un número t que representará el tiempo en horas, y con base en él calcular las distancias recorridas por cada avión: $t \cdot 40$ y $t \cdot 30$. Sin embargo, como tenemos una restricción de tamaño en la pantalla, y teniendo en cuenta que las medidas se hacen en centímetros, debemos hacer un ajuste de escalas para representar los 100 km de

Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

distancia que separan a los aviones. Tomemos por ejemplo la escala $1\text{cm} = 100\text{km}$. Esto quiere decir que $1\text{km} = 0,01\text{cm}$, lo cual significa que nuestras ecuaciones se convierten en $t*0,4$ y $t*0,3+1$ (figura 10)

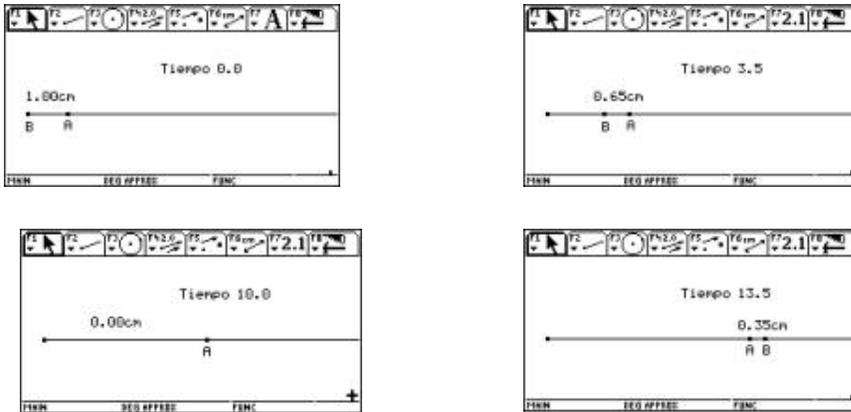


Figura 10

Al igual que en la actividad anterior, esta simulación permite plantear una primera fase de exploración de la simulación a nivel perceptivo, seguida de una fase de exploración cuantitativa. Pero su perfeccionamiento permite una manipulación más controlada sobre el tiempo como variable independiente.

Con el uso de la herramienta tecnológica se facilita la recolección de los datos y la manipulación de los mismos en tablas y gráficas (figura 11), lo cual nos permite señalar una relación bastante aproximada entre ellos; las conclusiones respecto al fenómeno estudiado no se limitan a la apariencia perceptual, sino al análisis de toda la información obtenida en los diferentes sistemas de representación. Para este caso, por ejemplo se pueden analizar las tasas de cambio entre las variables relacionadas y qué significa que sean o no constantes.

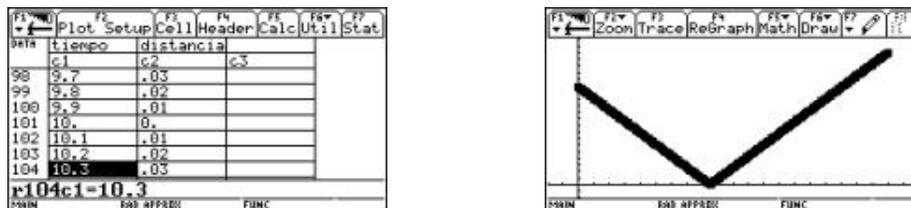


Figura 11

Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

Una vez comprendido el principio de construcción de la simulación, es posible simular distintas variaciones del problema: si los móviles se mueven con velocidades variables, si viajan en sentidos opuestos, con rumbos diferentes, si parten de sitios diferentes, etc. Estas son algunas alternativas de variación que se constituirán en una buena oportunidad para el estudio de diferentes funciones.

Como fruto de este trabajo surge una propuesta de actividad para los estudiantes, la cual se encuentra en el taller 7 de este documento de memorias.

Conclusiones

- El análisis detenido de la situación problemática propuesta inicialmente, la exploración continua y sistemática de las potencialidades de la calculadora y el estudio sobre el conocimiento producido con la mediación de esta herramienta, permitieron un rediseño de la situación ofreciendo un tratamiento novedoso y más amplio al problema, tanto en sus posibilidades de exploración como en la matematización del fenómeno.
- Para producir una simulación es necesario comprender el fenómeno y comprender el modelo matemático del mismo.
- La evolución en la construcción de la simulación depende del grado de apropiación del potencial técnico de la calculadora y amplía la gama de posibilidades de uso didáctico.
- El tipo de actividades que se propone a los estudiantes con la simulación del fenómeno, pretende romper con la concepción del uso de la calculadora únicamente como verificadora de respuestas o graficadora de funciones y dimensiona su uso, propiciando el desarrollo de habilidades matemáticas en la exploración, el planteamiento y la verificación de conjeturas, el trabajo con diferentes representaciones, la generalización y la sistematización, para lograr una modelación cercana al fenómeno.

Referencias

Carlos E. Vasco Uribe , *Las matemáticas escolares en el año 2001*, Formarse para la enseñanza de las matemáticas, Las competencias matemáticas, Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía Grupo de Educación Matemática, 2000, p. 29

Luis Moreno Armella , *Instrumentos matemáticos computacionales*, Seminario Nacional de Formación de Docentes, Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas, Serie Memorias, Ministerio de Educación Nacional, Enlace Editores, Bogotá, 2002, p. 82,85,86.

Lineamientos Curriculares de Matemáticas , Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, 1998

Teresa Rojano C. y Luis Moreno Armella , *Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo*, Revista Avance y Perspectiva, Vol. 18, México, 1999, 325-333.

Vitor Duarte Teodoro , *Modelacao Computacional Em Ciencias e Matematica*, Revista Informática Educativa, Uniandes-Lidie, Vol.10 N° 2, 1997, pp. 171-182