E xplorando simetrías con Cabri

Carmen Toscano Toscano

Colegio Antonio Lenis, Sincelejo -Sucre

Resumen. El presente trabajo muestra la experiencia realizada con alumnos de grado séptimo del Colegio Antonio Lenis de Sincelejo, con quienes se realizó una actividad diseñada con el propósito de identificar las propiedades fundamentales de la simetría central utilizando la calculadora TI 92 y el *software* Cabri. La posibilidad de intervenir sobre las figuras empleando los recursos del *sofware*, así como las preguntas formuladas por la profesora para suscitar un conflicto cogn itivo, fueron fundamentales para comprobar los invariantes que caracterizan la relación geométrica en estudio.

Introducción

Con el énfasis en la introducción de la matemática moderna en los currículos escolares de los años setenta, la geometría fue una de las ramas de la matemática que se descuidó en la práctica escolar, tanto en el panorama internacional, como en el nacional. Afortunadamente esta situación ha venido cambiando y en las reformas curriculares de los años ochenta y noventa se reivindica su papel, como un área fundamental para el desarrollo del sentido espacial y del razonamiento deductivo. Así, en los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas formulados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia se reconoce que para organizar un currículo en un todo armonioso, se debe privilegiar entre otros, los conocimientos básicos que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático, como por ejemplo el pensamiento espacial.. Sobre éste último se propone *hacer énfasis en una geometría activa como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio* (MEN, 1998). La idea es hacer una geometría más dinámica, es decir, no sólo contemplando estáticamente las formas de las figuras sino estudiando prioritariamente los fenómenos de movimiento o de transformaciones de las figuras así como de sus propiedades geométricas.

El hecho de sugerir la exploración activa del espacio abre puertas al estudio de las transformaciones geométricas, como operaciones que dan lugar a relaciones geométricas fundamentales. Así por ejemplo, la congruencia puede verse como el producto de una isometría y la semejanza como el resultado de una homotecia. Al estudiar las operaciones geométricas que subyacen a una relación, se propicia la interiorización de dichas relaciones pues la conceptualización se logra a partir de las acciones sobre y en el espacio, de los objetos geométricos intervinientes.

En este contexto de geometría dinámica es posible aprovechar los recursos tecnológicos disponibles para la enseñanza, tales como el programa Cabri Gémètre, diseñado de tal forma que permite manipular las representaciones de los objetos geométricos para transfo rmar de manera continua las construcciones creadas y estudiar los invariantes de las relaciones geométricas en estudio. En este artículo presentamos una experiencia de aula, con alumnos de grado séptimo, tendiente a explorar los invariantes de una de las isometrías: la simetría central. Alrededor de una tarea propuesta, se explotan las conjeturas formuladas por los alumnos para enriquecer sus ideas acerca de dicha relación. Se muestra como va evolucionando el concepto de simetría central, al aprovechar el papel mediador proporcionado por el *software* Cabri Géomètre incorporado a la calculadora TI 92, para explorar activamente propiedades geométricas como la equidistancia de puntos simétricos respecto a un eje y la colinealidad de un punto, su simétrico y el centro de simetría.

Referentes teóricos

El marco conceptual de referencia para el presente estudio está basado en la fundamentación conceptual del proyecto desarrollado por el Ministerio de Educación *"Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación y Media"* en el cual el Colegio Antonio Lenis participa desde marzo del año 2001. Principalmente dos aspectos son tenidos en cuenta: (i) la ejecutabilidad de las representaciones del software Cabri Géomètre incorporado a la calculadora TI92, instrumento de mediación utilizado, y la construcción de ambientes de aprendizaje a partir de un ambiente de situación problema.

Con respecto al primer aspecto, Moreno y Lupiañez (2000) plantean que la importancia de las herramientas computacionales para la educación matemática está asociada a su capacidad para ofrecernos medios alternativos de expresión matemática que permiten formas innovadoras de manipulación de los objetos matemáticos. El ambiente de aprendizaje proporcionado por Cabri Géomètre posee características como la capacidad de arrastre de las figuras construidas, que propician la búsqueda de relaciones geométricas invariantes. Esta característica hace que el medio simule una "actividad cognitiva" que sin estos recursos era privativa de los seres humanos.

Por ejemplo, al tener la posibilidad de manipular dos figuras geométricas, una de las cuales es construida como imagen de la otra por una simetría central, el estudiante puede observar cómo, sin su intervención directa, la figura obtenida por simetría se modifica de tal forma que cada punto y su simétrico quedan equidistantes del centro de simetría y este a su vez resulta ser el punto medio del segmento formado por un punto y su simétrico. La exploración respeta explícitamente las reglas sintácticas del medio ambiente, en este caso de la geometría de las transformaciones, y la ejecutabilidad de las representaciones hace de estos medios parte integral de los recursos intelectuales y expresivos. Genera una forma de realidad virtual asociada a los objetos conceptuales de las matemáticas, que posibilita traerlos, virtualizados ya, a la pantalla en donde podemos manipularlos con amplitud y reconocer sus invariantes (Moreno, y Lupiañez, 2000).

En un ambiente de aprendizaje, sin embargo, no es suficiente con disponer de instrumentos con el potencial descrito en el párrafo anterior. El empleo de estos recursos debe ir acompañado de las interacciones sociales adecuadas para el desarrollo conceptual; particularmente las confrontaciones provocadas entre los alumnos o entre ellos y el profesor se reconocen como de gran interés didáctico. Un tipo de interacción propuesto por Brousseau (1986) es el de situación problema, como punto de partida de una actividad de aprendizaje. A partir de una actividad en la que se ponen en juego los conocimientos que los alumnos deben aprender, la situación problema se convierte en el detonador de la actividad cognitiva. Para que esto suceda debe tener las siguientes características:

- debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.
- debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, debe ser accesible a él.
- debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores.
- debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y proponer nuevas soluciones.
- debe contener su propia validación.

La puesta en duda de los conocimientos genera un conflicto de naturaleza cognitiva en el alumno, que lo lleva a tomar conciencia de respuestas contradictorias que lo incitan a dudar de la suya. Esto, sumado a la oposición que tenga de parte del profesor o del grupo escolar, se constituye en un conflicto socio-cognitivo, aspecto que se ha puesto de relieve con el advenimiento de las corrientes psico - sociales del desarrollo cognitivo. Según estas corrientes, el aprendizaje se logra principalmente mediante las confrontaciones de las acciones o de las ideas, entre las personas. La oposición social de puntos de vista caracteriza al conflicto socio cognitivo y es el pivote de la interacción didáctica efectiva (Moreno y Waldegg, s.f.)

En síntesis, con el apoyo de los recursos de mediación que brinda el *software* Cabri Géomètre instalado en la calculadora TI 92 y con un ambiente de interacción social que favorezca el conflicto cognitivo a través del intercambio de opiniones, es posible generar una situación de aprendizaje a partir de la exploración consciente de las propiedades invariantes de una relación o transformación geométrica.

Una mirada a la actividad con los alumnos

La actividad se organizó alrededor de una exploración del concepto de simetría central, utilizando la calculadora TI 92. A continuación se muestran ejemplos de la interacción didáctica llevada a cabo, en donde se observa la evolución conceptual lograda a partir de la interacción con el *software* y de las preguntas dirigidas por la profesora.

Inicialmente se solicitó a los alumnos construir dos puntos *A* y *O,* utilizar la opción *Simetría* del menú de opciones del programa Cabri Géomètre, para aplicar la simetría a *A*, respecto de *O*, y explicar lo que observaban.

Algunos alumnos tomaron la palabra y explicaron que observaban la aparición de un nuevo punto (figura 1):

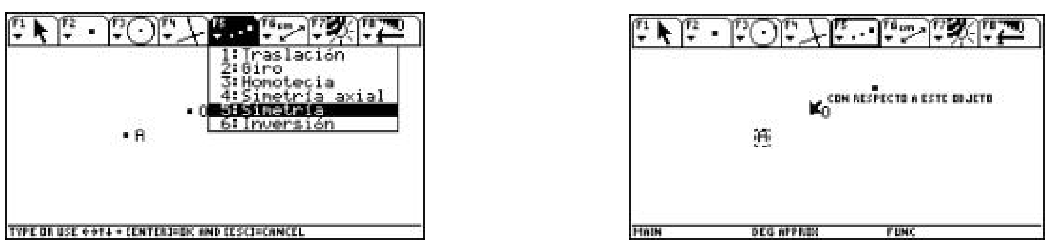


Figura 1

A1: *Lo que yo observé es que cuando pulsamos primero A y luego O sale de repente otro punto.*

A2: *Nosotros también.*

A3: *Aparece otro punto idéntico, a la izquierda y en la misma dirección*

Esta última intervención fue aprovechada por la profesora para orientar la discusión, hecho que da lugar a la siguiente conversación:

P: *¿Qué significa en la misma dirección?*

A3: *Lo que quiero decir es que si trazáramos una recta, estaría en la misma dirección que el punto O. Es decir, el punto nuevo está en la misma recta. Además tienen las mismas longitudes.*

P: *Llamemos B al punto simétrico. ¿Puedes explicarte mejor?*

A3: *Entonces digo que A, B, y O están en la misma recta y las longitudes de los segmentos AO y OB son iguales.*

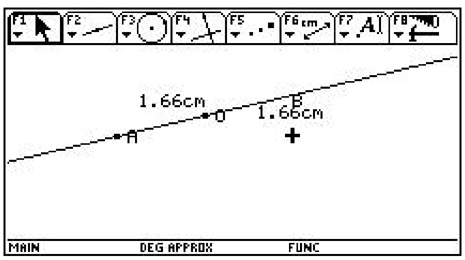
P: *¿Están todos de acuerdo? ¿Qué pasa si movemos el punto A?*

A4: *Nos podemos dar cuenta que el punto B se mueve también.*

A5: *Yo observo que si se mueve A hacia arriba, B se mueva hacia abajo; es como un sube y baja.*

A3: *Si, se mueve al contrario, porque tiene que quedar sobre la misma recta.*

A6: *Yo observé que las distancias siguen siendo iguales. Por ejemplo, a mi me dio 1,66 cm, pero yo subo el punto A, el número aumenta pero sigue siendo iguales los dos* (figura 2).



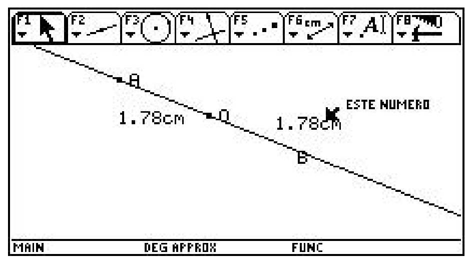


Figura 2

A5: *Aunque aumente o disminuyan las distancias se van a mantener iguales.*

P: *Si unimos con un segmento los puntos A y B, ¿dónde está ubicado exactamente el punto O?*

A7: *En medio.*

En las exploraciones iniciales los estudiantes parecen haber identificado las propiedades invariantes de la simetría central: la equidistancia de un punto y su simétrico al centro de simetría y la colinealidad de los tres puntos. La profesora intenta entonces lograr un consenso acerca de estas. Para ello, pregunta:

P: *De acuerdo con lo que han observado, ¿cuáles podrían ser las condiciones para que un punto sea el simétrico de otro punto?*

Ante la pregunta surgen diversas respuestas, pero todas referidas a la equidistancia del centro de simetría a los puntos, sin llegar a concretar exactamente las condiciones. Por ejemplo, *"un punto es simétrico de otro si queda a la misma distancia", "un pu nto es simétrico de otro si está a la misma longitud del punto O".*

Como todos parecen estar de acuerdo, la profesora utiliza un contra ejemplo, para suscitar un conflicto cognitivo y retomar la discusión:

P: *Miremos el siguiente ejemplo (*figura 3*). Ustedes acaban de afirmar que para que dos puntos sean simétricos, las distancias al centro de simetría deben ser iguales. ¿Será que B es el simétrico de A?*

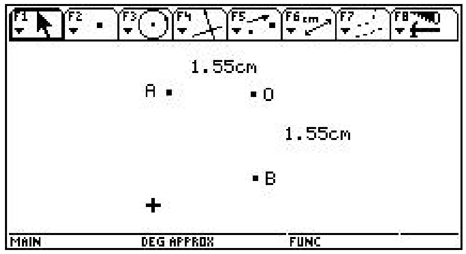


Figura 3

A4: *No, por que no están sobre la misma línea.*

A3: *No por que no están en la misma dirección.*

A8: *El punto B debería estar en la misma dirección de A. Suponiendo que el punto O sea el centro de simetría. Si trazáramos una línea deberían quedar en línea.*

Nuevamente la profesora retoma las palabras de los alumnos y además induce la formulación de conjeturas, al pedir una predicción que anticipe un “comportamiento” de la figura:

P: *¿Qué quieres decir con “la misma dirección”. ¿Dónde debería estar B, según tu?*

A3: *Supongo que el punto B debe estar por acá* (señala el sitio en forma correcta), *porque si O es el centro de la simetría y trazamos una línea por A y O, B debe quedar en la misma línea.*

A7: *Es que si movemos el punto A, se ve que B no es el simétrico porque no queda alineado. Así como lo tiene O no es el punto medio del segmento AB. La profesora no utilizó la herramienta simetría.*

P: *¿Pueden precisar mejor las condiciones que me habían dicho antes? ¿cuáles podrían ser las condciones para que un punto sea el simétrico de otro punto?*

A1: *un punto es simétrico de otro si queda a la misma distancia y si los tres puntos quedan sobre la misma línea.*

Se llega a un acuerdo general sobre esta condición. La profesora plantea ahora otra pregunta, que motiva la formulación de una nueva conjetura: *Si aplicamos la simetría central a un objeto, cómo quedaría su imagen?*

Una estudiante dice que probablemente quedará como una fotocopia del primero y otra asegura que la imagen quedará como si se viera la primera en un espejo. La profesora propone hacer la construcción de un triángulo y observar si los alumnos tienen la razón. La exploración realizada sobre una figura como la número 4, lleva a la siguiente conversación:

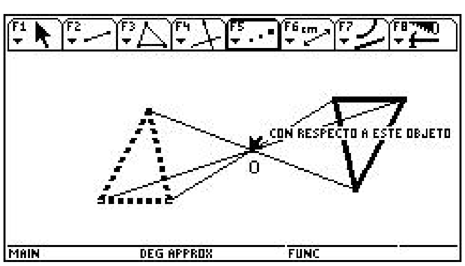


Figura 4

P: *Ahora que hicieron la construcción, ¿qué pueden concluir?*

A4: *Yo observo que se forma otro triángulo idéntico al primero, pero al revés.*

P: *¿Cómo así al revés?*

A5: *Si, mire, quedó como si le hubiera dado una vuelta de 180°. O es el centro de simetría y queda como si hubiera dado la vuelta alrededor del punto O.*

A6: *No es como un espejo porque no saldría al revés, sino en la misma posición. En cambio acá, es com o si hubiera ido dando vueltas y vueltas.*

P: *¿Cómo lo comprobamos?*

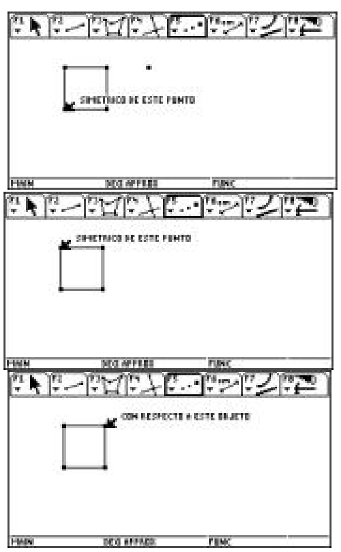
A2: *Haciendo la rotación.*

Para finalizar la sesión la profesora pide algunas conclusiones del ejercicio:

A10: *Hemos aprendido sobre simetría. Para hacer una simetría se necesita más de un punto, porque uno es el centro de simetría.*

A6: *Hemos aprendido que hay unas condiciones para que un punto sea simétrico de otro: al trazar una línea por el punto y su simétrico, el centro de simetría queda en la mitad, y a la misma distancia de ambos puntos.*

A4: *Yo aprendí que en la calculadora ya existe una herramienta para no tener que medir sino que la usamos para construir puntos simétricos a otros y hacer muchos diseños. Yo la usé para hacer este* (figura 5).



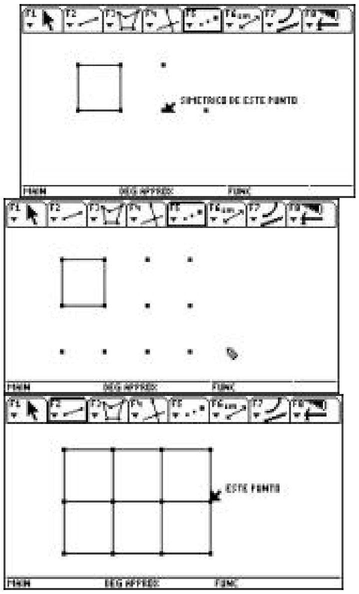


Figura 5

En síntesis, a medida que se hacían preguntas se fue logrando la conceptualización de lo que es una simetría central, inicialmente en una forma intuitiva, luego con más argumentos. El software Cabri Géomètre actuó como socio cognitivo, permitiendo la generación del significado de la simetría central. El contraejemplo presentado sirvió para concentrar la atención en los invariantes del concepto. Las respuestas dadas por los alumnos son una muestra de la comprensión del tema sin pensar en una formalización del mismo, que es objeto de estudio en cursos superiores.

Conclusiones

En la actividad se pudieron observar tres momentos fundamentales en la conceptualización geométrica. La primera consiste en la construcción de una figura (en este caso puntos y triángulos). La segunda consiste en visualizar todo lo que es posible en esta figura aprovechando la posibilidad de manipulación de las construcciones y la tercera consiste en el razonamiento, todo esto "acompañado de instrumentos de control que suministra el medio dinámico Cabri, como la medición y verificación de propiedades" (Moreno, 2000)

El ambiente proporcionado por Cabri Géomètre permitió a los alumnos la identificación de propiedades y la reflexión acerca de las preguntas hechas. Es decir, el ambiente actuó como mediador en la formulación de preguntas, a la vez que aportó herramientas para explorar dichas preguntas, situación un tanto difícil de obtener cuando trabajamos en un ambiente con papel y lápiz, puesto que el dibujo es una representación estática que no permite percibir si las propiedades se mantienen cuando varía uno de los componentes de la figura.

El tipo de actividad desarrollada contrasta fuertemente con las actividades comunes en nuestra escuela donde se hace énfasis en el dominio de algoritmos. En contraposición, hoy día se trata de que los alumnos tengan la posibilidad de explorar, reflexionar y construir invariantes para generar conocimiento matemático y desarrollar habilidades matemáticas.

Referencias

Brousseau G (1986). *La Théorisation des phenomenes d'eseignement des mathématiques*. En MORENO L; WALDEGG G (s.f.*) Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas*. En RICO L (ed) *Didáctica de las Matemáticas*, Capítulo 3, Editorial Síntesis, Madrid.

Ministerio de Ecuación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional. Serie Lineamientos.

Moreno L (2000). *Ideas geométricas del currículo presentadas mediante el Cabri Géomètre.* En (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*. Serie Memorias.

Moreno L y **Sacristan A** (2000). *Abstracciones y demostraciones contextualizadas: Conjeturas y generalizaciones en un micromundo computacional .* Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Moreno L y **Lupiañez J** (2000). *Tecnología y representaciones semioticas en el aprendizaje de las matematicas.* En (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*. Serie Memorias.

Moreno L; Waldegg G (s.f.*) Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas*. En RICO L (ed) *Didáctica de las Matemáticas*, Capítulo 3, Editorial Síntesis, Madrid.

---

[1] Nuestros más sinceros agradecimientos para Carlos Abel Álvarez, Hugo Cuellar y Frank Martínez por sus aportes, comentarios y sugerencias.

[2] Los autores forman parte del Grupo de Coordinación del Proyecto de Incorporación de Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia del Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

[3] El autor pertenece al Grupo Coordinador del Proyecto de Incorporación Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia del Ministerio de Educación Nacional.

[4] *Cómo se realizo la modelación del problema paso a paso: Después de varios intentos de modelación se llego a la siguiente, la cual es interesante por su sencillez. a- Dibuje una circunferencia y mida su longitud. b- Dibuje un punto sobre esta circunferencia (este punto será la meta). c- Utilizando edición numérica, escriba cualquier número (por ejemplo 2.5). Este número representa el tiempo transcurrido de carrera. d- Divida la longitud de la circunferencia entre 3, 4, 6. Los valores obtenidos expresan las velocidades de Toyota, Honda, Mazda respectivamente. e- Multiplique cada una de las velocidades de los autos por el tiempo. Cada uno de estos valores expresará la distancia por cada auto (suponiendo que el movimiento fuera línea recta). f- Transfiera la distancia recorrida a partir del punto de meta. Los puntos obtenidos representan a cada uno de los autos en carrera.*