R.Cuppens . *Faire de la geometrie en jouant avec Cabri Géomètre*, V 2.

Rectas y circunferencias tangentes (3 sesiones)

Ernesto Acosta Gempeler

Grupo Coordinador MEN

Incorporación Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería

Nivel. Intermedio (abierto para todos, pero se recomiendan conocimientos básicos de Cabri y de geometría plana).

Objetivos. Descubrimiento de relaciones inesperadas mediante la exploración de problemas de tangencia de rectas y circunferencias en Cabri con el propósito de generar estrategias de solución de problemas en geometría dinámica.

Descripción general del taller. Haremos una exploración de algunos problemas de tangencia entre circunferencias y rectas. Comenzaremos por plantear problemas muy elementales y a medida que adquiramos destreza con el uso de la calculadora y las estrategias de solución de problemas en geometría dinámica, resolveremos problemas cada vez más complejos.

Conocimientos previos: Se recomienda un manejo básico del Cabri y conocimientos básicos de geometría plana.

Programación.

Primer día: manejo de las herramientas que usaremos en el planteamiento, exploración y solución de problemas. La traza y el lugar geométrico. Circunferencia tangente a una recta y recta tangente a una circunferencia.

Segundo día: rectas tangentes a dos circunferencias y circunferencias tangentes a dos rectas.

Tercer día: rectas tangentes a tres circunferencias y circunferencias tangentes a tres rectas.

Desarrollo del taller.

Primera sesión

Circunferencias tangentes a una recta y rectas tangentes a una circunferencia.

1. Se plantea el problema de construir una circunferencia tangente a una recta dada *r*. Éste se puede resolver fácilmente debido a que no se han impuesto condiciones adicionales. Por ejemplo, construir una recta p perpendicular a *r*, tomar un punto *P* sobre *p* y construir la circunferencia *c* con centro en *P* que pasa por el punto *I* de intersección entre *p* y *r*. Hemos usado aquí que la recta tangente a una circunferencia en un punto *I* es una recta que:

a. pasa por *I*

b. perpendicular al radio de la circunferencia que pasa por *I*.

2. El problema se puede complicar un poco si se pide que la circunferencia pase además por un punto dado *P*. Una forma muy útil de atacar el problema en geometría dinámica consiste en escoger una familia de circunferencias que pasan por *P* y entre éstas encontrar las que son tangentes a la recta dada. Por ejemplo, trazamos una recta *s* paralela a *r* que pasa por *P*, tomamos un punto *Q* en *s* y construimos la circunferencia *z* con centro en *Q* y que pasa por *P*. Al mover *Q* sobre *s* tenemos una familia de circunferencias *z* que pasa por *P*. ¿Cuántas de éstas son tangentes a *r*?

Ahora, tracemos una recta *p* perpendicular a *r* que pasa por *Q* (en búsqueda de satisfacer la condición 1b). Las rectas *p* y *r* se intersecan en *U*; la intersección de *z* y *p* entre *Q* y *U* es *V*. Debemos ahora mover *Q* de tal manera que *V* esté sobre *r* (en búsqueda de la condición 1a).

Si activamos la traza de *V* y movemos *Q* sobre *s* podremos conjeturar que el lugar geométrico de *V* cuando *Q* se mueve sobre *s* es una recta que pasa por *P* y corta a *r* en el punto *I* que es el punto de tangencia que buscamos.

Trazamos la recta *t* que pasa por *P* y *V*, trazamos una recta perpendicular *m* que pase por *I* (*I* es el punto de intersección entre *t* y *r*). El centro C de la circunferencia buscada es el punto de intersección entre *m* y *s.*

Observaciones:

- Le hemos preguntado a la calculadora cuál es el lugar geométrico de *V* cuando *Q* se mueve sobre *s*. La calculadora nos ha dicho que el lugar geométrico es la recta *t* que pasa por *P* y *V* y que la intersección entre *t* y *r* es el punto de tangencia *I* buscado. *Esta es la forma de preguntar y leer la respuesta de la calculadora cuando trabajamos en geometría dinámica.*

- La escogencia de la recta *s* paralela a *r* es lo que llamaré la *introducción de un objeto test,* lo que nos permite trabajar con una subfamilia "más pequeña" de circunferencias que pasan por *P*.

3. ¿Es necesa rio que *s* sea paralela a *r*? Repita el punto 2 escogiendo otros *objetos test.*

4. Construimos "todas" las circunferencias que pasan por *P* y son tangentes a *r*.

5. ¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por P y son tangentes a r?

6. Repitamos 1 a 5 para el problema dual: construir una recta tangente a una circunferencia dada. ¿Qué diferencias se encuentran con el problema inicial?

Segunda sesión

Circunferencias tangentes a dos rectas y rectas tangentes a dos circunferencias.

1. Se plantea el problema de construir una circunferencia tangente a dos rectas dadas *r* y *s*. Usaremos las estrategias aprendidas en la primera parte: *introducción de un objeto test, preguntar a la calculadora y leer la respuesta*. Trazamos una recta *t* adicional (objeto test). Tomamos un punto *P* sobre *t* y construimos una circunferencia *z* con centro en *P* y tangente a *r*. Al mover *P* sobre *t* obtenemos una familia de circunferencias *z* que son tangentes a *r*. ¿Cuántas son tangentes a *s*?

Ahora construimos la recta *p* perpendicular a *s* que pasa por *P* (en búsqueda de la satisfacción de la condición 1b). Tomamos *V*, uno de los puntos de intersección entre la circunferencia *z* y *p*.

Al activar la traza de *V* y mover *P* sobre *t* vemos que su lugar geométrico es una recta que pasa por *V* y *R* (punto de intersección entre *t* y *r*) que corta a *s* en *I* que es el otro punto de tangencia buscado (en búsqueda de satisfacer la condición 1a).

Trazamos la recta *u* que pasa por *V* y *R*, construimos la recta *v* que pasa por *I* (punto de intersección entre *u* y *v*) y es perpendicular a *s*. El punto *C* de intersección entre *v* y *t* es el centro de la circunferencia buscada.

2. El problema se puede complicar un poco si se pide que la circunferencia pase además por un punto dado *P*. Introduzcamos un objeto *test* conveniente y resolvamos el problema.

3. Construyamos todas las circunferencias tangentes a las dos rectas dadas.

4. ¿Cuál es el lugar geométrico de las circunferencias tangentes a las dos rectas dadas?

5. Resolvamos el problema dual: Construir una recta tangente a dos circunferencias dadas. ¿Qué diferencias encuentra con el problema inicial?

6. Construyamos una circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia dadas.

Tercera sesión

Circunferencias tangentes a tres rectas dadas

1. Se plantea el problema de construir una circunferencia tangente a tres rectas dadas *r, s* y *t*. Usaremo lo aprendido. El centro de la circunferencia buscada está en el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a r y a s y en el correspondiente para s y t. ¡Encontrémoslo!

2. ¿Cuántas circunferencias tangentes a las tres rectas dadas hay? ¿Cuál es el lugar geométrico de sus centros?

Observación. A estas alturas ya estamos en capacidad de plantear y resolver muchos problemas más sobre rectas y circunferencias tangentes. Lo podemos hacer usando lo aprendido y combinando el número de rectas y el número de circunferencias. Un problema histórico consiste en construir todas las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas. Es el problema de las circunferencias de Apolonio. Un caso particular de este problema es cuando las circunferencias dadas son tangentes entre sí. Los centros de las circunferencias tangentes se conocen como los centros de Soddy del triángulo formado por los centros de las circunferencias dadas.

Bibliografía.

Ministerio de Educación Nacional (2002). *Seminario de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Serie Memorias, p.p. 312,313.

Programación gráfica utilizando la calculadora TI - 92 plus (3 sesiones)

Efraín Alberto Hoyos Salcedo

Universidad del Quindío

Nivel. Intermedio

Objetivos.

- Adquirir algunos de los elementos básicos de programación en la calculadora TI 92.

- Graficar funciones y hacer construcciones geométricas mediante la programación de la calculadora.

Descripción general del taller. Escritura de un programa sencillo en la calculadora TI 92. Presentación de los elementos básicos de programación. Realización de gráficas utilizando las primitivas y gráficas con la primitiva línea. Transformaciones geométricas: Translación - Rotación - Reflexión. Utilización de las instrucciones de alto nivel para graficar funciones. Animación haciendo gráficas desde un menú de opciones.

Conocimientos previos. Conocimientos básicos de geometría y manejo básico de la TI 92.

Desarrollo del taller.