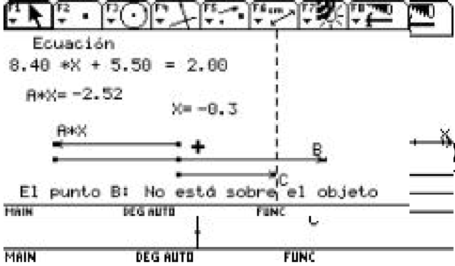


4. Con la opción formato elija mostrar el plano de coordenadas cartesianas. Dibuje tres líneas paralelas al eje X (en el resto de las instrucciones nos referiremos a estas líneas como l1, l2 y l3 respectivamente). Halle el punto de intersección de cada una de estas líneas con el eje Y.

5. Transfiera sobre l1, y a partir del punto de intersección con el eje Y, el valor que representa el producto A ***** X **.** Esta acción produce un nuevo punto sobre dicha recta. Etiquete el punto obtenido con la expresión: A ***** X **.**

6. Con un procedimiento similar, transfiera sobre l3, el valor que representa el coeficiente C de la ecuación. Al nuevo punto obtenido en dicha recta etiquételo con la letra C**.**

7. Trace una línea perpendicular a l1, y que pase por el punto A ***** X (Llamaremos l4 a esta perpendicular)**.** Halle el punto de intersección entre l4 y l2. Finalmente, transfiera sobre l2, y partir del punto de intersección hallado, el valor que representa el coeficiente B de la ecuación. Al nuevo punto obtenido etiquételo con la letra B. Debe tener una pantalla como la que se muestra en la figura 12. Figura 12

8. Dibuje tres vectores: uno de ellos con origen en el punto de intersección del eje Y y l1, y con extremo en el punto A ***** X. Otro, con origen en el punto de intersección de l2 y l4, y extremo en el punto B, y el último, con origen en el punto de intersección del eje Y y l3, y con extremo en el punto C**.**

9. La solución de la ecuación se verifica cuando la suma de los vectores A ***** X y B es igual al vector C**.** Para estar seguros de dicha igualdad se procede de la siguiente manera: Se traza una recta perpendicular a l3, y que pase por el punto C (Llamaremos l5 a dicha recta), y luego le pedimos a la calculadora que verifique si el punto B pertenece a la recta l5.

10. Oculte las líneas l1, l2, l3 y l4, así como el plano coordenado (menú F8, opción 9). Finalmente obtendrá una pantalla como la de la figura 13.

Figura 13

Bibliografía

Ministerio de Educación Nacional (2002) *Seminario Nacional de Formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá.

Construcción de cónicas y de curvas pedal (2 sesiones)

Grupo del Tolima [1]

Nivel. Intermedio

Objetivos.

- Presentar la construcción de cónicas utilizando el programa Cabri, destacando en ellas las ventajas que brinda este ambiente para los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

- Presentar algunas curvas que se generan utilizando cónicas y el concepto de recta tangente de una curva en un punto

Descripción general del taller. Durante el desarrollo del taller se presentarán varias construcciones de las cónicas utilizando el programa Cabri y se solucionarán problemas que utilicen estas construcciones o que empleen cónicas.

Conocimientos previos. *Matemáticos* : definición de las cónicas, recta tangente a una curva en un punto.

Manejo de la calculadora: construir con la calculadora rectas, rectas perpendiculares, puntos, punto sobre objeto y puntos de intersección.

Desarrollo del taller.

Sesión 1

Construcción de cónicas

1. Parábola

1.1. Definición.

Se llama parábola al lugar geométrico de todos aquellos puntos tales que sus distancias desde un punto fijo y desde una recta fija son iguales. El punto se llama foco de la parábola y la recta se llama directriz.

1.2. Elementos para la construcción.

Para construir una parábola necesitamos inicialmente de 2 elementos fijos: un punto arbitrario F y una recta arbitraria d, tales que F no esté contenido en d.

Si P es un punto de la parábola, la distancia del punto P al punto fijo F debe ser igual a la distancia del punto P a la recta fija d. Entonces P debe ser un punto sobre la perpendicular a la recta d y sobre la mediatriz del segmento que une el pie de ésta perpendicular con el punto F.

1.3. Construcción (Figura 1):

· Trazar una recta d

· Ubicar un punto F que no pertenezca a d. ¿Por qué no puede pertenecer?

· Ubicar un punto P’ que pertenezca a d

· Trazar por P’ una recta l perpendicular a la recta d

· Trazar el segmento FP’

· Trazar la mediatriz m al segmento FP’

· Marcar el punto P como la intersección entre las rectas l y m

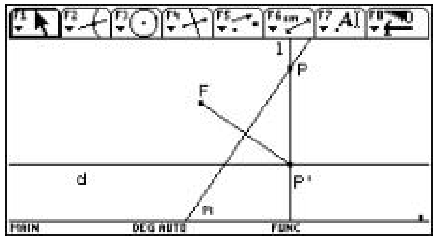


Figura 1

· Realizar la traza o el lugar geométrico del punto P cuando se desplaza P’. (Figura 2)

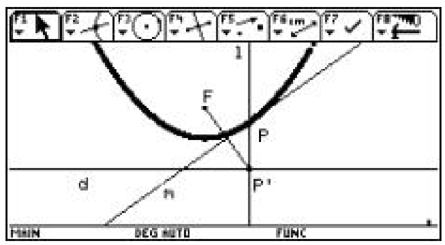


Figura 2

1.4. Extensiones de la construcción de la Parábola.

Un software de geometría dinámica como Cabri, permite explorar diversas posibilidades o variantes de un mismo problema geométrico. Así, respecto a la parábola, se pueden explorar las siguientes opciones. Por ejemplo, dado que GP = FP, es posible construir un círculo con centro en P, que pase por los puntos F y G y, además, que sea tangente a la directriz en el punto G (Figura 3). Teniendo en cuenta estas propiedades, se puede entonces escribir una definición alternativa de parábola: *una parábola es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una recta dada (la directriz) y que pasan por un punto dado (el foco).*

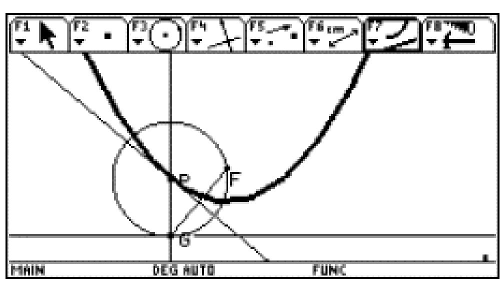
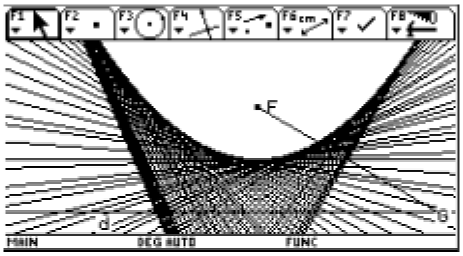


Figura 1

Figura 3

Parábola como lugar geométrico de centros de una circunferencia.

La construcción básica de la parábola como envolvente de un lugar geométrico de rectas (Figura 4a) o como lugar geométrico de puntos (Figura 4b), está basada en el concepto geométrico de *mediatriz* (en este caso, la mediatriz del segmento FG).



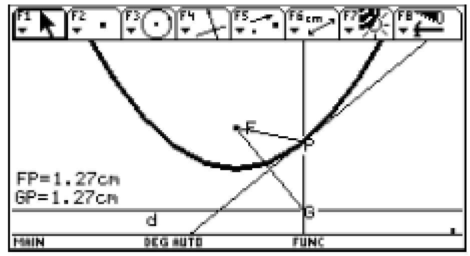


Figura 4a.

Parábola como envolvente de rectas

Figura 4b.

Parábola como envolvente de puntos

Como una variante de la construcción original se propone investigar lo que pasa cuando, en lugar de la mediatriz, se construye una recta perpendicular al segmento FG de modo que pase por cualquier punto de éste. Veamos: ubique un punto A en cualquier parte del segmento FG, localice el punto P de intersección entre la perpendicular que pasa por A y la que pasa por G, construya el lugar geométrico del punto P cuando G se mueve a través de la recta d (Figura 5). Arrastre el punto A a lo largo del segmento FG y explique lo que ocurre.

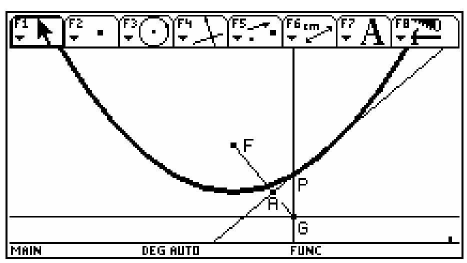


Figura 5

La forma del lugar geométrico, ¿corresponde a una parábola? De ser así, ¿dónde están (cuáles son) su foco y su directriz?, ¿En qué caso el punto F corresponde al foco?, ¿En qué caso la recta d corresponde a la directriz?, ¿Qué ocurre cuando el punto A coincide con uno de los extremos del segmento FG?, ¿Cuál es la relación de la recta AP con el lugar geométrico de la parábola a medida que el punto A se mueve a través del segmento FG?, ¿Qué es lo realmente importante de la relación entre la mediatriz del segmento FG y la parábola? Este tipo de interrogantes pueden ser investigados con el fin de indagar mejor sobre la profundidad del pensamiento matemático de los estudiantes.

1.5. Problema

Dada una recta fija y 2 puntos que no pertenecen a la recta y ubicados en el mismo semiplano con respecto a la recta, construir una parábola que pase por los dos puntos y tenga a la recta como directriz. ¿Es siempre posible construir la parábola bajo estas condiciones?

1.6. Aplicaciones

- La parábola es una curva que aparece con frecuencia en la naturaleza. En Física se conoce que si a un cuerpo que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme se le somete al mismo tiempo y en otra dirección al efecto de una fuerza que induzca en él una componente de aceleración (por ejemplo la fuerza de atracción de la gravedad), entonces la trayectoria resultante del cuerpo es una parábola.
- Las lentes de aumento y los espejos de los faros, así como los radares tienen forma parabólica. Ello obedece a que un haz de rayos paralelos al eje de la parábola al chocar contra el espejo parabólico se concentra en el foco.

2. Elipse

2.1. Definición.

Es el lugar geométrico de todos aquellos puntos tales que la suma de sus distancias desde dos puntos fijos de plano (llamados focos) es constante.

El círculo es un caso particular de elipse ¿Por qué?

Otros elementos de una elipse son: el eje mayor, el eje menor, el centro O, el eje focal (distancia entre los focos) y el lado recto (cuerda perpendicular al eje mayor que pasa por un foco).

2.2. Elementos para la construcción.

La distancia de un punto P de la elipse a uno de los focos más la distancia del mismo punto al otro foco es constante. Esto es equivalente a tomar un segmento y partirlo en dos secciones, en todas las posibles particiones se observa que la suma de las dos longitudes es constante. Este segmento puede ser representado como el radio de una circunferencia.

También se requiere utilizar el concepto de mediatriz.

2.3. Construcción (Figura 6).

- Construir una circunferencia con centro F1 y radio r
- Ubicar un punto interior al círculo, llámelo F2
- Ubicar un punto arbitrario Qsobre la circunferencia
- Construir el segmento QF1
- Construir el segmento QF2
- Construir la mediatriz de QF2

· Localizar el punto P de intersección de la mediatriz del segmento QF2 con el segmento QF1.

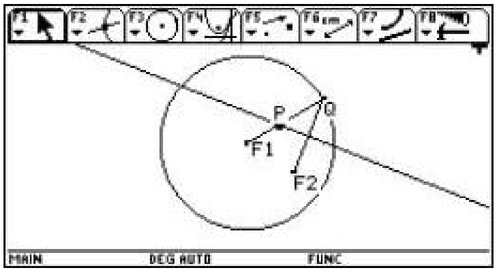


Figura 6

Realizar la traza de P moviendo el punto Q. (Figura 7)

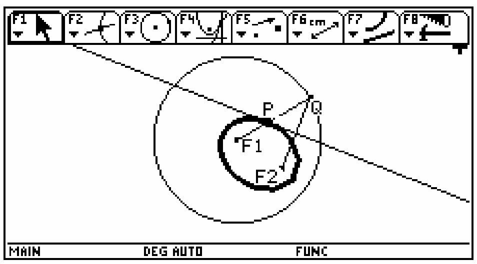


Figura 7

¿Por qué razón se construye la mediatriz?, Explique cuál es la relación que existe entre los segmentos PQ y PF2

2.4. Problema

Dados tres puntos del plano, dos de ellos fijos, construir una elipse tal que los dos puntos fijos sean los focos y el punto móvil sea un punto de ella

Solución.

Sean A y B los puntos fijos (focos de la elipse) y C el punto que pertenece a la elipse. (Figura 8)

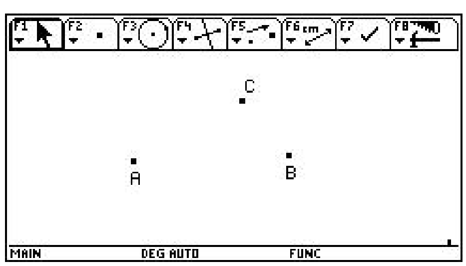


Figura 8

1. Construir la circunferencia de centro B y radio BC y el segmento de extremos A y D que pasa por el centro de la circunferencia. La longitud de este segmento es igual a la suma de las longitudes de los segmentos AB y BC. (Figura 9)

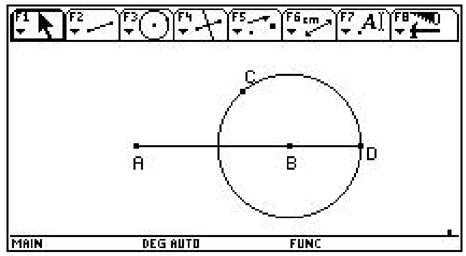


Figura 9

2. Ocultar la circunferencia.
3. Marcar un punto E sobre el segmento AD y construir la circunferencias de centro A y radio AE, y de centro B y radio ED. (Figura 10)

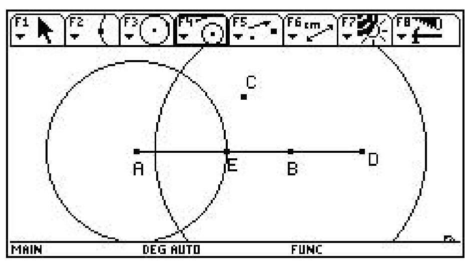


Figura 10

4. Marcar los puntos de intersección de las dos circunferencias. Estos puntos pertenecen a la elipse.
5. Activar la traza para los puntos de intersección y dar animación al punto E. Este punto se mueve sobre el segmento AD.

2.5. Aplicaciones.

- En 1609 el astrónomo alemán J. Kepler (1571-1630) demostró que los planetas siguen trayectorias elípticas estando el sol en uno de los focos; estas elipses tienen excentricidad muy pequeña, es decir, se parecen mucho al círculo.

- Cualquier tangente a una elipse forma ángulos iguales con respecto a los segmentos que unen el punto de tangencia con los focos. Por consiguiente, si desde uno de los focos se emiten señales luminosas o sonoras que se reflejen o reboten en la elipse, estas señales se recibirán concentradas en el otro foco.

3. Hipérbola

3.1. Definición.

Es el lugar geométrico de todos aquellos puntos tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

3.2. Construcción

1. Ubicar dos puntos fijos como focos y llamarlos F1 y F2.

2. Haciendo centro en uno de ellos, por ejemplo en F2, construir una circunferencia de radio r, cualquiera sea r (la longitud de r corresponderá a la diferencia de las distancias de un punto de la hipérbola a los focos).

3. Ubicar un punto Q sobre la circunferencia.

4. Trazar la recta QF2.

5. Localizar un punto P sobre la recta QF2 talque d(P,F2)-d(P,F1) = r. Esta situación implica que d(P,Q) = d(P,F1); por consiguiente P está ubicado a igual distancia de los extremos del segmento QF1, de ahí que P pertenezca a la mediatriz del segmento QF1. Para construir entonces elpunto P se procede así:

5.1. Trazar el segmento QF1

5.2. Trazar la mediatriz M del segmento QF1

5.3. Marcar como P el punto de intersección de la recta QF2 con la recta M. (Figura 11)

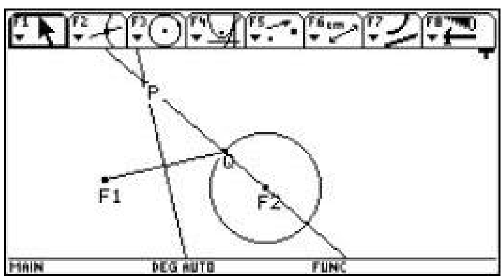


Figura 11

6. Realizar el lugar geométrico o la traza de P con respecto a Q. (Figura 12)

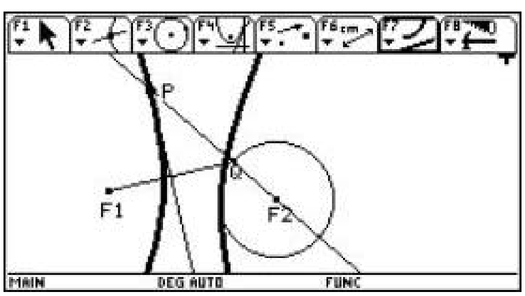


Figura 12

3.3. Problema:

Dado dos puntos fijos que constituyen los focos de una hipérbola y un punto P que pertenece a esta curva, construya la hipérbola.

3.4. Aplicaciones

Cuando desde un punto cualquiera de la curva se trazan segmentos a los focos, la bisectriz del ángulo formado por dichos segmentos es tangente a la hipérbola. Inversamente, cualquier tangente a la hipérbola es bisectriz del ángulo formado por los segmentos que unen los focos con el punto de tangencia.

3.5. Problema

Dado un punto Q sobre una circunferencia con centro en O y un punto P exterior a ella, determinar el lugar geométrico que genera la intersección de la recta que pasa por P y Q con la recta que pasa por O y el simétrico de Q con respecto a OP, cuando Q se mueve.

Dependiendo de la distancia en que se ubique a P con respecto al centro de la circunferencia, se obtienen diferentes lugares geométricos. En particular, el lugar geométrico que se genera cuando P está a una distancia menor que 2R es una hipérbola. (Figura 13)

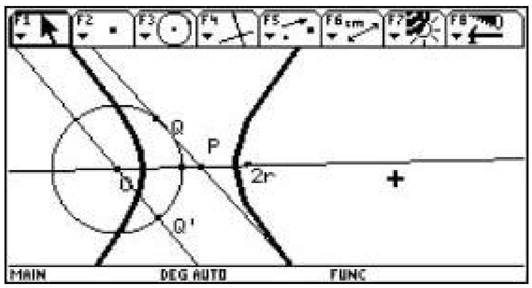


Figura 13

· Cuando P se ubica a una distancia igual a 2R se genera una parábola.(Figura 14)

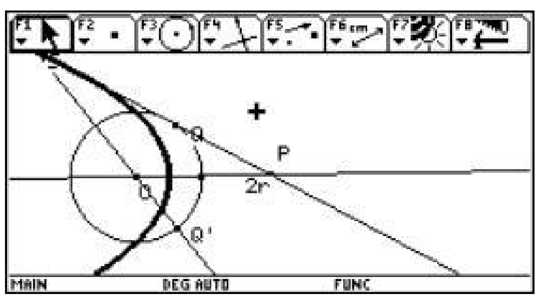


Figura 14

· Cuando P está a una distancia mayor que 2R con respecto al centro de la circunferencia, se genera una elipse. (Figura 15)

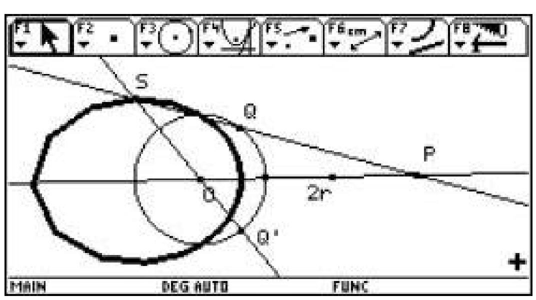


Figura 15

Finalmente, cuando P tiende al infinito, el lugar geométrico tiende a ser una circunferencia. (Figura 16)

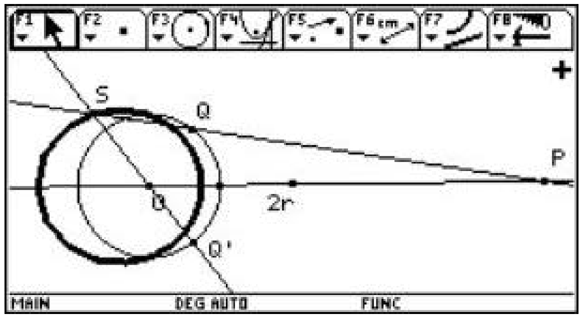


Figura 16

Sesión 2

Curvas pedal

Una curva pedal a una curva dada se construye de la siguiente manera:

· construir una curva C y un punto S que no esté en la curva

· trazar una tangente t a la curva C en un punto P de ella

· trazar una recta l perpendicular a t que pase por S.

El lugar geométrico que genera el punto de intersección entre l y t cuando P se mueve sobre la curva C, se denomina curva pedal.

2. Caracol de Pascal

2.1. Primera construcción

Considerar una circunferencia con radio OP, una tangente a la circunferencia en P, y un punto S exterior a la circunferencia. (Figura 17)

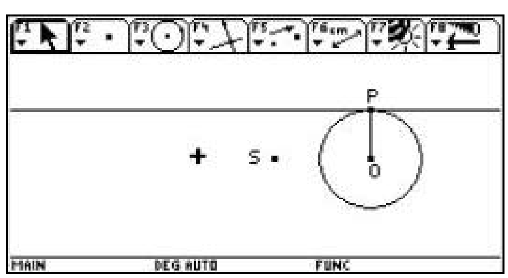


Figura 17

Por el punto S trazar una perpendicular a la recta tangente, intersecándose en Q . (Figura 18)

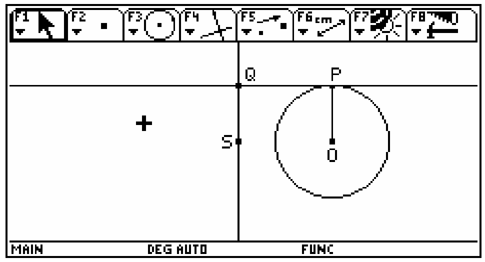


Figura 18

Activar la traza o lugar geométrico en Q con respecto a P. (Figura 19)

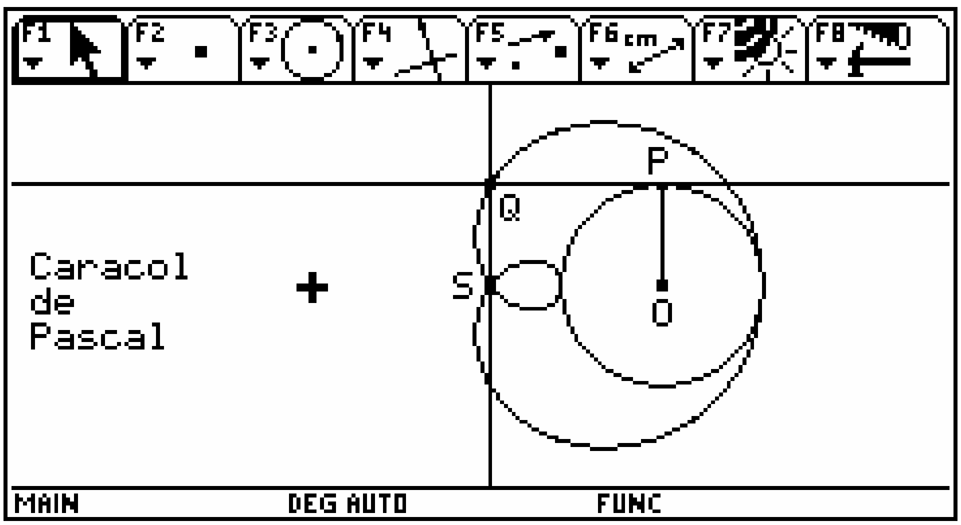
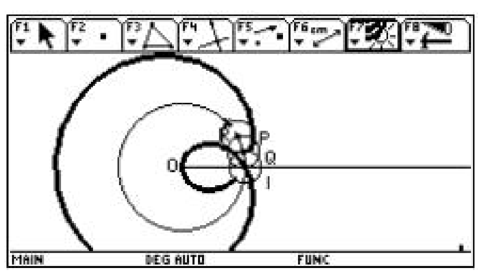


Figura 19

¿Qué sucede si el punto S se ubica sobre la circunferencia y es exterior a T?

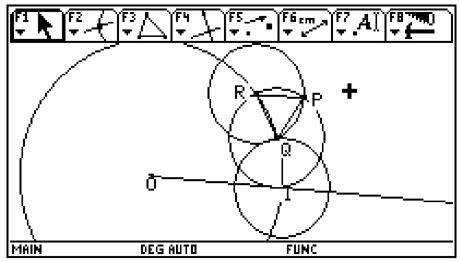
2.2. Otra construcción del Caracol de Pascal

Dibujar una circunferencia C con centro en O y radio r cualquiera; trazar luego una semirrecta cuyo origen coincida con O. Determinar el punto I de intersección de la circunferencia C con la semirrecta.



Trazar otra circunferencia C1,con centro en I y cuyo radio r'sea menor que r. Luego, haciendo centro en uno de los puntos de intersección de las circunferencias C y C1 anteriores, trazar otra circunferencia C2 de radio r'. Repetir el procedimiento anterior para trazar una tercera circunferencia C3 igualmente con radio r'. (Figura 20)

Figura 20



Por otra parte, las intersecciones de las circunferencias C1, C2 y C3 determinan los puntosP, Q y R.(Figura 21)

Figura 21

Da la impresión de que el triángulo cuyos vértices son los puntos P, Q y R, es equilátero. Sustentar o contradecir esta afirmación.

Finalmente determinar el lugar geométrico que describe el punto P cuando el punto Q se mueve alrededor de la circunferencia C (Figura 22).

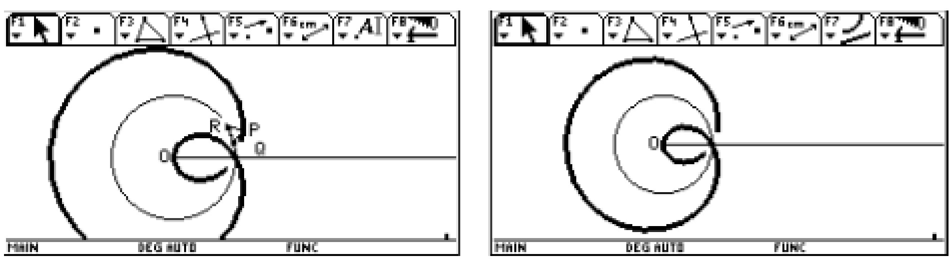


Figura 22

Caracol de Pascal como lugar geométrico que describe el punto P cuando Q se mueve alrededor de la circunferencia C.

3. Lemniscata de Bernoulli

Utilizando la construcción de la hipérbola, propuesta inicialmente, trazar la mediatriz del segmento PF2, trazar una recta perpendicular a esta mediatriz que pase por el punto medio entre F1 y F2 y llame Q a la intersección de estas dos rectas. (Figura 23)

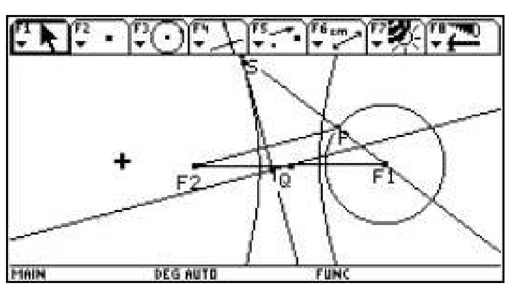


Figura 23

Activar la traza o lugar geométrico en Q con respecto a P. (Figura 24)

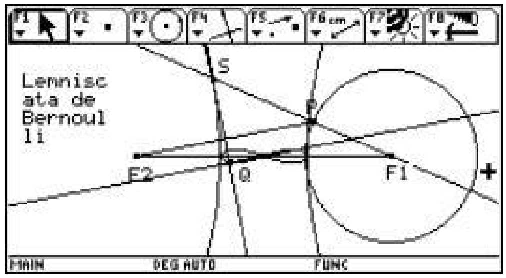


Figura 24

4. Folium de Descartes

Sea P un punto ubicado sobre una parábola de foco F y directriz d. Trazar una perpendicular que pase por el foco F y la directriz d. Llamar R a la intersección de estas dos rectas. Por el punto P trazar una perpendicular a la directriz d y llamar S al punto de intersección. (Figura 25)

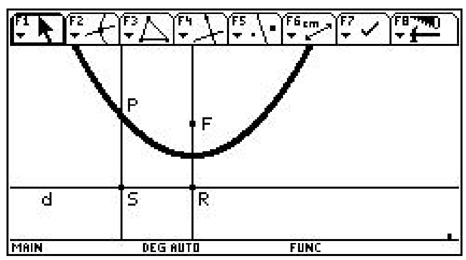


Figura 25

Construir la mediatriz m del segmento FS. (Figura 26)

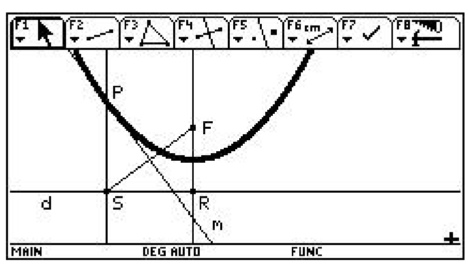


Figura 26

Construir una recta perpendicular l a la mediatriz m que pase por R. Marcar con Q el punto de intersección de estas dos rectas. (Figura 27)

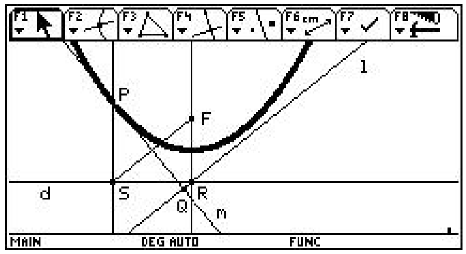


Figura 27

Trazar el lugar geométrico o traza de Q con respecto a P. (Figura 28)

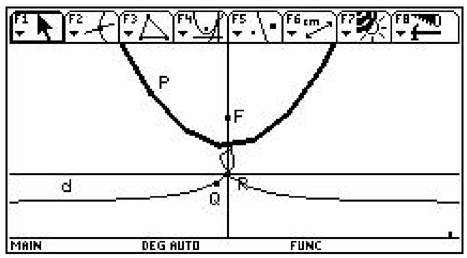


Figura 28

5. Bruja de Agnessi

Dada una circunferencia, construir su diámetro y denominar sus extremos con A y B. Sobre el punto A trace la recta tangente a la circunferencia y ubique un punto P sobre la tangente. (Figura 29)

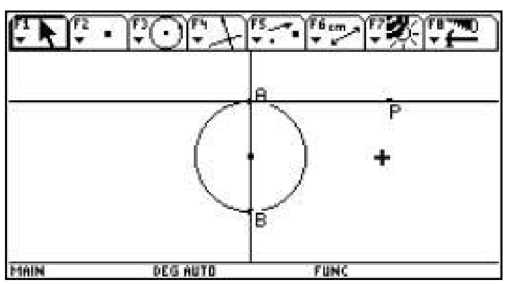


Figura 29

Trazar una recta que pase por P y B. Marcar con R el punto de intersección entre la circunferencia y la recta PB. (Figura 30)

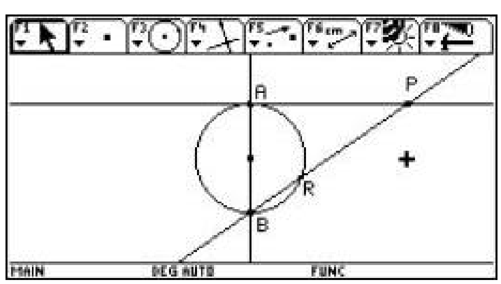


Figura 30

Construir una recta l perpendicular a la recta tangente en el punto P y otra recta perpendicular a la recta l desde el punto R. Denominar Q al punto de intersección entre estas dos perpendiculares. (Figura 31)

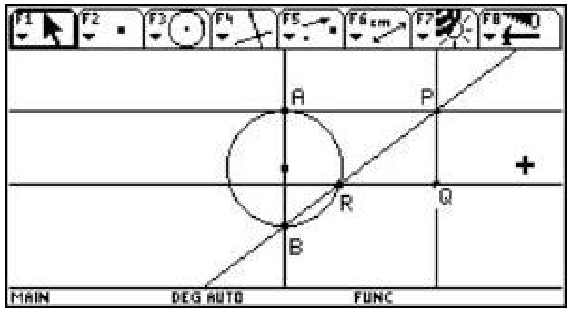


Figura 31

Construir el lugar geométrico o la traza de Q con respecto a P. (Figura 32)

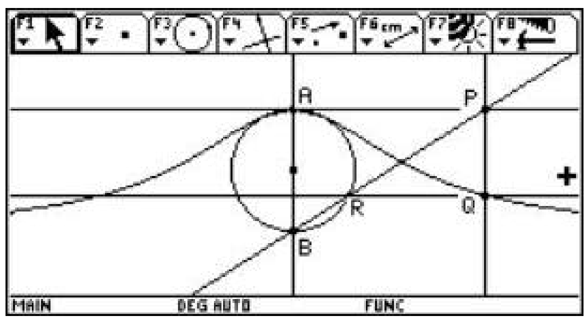


Figura 32

Bibliografía

Centre Informatique Pédagogique "CIP" (1996). *Apprivoiser la géométrie avec Cabri-Géometre*. Genova: CIP.

Miguel de Guzmán (1988). *Aventuras Matemática*s Barcelona. Editorial Labor S.A.

Ministero de Educación Nacional (2002). *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes*: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá: MEN.

Swokowski , Earl L (1982). *Cálculo con geometría Analítica*. Estados Unidos. Wadsworth Internacional Iberoamérica.

Texas Instruments TI-92 (1996). *Manual del usuario*. Estados Unidos. Texas Instruments

Velasco , Gabriel (1983). *Tratado de Geometría*. México. Editorial Limusa