La derivada como razón de cambio - Simulación (2 sesiones)

Jorge Enrique Fiallo Leal

Universidad Industrial de Santander

Nivel . intermedio

Objetivos.

- Utilizar la simulación en Cabri como un modelo de representación visual que permita comprender el concepto de derivada como razón de cambio.

- Utilizar otras aplicaciones de la TI 92 para el análisis y la comprensión de los conceptos del problema planteado.

Descripción general del taller. Partiendo de un problema de razones afines simulado en la calculadora, se realiza un análisis de la variación para llegar a la representación gráfica y algebraica de la función que relaciona las variables del problema. A través de la recolección y el análisis de datos, se llega a una aproximación del concepto de derivada como razón de cambio. Si el tiempo lo permite se trabajará la construcción de la simulación.

Conocimientos previos .

Conceptos de función y límites.

Manejo del Cabri y otras aplicaciones de la calculadora TI 92

Programación.

Primer día : iniciación del desarrollo del problema.

Segundo día : continuación del desarrollo del problema, construcción de la simulación.

Desarrollo del taller.

Planteamiento del problema

Una alberca de 4m de largo, 1.10 m de ancho, 2m de profundidad en un extremo y 0.5m en el otro se está llenando de agua.

Abra el archivo **alberca [1]** y responda las siguientes preguntas:

a. Anime el tiempo durante 15 segundos aproximadamente empezando en 0.0 y describa lo que observa.

¿Cuáles son las magnitudes variables en el problema? ¿Estas magnitudes siempre varían hasta llenarse la alberca?

b. Realice una tabla determinando el valor de la profundidad (p), el largo (l) y el volumen (V) cuando el tiempo (t) es igual a: 1s, 5s, 9s, 12s, 14s, 15s.

c. Utilizando la opción de agrupar datos, construya una tabla con los valores de t, p, l y V en las columnas C1, C2, C3, C4 respectivamente para 0 £ t < 15.

· ¿Qué relación existe entre la profundidad y el largo de la alberca?

· ¿Esta relación se mantiene durante todo el tiempo en que dura llenándose la alberca?

· ¿Cuál es el valor de p, l, y V en la tabla cuando t = 1, 5, 9, 12, 14, 16 segundos?

· ¿Qué sucede con el largo y el volumen cuando t ³ 9?, ¿cómo interpreta este hecho?

d. En la calculadora defina la relación entre el largo y la profundidad y cópiela en plot 1. Visualice los datos en el editor gráfico.

e. Exprese algebraicamente el largo en función de la profundidad. Según esta expresión, ¿Cuál es el largo cuando p = 1.6?

f. Represente gráficamente esta función. ¿Cuál es el dominio y el rango?

g. En la calculadora defina (F2-F1) la relaciones entre profundidad-tiempo, largo-tiempo y visualice los datos. Halle las expresiones algebraicas que representan el largo en función del tiempo y la profundidad en función del tiempo. Represente gráficamente estas funciones. ¿Cuál es el dominio y el rango de cada una de ellas?

h. Exprese algebraicamente el volumen en función de la profundidad y en función del tiempo. Represente gráficamente esta función y determine su dominio y rango.

Revise la tabla de los datos obtenida en el literal c.

a. Analice la variación de la profundidad con respecto al tiempo y describa lo que observa.

b. Realice los siguientes cálculos para los intervalos de tiempo dados y complete la tabla 1.

Intervalo de tiempo Δt	Δp	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
(0.95 , 1)		
(0.96 , 1)		
(0.97 , 1)		
(0.98 , 1)		
(0.99 , 1)		
(1 , 1.05)		
(1 , 1.04)		
(1 , 1.03)		
(1 , 1.02)		
(1 , 1.01)		

Tabla 1

¿Aproximadamente cuál es la razón de cambio de la profundidad con respecto al tiempo alrededor de 1s?

c. Para ser más exacto, tome más datos alrededor de t =1 de la siguiente manera:

· Borre los datos tomados anteriormente en el archivo SYSDATA.

· Cambie el tiempo a 0.990.

· Seleccione el tiempo, la profundidad, el volumen y registre los datos en SYSDATA, hasta que el tiempo sea 1.010. (Δt = 0.001).

Halle la razón de cambio entre la profundidad y el tiempo para Δt = 0.001 de la siguiente manera:

- Ubíquese en C5 y escriba C5 = shift(C2,1). Compare las columnas C5 y C2. ¿Qué observa?

- Ubíquese en C6 y escriba C5 -C2.

- Halle la razón entre la variación de la profundidad y la variación del tiempo 0.001 ubicándose en C7 y escribiendo C7= C6/0.001.

¿Aproximadamente a qué valor tiende esta razón alrededor de 1?

d. Repita el anterior proceso variando el tiempo desde 0.9990 hasta 1.0010 (Δt = 0.0001). ¿Aproximadamente a qué valor tiende la razón de cambio entre la profundidad y el tiempo (rapidez) alrededor de t = 1?

e. ¿Cuál es la razón de cambio entre la profundidad y el tiempo para t =1 cuando Δt tiende a cero?

f. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando tiene 1mt de profundidad en el extremo más hondo? (razón de cambio de la profundidad con respecto al tiempo)

g. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando tiene 1.7m de profundidad en el extremo más hondo?

h. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen cuando la profundidad es de 1.7 m?

Construcción de la simulación

Archivo *alberca*

Construcción del sólido

- Edite los números 4, 2, 1.5, 1.1 y 1.0 (Medidas de la alberca y el tiempo)

- Represente una semirrecta vertical en el lado izquierdo de la pantalla.

- Transfiera sobre la semirrecta las medidas 2 y 1.5.

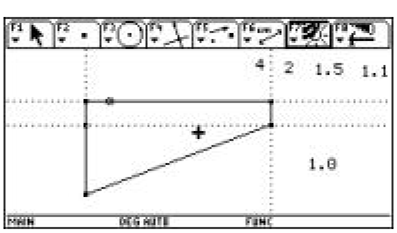
- Trace un segmento desde donde inicia la semirrecta hasta el punto que representa la longitud de 1.5 y otro segmento desde este punto hasta el punto que representa la longitud 2.

- Trace una perpendicular a la semirrecta o al segmento desde este último punto.

- Trace una semirrecta desde el punto que representa la longitud 2 sobre la recta perpendicular y oculte el punto que queda sobre la recta y la semirrecta.

- Transfiera el número 4 a la semirrecta horizontal y trace una perpendicular a ésta desde el punto transferido.

- Trace una perpendicular desde el punto superior del segmento de longitud 1.5 a este segmento o a la semirrecta inicial. (Figura 1)



- Halle el punto de intersección entre estas dos perpendiculares y ocúltelas con la semirrecta horizontal.

- Trace el cuadrilátero con vértices en el inicio de la primera semirrecta horizontal, el punto que representa la longitud 2, el que representa la longitud 4 y el punto de intersección de las dos perpendiculares.

- Trace una semirrecta desde el vértice superior izquierdo con una inclinación respecto a la horizontal de aproximadamente 45 grados y transfiera sobre ella el número 1.1.

· Trace un vector desde el inicio de la anterior semirrecta hasta el punto que representa la longitud 1.1.

· Traslade el cuadrilátero en la dirección del vector y oculte la semirrecta y el vector.

· Una con segmentos cada vértice del polígono y su respectiva imagen.

· Represente a trazos el polígono imagen y el segmento que une el vértice inferior izquierdo con su imagen

· Trace un segmento desde el vértice superior izquierdo hasta el superior derecho del polígono imagen y otro desde este punto hasta el vértice inferior derecho.

Simulando el agua

· Calcule la raíz cuadrada del número 1.0 (que va a representar el tiempo) y divídalo entre dos. (Figura 2)

NOTA: si quiere que la variación de la profundidad con respecto al tiempo sea constante tome el tiempo y multiplíquelo o lo divídalo por una constante (esto para que la variación no sea un centímetro por cada unidad de tiempo).

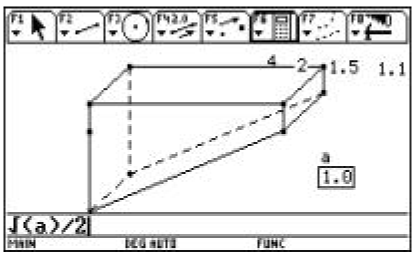


Figura 2

· Marque un punto en algún lado de la pantalla y transfiera el anterior resultado a este punto. Luego, con la opción compás, transfiera esta medida al segmento de longitud 1.5 y halle la intersección entre este segmento y la circunferencia formada. (Figura 3)

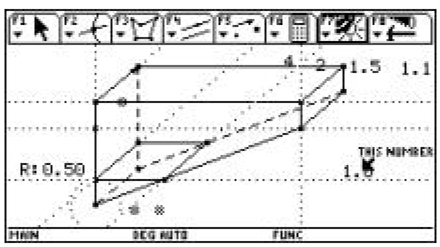


Figura 3

· Trace una perpendicular al segmento por este punto y halle la intersección entre la perpendicular y el lado del cuadrilátero.

· Trace paralelas al segmento que representa el ancho de la alberca (medida 1.1) que pasen por los dos últimos puntos.

· Halle las intersecciones de estas rectas con los lados del polígono imagen.

· Trace el cuadrilátero que tiene como vértices estos últimos cuatro puntos.

· Oculte las rectas, la circunferencia y los puntos transferidos.

· Trace una semirrecta desde el vértice inferior derecho sobre el polígono y oculte el punto que se formó.

· Cambie el número que representa el tiempo a 11 y calcule la diferencia entre el tiempo y 9 y divídalo entre 10: (11-9)/10.

· Transfiera este resultado hasta la última semirrecta y trace una perpendicular a ella por este punto.

· Halle la intersección entre la perpendicular y el segmento del lado izquierdo del polígono de longitud 0.5.

· Por este punto trace una paralela al segmento de longitud 1.1 y otra paralela por el punto transferido a la semirrecta vertical.

· Halle la intersección de estas paralelas y el polígono imagen.

· Trace el polígono que tiene como vértices estos últimos cuatro puntos.

· Oculte las rectas y la semirrecta.

Calculando el volumen

· Calcule la distancia entre los dos puntos que representan la profundidad de la alberca cuando esta es mayor que 1.5 y llámelo (p =).

· Calcule la longitud entre los dos puntos del polígono que representan el largo de la alberca y llámelo (l =). (Asegúrese que sean los vértices del polígono).

· Calcule el volumen (V =) para p mayor que 1.5 como la suma de 3.3 y el producto de 1.1 por 0.20 por l = 4.00cm. (Figura 4)

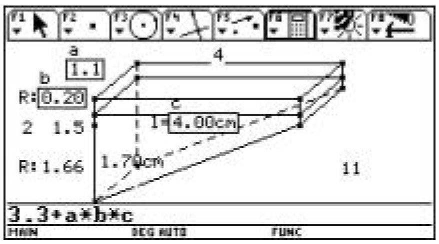


Figura 4

· Oculte los resultados R:0.20 y R:1.66 y mueva los valores editados inicialmente a cada uno de los lados del sólido que representa la alberca.

· Cambie el número que representa el tiempo a 1.0.

· Calcule la distancia entre los dos puntos que representan la profundidad de la alberca cuando esta es menor que 1.5 y llámelo (p =).

· Calcule la longitud entre los dos puntos del polígono que representan el largo de la alberca y llámelo (l =). (Asegúrese que sean los vértices del polígono).

· Calcule el volumen (V =) para p menor que 1.5 como el producto de 1.1 por p =0.50cm por l =1.33cm y divídalo entre 2.

· Oculte los objetos que considere necesarios para visualizar mejor la simulación y engruese las líneas del polígono inicial (cara frontal) los segmentos de la cara superior y de la lateral derecha. (Figura 5)

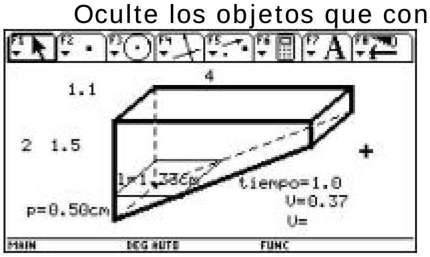


Figura 5

· Cambie el número que representa el tiempo a 0.0 y anime este valor.