

REPRESENTACIONES DE LA FUNCIÓN SENO A PARTIR DE DISPOSITIVOS DE EXPERIMENTACIÓN EN FÍSICA

REPRESENTATIONS OF THE SINUS FUNCTION, WITHIN DEVICE FROM PHYSICS EXPERIMENTATION

CARLOS EDUARDO LEÓN S. *

Resumen

En el presente artículo, se dan a conocer los resultados de una investigación cualitativa que tiene como propósito diseñar una secuencia de actividades didácticas en la cual se resignifique la función trigonométrica seno a partir del estudio de sus características. Se pretende que la resignificación se dé en un escenario físico que esté normado por la práctica predicción y que aporte elementos metodológicos para realizar actividades en conjunto entre las matemáticas y las ciencias experimentales como la física. Esta investigación dio como resultado las bases metodológicas para diseñar un laboratorio de Física y Matemáticas que se pretende construir para el programa de Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información, del cual se tomó una muestra de cuatro estudiantes para adelantar este estudio.

Palabras clave: acotado, función, periodicidad, predicción, resignificación.

Abstract

This article provides the results of a research which designs a sequence of activities to resignify a sequence of trigonometric sine function starting from the study of their characteristics. According to this, it is expected that this resignification takes place in a physical context regulated by prediction and, at the same time, provides methodological elements to do joint activities between mathematics and experimental sciences such as physics. In short, this research supplied the methodological foundations for the future design of the Laboratory of Physics and Mathematics that will be assigned to the Mathematics and Information Technology Program. This research was carried out with a population of second-semester Mathematics students at La Gran Colombia University.

Key words: bounded, prediction, function, periodicity, resignify

* *Estudió Matemáticas, en la Universidad Nacional de Colombia y obtuvo el título como Licenciado en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional. Especialista en Pedagogía y Docencia Universitaria de la Universidad La Gran Colombia en Magister en Docencia de las matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Actualmente Profesor investigador de la Licenciatura en Matemáticas y Tecnologías de la Información de la Universidad La Gran Colombia. carlos.leon@ugc.edu.co*

Introducción

En distintas ciencias como la física, la astronomía o la topografía, se puede evidenciar los distintos usos que tienen las funciones trigonométricas tanto en física como en matemáticas. Pero en la presentación que se hace de estos temas en la matemática escolar, se privilegia el tratamiento analítico y los manejos algebraicos de propiedades como lo periódico o lo acotado de la función trigonométrica, tornándose muy difícil la respuesta a interrogantes acerca de su utilidad.

Por el contrario, en física, es un poco más natural mostrar las distintas aplicaciones que tiene la trigonometría para describir ciertos fenómenos mecánicos, por ejemplo: situaciones como los generadores de ondas estacionarias, el estiramiento de un resorte o el movimiento de un péndulo en oscilaciones pequeñas, presentan algunos usos de la función seno y sus propiedades. La relación de estos fenómenos con la clase de matemáticas, no es evidente aunque se hable del mismo tipo de funciones.

Situaciones como las descritas anteriormente, se establecen como marcos de referencia en donde el conocimiento adquiere un significado propio y se organiza en una variedad de interpretaciones, al romper con la idea de una unicidad cognitiva y que a la vez, constituyen un uso del conocimiento acerca de las normas establecidas en la organización de un grupo social. La actividad de un grupo social en el medio en donde se desenvuelven, le da un sentido a los problemas fundamentales de la ciencia, estableciendo relaciones entre ellos y su entorno (Camacho, 2006).

En consecuencia, ante el problema de la ausencia de marcos de referencia para la resignificación de las características de la función seno como lo acotado, la identificación del periodo y lo periódico, esta investigación pretende apor-

tar elementos para construir dichos marcos de referencia y dar una alternativa en el ejercicio de la enseñanza de las matemáticas en la pregunta natural del para qué se aprende, y plantearse una metodología experimental de clase. Los diversos intereses y contextos de los estudiantes son ajenos a la utilización de sus aprendizajes, siendo que estos pudieran enriquecer el significado de su conocimiento sobre sus prácticas cotidianas.

Esta brecha que se forma entre el conocimiento y su uso, genera según Suarez (2008), una imposibilidad en la resolución de problemas, en la demostración de conjeturas y en entender una teoría en contexto.

Por esta razón, podemos hablar de un significado propio que adquiere el conocimiento, creando un espectro de posibilidades para su interpretación y omitiendo la concepción de la unicidad del conocimiento. De esta adquisición de significados propios, emerge la idea de resignificación que según Cordero (2006), se refiere a la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por el uso del conocimiento en una situación donde se debate entre su funcionamiento y su forma, a partir de la organización de las participantes.

Esta resignificación se analiza a partir de los patrones de la construcción que pueden hacer los grupos sociales, además de los marcos en los cuales se da este uso. Los conceptos y las estructuras matemáticas se resignifican a partir del desarrollo de prácticas sociales en donde el sujeto juegue un papel fundamental al modificar su entorno, y así mismo, en las prácticas en las cuales se encuentre inmerso, y son estas prácticas la fuente de la resignificación del conocimiento matemático (Arrieta, 2003).

La resignificación que se pretende estudiar en esta investigación, se da a partir del análisis de

las características de la función seno. Entre más características se reconozcan de una función, mejor se puede representar el tipo de función, ya sea analítica o gráficamente. Por lo tanto, caracterizar una función será determinar y estudiar las principales cualidades de la misma para su posterior correspondencia con los fenómenos físicos de representación. Las siguientes características son tomadas como categorías de análisis en esta investigación.

Lo acotado

En matemáticas, lo acotado se refiere a un objeto matemático en el cual se establece una relación de orden con ciertos valores llamados cota superior o cota inferior. Un movimiento se dice acotado, cuando alcanza un valor mínimo y un valor máximo para cualquier valor perteneciente a una variable dependiente.

Inicialmente, en el estudio de movimientos periódicos se establecen ciertas características del movimiento que se convierten en punto de partida para su análisis. En esta investigación, se determinó que la característica de acotación de la gráfica, es la categoría inicial de estudio para establecer el periodo temporal. Es a raíz de identificar y establecer las cotas superiores e inferiores de la curva que describe el movimiento, que se puede establecer ciertos patrones que pueden llevar a la identificación del periodo temporal.

El periodo

El periodo toma importancia en actividades de predicción, al permitir la comparación entre el estado presente de un movimiento con estados futuros del mismo y viceversa. El estudio del periodo establece el inicio de la resignificación de las características periódicas, identificando diferencias

entre la repetición del movimiento y como se repite. Montiel (2005), afirma que el periodo establece un puente entre el tratamiento empírico de la periodicidad y un tratamiento científico.

En la práctica, el periodo debe presentarnos información acerca de todo el movimiento de la cuerda, adquiriendo según Buendía (2004), una relación dialéctica entre el análisis de tipo local y global para que lo periódico del movimiento sea relevante. En la secuencia de actividades, al querer predecir la posición de la partícula que vibra con el movimiento de la cuerda, se presenta una búsqueda del periodo que permita comparar la posición actual de la partícula con una posición futura de la misma. Según Buendía (2004), la importancia del periodo es que establece un primer momento en la resignificación de lo periódico ya que propone una distinción útil entre aquello que se repite y el cómo se repite, manteniendo en sí misma, información general del movimiento.

Lo periódico

Después del reconocimiento del periodo, se constituye una búsqueda de la predicción de la posición de un punto en la cuerda en un instante posterior, haciéndose fundamental identificar “cómo se repite” un movimiento durante el tiempo.

En el diseño de esta actividad, se tuvo en cuenta la creación de un espacio de predicción para que los estudiantes encontraran un uso de la periodicidad; por tal motivo, se relacionó lo periódico con un movimiento durante el tiempo, la búsqueda de patrones para construir el periodo y el estudio global del movimiento, desde un punto de vista local (Buendía, 2004).

Según Buendía (2004), lo periódico puede constituir un lenguaje anterior a la formalización de la propiedad de periodicidad a partir de

la definición. Este lenguaje está inmerso en la actividad que se plantea, con la búsqueda de la posición de la partícula de la cuerda en un estado futuro mediante una representación gráfica de la forma del movimiento, al interpretar su periodo y sus características.

Desde un punto de vista histórico, los fenómenos periódicos han sido fundamentales en el desarrollo de la ciencia. Según Pannekoek (citado por Buendía, 2004), descubriendo y estableciendo los periodos de fenómenos, el conocimiento se vuelve ciencia. Babilónicos, egipcios y griegos basaron sus predicciones en sucesos periódicos que permitieron desarrollar un conocimiento científico en la época (Montiel, 2005).

El objetivo general de esta investigación, se sintetiza en diseñar una secuencia de actividades que permita resignificar las características de la función trigonométrica seno, en un marco de referencia establecido por un contexto físico, en este caso, el diseño de un experimento físico que llamaremos laboratorio de la cuerda vibrante.

Metodología

Esta investigación se ha estructurado en tres etapas:

Primera etapa

Inicialmente, se plantea una problemática inmersa e identificada en la práctica docente, al determinar la ausencia de marcos de referencia para la resignificación de las funciones trigonométricas. Se optó por la propuesta de Montiel (2005), que plantea que se analice la particularidad de cada función y condiciones socio-culturales de su construcción.

Se realiza una consulta bibliográfica de investigaciones relacionadas con el diseño de actividades en trigonometría, específicamente del estu-

dio de la función seno. Como producto de esta consulta, se estudian algunos aspectos teóricos relacionados con los resultados de las investigaciones de Montiel y de Buendía, las cuales acercan este trabajo al enfoque socioepistemológico y se toma como marco de referencia.

Segunda etapa

La segunda etapa es la construcción del dispositivo que generara una vibración en una cuerda. Para su construcción, se tuvo en cuenta algunos diseños utilizados en laboratorios de física. De esta manera, se construye el dispositivo y se inicia la elaboración del cuestionario que sirve para recolectar los datos, teniendo en cuenta las categorías que se pretende analizar, como lo acotado y lo periódico. El accionar del dispositivo y el cuestionario es la secuencia de actividades que se denominará “el laboratorio de la cuerda vibrante”.

Para el diseño de la actividad, inicialmente se fabricó un dispositivo que recrea el movimiento de la cuerda vibrante. Este dispositivo surgió de una revisión de laboratorios físicos en los cuales se utilizaba este artefacto y en general, presentaba las especificaciones que podemos observar en el gráfico:



Imagen 1. Representación gráfica de un aparato de ondas estacionarias. Imagen obtenida en www.gatopardos.com/ESTACIONARIAS/ 1

El dispositivo utilizado para esta investigación, fue diseñado a partir de esta imagen y del video *Demonstration for Standing Wave* (http://www.youtube.com/watch?v=_S7-PDF6Vzc). Aunque el mecanismo no era explícito, una estudiante de octavo semestre de Licenciatura en matemáticas de la Universidad La Gran Colombia, elaboró un dispositivo con la misma funcionalidad observada en el video y que sirvió como base para elaborar el laboratorio. La frecuencia de oscilación se manipula en busca de estas dos formas, marcando un punto en ella y observando la forma que describe su desplazamiento.

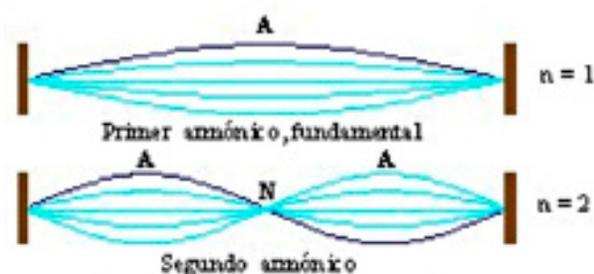


Imagen 2. Armónicos generados en el laboratorio. Imagen obtenida en <http://jair.lab.fi.uva.es>

La actividad diseñada buscó ser un punto de convergencia entre los aspectos teóricos de la función trigonométrica y los aspectos de exploración en relación con el Laboratorio físico que se quería tener en cuenta. El instrumento de recolección de datos es un cuestionario que consiste en ocho preguntas y actividades. Las primeras cuatro están enfocadas en el estudio del primer movimiento y las restantes, al estudio del segundo movimiento. Estas son las preguntas de la primera parte del cuestionario propuesto en la actividad.

¿Cómo cambia la posición del punto respecto del tiempo?

Esta pregunta se plantea para que los estudiantes comiencen a identificar una dependencia de la posición del punto escogido sobre la cuerda,

respecto del tiempo. En este momento, se realiza una identificación de lo acotado del movimiento, siendo esta la primera categoría de análisis que se estudia.

Aunque los estudiantes tienen un significado de lo que es acotado, se pretende que exista una construcción acerca de esta idea, a partir de la observación e interpretación del movimiento que genera el dispositivo y de los comentarios que se realizan en el grupo. Se espera que los estudiantes identifiquen una regularidad en el movimiento, describiendo que en distintos instantes el punto está en la misma posición. Esos instantes son los que se estudian en la siguiente pregunta.

Suponiendo que los mismos desplazamientos se hacen en la misma unidad de tiempo, realiza una gráfica en un plano coordenado del movimiento que constituye el cambio de posición de la partícula respecto del tiempo, representada en la figura anterior.

En este apartado, los estudiantes deben elaborar una gráfica de distancia-tiempo, tomando como datos las posiciones que llega a tomar el punto marcado sobre la cuerda. Los datos se toman a partir de aproximaciones que hacen los estudiantes, de acuerdo con sus observaciones.

Estos datos se inclinan más a que los estudiantes identifiquen la característica de acotación y el periodo del movimiento; por lo tanto, no se hace necesario determinar los tiempos precisos de las posiciones que alcanza el punto ni tampoco, la medida precisa de la distancia que alcanza y por esta razón, se especifica en la pregunta el supuesto de que los desplazamientos se hacen en la misma unidad de tiempo.

Lo que se pretende en esta pregunta, es que los estudiantes construyan la gráfica de una función a partir de la descripción de lo acotado y

lo periódico del movimiento, aunque no sea necesariamente la función seno o coseno. En este punto, es muy importante la identificación de la dependencia de la posición respecto del tiempo ya que esa dependencia es la que permite la comprensión de qué es lo que se repite y cómo se repite.

Describe con tus palabras las características de la gráfica que realizaste a partir de la generación del primer movimiento.

Con esta actividad, se pretendió que los estudiantes comenzaran a resignificar las características del movimiento a partir de su uso en la gráfica que realizaron, y que discutieran el funcionamiento y la forma del conocimiento que se construye, es decir, la funcionalidad en la relación distancia-tiempo.

Se espera que los estudiantes identifiquen:

Lo acotado: el movimiento es acotado debido a que alcanza un punto máximo y un punto mínimo respecto del punto de equilibrio, es decir, cuando la cuerda está tensa pero no oscila.

El periodo: la identificación de un patrón en el movimiento del punto de la cuerda, establece las bases para contruir el periodo que está determinado por el tiempo que toma el punto en hacer un desplazamiento hacia arriba y hacia abajo. Hay que tener en cuenta que el estudiante debe escoger un punto diferente a los nodos para realizar la actividad.

Lo periódico: luego de identificar el periodo, se espera que los estudiantes identifiquen cómo se repite el periodo temporal, en el estudio del comportamiento del desplazamiento y el tiempo, para poder resignificar el concepto de función periódica.

Si se supone que en dos segundos, el punto se desplaza desde el eje y hace un recorrido hacia arriba y hacia abajo para llegar al mismo lugar. ¿Dónde estará el punto en los siguientes instantes?

A los 2 segundos

A los 5 segundos

La identificación de las características de la función seno, admite la predicción de la posición del punto en determinado instante. En primera instancia, la predicción del movimiento del punto permite determinar características del movimiento como lo acotado y lo periódico; luego, en una segunda instancia, mediante una gráfica espacio- tiempo, se elabora una representación gráfica del movimiento y se establece la predicción de la posición del punto en los instantes solicitados. Solamente, al identificar el periodo y entender “cómo se repite”, se puede comprobar la posición del punto y entender el comportamiento de la gráfica.

Los aspectos exploratorios se han originado en la observación e indagación en la secuencia de actividades, y los aspectos de carácter teórico se refieren al análisis de la información recogida en el trabajo exploratorio, a la luz de los elementos teóricos explicitados en el marco de referencia.

La recolección de los datos se hizo en la puesta en escena de dos formas:

Medio escrito: la producción escrita de los estudiantes en la solución de los cuestionarios. Medio audiovisual: registros filmicos, durante toda la actividad.

El análisis posterior se hace, teniendo como base las respuestas recogidas por los medios mencionados anteriormente. Además, tendrá en cuenta la información recogida al establecer comunicación directa con los estudiantes.

Tercera etapa

La tercera etapa corresponde al análisis de los datos recogidos, revisando las experiencias y confrontándolas con las hipótesis planteadas en el estudio preliminar del cuestionario, teorizando estos resultados por medio de procesos como ordenación y comparación, al establecer vínculos y relaciones entre la teoría y los resultados. La población de la cual se tomó una muestra para este estudio, son los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad La Gran Colombia, específicamente estudiantes de segundo semestre del curso Cálculo I.

El objetivo de este espacio académico es asimilar las herramientas del Cálculo a partir de las funciones, con el fin de utilizarlas como instrumentos en las asignaturas posteriores del programa y en la aplicación de problemas. El curso versa sobre la forma como el estudiante pueda aplicar las herramientas que le ofrece el cálculo y las funciones para modelar situaciones problema relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en diferentes contextos.

El curso contaba con 12 estudiantes de los cuales, se determinó a partir de una convocatoria abierta, una muestra que resultó de cinco estudiantes. Las edades de estos estudiantes están entre los 19 y los 22 años. Pertenecen a clase media, la mayoría de ellos trabaja para costear sus estudios. El horario nocturno del programa les permite las dos actividades a la vez.

Los estudiantes escogidos en la muestra, presentan gran afinidad para el trabajo en equipo y para la discusión acerca de las temáticas relacionadas con su formación como profesores. En cuanto a su rendimiento académico, presentan resultados aceptables siendo homogénea esta apreciación y en general comparados con los demás estudiantes del programa. Respecto de la trigonometría, los estudiantes de curso de

Cálculo I, previamente no han tratado en otros cursos esta temática, con excepción tal vez, de lo que pudieron haber estudiado en sus cursos de matemáticas en su educación secundaria.

Discusión de resultados

A partir de los datos recogidos en los cuestionarios y en la discusión hecha por los estudiantes en la puesta en escena, las conclusiones se examinaron respecto de las tres categorías de análisis. En términos generales, se reconoció un comportamiento secuencial sobre las tres categorías. En primer lugar, la identificación de lo acotado del movimiento sirvió para que el estudiante estableciera el punto máximo y el punto mínimo que alcanzaba la cuerda. De esta manera, se construyó, gracias al patrón que describía el punto, el periodo que fue lo que se identificó como lo que se repetía. A partir del estudio de esta unidad, se reconoció una forma de repetición gracias a la tipificación del movimiento periódico que se observaba con la vibración de la cuerda, en la formación del primero y segundo armónico. Por lo tanto, la pregunta que se generaba era cómo se repetía el periodo, dando paso a la caracterización de la periodicidad presente en el movimiento.

El periodo y la periodicidad establecen un tratamiento científico de la posibilidad de predecir la posición de una partícula en un tiempo futuro, corroborando el planteamiento de Montiel (2005), al establecer que el periodo tiende un puente entre un tratamiento empírico de la periodicidad y uno científico.

La periodicidad se usó en una actividad que requería redefinir su función y su forma y en donde la predicción permitió que se resignificara. El contexto físico de la experiencia de la cuerda vibrante sirvió para asegurar un significado distinto de la periodicidad que el planteado desde

lo analítico, proponiendo una nueva forma de interpretación de los conceptos matemáticos desde la experimentación y fortaleciendo vínculos entre la enseñanza de las matemáticas y la física. Los experimentos físicos, como la cuerda vibrante no solo responden a una cuestión epistemológica de la solución de problemas físicos, plantea la construcción y uso del conocimiento en grupos sociales, lo cual se simuló en la ejecución del laboratorio diseñado en esta investigación. Respecto de la naturaleza del movimiento de la cuerda, se pudo identificar ciertas características, a partir de la experimentación:

El movimiento lineal de la partícula de la cuerda fue representado de manera adecuada por una función de posición respecto del tiempo, las gráficas que se generaron mantuvieron presente las características de acotación y periodicidad para poder identificar el periodo que permitirá realizar una predicción de la posición de la partícula en algún tiempo futuro.

Aunque la representación gráfica del movimiento tenía una similitud con la forma de la función seno, no se pudo concluir que efectivamente la gráfica correspondiera a la de dicha función trigonométrica, dando como argumentos que no se tenían los mismos dominios.

En la puesta en escena, los estudiantes pudieron resignificar la idea de función a partir de la dependencia que encontraron entre la posición de la partícula y el tiempo, teniendo en cuenta un cambio en la dirección de la partícula que en la gráfica de la función, representaron con imágenes negativas. La curvatura con la cual se graficó la función, se debió a una relación visual que encontraron en la generación de armónicos en la vibración de la cuerda, los cuales sirvieron como fundamento para la gráfica final.

En la segunda parte del laboratorio, los estudiantes compararon el movimiento de la partícula en el primer armónico con el de la partícula

en el segundo armónico, señalando diferencias entre las categorías de análisis. Para la primera categoría, se pudo visualizar un cambio en las cotas de los dos movimientos, debido a que en el segundo movimiento, la cuerda reduce su amplitud a la mitad, lo cual generó una distinción en la construcción de la unidad de análisis, confirmando que la identificación de las cotas del movimiento son fundamentales para identificar la unidad de análisis.

A raíz de esta distinción, se diferencian los periodos del primer armónico y del segundo, teniendo en cuenta que el elemento que determina dicha distinción es el tiempo, representado en el eje x , por consiguiente, se puede establecer que los factores que determinan el periodo están ligados a la variación que ocurre en el eje y respecto de la amplitud, y en el eje x a la variación que establece la continuidad del tiempo.

Luego de la identificación y construcción del periodo, su uso determina un reconocimiento del comportamiento periódico del movimiento del punto, generando una relación biunívoca entre la predicción y lo periódico, debido a que es por el reconocimiento del “cómo se repite”, que se puede establecer los ciclos repetitivos que genera la vibración de la cuerda. Por lo tanto, se puede clasificar estas conclusiones en tres niveles que establecen la construcción de la función trigonométrica.

Nivel 1. Identificación del movimiento a partir de las cotas del mismo.

Nivel 2. Construcción de la periodicidad.

Nivel 3. Uso de la unidad de análisis en el tratamiento de la periodicidad.

La predicción es el factor que determina la estructura de los tres niveles de construcción que en consecuencia, generan la resignifica-

ción de la función trigonométrica a partir del estudio de sus características, creando una necesidad de diseñar nuevas actividades para comprobar estos niveles y las herramientas que se utilizaron en su concepción, esto es una nueva historia.

Conclusiones

La actividad del laboratorio se puede complementar con mediciones mucho más precisas de la posición de punto en la vibración de la cuerda. En este sentido, se hace necesario el uso de medios tecnológicos que nos permitan tener datos exactos tanto del tiempo como de la posición del punto.

Con estos elementos se podría modificar el cuestionario para realizar predicciones de la posición del punto en tiempos mucho más específicos, a partir de la elaboración de una gráfica cuyas variables estén en escalas precisas. Para lograr esta modificación, se requiere hacer algunos cambios en el dispositivo de la cuerda vibrante para poder conseguir de manera más rápida, la conformación de los armónicos necesarios para el laboratorio.

La secuencia de actividades se puede trabajar para la educación media, al mismo tiempo, en un curso de trigonometría y de física, para establecer una articulación de dos áreas que en ocasiones, no se relacionan.

Referencias

- Arrieta, J.L. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado (inédita). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Buendía, G. (2004). *Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones*. Tesis de doctorado (inédita). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
- Cantoral, R., Farfán, R.M., Lezama, J., y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. En: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial, pp. 83-102.
- Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. En: *Revista de Educación Matemática* 18 (1), pp.133 a 160. México: Santillana.
- Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías de conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. En: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (3), pp. 365-386.
- Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. En: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1, pp. 56-74.
- Cordero, F., y Martínez, J. (2001). La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo. En: G. Beitía (eds.). En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 14, pp. 422-431. México: Iberoamérica.
- Jácome, G. y Montiel, G. (2007). Construyendo la razón trigonométrica. Una secuencia basada en la actividad. En G. Buendía y G. Montiel (eds.). *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 433-436). Yucatán, México: Red Cimates.

Montiel, G. (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis de doctorado (inédita) . Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

Suárez, L. (2008). Modelación-Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. Tesis de doctorado (inédita). Centro de Investigación y Estudios XXXXXXXXXX