

RESEÑAS Y RESÚMENES

PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO¹

JOHN MASON

Reseña del libro editado por David Tall, (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer. Biblioteca de Educación Matemática, volumen 11, 306 páginas.

1. ANTECEDENTES

El término “educación matemática” está, en las mentes de muchos, identificado con niños y matemáticas escolares. Sin embargo, existen muchos educadores matemáticos que se han iniciado en la investigación en matemáticas y han enseñado a nivel universitario. Además, desarrollos en las matemáticas escolares a nivel mundial se han hecho evidentes por un reconocimiento a nivel universitario de que también se necesitan cambios en la enseñanza a este nivel. Hasta ahora había sido difícil localizar qué estudios sistemáticos se habían realizado a nivel universitario, y más específicamente, localizar qué nociones teóricas habían sido identificadas para ayudar a los catedráticos a reflexionar sobre su investigación matemática y el aprendizaje de

sus estudiantes. Ahora, este vacío se ha llenado.

Este no es un libro sobre matemáticas avanzadas, en el sentido del sustantivo plural que indica una variedad de temas matemáticos, sino sobre lo que constituye el pensamiento matemático avanzado. No pretende enseñar ningún tipo de matemáticas, ni siquiera “enseñar” educación matemática. Es una mezcla de las visiones y aproximaciones de diferentes personas, basadas en sus propias experiencias e investigaciones sobre las experiencias de los estudiantes, enriquecidas o estimuladas, por infinidad de grupos internacionales de discusión de las reuniones del PME (*International Group for the Psychology of Mathematics Education*). El libro es el producto de cinco años de colaboración de trece de las más grandes figuras que se encuentran investigando la enseñanza y el aprendizaje de la educación matemática a un nivel avanzado. Mucho más que una simple colec-

1. Traducción hecha por Carolina Ospina, estudiante de Lenguas Modernas de la Universidad de los Andes y Felipe Fernández, investigador de “una empresa docente”.

ción de trabajos, es una muestra de cómo se puede alcanzar la erudición a través de la discusión colectiva y del trabajo de un editor cuidadoso y esmerado. Promete ser el trabajo de referencia estándar durante muchos años por venir, y una fuente tanto de información como de inspiración para los estudiantes graduados, y para aquellos que enseñan matemáticas avanzadas y están preocupados por cómo están ellos incidiendo en los estudiantes.

2. ¿QUÉ ES AVANZADO?

¿Cómo abordar una noción como “pensamiento matemático avanzado”? El término “avanzado” es relativo, y por lo tanto cada matemático de acuerdo con su experiencia lo usa para modificar su concepción personal de lo que es “normal” o “elemental”. Tanto así, que puede suceder que algunos investigadores matemáticos no se asombren, cuando vean que los principales temas de discusión son estándares para el primer y segundo año de universidad: funciones, límites, integrales, grupos, prueba, y más específicamente, inducción. Sin embargo, una inspección más cuidadosa revela que estos temas son utilizados como simples ejemplos, y que las ideas expuestas y las observaciones hechas se aplican al aprendizaje y práctica de las matemáticas en todos los niveles. Cualquier matemático encontrará en este libro algo con que enriquecer

el ejercicio de su profesión. Aquellos que defienden la posición de que una exposición clara es suficiente, adquirirán conciencia de cómo se puede obtener mucha más claridad al ocuparse de lo que piensan y experimentan los estudiantes; aquellos que opinan que enseñar a estudiantes de pregrado o guiar a estudiantes en investigaciones, es más que explicarles matemáticas, hallarán soportes para aguzar sus percepciones.

Algunos de los autores están interesados en encontrar una distinción entre pensamiento matemático avanzado y no avanzado. La mayoría coincide en que la manera de convencerse uno mismo y a otros, cambia cuando se exigen pruebas, y que esto va de la mano con el reconocimiento de objetos matemáticos a través de la presentación explícita de sus propiedades en vez de a través de la clasificación intuitiva de ejemplos. Aunque en las matemáticas escolares pueden encontrarse algunos elementos de este cambio de enfoque, de clasificar objetos por similitudes a abstraer axiomas o propiedades, es éste el que determina un progreso significativo en cómo se espera que los estudiantes piensen, y es este cambio lo que interesa a la mayoría de los investigadores presentados en el libro.

A diferencia de los términos matemáticos, que a menudo parecen admitir definiciones precisas, los términos en la educación matemática requieren de un desarrollo y enri-

quecimiento gradual del significado; este es particularmente el caso de *abstracción* y *generalización*. Al haber asistido a algunas de las sesiones de conferencias del grupo, sé que se presentaron exaltados debates acerca de la existencia o no de una distinción entre abstracción y generalización, y aunque la exaltación no es siempre evidente en el texto, lo que emerge son un número de distinciones útiles entre, y de maneras de referirse a, aspectos bien esenciales del pensamiento matemático avanzado.

Una distinción como la que se da entre abstracción y generalización es útil si ayuda a sensibilizar para percatarse de aspectos de la enseñanza y el aprendizaje que hasta ahora habían pasado desapercibidos, o por lo menos a verlos de una manera no tradicional. Muchas de las nociones propuestas en este volumen se prestan para cumplir con esta función.

3. REIFICACIÓN

Una de las notables características del trabajo del matemático es la rápida, casi inmediata reificación de procesos. El lenguaje de los matemáticos está repleto de pronombres indefinidos como “esto” y “eso” que se refieren a procesos complejos con numerosos detalles presentes. Por ejemplo, es imposible hacer referencia a una integral, una función, un functor, un espacio vectorial, o un espacio topológico,

a menos que el oyente ya haya establecido una rica imagen del concepto, es decir, una gran agrupación de conexiones y asociaciones que sean accesibles cuando se utilice la etiqueta.

¿Cómo se puede entonces ayudar a los estudiantes a interiorizar, coordinar y encapsular de tal manera que ellos también experimenten la reificación que los primeros matemáticos han encontrado tan efectiva? Claramente las definiciones matemáticas juegan un papel importante. La vieja broma acerca del sociólogo que, después de una vida de estudios y contemplación de culturas, comenzó el trabajo de su vida definiendo el término cultura en tres oraciones inescrutables (en cambio de reflejar su descubrimiento en la estructura de su escrito), se vive en muchos salones de matemáticas. Por supuesto, aquí existe una mayor tensión, ya que la recapitulación ontogénica de la filogenia no es por sí misma un medio eficaz de informar a las futuras generaciones. Las ideas expuestas en este libro proporcionan un escalón hacia un lenguaje que permite, en matemáticas avanzadas, hablar sobre la manera de combinar la sabiduría de la experiencia con la necesidad de reconstruir por uno mismo.

Con respecto al tema de las definiciones, me desilusionó no encontrar referencia a la distinción entre definiciones *intensivas* y *extensivas* en matemáticas, porque tal distinción ha sido de gran ayuda para mí

en el pasado. Una definición *extensiva* proporciona una base manipulable para verificar si algo se ajusta a la definición. Por lo tanto, una definición formal de continuidad en un punto es extensiva, dado que puede ser aplicada a funciones cuya especificación es no intuitiva. Su propósito es permitirle a alguien, que comprende sólo los términos usados en la definición, confirmar si la propiedad se aplica en un caso particular. Normalmente, una definición *intensiva* no se puede usar irreflexivamente. Sintetiza una intuición o conciencia, y requiere una apreciación del significado de la definición y una percepción del objeto a evaluar para poder aplicarla a ejemplos particulares. Por ejemplo, un sentido de continuidad como en “el lápiz no se levanta del papel” concuerda con un sentido intuitivo en polinomios como en “valores que cambian continuamente”. La mayoría de las nociones empiezan intensivamente, y a medida que los temas se formalizan, desarrollan definiciones extensivas. Pero las definiciones extensivas por sí mismas no son siempre útiles, como lo ilustran la definición de continuidad en un punto y la historia del sociólogo. A menos que como estudiante se tenga una conciencia del significado de lo que la definición está tratando de plasmar, una definición extensiva es a menudo inconstruible, inclusive si se puede seguir por medio de un algoritmo. En análisis, la intuición se formaliza: las defini-

ciones intensivas se vuelven extensivas para lidiar con una clase más amplia de funciones que las dadas por una simple fórmula. Los estudiantes se quejan a menudo, de que no saben qué les está permitido saber, y qué tienen que probar, precisamente porque la transición entre intensivo y extensivo todavía no ha surgido (en contraste con sus cursos de álgebra).

La tendencia de los matemáticos a reificar también se manifiesta en la educación matemática, y es particularmente notoria en la escritura de algunos de los capítulos, donde los procesos psicológicos como la “abstracción reflexiva” de Piaget se convierten rápidamente en suyos. Esto es una lástima, ya que el valor de la reflexión sobre lo que hace en gran parte que el pensamiento matemático avanzado sea avanzado y difícil para muchos, depende, como algunos autores demuestran, de involucrarse en el proceso, de vivir entre ideas relacionadas y de hacer conexiones a las que se pueda acceder en un futuro. Es precisamente la falta de conciencia de los expertos acerca de los cambios espontáneos de enfoque y estructura que se dan en su atención, lo que los convierte en ineficaces para la mayoría de los estudiantes que tratan de aprender matemáticas a partir de sus explicaciones.

Y ya que estoy comentando permítanme añadir que encontré que el tipo de letra hace la lectura particu-

laramente difícil. Esto contribuyó a mi apreciación de que el libro está escrito de manera demasiado densa y que se requiere de un buen tiempo para leerlo e interiorizarlo, lo cual es una lástima dado lo valioso de su contenido.

4. BREVE RESUMEN

Como es propio de un libro educativo de nuestros tiempos, en éste se proporcionan varios niveles de abstracción y observación reflexiva. La introducción es un ensayo sobre la naturaleza del pensamiento matemático avanzado, lo cual prepara el campo y señala los orígenes de la indagación realizada por los primeros investigadores. La primera sección explora las implicaciones del término *avanzado* y llama la atención sobre el papel de la prueba y la creatividad, así como del debate acerca de la abstracción y generalización. La segunda sección es más teórica y desarrolla las nociones de *concepto imagen*, *entidades conceptuales*, y *abstracción reflexiva* en tres capítulos separados.

La tercera sección empieza con una revisión de las formas de investigación en pensamiento matemático avanzado que se presentan en el libro; particularmente, la adquisición por parte de los estudiantes de conceptos específicos, la organización del contenido matemático en un curso, y las condiciones externas bajo las cuales la enseñanza y el aprendizaje ocurren. El mismo len-

guaje en el que se expresan estas formas (adquisición, condiciones externas) sitúa el capítulo por lo menos en un marco clínico que puede desviar la atención de una perspectiva fenomenológica de lo que implica aprender o crear matemáticas avanzadas, lo cual se trata en otros capítulos. La educación matemática, en general, todavía no ha resuelto el problema de cómo integrar los comentarios de los estudiantes sobre sentimientos e impresiones, con el desempeño del estudiante para enriquecer futuras investigaciones y práctica. En seguida, la sección ahonda en considerables detalles históricos y de investigación sobre la estructura de conceptos notoriamente difíciles como funciones, infinito, y prueba.

Puesto que los programas de computador que tienen muchos de los autores son pioneros para asistir la exploración de diferentes conceptos matemáticos y también debido a que existen referencias ocasionales a *software*, se incluye un capítulo sobre el papel del computador. Como ejemplo se puede mencionar el lenguaje ISETL para matemáticas abstractas.

El epílogo nos recuerda: que el proceso de colaboración era bastante parecido al mismo proceso de aprendizaje de las matemáticas y requería, por tanto, discusión extensiva además de negociación y modificación de conjeturas; que “las matemáticas avanzadas por su propia naturaleza incluyen conceptos que

están ligeramente en desacuerdo con la experiencia ingenua”, y que el fomento del pensamiento matemático avanzado en los estudiantes podría beneficiarse de la atención prestada a esta discrepancia. El editor usa este epílogo para establecer la dirección de futuras discusiones del grupo y, ojalá, de muchos más matemáticos y educadores matemáticos en el futuro.

A diferencia de una discusión entre treinta personas o más en un recinto en el que cada uno debe esmerarse en ser conciso para poder ser escuchado, este libro proporciona a los autores espacio para una reflexión extensa, modificada y ajus-

tada por esas discusiones. Algunas veces este espacio está más bien saturado y podría haberse beneficiado de una mayor concisión, pero la brevedad es a menudo difícil de alcanzar cuando se tiene tanto que decir. El libro constituye una agradable condensación y recurso para futuros adelantos en nuestra concepción de lo que constituye el pensamiento matemático avanzado, y de cómo podemos hacerlo accesible a más personas.

John Mason
Centre for Mathematics Education
Milton Keynes MK7 6AA
United Kingdom
E-mail: j.h.mason@open.ac.uk

INVESTIGACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: UNA EXPLORACIÓN CONSTRUCTIVISTA¹

LEONE BURTON

Reseña del libro de Barbara Jaworski, (1994). *Investigating Mathematics Teaching: a constructivist enquiry*. Londres: Falmer Press.

Se ha dado un giro considerable en los métodos empleados para la investigación de la educación. En algún tiempo, la recolección de datos cuantitativos fue vista como la única manera de proceder, tanto que los investigadores que solían trabajar bajo este paradigma no

discutían la selección de sus métodos, y ni siquiera los consideraban en algún sentido problemáticos. Ya no son raros los investigadores que se concentran intensamente en un pequeño grupo de estudios de caso para obtener un volumen de material significativo del cual se pueden extraer e interpretar patrones, y tampoco es raro encontrar profesores que desarrollen proyectos de investigación-acción en el campo

1. Traducción hecha por Carolina Ospina, estudiante de Lenguas Modernas de la Universidad de los Andes y Cecilia Agudelo, investigadora de “una empresa docente”.