# DERIVE

## UNA HERRAMIENTA FUNDAMENTAL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS RELACIONADOS CON LA FUNCIÓN CUADRÁTICA.


Por:

Luz Edith Muñoz Paz
Docente de Matemáticas.
Colegio Champagnat - Popayán
lempiz@gmail.com

Paola Andrea Toro Aguirre
Docente de Matemáticas.
Colegio Champagnat - Popayán
andretorito@hotmail.com



**Resumen:**

*Los programas de Cabri y Derive son paquetes computacionales que en la actualidad sirven al docente como herramientas que permiten fortalecer el aprendizaje de los estudiantes de forma lúdica, diferentes temas del área de matemática. En esta ocasión se ha elegido el análisis de la función cuadrática por medio de este software matemático. El objetivo es que el estudiante aprenda a manejar el programa e identifique las características específicas de esta función logrando una mejor comprensión de su comportamiento.*



**Palabras claves:**

*Función cuadrática, ecuación cuadrática, discriminante, vértice, traslación.*




**1. *Contextualización:***

Unos de los objetivos del proyecto juega y construye la matemática es que los niños y jóvenes aprendan a través del juego, pero el juego entendido como la estrategia que crea el docente para hacer significativo el aprendizaje de sus estudiantes. En el mundo actual donde nos invade la tecnología debemos ir de la mano con lo que le llama la atención a nuestros estudiantes y para ellos es novedoso y más interesante ver que pueden recibir una clase con la ayuda de un software matemático que les muestra rápida y claramente lo que su profesor desea que aprendan. La experiencia de aula que se presenta a continuación tiene como base la teoría sobre la función cuadrática para grado noveno del colegio Champagnat de Popayán. La idea es que el estudiante utilice los programas de Cabri o Derive para identificar esta función y sus características, así mismo para que pueda aplicar lo aprendido solucionando problemas de la vida cotidiana y de esta manera darle respuesta a la infaltable pregunta ¿y esto para qué me sirve?
Se pretende además, que al utilizar la herramienta y estudiar las diferentes funciones que se den como ejemplo, el estudiante pueda sacar sus conclusiones y así construya su conocimiento no a corto plazo sino para toda la vida.

***1.1. Instructivo para el trabajo con el computador, estudio de la función cuadrática:***

Taller 1: Utilice el programa Derive y realice el siguiente proceso:

- Construya en ventanas diferentes, las gráficas de las funciones indicadas en cada literal.

Digite cada una de las expresiones en un renglón diferente.

$$f(x) = x^2; f(x) = 2x^2, f(x) = 2x^2 + 2x, f(x) = 2x^2 + 3x, f(x) = -2x^2 + 3x + 6$$
$$f(x) = -4x^2 + 2x + 1$$

- Responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuándo las gráficas son cóncavas hacia arriba?
b. ¿Cuándo las gráficas son cóncavas hacia abajo?
c. ¿Cuál es el coeficiente que determina la concavidad?
d. Determina observando la gráfica, los puntos de corte con el eje x
e. ¿Qué relación o qué diferencias encuentras entre cada una de las gráficas y de las expresiones que las representan?
f. ¿Cuándo la gráfica tiene un mínimo y cuándo tiene un máximo?

- Construya en una misma ventana:

$$y = x^2,\ y = (x - 4)^2,\ y = (x + 4)^2$$

- Observe las gráficas y responda las siguientes preguntas:

a. ¿Sobre qué eje se trasladó la gráfica?
b. ¿De qué valor depende la traslación?
c. ¿Cuántas unidades, se trasladó cada gráfica, a partir de su posición inicial?

- Construya en una misma ventana, las gráficas de las siguientes funciones:

$$y = x^2,\ y = x^2+3,\ y = x^2 - 4$$

- Observe la gráficas y responda las siguientes preguntas:

a. ¿Sobre qué eje se trasladó la gráfica?
b. ¿De qué valor depende la traslación?
c. ¿Cuántas unidades se trasladó la gráfica, a partir de su posición inicial?
d. ¿Por qué valor de x, pasa el eje de simetría?
e. ¿Cambia el eje de simetría para cada gráfica?
f. ¿Cuáles son los puntos de corte de cada gráfica con el eje x?
g. ¿Qué relación aritmética existe entre los puntos de corte y el eje de simetría?

## 2. *Referentes teóricos prácticos básicos:*

La función cuadrática famosa por su representación en forma de parábola y útil para analizar el comportamiento gráfico de problemas presentes en diferentes áreas del conocimiento, fue analizada profundamente hacia el año 1629 por el matemático francés Albert Girard. "Albert completó el estudio de Francois Viéte sobre la relación entre las raíces de una ecuación cuadrática y sus coeficientes, él descubrió que sí $a$, y, $b$ son las raíces de $x^2 + px + q = 0$, entonces, $p = a+b$, y, $q=a.b$ , es decir, demostró que si el coeficiente del término de mayor grado de la ecuación p (x) = 0 es la unidad, entonces el coeficiente del segundo término de mayor grado cambiado de signo es igual a la suma de todas las raíces , el coeficiente del tercer término es igual a la suma de todos los productos formados al multiplicar las raíces de dos en dos; el coeficiente del cuarto término cambiado de signo es igual a la suma de todos los productos que resultan de multiplicar las raíces de tres en tres. También afirmo que si el grado de la ecuación es par, el coeficiente del último término es igual al producto de todas las raíces; si es impar, es el producto de todas las raíces cambiado de signo. Además aportó importantes métodos numéricos para encontrar aproximaciones a las raíces de una ecuación".[16]

### *2.1 En qué se utilizó la función cuadrática?*

- En la solución de problemas de física, finanzas y economía, que impliquen el trabajo con ecuaciones cuadráticas.
- En la solución de problemas de geometría que implican el cálculo de áreas.
- En el estudio del movimiento de un objeto en el plano.

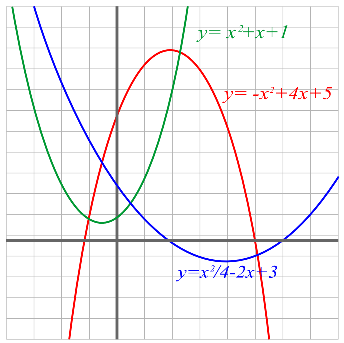
### *2.2 Definición:*

En matemáticas una **función cuadrática** o **función de segundo grado** es una función polinómica que se define mediante un polinomio de segundo grado como: $f(x) = x^2 + bx + c$, donde $a,b$ y $c$ son constantes y $a$ es distinto de 0.

La representación gráfica en el plano x, y haciendo $y = f(x)$ , esto es: $y = x^2 + bx + c$.

En un parábola vertical, orientada hacia arriba o hacia abajo según el signo de $a$.

Ejemplos : $f(x) = x^2 + x + 1$;   $f(x) = x^2 + 4x + 5$;   $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x + 3$




[16] http://personal.globered.com/monis-en-asesoria-y-correccion/categoria.asp?idcat=21

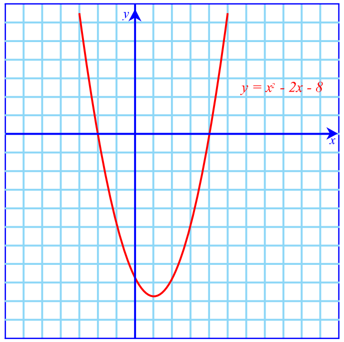
### 2.3. *Estudio de la función:*

*Corte con el eje y* La parábola corta el eje **y** cuando **x** vale cero (0):

$$y = f(0) = a.\ 0^2 + b.0 + c$$

Lo que resulta: $y = f(0) = c$

Así, la función corta el **eje y** en el punto (0, c), siendo **c** el termino independiente de la función.




*Corte con el eje x* La función corta al **eje x** cuando **y** vale 0. Estos valores donde la parábola corta al eje x son llamados ceros o raíces de la ecuación:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Tendremos que: $y = 0 \longrightarrow ax^2 + bx + c = 0$

Las distintas soluciones de ésta ecuación de segundo grado, son los casos de corte con el eje x, que se obtienen como es sabido por la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde:

$b^2 - 4ac$ Se le llama discriminante, $\triangle$:

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

Según el signo del discriminante podemos distinguir:

**Caso 1:**

**$\Delta$** > 0: la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, y por tanto la parábola cortara al **eje x** en dos puntos: $x_1$ y $x_2$.

Veamos por ejemplo la función: $y = -x^2 + 4x + 5$

Que cortara el eje x cuando: $y = 0^2 \longrightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0$

la ecuación tendrá por solución general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso : $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\,(-1)5}}{2\,(-1)}$ $\qquad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-2}$

Para ésta ecuación el discriminante tiene valor positivo:

**$\Delta$** = 16 + 20 = 36

Y por tanto tiene dos soluciones:

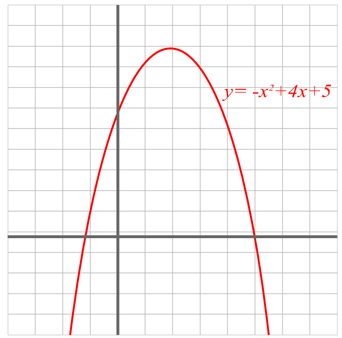
$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{-2} \qquad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{-2}$$

Operando $x_1 = \frac{-4 + 6}{-2} \qquad x_2 = \frac{-4 - 6}{-2}$

$$x_1 = \frac{2}{-2} \qquad x_2 = \frac{10}{-2}$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 5$$

Los puntos: (-1,0), (5,0) son los de corte con el eje x, como se puede ver en la gráfica:



**Caso 2:**

**Δ = 0: la ecuaci**ón tiene una única solución real. En este caso se dice que la raíz $x_1$ es múltiple. La parábola solo tiene un punto en común con el **eje x**, el cual es el vértice de la función.

$$y = -x^2 + 4x - 4$$

Si $y = 0 \longrightarrow \quad -x^2 + 4x - 4 = 0$ su solución será

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(-4)}}{2\,(-1)}$$

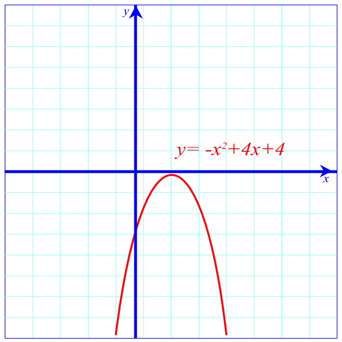
Operando los valores tendremos:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 16}}{-2} \qquad x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2}$$

La raíz de cero es cero, luego el discriminante en este caso vale cero, y habrá una raíz múltiple:

$$x_1 = x_2 = \frac{-4}{-2} = \frac{4}{2} = 2$$

El punto de corte de la función con el eje de las x es (2,0) como se puede observar en la gráfica:




**Caso3**:

**Δ < 0: la ecuaci**ón no tiene solución real, sus raíces son complejas y en consecuencia la parábola no corta al **eje x.**



Ejemplo:

$$y = x^2 - 4x - 6$$

Si $y = 0 \longrightarrow \quad -x^2 - 4x - 6 - 0$

Para encontrar su solución haremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(-1)(-6)}}{2\,(-1)}$$

Haciendo las operaciones, tendremos:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 2\ 4}}{2} \qquad x = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Al no existir ningún número real que sea la raíz de –8, no se puede continuar haciendo las operaciones, por lo que podemos decir que esta función no tiene corte con el eje x. Si tenemos en cuenta la existencia de los números complejos, podemos realizar las siguientes operaciones:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8\,(-1)}}{2} \qquad x = \frac{4 \pm \sqrt{8}\ \sqrt{-1}}{2} \qquad x = \frac{4 \pm \sqrt{8}i}{2}$$

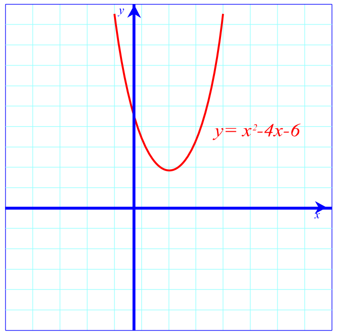
Continuando con las operaciones:

$$x = \frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{8}i}{2} \qquad x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{8}{4}}\, i$$

Dando como solución:

$$x_1 = 2 + \sqrt{2}\ i$$
$$x_2 = 2 - \sqrt{2}\ i$$

Dado el plano cartesiano **x, y**, real, la parábola vista no corta el eje real **x** en ningún punto.



### *2.4 Vértice y eje de simetría de la función cuadrática:*

Vértice de la función: es el punto mínimo o máximo que alcanza la función. Eje de simetría: es la recta paralela al eje y, que pasa por el vértice. Para localizar el vértice de la función, estudiamos la función por casos, así, caso1: $f(x)= ax^2$, caso 2: $f(x)=ax^2+c$, caso 3: $f(x)= ax^2+bx$, y caso 4: $f(x)= ax^2+bx+c$. La idea es que el estudiante sea capaz de concluir que en el caso 2 y en el caso 4 la parábola se traslada y por tanto hallar el punto que corresponde al vértice es muy fácil porque solo debemos trasladar los vértices encontrados en los caso 1 y 3 respectivamente. Para esto las herramientas de Cabri y Derive le serán muy útiles ya que el software le permitirá ver estos movimientos claramente.

## *3. Descripción general de la experiencia de aula*:

Para desarrollar el taller haremos uso de la sala de sistemas que cuenta con el número requerido de equipos para que el trabajo pueda hacerse por parejas y algunos estudiantes de manera individual.

El taller se dividirá en tres momentos. Primer momento: formación teórico sobre el estudio de la función cuadrática, donde se utilizaran guías que proporcionan al estudiante suficientes ejercicios para el análisis requerido de dicha función, además se elaboraran unos tejidos, combinando el arte con la matemática para dinamizar la clase.

Segundo momento: formación teórico/práctica sobre el manejo del programa Derive, en el cual se hará un planteamiento de un taller práctico. El objetivo al desarrollar el taller es que los estudiantes tengan un conocimiento básico del manejo del software a partir de explicaciones y ejemplos de ejercicios prácticos a realizar con la ayuda del docente.

Tercer momento: este tercer momento consiste en la realización de los dos talleres aquí descritos. Estos talleres retoman toda la información proporcionada a los estudiantes en el primer momento. Se considera que con esta práctica el estudiante logra verdaderamente un aprendizaje significativo, además que es capaz de hacer sus propias reflexiones y con esto proporcionar sus propias conclusiones, construyendo así su conocimiento.

## *4. Logros y dificultades evidenciados*:

### *4.1. Logros:*

- Los estudiantes aprenden a manejar las herramientas del software matemático y aplican lo que han comprendido en la solución de problemas de la vida cotidiana.
- Los estudiantes obtienen una mayor comprensión de los movimientos que realiza la función en el plano cartesiano, al modificar cualquier término de su ecuación.
- Los estudiantes logran resolver situaciones problema de otras áreas como son la física, química o cualquier fenómeno natural que se pueda explicar desde el punto de vista parabólico.
- Se logra un aprendizaje significativo en el estudiante.

### *4.2 Dificultades:*

- Al iniciar los talleres en Cabri o Derive algunos estudiantes presentan dificultades para reconocer las herramientas del programa y aplicarlas a la guía dada.
- Algunos estudiantes tienen dificultad en reconocer el movimiento de la traslación de la función cuadrática.
- Se presentan dificultades a la hora de encontrar los puntos de corte con los ejes x, y.
- Se presentan dificultades para reconocer la naturaleza de las raíces al ver la gráfica que representa la función dada.
- Se presentan dificultades para diferenciar el vértice con un punto de corte en el momento de tabular y llevar los puntos al plano, así mismo diferenciar el eje y del eje de simetría.
- Adaptación de los nuevos estudiantes a la propuesta pedagógica.

### *4.3. Evidencias:*

En la presentación de la experiencia de aula se socializarán los resultados de la aplicación de talleres relacionados con la función cuadrática, que permitieron una apropiación gradual por parte de los estudiantes de la comprensión de los movimientos que esta realiza en el plano.

## *5. Reflexión final*:

Por medio de la utilización de programas dinámicos que le permiten al estudiante realizar comparaciones y transformaciones, éste logra identificar las características de las funciones en este caso, la función cuadrática. Con esto consigue un aprendizaje significativo ya que al obtener sus propias conclusiones define con sus palabras las propiedades de la función construyendo su propio conocimiento.

Por consiguiente, el estudiante avanza en competencias de tipo argumentativo que se evidencian cuando se piden algunas explicaciones y las expone desde sus niveles de representación mental, teniendo en cuenta el conocimiento alcanzado con la orientación del docente y la que el adquiere de manera autónoma en la práctica.


Grisales, A. & Orozco, J. (2013). Juega y Construye la Matemática. Aportes y Reflexiones Pedagógicas. Ediciones Maristas. Bogotá
Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas. Serie Lineamientos.
Ministerio de educación Nacional de Colombia. (1999). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales, autores varios.

**Fuentes de internet:**
http://www.sinewton.org/numeros/numeros/54/Articulo02.pdf
http://www.aq.upm.es/Departamentos/Matematicas/exposicion/TallerConstruccionesClasicasCabri/index.html
http://www.terra.es/personal/joseantm/Archiv%20pdf/97salamtriang.PDF