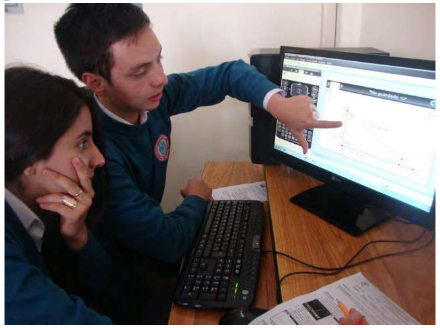
Por:
Julián Ricardo Gómez Niño
☑ Coordinador Proyecto
Juega y Construye la Matemática
Bogotá
coordinadormatematica@maristasnorandina.org

Luis Guillermo Marín Saboya
☑ Docente de Matemáticas.
Liceo Los Caobos - Bogotá
maringuillermo@yahoo.com

Stepanian Bassili Vasken Georges
☑ Docente de Matemáticas.
Colegio Champagnat - Bogotá
vaskenstepanian@yahoo.es

El uso de la TI–Nspire™ CAS

UN ESCENARIO DE JUEGO Y REFLEXIÓN PEDAGOGICA



Resumen:

El presente taller hace parte de un trabajo de reflexión que se está desarrollando con algunos docentes del Colegio Champagnat de Bogotá en el marco del proyecto "Juega y Construye la Matemática". Algunas de estas reflexiones están encaminadas al desarrollo de una propuesta de trabajo de grado que se viene realizando con la Universidad Pedagógica Nacional. Las reflexiones se hacen dentro de un escenario de aprendizaje de juego llamado "el estimador" con estudiantes de décimo grado, entorno a los obstáculos del aprendizaje que no son solamente de tipo cognitivos, sino además socioculturales y afectivos (Planas, 2004). El taller se desarrolla en tres momentos: en el primero, se realiza el juego con todos los participantes; en el segundo, se realiza un trabajo de modelación de la situación utilizando el software TI-Nspire (para el computador); y en el tercero, se realiza una socialización y discusión sobre los obstáculos evidenciados en la aplicación de este taller con los estudiantes.

Palabras clave: *aprendizaje, participación social, juego y razonamiento covariacional.*

1. Marco teórico:

Desde hace 28 años la Comunidad de los Hermanos Maristas ha estado comprometida de manera singular con la educación matemática. Una muestra de ello son los trabajos de investigación e indagación publicados en torno al aprendizaje de las matemáticas dentro del proyecto "juega y Construye la Matemática". Dicho proyecto constantemente está siendo actualizado con las nuevas propuestas de educación matemática. En la última década los estudios en educación matemática han hecho énfasis en considerar el aprendizaje de las matemáticas como el acto de participación social (Planas, 2002, Skovsmose & Valero 2012), y han identificado la existencia de otros obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas que no son simplemente de tipo cognitivo. Desde esta perspectiva, hemos convenido iniciar la reflexión a partir de tres apartados: el aprendizaje como una participación social, el juego como estrategia didáctica, y las nuevas tecnologías y el método covariacional en la construcción del pensamiento variacional.

1.1 El aprendizaje como una participación social.

Cada vez son más las investigaciones que enfocan sus estudios en los aspectos socioculturales y afectivos de la Educación Matemática. Estos enfoques, que conciben el aprendizaje como una forma de participación social y al aula de clases como un lugar multicultural donde se encuentran diversas formas de pensar, razonar, interactuar, compartir e interpretar, han identificado obstáculos en el aprendizaje matemático derivado de aspectos sociales, culturales y afectivos en el micro-contexto del aula de clases. Planas (2004, p.1) propuso tres categorías para analizar dichos obstáculos: cultural, referente a las diferencias en la interpretación de las normas del aula; social, referente a valoraciones dadas a las diferentes interpretaciones; y afectiva, referente a las respuestas emocionales dadas por los alumnos a las interpretaciones de las normas o valoraciones inesperadas.

Morgan (1998 citado en Planas, 2002) señala que las normas tienen un papel mediador dentro del aula de clase; puesto que "el aprendiz, no sólo necesita comprender partes concretas de las matemáticas escolares, sino que también necesita saber las formas de comportamiento que le habrán de conducir a un cierto grado de reconocimiento", por lo tanto, si la interpretación de la norma está cercana a la del grupo dominante, la valoración que el sujeto recibe es positiva y esto favorece su participación.

1.2 El Juego como estrategia Didáctica.

Fruto de las investigaciones y experiencias realizada desde 1985 por los profesores del proyecto *"Juega y Construye la Matemática"*, el juego es considerado una estrategia didáctica de la enseñanza de la matemática; recientemente,en una de las publicaciones en el marco de esta propuesta realizada por Gómez y Grisales (2011 p. 3)ellos han manifestado que los estudiantes no solo desean encontrar en el colegio ambientes que les permitan aprender sino al mismo tiempo recrearse; la anécdota que mencionan en el documento es la siguiente: *"…La profesora Patricia se encuentra a un niño de cinco años en el patio del colegio y le pregunta: ¿Sebastián para dónde vas a toda carrera?, y él responde: para el parque, ella nuevamente le pregunta: ¿Por qué no estás en clase?, y finalmente él le responde: ¡ …ha… !, estoy aburrido en este colegio, aquí ponen muchas tareas y yo vine fue a jugar…".* Esta situación se presenta en varias ocasiones cuando nuestras clases no tienen en cuenta el gusto y los intereses de los estudiantes. Por lo tanto, parte de nuestra propuesta es utilizar dos herramientas que en particular a los estudiantes según las entrevistas les ha llamado la atención: el juego y la tecnología (Software Dinámico).

1.3 Las nuevas tecnologías y el método de graficación covariacional en la construcción del pensamiento variacional.

En Colombia, y en general en varios países del mundo, cuando se mencionan las tendencias o retos actuales de la educación, se habla de las tecnologías de información y comunicación (TIC). En nuestro país, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) desde el año 2000, comprometido con estos desafíos, propone incorporar las tecnologías en el currículo de matemáticas. En el año 2004, con la participación de varias instituciones educativas, publicó varias cartillas con el proyecto llamado *"Incorporación de nuevas Tecnologías al Currículo de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia"*; allí presentaron varios software dinámicos para el trabajo en el aula de clase, y manifestaron que las deficiencias encontradas respecto al desarrollo del pensamiento variacional eran alarmantes.

Dolores & Salgado (2009, p. 65) mencionan que las dificultades se debena que por años se ha privilegiado el trazado de la gráfica a partir de la ubicación de un conjunto discreto de puntos y se ha dejado de lado la interpretación de la gráficas; o cuando se realiza una interpretación

normalmente los estudiantes de bachillerato atienden lo que pasa con la variable independiente y desatienden lo que pasa con la variable dependiente, y los efectos naturales que ocasionan el cambio.

Dolores & Salgado (2009, pp. 63-64) proponenel método de graficación covariacional, que consiste en ir construyendo la gráfica e ir analizando el comportamiento variacional, involucrando la coordinación de las dos cantidades y observando la forma en que cambian una con respecto a la otra.

Plantea que las gráficas curvas se deben construir a partir de una poligonal; primero con unos lados grades, luego con unos más pequeños y finalmente con infinitos lados.

Figura 1. Poligonal con "lados grandes"

Figura 2. Poligonal con "lados pequeños"

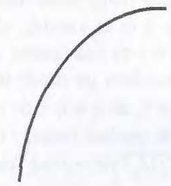


Figura 3. Curva con "lados infinitamente pequeños"

Cantoral y Reséndiz (2003, pp. 137-138) mencionan que la mayor atención de los estudiantes se logra cuando los conceptos geométricos y aritméticos se presentan de manera dinámica y variacional, que cuando se presenta de manera estática.

Se ha asumido desde la perspectiva teórica de Carlson (2003, p. 129) el razonamiento covariacional como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra". De éste consideramos pertinente reseñar, de manera supremamente sintética, los niveles de razonamiento, a través de una tabla tomada casi textualmente:

Niveles del razonamiento covariacional

El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.

Nivel 1 (N1). Coordinación
En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable.

Nivel 2 (N2). Dirección
En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra.

Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa
En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra.

Nivel 4 (N4). Razón promedio
En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada.

Nivel 5 (N5). Razón instantánea
En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario.

2. *Metodología del taller:*

La metodología propuesta para el desarrollo del taller se compone de tres momentos: en el primero, se realiza el juego con todos los participantes; en el segundo, se realiza un trabajo de modelación de la situación utilizando el software TI-Nspire (para el computador); y en el tercero, se realiza una socialización y discusión sobre los obstáculos evidenciados en la aplicación de este taller con los estudiantes. En este documento solo se hará evidente el segundo momento del taller.

2.1. *Juego "el estimador" con material concreto:*

2.2. *Modelación de la situación:*

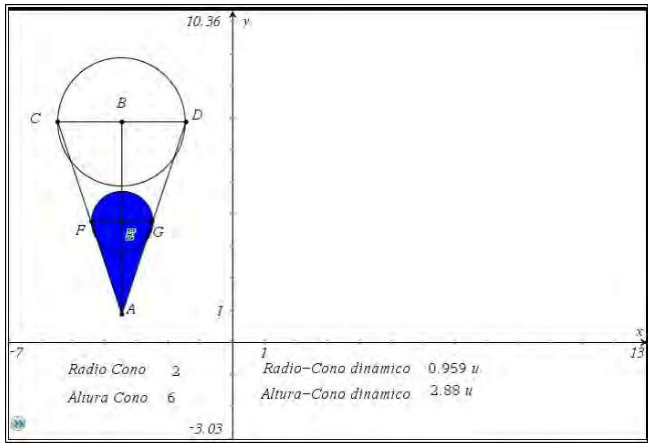
Si se construye un cono con las siguientes medidas: radio 2 dm y altura 6 dm; y se llena de agua hasta ciertas alturas: 2 dm, 3 dm, 3.1dm; Determine el volumen que tendrá el cono en cada altura. Encuentre una expresión que me permita identificar el volumen de este cono a cualquier altura. Generalice la fórmula para un cono que no tenga radio 2dm y altura 6dm, sino radio ***a*** *y altura* ***b****.*

La forma de llevar a cabo la situación estará basado en tres actividades a desarrollar:

Actividad Uno:	Construir el cono y encontrar el radio del círculo que se forma en la superficie a cualquier altura.
Actividad Dos:	Encontrar la gráfica que relaciona el área del círculo que se forma en la superficie respecto a la altura.
Actividad Tres:	Encontrar una expresión general que relacione finalmente el volumen del cono que se forma respecto a su altura.

2.3. *ACTIVIDAD UNO:*

Construir el cono y encontrar el radio del círculo que se forma en la superficie a cualquier altura.



Para la construcción del cono realice los siguientes pasos:

a) Con la opción TEXTO escriba *Radio Cono* y luego *Altura Cono*
b) Con la opción TEXTO digite al frente de cada uno el número 2 y 6.
c) Trace una semirrecta, perpendicular al eje *x*.
d) Con la opción TRANSFERENCIA DE MEDIDAS, transfiera sobre la semirrecta el valor 6.
e) Haga clic con el botón derecho sobre la semirrecta y ocúltela.
f) Con la opción TEXTO, haga clic en cada punto y nombre los puntos *A,B*
g) Trace el SEGMENTO $\overline{AB}$.
h) Por el punto *B* trace una RECTA PERPENDICULAR al segmento $\overline{AB}$
i) Con la opción COMPÁS, haga clic en 2 (valor del radio) y centro *B*.
j) Con la opción PUNTOS DE INTERSECCIÓN de la circunferencia y la perpendicular, marque los puntos *C* y *D*.
k) Haga clic derecho sobre la recta perpendicular que pasa por $\overline{CD}$ y ocúltela.
l) Con la opción TRIANGULO una los puntos *A, C y D*.
m) Con la opción PUNTO EN trace un punto *E* sobre el segmento $\overline{AB}$.
n) Por el punto *E* trace una recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$
o) Halle los puntos *F*, *G* de intersección de la perpendicular con el triángulo *ACD*.
p) Oculte la recta perpendicular
q) Trace una circunferencia con centro en *E* y radio $\overline{EF}$.
r) Trace el triángulo *FGB*
s) Haga clic derecho sobre el triángulo *FGB* y rellénelo de color azul.
t) Rellene de color azul la última circunferencia cuyo centro es *E*.
u) Mueva el punto *E*.
v) Con la opción LONGITUD mida el segmento $\overline{EF}$ (radio-cono dinámico) y ubique el resultado al lado derecho de la pantalla.
w) De la misma forma, halle la longitud del segmento $\overline{AE}$ (altura-cono dinámico)

Este primer acercamiento al problema, estará basado en encontrar algunos valores que toma el radio de la circunferencia que se forma en la superficie del agua a cualquier altura. Por lo tanto, se espera que mediante la manipulación de puntos y algunas herramientas como gráficas y tablas se resuelvan preguntas tales como:

a) ¿Qué es lo que varía si arrastra el punto E?
Respuesta:____

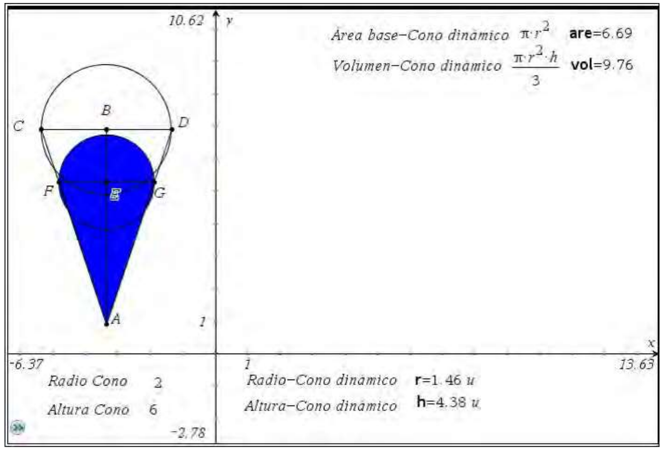
b) ¿Qué permanece constante si arrastra el punto E?
Respuesta____

c) ¿Qué valores toma el radio del cono dinámico cuando varía su altura en: 1, 2, 3.5, 5, 5.36, 5.5 y 6?
Respuesta____

Altura de la superficie cono dinámico	Radio de la superficie del cono dinámico
1	
2	
3.5	
5	
5.36	
5.5	
6	

Con ayuda de la *TI–Nspire™ CAS*
Haga doble clic sobre el valor de la altura y reemplace con los valores de la tabla.

Para almacenar los datos en variables y realizar los cálculos realice lo siguiente:



a) Haga clic derecho sobre el valor de la Altura del Cono dinámico,seleccione la opción ALMACENAR y cambie las letras **var,** por la letra **h,** luego presione ENTER.

b) Halle la longitud del segmento $\overline{EF}$ (Radio-Cono dinámico), ubique el resultado al lado derecho de la pantalla.

c) Haga clic derecho sobre el resultado, seleccione la opción ALMACENAR y cambie las letras **var,** por la letra **r,** luego presiones ENTER.

d) Con la opción TEXTO escriba **Área base-Cono dinámico** y al frente escriba πr^2

e) Con la opción CALCULAR activada haga clic sobre la fórmula del Área base-Cono dinámico, luego sobre el valor del radio **r,** y finalmente haga clic al frente de la fórmula.

f) Con la opción TEXTO escriba **Volumen-Cono dinámico** y luego al frente escriba $(\pi r^2 h)/3$

g) Con la opción CALCULAR activada haga clic sobre la fórmula del volumen del cono dinámico, luego sobre el valor de la altura, luego sobre el valor del radio, y finalmente haga clic al frente de la fórmula del volumen del cono.

h) Con el botón derecho del mouse haga clic sobre el resultado numérico del área, active la opción ALMACENAR, cambie las letras **var,** por las letras **are,** luego presiones ENTER.

i) Con el botón derecho del mouse haga clic sobre el resultado numérico del volumen, active la opción ALMACENAR, cambie las letras **var,** por las letras **vol,** luego presiones ENTER.

Construcción de la TABLA del radio en relación con la altura

	A altura	B radio		A altura	B radio
◆	=capturar(	=capturar(	◆	=capturar(	=capturar(
1	4.37768	1.45923	1	4.37768	1.45923
2	4.19098	1.39699	2	4.19098	1.39699
3	4.07378	1.35793	3	4.07378	1.35793
4	4.04448	1.34816	4	4.04448	1.34816
5	3.92727	1.30909	5	3.92727	1.30909
6	3.75147	1.25049	6	3.75147	1.25049
7	3.63426	1.21142	7	3.63426	1.21142
8	3.54636	1.18212	8	3.54636	1.18212
9	3.45846	1.15282	9	3.45846	1.15282
10	3.28265	1.09422	10	3.28265	1.09422
11	3.10685	1.03562	11	3.10685	1.03562
12	2.69663	0.898877	12	2.69663	0.898877
13	2.66733	0.88911	13	2.66733	0.88911
14	2.49152	0.830508	14	2.49152	0.830508

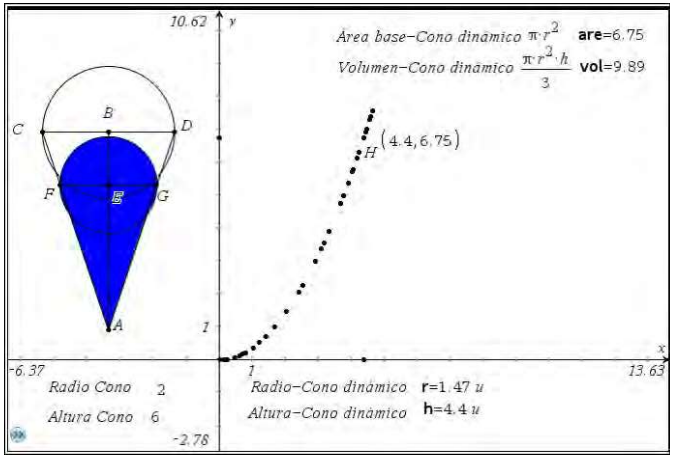
a) Con la opción INSERTAR active LISTAS Y HOJA DE CÁLCULO.
b) Ubique el mouse debajo de la letra **A** en laprimera columna sombreada, haga clic con el botón derecho y active la opción CAPTURAR DATOS AUTOMÁTICO.
c) Cambie las letras **var**, por la letra **h,** finalmente presione ENTER.
d) Ubique el mouse debajo de la letra **B en la** segunda columna sombreda, haga clic con el botón derecho y active la opción CAPTURAR DATOS AUTOMÁTICO.
e) Cambie las letras **var**, por las letras, **r** finalmente presione ENTER.
f) Active la ventana de la grafica y mueva el punto **E**, para completar la tabla.
g) Escriba al pie de la letra **A** primera columna la palabra **altura.**
h) Escriba al pie de la letra **B** segunda columna la palabra **radio.** Los resultados esperados se muestran a continuación.
i) Haga clic sobre la letra **A** primera columna hasta que se coloque de color azul, presione la tecla SHIFT y la flecha movimiento hacia la derecha, para resaltar ambas columnas.
j) Haga clic sobre el icono cuatro ESTADÍSTICA, active la opción CÁLCULOS ESTADÍSTICOS, luego la opción REGRESIÓN LINEAL (mx+b).
k) Haga clic la opción Lista X a[ ] seleccione la variable ALTURA.
l) Haga clic la opción Lista y B[ ] seleccione la variable RADIO.
m) Haga clic en la opción OK. Los resultados esperados se muestran a continuación.

2.4. *ACTIVIDAD DOS*:

Encontrar la gráfica que relaciona el área del círculo que se forma en la superficie respecto a la altura.

Para la construcción de la gráfica del área en relación a la altura realice los siguientes pasos:

a) Con la opción transferencia de medidas, transfiera el valor de **h** sobre el eje *x*, y el valor del área sobre el eje *y*.
b) Trace por estos puntos rectas perpendiculares a los respectivos ejes cartesianos.
c) Halle el punto **H** de intersección de las dos rectas perpendiculares.
d) Haga clic con el botón derecho del mouse y oculte las rectas perpendiculares.
e) Haga clic derecho sobre el punto *H* y active la opción COORDENADAS Y ECUACIONES
f) Active la opción TRAZADO GEOMÉTRICO del icono, haga clic sobre el punto **H** y luego mueva el punto **E.**
g) Los resultados esperados se muestran en la siguiente figura.



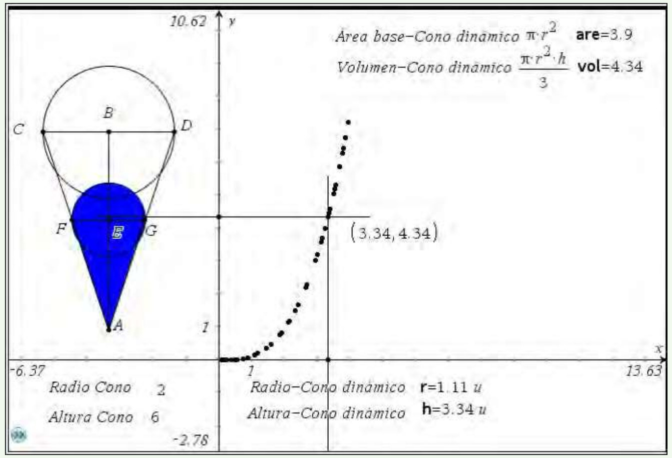
1.1. ACTIVIDAD TRES:

Encontrar una representación gráfica, tabular y algebraica que relacione finalmente el volumen del cono que se forma, respecto a su altura.

Con ayuda de la $TI\text{–}Nspire^{TM}\,CAS$ complete la tabla:

Altura del cono dinámico	Volumen del cono dinámico
1	
2	
2.5	
3	
3.5	
4	
4.5	
5	
5.36	
5.5	
6	

El procedimiento de construcción de esta gráfica y la tabla es similar a los anteriores, ya que solo cambian las medidas que deben transferirse.



Referencias Bibliográficas

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). *El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(2), 133-154.
Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA 8* (2), 121-156.
Dolores, C. & Salgado G. (2009). *Elementos para la Graficacion Covariacional.* Revista Número, Didactica de la matemáticas. Volumen 72, Diciembre de 2009. (pp. 63 - 74)
Gómez, J. & Grisales A. (2011). *Mi Maleta Matemática*. Bogotá: Comunidad de Hermanos Maristas de la Enseñanza.
MEN. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Bogotá: Ministerio de Educaión Nacional, (MEN).
Planas, N. (2002). Obstáculos en el aprendizaje matemático generadores de interrupciones en la participación. *Educación Matemática,* 14(1), pp. 5-25.
Planas, N. (2004). Metodología para analizar la interacción entre lo cultural, lo social y lo afectivo en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias,* 22(1), pp.19-36.
Valero, P. & Skovsmose, A. (2011). *Educación Matemática Crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. Bogotá: Ediciones Uniandes.