

¿QUÉ TIPO DE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS DEBE SER APROPIADA POR UN PROFESOR?

¿WHAT KIND OF HISTORY OF MATHEMATICS SHOULD BE APPROPRIATE FOR A TEACHER?

Edgar Alberto Guacaneme Suárez

guacaneme@pedagogica.edu.co

Profesor del Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional Estudiante
del Doctorado Interinstitucional de Educación –
Sede Universidad del Valle

RESUMEN

Preguntarse por el papel de la Historia de las Matemáticas en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas remite de manera inmediata, entre otras preguntas, a la pregunta que titula esta conferencia. En un intento de responderla, inicialmente se reconoce una dispersión de tipologías establecidas a través de diversos criterios (*v.g.*, objeto de referencia, tipo de fuente, incorporación de aspectos socioculturales, profundidad del análisis, enfoques histórico, tipos de matemáticas aludidas, aspectos relevantes en el estudio histórico, perspectiva histórica, modos de afectación, objeto de estudio) y las consecuentes posturas, casi siempre hipotéticas —pues existen pocas respuestas basadas en estudios documentales y experimentales—, que reivindican uno u otro tipo de Historia de las Matemáticas para ser incorporada en la educación de los profesores. El análisis de dichas posturas permite establecer la inexistencia de un consenso, así como la existencia de algunas trazas o tendencias de respuesta relacionadas con el *qué*, a saber: el cuestionamiento a una aproximación erudita a la Historia de las Matemáticas, la predilección por el estudio de fuentes originales, el favorecimiento del estudio de aspectos historiográficos, la defensa de una aproximación desde el estudio de análisis históricos, y la insuficiencia de materiales bibliográficos apropiados.

ABSTRACT

To ask about the role of the History of Mathematics in the construction of mathematics teachers' knowledge immediately gives rise to the question entitling this conference, among other questions. In an attempt to answer it, we recognize initially a dispersion of typologies established by various criteria (e.g., reference object, type of source, inclusion of socio-cultural aspects, depth of analysis, historical approaches, type of mathematics referred to, relevant aspects in the historical study, historical perspective, ways of involvement, the subject) and the resulting postures, mostly hypothetical —since there are few answers based on documentary and experimental studies—, that claim one or another type of History

of Mathematics should be incorporated in teachers' education. The analysis of these postures allows us to establish the lack of consensus, and in these, the existence of some traces or tendencies related to: the questioning of scholarly approaches to History of Mathematics, the predilection for the study of original sources, the tendency to study the historiography, the defense of an approach based on the study of historical analysis, and the lack of appropriate bibliographic materials.

INTRODUCCIÓN

En el ámbito de estudio de la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática" [HM-EM] se evidencian planteamientos sobre el papel de la HM en la educación del profesor y, por ende, en su conocimiento. La mayor parte de estos planteamientos, los cuales devienen de posturas teóricas y en algunos casos se sustentan en evidencia empírica lograda a través de la investigación, se pueden organizar en al menos cinco categorías respecto de su objeto de referencia, a saber: los que aluden a la racionalidad (los *por qué*), a las intenciones (los *para qué*), al tipo de historia (los *qué*), a las estrategias metodológicas (los *cómo*) y al momento adecuado (los *cuándo*), de una formación histórico-epistemológica en función del conocimiento del profesor.

Estas preguntas se revelan muy importantes y son abordadas en el desarrollo del proyecto de tesis doctoral *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas*, orientada por el doctor Luis Carlos Arboleda, en el cual interesa profundizar en el papel de la HM en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas.

En esta conferencia, se aborda lo identificado y construido en torno a la pregunta sobre el tipo de HM requerido y deseable para el conocimiento del profesor de Matemáticas. Para ello inicialmente se presenta un conjunto de tipologías identificadas en los documentos especializados de la relación HM-EM y posteriormente se discuten algunos consensos y trazas identificados al respecto de la pregunta en cuestión.

DIEZ TIPOLOGÍAS DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Fauvel y van Maanen(1997, p. 138) reportan que un asunto relacionado con la funcionalidad de la apropiación del conocimiento histórico es precisamente la pregunta acerca de qué clase de HM es la adecuada para la formación del profesor; esta pregunta lleva implícita la alusión a la existencia de *tipos* de Historia de las Matemáticas, pero, más allá de incluir un ejemplo¹, los autores no los precisan.

¹ Fauvel y van Maanen formulan la hipótesis de que el estudio de la *historia de los fundamentos de las matemáticas*, así como de las ideas de rigor y demostración, serían importantes para los profesores de matemáticas.

Bajo la idea de que establecer los tipos de historia es un paso previo y necesario para abordar la pregunta, hemos desarrollado una reflexión sobre posibles tipologías —inspirada en una aproximación a los productos de la investigación histórica y acompañada por las atomizadas consideraciones encontradas en la literatura—, la cual nos ha permitido identificar varias tipologías de la Historia de las Matemáticas, o, desde nuestra perspectiva (Guacaneme, 2007), la existencia de intervalos o tendencias² de la Historia (*i.e.*, clasificaciones de los productos de la investigación y análisis históricos a través de diversos criterios).

Una primera tipología, más o menos elemental, alude al objeto de referencia de la obra histórica; en esta dirección reconocemos que dentro de los resultados de la Historia de la Matemática se pueden encontrar, entre otros productos: la biografía de un matemático o de una escuela matemática, las versiones originales de obras matemáticas o sus traducciones, la correspondencia entre matemáticos y los análisis de la misma, o el estudio de una noción o problema matemático, de una forma de pensamiento matemático, de teorías o porciones de ellas, o de una obra matemática.

Estos objetos se pueden organizar en dos categorías, las cuales constituyen una segunda tipología, a saber: fuentes originales y secundarias. Dentro del tipo fuentes originales se encuentran, entre otros, los manuscritos originales de las obras matemáticas e incluso sus traducciones, la correspondencia entre matemáticos, los discursos de los matemáticos en congresos o eventos académicos, o los instrumentos y máquinas construidas para favorecer la producción matemática; los análisis, comentarios o recapitulaciones sobre estas fuentes originales, constituyen las fuentes secundarias. Al respecto de esta segunda tipología debemos señalar que en sí misma no constituye una clasificación de los productos de la Historia de las Matemáticas, pues reconocemos trabajos que se ubican en ambos tipos; así, los libros de *Los Elementos* en la traducción que hemos consultado (Puertas, 1991, 1994, 1996) constituyen un ejemplo de fuente primaria, en lo que respecta a la traducción de los trece libros euclidianos, y una fuente secundaria, al considerar las notas a pie de página de la traducción, que no son otra cosa que los análisis elaborados por la historiadora. Adicionalmente, si se atiende a lo expuesto por Tzanakis y sus colegas, (2000, pp. 212-213), se deberían incorporarlas *fuentes didácticas* como un tercer tipo de fuentes, es decir, se debería incluir “el cuerpo de la literatura extraído de los escritos primarios y secundarios con la intención de constituir una aproximación (exposición, tutoría, ejercicio, etc.) inspirada en la historia” (Ibid, p. 212), o, en nuestras palabras, los productos resultantes de transposiciones didácticas de la Historia con la intención de incorporarla a la enseñanza de las matemáticas.

² La descripción de nuevas tendencias de la Historia de las Matemáticas es desarrollada de manera interesante por Rowe (1996).

Una tercera tipología, relativamente conocida, es aquella que ubica dos tipos extremos de Historia (internalista y externalista) y posturas intermedias de éstas (Anaconda, 2003, pp. 31-32). En cierto sentido, el reconocimiento de —y atención a— aspectos sociales y culturales como elementos fundamentales en la constitución y desarrollo de la obra matemática, objeto del estudio histórico, es el aspecto central de distinción entre estas posturas. Al respecto, reconocemos algunos autores y trabajos, ligados a la Educación Matemática, que propenden por posicionar una postura—con una tendencia más hacia lo externalista y en cierto sentido anti-internalista—ilustrando con relativa claridad a lo que alude el contexto sociocultural. Por ejemplo, Bagni(2008), bajo la premisa de que los aspectos culturales juegan un papel cognitivo y epistemológico en la manera de pensar matemáticamente, enfatiza la importancia de una correcta contextualización cultural de *un* teorema demostrado en varios momentos y obras matemáticas, y discute el problema del desarrollo del conocimiento dentro de contextos culturales específicos, como elementos cruciales a ser atendidos cuando los profesores apropian la HM para integrarla en la enseñanza de las Matemáticas; igualmente, Radford(2004) defiende la tesis de que el simbolismo algebraico emergió en el Renacimiento como parte de un nuevo tipo de pensamiento, dependiente de las actividades socioeconómicas que surgieron en la Edad Media, y como una manera semiótica de representación de conocimiento, inspirada por un mundo transformado sustancialmente por el uso de artefactos y máquinas.

Otra tipología, se relaciona con el nivel de profundidad del producto de la Historia de las Matemáticas. Aquí, es preferible hacer referencia a dos tendencias casi siempre opuestas: el relato histórico y el análisis histórico. En el primero, aspectos historiográficos —tales como cronología, biografías, anécdotas, etc.— ocupan un papel importante, en tanto que el contenido matemático y su análisis histórico un papel secundario; en éste, pueden también incluirse fragmentos descontextualizados de obras matemáticas o citas textuales, que se incorporan como parte de textos o documentos más amplios. Un ejemplo de estos últimos son los relatos (*Historical Stories*) que refiere Führer (1992; 1991) y que él mismo califica como no ajustados a los estándares de la ciencia histórica. Consideramos que a este tipo de productos de la HM es a los que Fowler(1991) califica con el apelativo *pseudo-historia* y sobre la cual advierte peligros en su uso didáctico por parte de los profesores de matemáticas. El contenido de este tipo de HM es calificado por Bruckheimer y Arcavi(2000, p. 136) como importante, en la medida que configura el alfabetismo histórico de los profesores y un trasfondo relativamente necesario para la comprensión de la evolución conceptual de las ideas y conceptos matemáticos, pero no es considerado como el objetivo principal de la HM para los profesores. En el segundo tipo ubicamos los análisis históricos que habitualmente se encuentran publicados como artículos en las revistas de HM, o aquellos capítulos de libros o libros de HM en el que el análisis histórico de la obra matemática ocupa el lugar central, en tanto que los aspectos historiográficos o bien no aparecen, o se mencionan como parte del contexto general de la obra en

cuestión. Una manera alterna de entender esta tipología es identificando el relato histórico con la descripción del hecho histórico, y el análisis histórico con el análisis e interpretación del hecho histórico.

Una quinta tipología se refiere a la existencia de diversos enfoques del análisis histórico, no necesariamente disjuntos; enfoques que no se pueden ubicar como extremos antípodos de intervalos, sino más bien como tendencias diversas de la interpretación histórica, relacionadas con la intencionalidad y perspectiva del estudio histórico mismo. Así, la perspectiva del análisis puede enfatizar, entre otros, en aspectos: (i) filosóficos acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos implicados en la obra matemática, (ii) lógicos en torno al tratamiento de tales objetos, (iii) axiológicos de la obra misma, (iv) matemáticos propiamente dichos, (v) psicológicos en torno al pensamiento matemático implicado en la constitución de la obra, o (vi) sociológicos.

Una sexta tipología se refiere a si las matemáticas objeto del estudio histórico son las reconocidas como hegemónicas (o matemáticas occidentales) o si pertenecen a culturas o sociedades específicas (*v.g.*, matemáticas orientales o matemáticas de comunidades indígenas). A este respecto es pertinente mencionar que Rowe (1996, pp. 4-6) advierte de la existencia de una tendencia en la HM que implica un cambio desde una postura relativamente limitada (visión eurocéntrica de un cuerpo monolítico de conocimiento matemático), hacia el reconocimiento de un panorama más amplio de la actividad matemática incorporada en una rica variedad de culturas y periodos.

La séptima tipología se encuentra reportada en la literatura (Grattan-Guinness, 2004a, 2004b) bajo la identificación de dos tendencias, denominadas *historia* y *herencia*. Estas dos maneras de aprehender las matemáticas del pasado, calificadas por Grattan-Guinness como legítimas pero peligrosamente confundibles, se caracterizan de manera sintética a través de la siguiente tabla³.

³ Traducción personal de la tabla presentada por Grattan-Guinness (2004a, p. 4); en ésta, la letra N, simboliza a la palabra “noción”, la cual sirve como un término para cubrir una obra matemática (teoría o definición, método de prueba, técnica, algoritmo, notación(es), rama entera de las matemáticas).

Rasgo	Historia	Herencia
Motivaciones de N	Asunto importante; puede ser difícil de encontrar	Probablemente de menor interés
Tipos de influencia	Puede ser tanto positiva como negativa; ambas se deberían registrar	Probablemente sólo reporte los casos positivos
Relaciones de N con nociones anteriores y posteriores	Asunto principal; se acentúan las diferencias tanto como las semejanzas	Asunto importante; las semejanzas se acentúan más que las diferencias
Aprehender asuntos oscuros evidentes en N	Los reconstruye tan claramente como sea posible	Los reconocen, pero los limpia
Desarrollos exitosos	Muy importante; pero también estudia fracasos, retrasos, oportunidades perdidas, y arribos tardíos	Probablemente es el asunto principal
Papel de la cronología	Usualmente importante; puede ser difícil de establecer	Más allá de detalles generales; probablemente no interesa mucho
Consecuencias históricas	Puede tratar de reconstruir la previsión (esperanzas, etc.) para N, sostenida por las figuras históricas	Puede tratar de construir la retrospectiva y la perspectiva histórica de los desarrollos posteriores de N
¿Determinismo?	Preferiblemente no reivindicado; los desarrollos reales fueron así y así, pero no necesariamente así y así.	Pueden acarrear un sabor determinístico: tenemos que lograrlo (¡sin ver la columna de la historia!)
Cimientos de una teoría	Derribarlos y construir sobre un pantano	Dejarlos y construir a partir de ellos, como sobre un terreno sólido
Nivel de importancia o popularidad de N	Puede variar con el tiempo, independientemente del contenido; debería ser destacado (y podría ser explicado)	Normalmente no considerado; se asigna la importancia actual

En la literatura se identifica también otra tipología, en cierto sentido relacionada con la anterior, que ubica dos tendencias, a saber: una historia contada *desde el punto de vista del autor historia cultural* y una historia contada *desde la perspectiva de los científicos modernos* (Tosh, 2006). Como lo comenta Tosh (2006, pp. 677-679), el estilo usado por la historia cultural recurre usualmente a un relativismo que procura enfatizar en las categorías y conceptos del autor, aun cuando éstos puedan ser refutados por el conocimiento *verdadero* moderno; en cierto sentido, la historia cultural, con un estilo permisivo más que prescriptivo, procura hacer hablar al autor matemático de la obra, más que al historiador. Bajo el reconocimiento de la existencia de relatos instaurados bajo la *perspectiva moderna*, Tosh advierte que al entremezclar las dos tendencias citadas, se corre el riesgo de caer en un anacronismo conceptual (*i.e.*, introducir una terminología y conceptos modernos en la descripción de un hecho del pasado) que enturbia la historia y, por tanto, el sentido del relato histórico. En una dirección relativamente cercana, Michael Fried (2001) recapitula algunas ideas expresadas por Herbert Butterfield a través de las cuales expone las características de un enfoque "distorsionado" de la historia ("*Whig history*") —que en esencia se identifica con la

historia desde la perspectiva de los científicos modernos—, enfoque que se justifica en la condición del historiador de interpretar (y producir) los hechos históricos desde *su* perspectiva y de su incapacidad de asumir la postura del autor de la obra matemática. Por otra parte, el caso específico de defensa de la necesidad de la perspectiva de la matemática moderna para entender las matemáticas del pasado es tratado por Rowe(1996, pp. 8-11) al recapitular y analizar las ideas expuestas por André Weil.⁴ La novena tipología surge de una reflexión sobre los dos modos de afectación (*evolutivo*[comprensión de los procesos de evolución de los objetos matemáticos] y *situado*[comprensión de los razonamientos de los matemáticos en un momento específico]) que FulviaFuringhetti(2007)reporta para la HM sobre los diseños curriculares y análisis didácticos realizados por profesores de matemáticas. Desde nuestra perspectiva, estos modos sugieren y se relacionan con dos tipos de historia: una historia *evolutiva* (*i.e.*, aquella que da cuenta de la evolución de un concepto o idea matemática) y una historia *situada* (*i.e.*,aquella que exhibe los hechos y análisis históricos de una obra matemática en un contexto específico).

Una última tipología, sugerida por EvelyneBarbin(1996), alude a una *historia conceptual* y a una *historia de los problemas*. La primera refiere a una historia de aquellos conceptos que describieron cómo funcionan las matemáticas; la segunda, es una manera alterna de escribir la HM, la cual destaca el proceso de construcción y reificación del conocimiento derivado de la actividad de resolución del problema, considerada como motor de la actividad matemática.

CONSENSOS O TRAZAS DE TENDENCIAS SOBRE EL TIPO DE HM QUE DEBE SER APROPIADA POR UN PROFESOR

Ahora bien, a la luz de estas tipologías la pregunta inicial y genérica (¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor?) posee ya una serie de dominios donde la variable “tipo de historia” puede tomar valores; esto, permite transformarla en varias preguntas específicas. Así, por ejemplo, si el dominio fuese la cuarta tipología presentada, la pregunta se transformaría en cuestiones como las siguientes: ¿los relatos históricos [o bien, los análisis históricos] deben constituir parte del conocimiento histórico que debe apropiarse un profesor de matemáticas?, ¿es preferible y deseable que los profesores de matemáticas se apropien de una HM con una marcada tendencia hacia la descripción del hecho histórico o de una HM que enfatice en el análisis e interpretación del hecho histórico?

⁴ La discusión sobre las dos tendencias reseñadas, remite necesariamente a la sostenida, no simultáneamente, por Wilhelm Dilthey y Hans-Georg Gadamer en torno a lo que podría denominarse la *objetividad* de la interpretación; ésta se encuentra por ahora al margen del presente documento.

Más allá de ello, y de la numerosa lista de preguntas que podrían surgir y que tendrían que ser contestadas, nos preocupa la inexistencia de respuesta a casi la mayoría de preguntas y la escasísima investigación realizada para contestarlas adecuadamente. En efecto, en la literatura encontramos sólo algunas alusiones de respuesta. En este sentido, ya en la década de los ochentas, Freudenthal(1981) sugiere la idea de que para la formación de los profesores de matemáticas sería deseable una historia de los procesos, más que una historia de los productos de la creación matemática.

En la última década del siglo pasado Führer(1992) cuestiona una aproximación erudita a la HM para la formación de profesores y presenta como opción la exposición y estudio de “buenas historias” matemáticas que a modo de ventana permitan ver el significado y valor de las matemáticas como un todo. Heiede(1992) aboga por una formación en HM para los profesores, lograda a través de su formación matemática o bien en cursos especializados de HM. Por su parte, Shenitzer(1995), en la descripción que hace de un curso para profesores de matemáticas, identifica que si bien éste no es un curso de HM, sí aborda el estudio de temas matemáticos desde una perspectiva histórica, opción que para este autor es la estrategia para aprender la HM. Kleiner(1996) presenta un curso de HM para la formación histórica y filosófica de los profesores de matemáticas en el que aborda ideas filosóficas sobre las Matemáticas (*v.g.*, la naturaleza de las matemáticas) y temas matemáticos en la historia (*v.g.* la geometría no-euclidiana y el infinito matemático), tomando citas enunciadas por matemáticos y filósofos reconocidos en la HM como punto de partida y referencia central; un argumento para el empleo de citas, que nos parece muy revelador, es el estímulo y polémica que el estudio de ellas generan. Laubenbacher y Pengelley(1996) describen un curso, dirigido —entre otros— a profesores de matemáticas, en donde los textos originales de obras matemáticas juegan un papel central; estos autores reivindican el potencial de reconocimiento del carácter evolutivo de las matemáticas y de las exigencias cognitivas que la lectura y estudio de tales textos implican. Por su parte, Bkouche(1997) reclama una HM en la formación del profesor, siempre y cuando ésta esté acorde con los problemas de orden epistemológico que el profesor reconozca y enfrente en su desempeño profesional; en esta dirección argumenta a favor de una *epistemología de las problemáticas* y una *historia de sus descubrimientos*, como el tipo de historia/epistemología deseable para el conocimiento del profesor⁵. historia para la formación de profesores; dos de ellos reclaman la necesidad de un conocimiento histórico general—que incorpora el conocimiento de la historia de otras disciplinas— y un conocimiento en filosofía de las ciencias —debido a la estrecha relación de la evolución de las ideas matemáticas con los desarrollos de las concepciones epistemológicas y filosóficas—

⁵ Posteriormente, Bkouche(2000) reafirma y amplía esta discusión, asignando un papel fundamental a la formación histórico-epistemológica del profesor de matemáticas, específicamente en lo que él denomina la epistemología de las problemáticas.

. El otro asunto alude parcialmente a la necesidad de más y mejores materiales para la formación en Historia; este último asunto es para nosotros supremamente importante, pues no sólo revela una carencia de materiales, sino que además deja entrever que los existentes pueden no ser adecuados para la formación del conocimiento histórico requerido por los profesores de matemáticas como parte de su conocimiento histórico. Fernández (2001) señala que existen al menos seis enfoques u objetos de estudio en la HM que pueden ser avocados por el profesor de matemáticas para suscitar una formación que esté acorde con las decisiones sobre las líneas de actuación docente que elija para promover un uso de la HM en sus clases. La gama de enfoques cobija, entre otros, (bajo la denominación enunciada antes en las tipologías) los relatos históricos, las biografías, la historia evolutiva, la historia conceptual, o la historia de los problemas. En las observaciones finales de su artículo, Lit y sus colegas (2001) reportan que si bien los profesores que participaron en su estudio valoran el uso de la HM, no encuentran en ésta suficiente material de enseñanza fácilmente disponible. Recientemente, en el resumen de una investigación realizada por Cortez y sus colegas (2009) se identifica una particular concepción del conocimiento histórico que debería conocer un profesor; éste se refiere a las etapas de las Matemáticas, las aportaciones de ésta y los principales exponentes.

A partir de esta perspectiva cronológicamente organizada, podemos afirmar que las posturas de los autores reseñados no permiten identificar consenso alguno, aunque probablemente sí algunas trazas de ciertas tendencias. Una de éstas la constituye la posición de varios autores quienes cuestionan una aproximación erudita a la Historia o proponen alguna aproximación alterna a ésta —desde el punto de vista del contenido—(Führer, 1992; Heiede, 1992; Kleiner, 1996; Shenitzer, 1995). Otra tendencia se identifica en los autores que defienden el uso de fuentes originales para la promoción del conocimiento del profesor de matemáticas (Bruckheimer & Arcavi, 2000; Laubenbacher & Pengelley, 1996). Una tercera y una cuarta tendencia, relativamente opuestas, promueven o bien el uso de aspectos historiográficos (Cortez Godinez et al., 2009; Fernández, 2001), o bien —no siempre de manera explícita— el estudio de los análisis históricos (Bkouche, 1997, 2000; Bruckheimer & Arcavi, 2000; Fernández, 2001; Freudenthal, 1981; Grugnetti, 2000). Una última tendencia está constituida por la postura de algunos autores que reseñan insuficiencia en los materiales que puedan ser apropiados por los profesores para favorecer el conocimiento histórico relacionado con su ejercicio docente (Lit et al., 2001; Schubring et al., 2000). En relación con la primera y última tendencias, si bien —de manera provisional e hipotética— consideramos necesario el estudio de la HM como parte de la formación del profesor de matemáticas, creemos que en la formación de profesores de matemáticas, éste debe complementarse con (o acompañarse de), por ejemplo: el estudio de experiencias del uso de ésta a favor de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (v.g., Helfgott, 1995; Kronfellner, 1996; Radford & Guérette, 2000); el estudio de prácticas investigativas que apoyadas en la HM han indagado sobre

las concepciones, errores o dificultades de los estudiantes en torno a conceptos matemáticos esenciales o, de manera más general, han analizado comparativamente la filogénesis y la ontogénesis de objetos matemáticos (v.g., Bero, 1996; Sfard, 1995; Sierpinska, 1987)⁶; el estudio de la evolución histórica de un concepto y su evolución educativa en los currículos escolares (v.g., Chevallard & Joshua, 1982; Gagatsis & Thomaidis, 1993); o, el estudio de nociones metamatemáticas (v.g., rigor, verdad, demostración, lo obvio, axiomatización, formalización, solución de problemas) trabajadas con fundamentos históricos (v.g., Barbin, 2000; Kleiner, 1991; Swetz, 2000).

REFERENCIAS

- Anaconda, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*, 8(1), 30-46.
- Bagni, G. T. (2008). A Theorem and Its Different Proofs: History, Mathematics Education, and the Semiotic-Cultural Perspective. *Canadian Journal of Science, Mathematics, & Technology Education*, 8(3), 217-232.
- Barbin, E. (1996). The role of problems in the history of mathematics and mathematics teaching. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 17-25). Washington: Mathematical Association of America.
- Barbin, E. (2000). The Historicity of the Notion of What is Obvious in Geometry. In V. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 89-98). Washington: Mathematical Association of America.
- Bero, P. (1996). Pupils' perception of the continuum In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 303-307). Washington: Mathematical Association of America.
- Bkouche, R. (1997). Epistémologie, histoire et enseignement de mathématiques. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education*, 17(1), 34-42.
- Bkouche, R. (2000). Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science. *Repères - IREM*, 39, 35-59.
- Bruckheimer, M., & Arcavi, A. (2000). Mathematics and its History: An Educational Partnership. In V. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 135-146). Washington: Mathematical Association of America.
- Cortez Godínez, R. A., Ponce Ocegueda, C. E., Flores Robles, J. F., Muñoz Carrillo, S., & Reynaga Luna, C. M. (2009). Historia, Matemáticas y Profesores en la UAN. In P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 22, pp. 1529-1533). México, D.F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

⁶ Uno de los capítulos del libro resultante del estudio ICMI aborda esta temática particular (Radford et al., 2002).

- Chevallard, Y., & Joshua, M.-A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique. La notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(1), 159-239.
- Fauvel, J., & van Maanen, J. (1997). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics. *ZDM*, 29(4), 138-140.
- Fernández, S. (2001). La historia de las matemáticas en el aula. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*(26), 9-27.
- Fowler, D. H. (1991). The experience of history in mathematics education: Perils and pitfalls of history. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education*, 11(2), 15.
- Freudenthal, H. (1981). Should a Mathematics Teacher Know Something about the History of Mathematics? *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education*, 2(1), p. 30-33.
- Fried, M. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education*, 10(4), 391-408.
- Führer, L. (1992). Historical Stories in the Mathematics Classroom. *The Mathematical Gazette*, 76(475), 127-138.
- Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 131-143.
- Gagatsis, A., & Thomaidis, I. (1993). Le concept de valeur absolue, une étude multidimensionnelle. *PLOT*, 67, 12-16.
- Grattan-Guinness, I. (2004a). History or Heritage? An Important Distinction in Mathematics and for Mathematics Education. *American Mathematical Monthly*, 111(1), 1-12.
- Grattan-Guinness, I. (2004b). The mathematics of the past: Distinguishing its history from our heritage. *Historia Matemática*, 31(2), 163-185.
- Grugnetti, L. (2000). The History of Mathematics and its Influence on Pedagogical Problems. In V. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 29-35). Washington: Mathematical Association of America.
- Guacaneme, E. A. (2007). La Historia de las matemáticas y el conocimiento histórico de las Matemáticas Unpublished Essay.
- Heiede, T. (1992). Why Teach History of Mathematics? *The Mathematical Gazette*, 76(475), 151-157.
- Helfgott, M. (1995). Improved teaching of the Calculus through the use of historical materials. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (Eds.), *Learn from the Masters!* (pp. 135-144). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: a historical perspective. *Mathematics Magazine*, 64, 291-314.
- Kleiner, I. (1996). A history-of-mathematics course for teachers, based on great quotations In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 261-268). Washington: Mathematical Association of America.

- Kronfellner, M. (1996). The history of the concept of function and some implications for classroom teaching. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 317-320). Washington: Mathematical Association of America.
- Laubenbacher, R. C., & Pengelley, D. (1996). Mathematical masterpieces: teaching with original sources In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 257-260). Washington: Mathematical Association of America.
- Lit, C.-K., Siu, M.-K., & Wong, N.-Y. (2001). The use of History in the Teaching of Mathematics: Theory, Practice, and Evaluation of Effectiveness. *Education Journal*, 29(1), 17-31.
- Puertas, M. L. (1991). *Euclides.Elementos.Libros I-IV*. Madrid: Editorial Gredos S.A.
- Puertas, M. L. (1994). *Euclides.Elementos.Libros V-IX*. Madrid: Editorial Gredos S.A.
- Puertas, M. L. (1996). *Euclides.Elementos.Libros X-XIII*. Madrid: Editorial Gredos S.A.
- Radford, L. (2004). *The cultural-epistemological conditions of the emergence of algebraic symbolism*. Paper presented at the History and Pedagogy of Mathematics Conference & ESU4, Uppsala, Sweden.
- Radford, L., Bartolini Bussi, M., Bekken, O., Boero, P., Dorier, J.-L., Katz, V., et al. (2002). Historical formation and student understanding of mathematics. In *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 143-170).
- Radford, L., & Guérette, G. (2000). Second Degree Equations in the Classroom: A Babylonian Approach. In V. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 69-75). Washington: Mathematical Association of America.
- Rowe, D. E. (1996). New trends and old images in the history of mathematics In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 3-16). Washington: Mathematical Association of America.
- Schubring, G., Cousquer, É., Fung, C.-i., El Idrissi, A., Gispert, H., Torkil, H., et al. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 91-142). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 15-39.
- Shenitzer, A. (1995). A Topics Course in Mathematics. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (Eds.), *Learn from the Masters!* (pp. 283-295). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- Sierpiska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371-397.
- Swetz, F. (2000). Problem Solving from the History of Mathematics. In V. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 59-65). Washington: Mathematical Association of America.

Tosh, N. (2006). Science, truth and history, Part I. Historiography, relativism and the Sociology of Scientific Knowledge. *Studies In History and Philosophy of Science Part A*, 37(4), 675-701.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sá, C., Isoda, M., Lit, C.-K., Niss, M., et al. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.