

## PROCESOS DE OBJETIVACIÓN EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO POR PARTE DE ESTUDIANTES DE BÁSICA PRIMARIA.

Adriana Lasprilla Herrera<sup>28</sup>

### RESUMEN

El problema de investigación consistió en discutir algunos elementos que permiten caracterizar procesos de objetivación en tareas de generalización de patrones con estudiantes de 9 y 10 años (Lasprilla, 2014), a partir de los planteamientos de la teoría de la objetivación (Radford, 2008, 2010a, 2010b). En La primera parte se propone una contextualización del problema teniendo en cuenta planteamientos del álgebra temprana. La segunda parte aborda algunas herramientas analíticas de la teoría de la objetivación en relación al desarrollo del pensamiento algebraico, en particular, la generalización de patrones (Radford, 2013) y los procesos de objetivación. En la tercera, se expone la metodología (Bravin y Pievin, 2008) basada en un análisis multimodal, la cuarta parte presenta sintéticamente la recolección de datos y sus análisis. Finalmente se discuten algunos resultados que pretenden alimentar reflexiones sobre el desarrollo del pensamiento algebraico a partir de los procesos de objetivación movilizados con estudiantes de básica primaria.

**PALABRAS CLAVE:** Generalización, objetivación, pensamiento algebraico, patrones

### INTRODUCCIÓN

Las ideas expuestas en éste documento se fundamentan en las investigaciones realizadas en el marco de la teoría de la objetivación (Radford 2008, 2010 y 2013a, Vergel 2014, Lasprilla 2012) y en particular se hará referencia a algunos apartes del trabajo de Maestría: Generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de 9 y 10 años (Lasprilla, 2014). En éste documento se reconoce un espacio para una reflexión y análisis en relación al pensamiento algebraico, en específico se considera que los estudiantes empiezan a pensar en forma algebraica aun cuando no están recurriendo (o al menos en gran medida) a los signos alfanuméricos del álgebra y en donde los procesos interpretativos de los estudiantes se investigan a través de la objetivación del saber y la configuración de los signos matemáticos, los gestos y las palabras entre otros medios a los que acuden.

---

<sup>28</sup> Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación. Universidad Distrital. Bogotá, Colombia.  
alaspriah@correo.udistrital.edu.co.

Esto sugiere pensar que los estudiantes están en la capacidad de expresar su pensamiento matemático y en particular el pensamiento algebraico, de diversas maneras, no sólo el lenguaje hablado o escrito puede ser considerado un medio para ello. Dentro de esta perspectiva se manifiesta la necesidad de reconocer que las formas de pensamiento se pueden expresar a través del cuerpo, el movimiento, la actividad perceptual, como también de la identificación de los procesos en la actividad matemática de los estudiantes, de manera que se pueda caracterizar las formas de pensamiento algebraico. Tanto los elementos que son movilizados por los estudiantes como los procesos desarrollados por ellos, deberían tener gran interés por los educadores en matemáticas, dado que brindan herramientas para el complejo estudio del aprendizaje de ésta ciencia.

De manera que, con el interés de reflexionar sobre éstas maneras de expresar formas de pensamiento matemático ignoradas, y en particular, al tratar de comprender cómo surge el pensamiento algebraico en los niños, se propone en este escrito identificar y analizar los procesos de objetivación desarrollados por un grupo de estudiantes de 9 y 10 años en el desarrollo de una tarea de generalización de patrones.

#### **PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

En algunas de las investigaciones realizadas por Radford (2006, 2008, 2010a, 2010b, 2013) se encuentran reportes de la reflexión en torno al estudio del pensamiento algebraico desde una perspectiva semiótica cultural, donde el interés radica en la caracterización del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes que no han tenido experiencias con el lenguaje alfanumérico propio del álgebra. De este modo, uno de los propósitos es resaltar lo que otros autores también han afirmado “la manipulación de los símbolos es sólo una pequeña parte de lo que el álgebra es en realidad” (Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N, 1999), por tanto, el pensamiento algebraico no se limita a la manipulación de letras o símbolos matemáticos.

Como se ampliará más adelante, desde el enfoque semiótico cultural el pensamiento algebraico debe hacer frente a la indeterminación de una forma analítica, restando importancia a la manipulación de símbolos ya que ellos, tan sólo son una manera de expresar la indeterminación, en la medida que es posible considerar diversas formas semióticas para lograrlo como son las palabra, o los gestos. Es necesario aclarar, que no significa que sean equivalentes o que se puedan simplemente sustituir los unos por los otros, sino que existe la posibilidad de desarrollar pensamiento algebraico por medio de diversos recursos semióticos y no sólo el habitual lenguaje algebraico (Vergel, 2014).

#### **MATERIALES Y MÉTODOS**

Particularmente, en este documento se asume el pensamiento algebraico como una forma de reflexión matemática, dado que se constituye, como saber, desde la reflexión histórica cultural, según Radford (2010b). El pensamiento algebraico se caracteriza por tres elementos íntimamente relacionados: el sentido de la indeterminancia, la

analiticidad y la designación simbólica (Vergel, 2014), el primero de ellos refiere a percibir lo indefinido, lo contrario a la determinancia numérica, la analiticidad es la manera como se reconoce la operatividad de los objetos indeterminados y la designación simbólica, es la forma particular que se emplea para referir a los objetos. De acuerdo a esto se puede decir que la distinción entre el pensamiento aritmético y el algebraico radica en que en el algebraico se emplean y operan con cantidades indeterminadas, como si estas no lo fueran.

Dada esta caracterización del pensamiento algebraico, es posible establecer una tipología de las formas en que se puede dar este pensamiento, en Radford (2010a) se reconocen tres de ellas, que son: pensamiento algebraico Factual. En él la indeterminancia es expresada mediante acciones concretas, como son: gestos, movimientos, palabras, por ejemplo, “señalar con la mirada”, “señalar con el índice”, realizar movimientos con un lápiz. El Pensamiento algebraico Contextual, aquí la indeterminancia es evidente, ya que hace parte del discurso, de manera que es posible expresar la percepción del término general, por ejemplo el estudiante dice “debo sumar dos al anterior”. En el Pensamiento algebraico Simbólico. Se emplean símbolos alfanuméricos propios del álgebra para representar las frases con las que han expresado la indeterminancia. Por ejemplo, mediante expresiones como:  $2n-1$ . En este tipo de pensamiento existe una reducción fuerte de recursos semióticos, dado que la indeterminancia es posible expresarla, aun cuando trata con cantidades desconocidas pero que se utilizan como si no lo fueran. En la perspectiva de la teoría de la objetivación, la generalización implica identificar lo común dentro de una secuencia, luego hacerlo extensible a todos los términos de la secuencia para finalmente establecer una regla que permita determinar cualquier miembro de ella (Radford, 2013).

El diseño de esta investigación se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo e interpretativo. La investigación dentro de este enfoque construye una rica descripción del fenómeno o problema didáctico bajo estudio, pues interesa describir las actuaciones matemáticas desde la teoría cultural de la objetivación, particularmente, los procesos de objetivación en tareas de generalización en estudiantes de 9 y 10 años. El modelo metodológico desarrollado consta de cuatro fases (Ver imagen 1) y toma como referente el desarrollo metodológico propuesto por Radford (2010b).

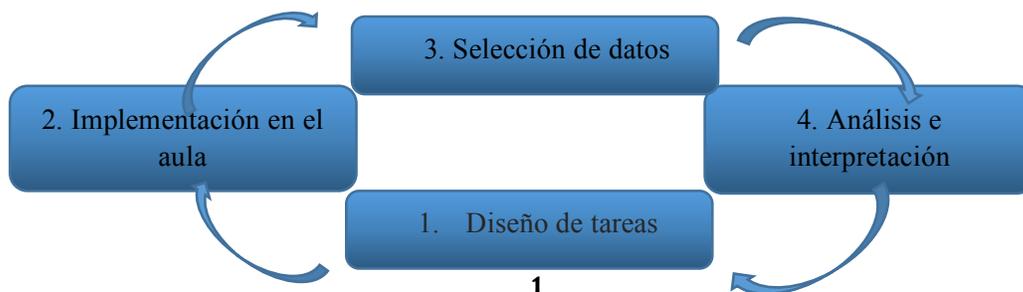


Imagen 1. Modelo metodológico

## ANÁLISIS Y RESULTADOS

En el trabajo de maestría (Lasprilla, 2014) del cual se retoman los datos se desarrollaron 4 tareas de generalización, las dos primeras fueron tareas que mostraban secuencias figurales y las dos últimas mostraban secuencias numéricas. En este escrito se hará referencia únicamente al análisis de la primera tarea aplicada a uno de los grupos participantes, la imagen 2 corresponde a ésta tarea.

Generalización de patrones

Tarea 1

Nombres: \_\_\_\_\_

1. Observa detenidamente la siguiente secuencia:



Figura 1



Figura 2



Figura 3



Figura 4

Siguiendo la secuencia:

a) Dibuja la figura 5 y 6

Figura 5	Figura 6
----------	----------

b) Calcula el número de cuadrados de la figura 9  
En la figura 9 hay: \_\_\_\_\_

c) Calcula el número de cuadrados de la figura 100  
En la figura 100 hay: \_\_\_\_\_

d) Explica la manera como hallaron la respuesta a la anterior pregunta.

Imagen 2. Secuencia figurale apoyada por representación tabular.

Dentro de las tareas presentadas a los estudiantes se aplicó una tarea piloto que mostraba una secuencia figurale de estructura similar a la de la tarea aquí mostrada, es por ello que el grupo de nuestro interés retomó la experiencia desarrollada en ésta tarea en una nueva situación, como se ve en la siguiente transcripción e imagen 3.

L1: Oscar: en la figura cinco hay (...) [realiza el conteo mentalmente inicialmente y luego recurre a los dedos]. Son 11 [señala con el dedo sobre la figura 5, mostrándole al compañero]

L2: Esaid: pero [cuenta los cuadros de la figura 4]

L3: Oscar: como el de la otra vez, sume dos al anterior, en la 4 hay 9, entonces en la 5 hay 11. [Señala la figura 4 en la hoja y sube el tono de la voz] si ve.



Imagen 3. Gestos realizados por Oscar mientras explicaba a su compañero lo observado.

Según Radford (2008), los estudiantes capturan la lógica cultural con que la secuencia ha sido presentada y empieza a familiarizarse con las formas de acción previas capitalizadas en anteriores situaciones similares a la que enfrentan. Éste hecho observado se constituye en evidencia de un proceso de objetivación de iconicidad. La iconicidad es una manera de darse cuenta de rasgos similares en un estudio previo a favor del procedimiento que se está realizando. La iconicidad se basa en la proyección de una experiencia anterior en una nueva, una proyección que trabaja en la identificación progresiva del contexto en aspectos similares y diferentes y que hace posible a través de un movimiento de un lado a otro, la aparición de una segunda forma conceptual (Radford, 2008).

En L3 se evidencian cómo los estudiantes, después de identificar el número de cuadros que aumenta de una figura a otra, pueden determinar el número de cuadros que tendrá la figura 5. Cuando hacen dicha afirmación Oscar sube el tono de la voz, lo cual es un indicador de que el estudiante ha reconocido el patrón de formación de la secuencia, y quiere hacerlo ver a su compañero. Radford (2006b, 2010a, 2010b) sostienen que el tono de la voz utilizado por los estudiantes durante la explicación de algún proceso debe ser considerado como un medio semiótico de objetivación que da cuenta de los descubrimientos hechos durante una actividad matemática, en este caso nos muestra que el grupo ha aceptado conjuntamente que en la secuencia presentada el número de cuadros que se aumenta de una figura a otra es igual a dos cuadros. Los señalamientos mostrados en la imagen 3 ponen en evidencia que los estudiantes no se fijan en la configuración espacial de las figuras de la secuencia, ya que ellos van señalando de una figura a otra explicando el número de cuadros que se aumenta.

Durante la socialización de la tarea, la mayoría de los niños quería participar comentando sus respuestas a las diferentes preguntas planteadas para hallar la cantidad de cuadros en la posición 100. El argumento planteado por el grupo de Oscar fue:

- L1: profe: ¿cómo hicieron para saber que en la figura 100 habían 201?
- L2: Oscar: sumando de a dos
- L3: profe: ustedes hicieron una tabla ¿cierto?
- L4. Oscar y Esaid: [mueven la cabeza afirmando lo dicho por la profe]

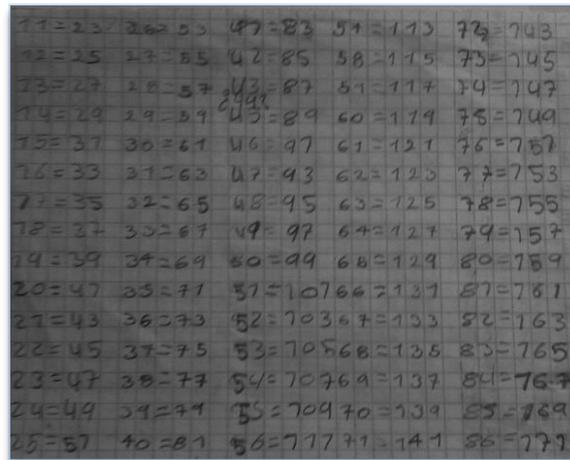


Imagen 4. Tabla construida por el grupo.

En esta forma de proceder, los estudiantes no están realizando una generalización algebraica de los términos de la secuencia, ya que para hallar el número de cuadros que tiene cada figura lo que hacen es por medio de una suma, teniendo en cuenta el número de cuadros que se aumenta de una figura a otra, es decir, hallan el número de cuadros de las figuras pedidas utilizando procedimientos aritméticos y no algebraicos.

Sin embargo, los estudiantes han reconocido un patrón que pueden utilizar para hallar el número de cuadros de cualquier figura que se les solicite y esto es un punto de partida para la generalización algebraica de la secuencia. Este hecho indica que los estudiantes han captado lo común en algunos detalles de la secuencia y lo utilizan para hallar términos posteriores, pero aún no utilizan este elemento común (Radford, 2010b) para construir una expresión correspondiente a cualquier término de la secuencia. Se evidencia, entonces, una característica de la generalización algebraica de un patrón, esta es la identificación de la comunalidad presente en la secuencia, para hablar de una generalización algebraica sería necesario que los estudiantes hubiesen aplicado ésta comunalidad a todos los términos de la secuencia, sin necesidad de utilizar tablas, además no les fue posible establecer una expresión o norma escrita u oral que permite determinar cualquier término de la secuencia.

## CONCLUSIONES

En este análisis se pudo observar que los estudiantes identifican rápidamente el número de cuadros que aumenta de una figura a otra, es decir, identifican el patrón de generalización. Con tal patrón identificado pueden hallar el número de cuadros de figuras desconocidas, tales como la figura 5 o la figura 6 y figuras más lejanas o remotas como la 10 y la 100. Con la ayuda del patrón identificado construyen una tabla que les permite hallar las cantidades para las figuras propuestas. La tabla utilizada por el grupo constituye lo que en la teoría se ha llamado un artefacto, ya que la tabla interviene como

mediador del pensamiento y muestra cómo los estudiantes utilizan procedimientos aritméticos para hallar el número de cuadros de las figuras pedidas además es importante decir que los estudiantes en ningún momento recurrieron a las configuraciones espaciales de los cuadros para hallar las cantidades de cada figura, ya que la identificación del patrón no estuvo basada en la configuración espacial de las figuras de la secuencia sino que los estudiantes centraron la mirada únicamente en el número de cuadros que se aumenta de una figura a otra.

En los dos primeros puntos de la tarea los estudiantes movilizan sincrónicamente medios semióticos de objetivación como señalamientos, inscripciones, movimientos de sus manos; en otras palabras, los estudiantes utilizan los gestos para hacer visibles sus intenciones, para notar relaciones matemáticas y para tomar conciencia de los aspectos conceptuales de la secuencia figural presentada.

En el desarrollo de la tarea se observó que los estudiantes recurrieron a estrategias de tipo aritmético, como fue, el uso del artefacto tabla, en donde empleaban operaciones principalmente la suma para elaborarlas. Desde la teoría de la objetivación, el pensamiento algebraico se caracteriza por manipular cantidades indeterminadas y además de ello la manipulación se hace de manera que no parecieran indeterminadas, sino por el contrario, se trabaja con ellas como cantidades conocidas. De acuerdo a esto, se establecen desde la teoría, tres tipos fundamentales de formas de pensamiento algebraico, Factual, Contextual y Simbólico. De manera que en el análisis de la producción de los estudiantes se pudo observar un ejemplo de emergencia del pensamiento algebraico de tipo factual, el cual se caracteriza por movilizar medios semióticos como los gestos, los movimientos, la actividad perceptual y las palabras, de manera que la indeterminancia es mostrada, sin embargo no hay una apropiación de ella.

## BIBLIOGRAFÍA

- Lasprilla, A. (2012). *Medios semióticos de objetivación que emergen en estudiantes de tercero de básica primaria en torno a una tarea de generalización de patrones figurales*. Trabajo de Especialización no publicado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.
- Lasprilla, A. (2014). *Generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de 9 y 10 años*. Trabajo de Maestría no publicado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1999). *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Radford, L. (2006). *Semiótica y educación matemática*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, pp. 7-21
- Radford, L. (2008). *Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of*

- algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, 40, 83-96.
- Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12 (1), 1-19.
- Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4 (2), 37-62.
- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Tesis doctoral no publicada. Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá Colombia.