EL ASISTENTE DE DEMOSTRACIÓN COMO HERRAMIENTA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE JUSTIFICACIONES TEÓRICAS EN PROBLEMAS DE DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA.

Jesús David Berrío Valbuena[39]

Resumen

En este taller se presenta un software (asistente de demostración), utilizado en la actividad de exploración de teoremas, definiciones y postulados de la geometría euclidiana, en el proceso de construcción de justificaciones teóricas. El uso del asistente de demostración está caracterizado por procesos de razonamiento deductivo y abductivo y ha sido ampliamente difundido entre los estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Los asistentes serán partícipes de las experimentaciones que se presentarán con el fin de que se familiaricen con el uso del software y de las ventajas que ofrecen en la enseñanza de la demostración.

Palabras Clave: Asistente de demostración, actividad demostrativa, exploración de la teoría, geometría euclidiana, tecnología.

Introducción

El curso de Geometría Euclidiana de la Universidad Industrial de Santander se fundamenta en dos interrogantes: ¿Cómo producir una construcción exacta? y ¿Cómo justificar que esa construcción está bien? Que bien podrían traducirse en los objetivos primordiales de la asignatura.

En el intento por responder al primer interrogante nace el primer reto para el estudiante consistente en diferenciar cuándo una construcción es exacta y cuándo es solo un dibujo. Se hace necesario entonces, el uso de una fuente teórica que permita justificar las propiedades involucradas en la producción de dicha construcción. El estudiante notará que hay dos tipos de propiedades: las propiedades que han sido realizadas en la construcción (con el uso de herramientas de construcción) y las propiedades que son producto de la conjugación de dos o más propiedades construidas.

Las propiedades producto de otras propiedades (es posible identificarlas mediante la exploración de la construcción realizada) se presentan como implicaciones lógicas, es decir, ***si*** se cumplen las propiedades A, B, C,… , M ***entonces*** se cumple la propiedad X. La justificación de estas propiedades plantea la necesidad de construir una demostración. Definimos el término *demostración* como el *proceso de justificación de enunciados usando únicamente reglas teóricas.*

Una regla teórica es una proposición de la forma si-entonces que representa una ley general de la geometría euclidiana. Por ejemplo, una definición, un teorema o un postulado. Las reglas teóricas permiten construir pasos de razonamiento. Un paso de

[39] Magister en Educación Matemática-Universidad Industrial de Santander, UIS. Jesus_berrio14@hotmail.com

razonamiento es una relación ternaria entre unas condiciones iniciales - regla teórica - conclusión. Se dice que el paso de razonamiento es válido si se logra establecer una correspondencia total entre todas las condiciones iniciales y el antecedente de la regla teórica, y una correspondencia total entre el consecuente de la regla teórica y los enunciados que se desean justificar. Y una secuenciación de pasos de razonamiento válidos lleva a la construcción de una demostración deductiva.

Las acciones involucradas en la construcción de pasos de razonamiento y a su vez en la construcción de demostraciones deductivas corresponden a lo que denominamos **exploración de la teoría**. Con este término se hace referencia a la realización de una serie de acciones consistentes en:

1. Realizar búsquedas de reglas teóricas que:
    a. Su antecedente contengan palabras claves referentes a los datos dados en el problema de demostración. Es decir, que correspondan a las propiedades construidas.
    b. Su consecuente contengan palabras claves referentes a las conclusiones que se desean obtener. Es decir, indagar por propiedades que sean el producto de una o más propiedades construidas.
2. Validar pasos de razonamiento, esto corresponde a:
    a. Establecer una correspondencia total entre la condición del paso de razonamiento y el antecedente de la regla teórica, y si ésta permite concluir las afirmaciones deseadas o establecer si son afirmaciones que deben ser demostradas.
    b. Establecer una correspondencia total entre la conclusión del paso de razonamiento y el consecuente de la regla teórica, y conocer las condiciones que bien pueden ser datos del problema o ser afirmaciones que deban ser demostradas.

El asistente de demostración.

El asistente de demostración es un programa matemático computacional que comprende una base de datos de ciento setenta (170) registros con los postulados, definiciones y teoremas a estudiar en el curso de Geometría Euclidiana (correspondientes al libro de Geometría de Clemens, O´Daffer & Cooney (1998)); éste es una herramienta de carácter dinámico que le ayuda al individuo en la construcción de pasos de razonamiento para la escritura de una demostración formal deductiva a tres columnas (condiciones – regla teórica – conclusiones).

El asistente de demostración explicita tres procesos que identificamos como necesarios en la construcción de una demostración deductiva:

1. La construcción de pasos de razonamiento, que hace referencia al establecimiento de una relación ternaria entre las condiciones dadas o datos del problema, una regla teórica y las conclusiones ligadas a las dos anteriores.
2. La adquisición de un control lógico para la enunciación de pasos de razonamiento. Es decir, validar el paso de razonamiento mediante la homologación del antecedente de la regla teórica con los datos el problema, y la del consecuente con las proposiciones a demostrar.
3. La flexibilidad en el proceso de producción de pasos de razonamiento (incluyendo las estrategias de análisis[40] y síntesis[41]), para hacer referencia a que durante el proceso de construcción de la demostración deductiva no es necesario llevar un orden estricto en la producción de los pasos de razonamiento, sino que pueden elaborarse pasos de razonamiento válidos usando proposiciones que no han sido demostradas pero que posteriormente serán debidamente justificadas.

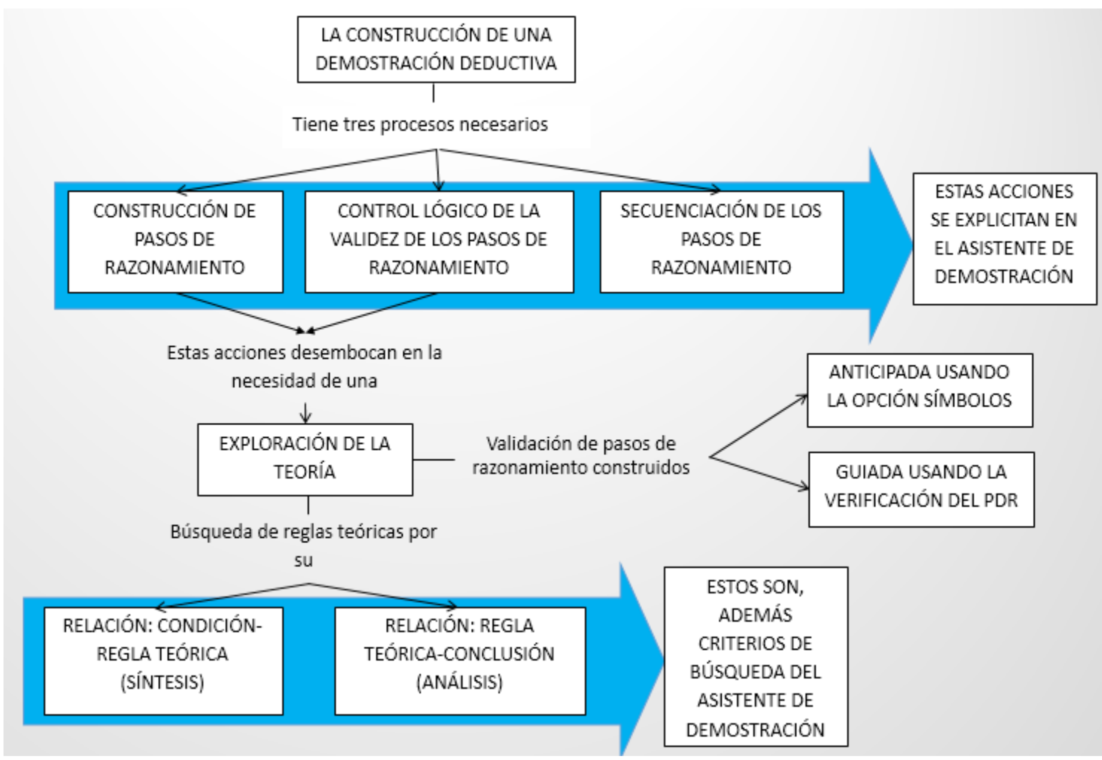

Figura 1. Proceso de construcción de una demostración usando el asistente.

Los procesos de construcción de pasos de razonamiento y validación de los mismos desembocan en lo que denominamos anteriormente como exploración de la teoría, que es la acción que permite encontrar definiciones, postulados o teoremas susceptibles de

[40] La estrategia del análisis está enmarcada dentro del razonamiento abductivo y consiste en razonar hacia una hipótesis, esto es conocido como abducción y se refiere a que a partir de los hechos se busca una hipótesis que señale su causa (Fann, 1970; Beuchot, 1998; Ferrando, 2007).
[41] La estrategia de la síntesis está enmarcada dentro del razonamiento deductivo y consiste en razonar desde la hipótesis.

justificar las afirmaciones que se quieren demostrar. Esta acción es la que determina los criterios de búsqueda de reglas teóricas en el asistente de demostración.
A continuación se mostrarán tres problemas para realizar una experimentación con los asistentes.

Experimentación 1.

Realice la siguiente construcción, y responda qué clase de triángulo es el triángulo ABC.

1. Segmento $\overline{AB}$
2. Circunferencia c con centro en A que pasa por B.
3. l mediatriz de $\overline{AB}$.
4. C, punto de intersección entre la mediatriz y la circunferencia c.
5. Triángulo ABC.

Después de hacer la construcción en un software de geometría dinámica y responder la pregunta se le solicita que realice la demostración de su afirmación utilizando el asistente de demostración. La intención es que demuestre que el triángulo ABC es equilátero.

Experimentación 2.

Realice la siguiente construcción, y responda qué clase de cuadrilátero es el cuadrilátero EDFG.

1. Cuadrilátero cualquiera $ABCD$
2. Puntos medios de cada lado del cuadrilátero E, F, G y H
3. Cuadrilátero $EFGH$

Después de hacer la construcción en un software de geometría dinámica y responder la pregunta se le solicita que realice la demostración de su afirmación utilizando el asistente de demostración. La intención es que demuestre que el cuadrilátero EFGH un paralelogramo.

Experimentación 3.

Realice la siguiente construcción, y responda que clase de cuadrilátero es ABDC.

1. Dados tres puntos A, B y C
2. Halle M, punto medio de BC.
3. Construya el punto D, haciendo simetría central de A con respecto a M.

La intención es demostrar que el cuadrilátero ABDC es un paralelogramo.

Discusión.

Para la parte final del taller se propone una charla con los asistentes en donde puedan:

Hacer comentarios sobre sus experiencias durante las experimentaciones realizadas a lo largo del taller.

Brindar opiniones con respecto al uso del asistente de demostración como herramienta para la enseñanza de la demostración.

Debatir sobre las implicaciones didácticas y metodológicas del esta estrategia de enseñanza de la demostración.

Bibliografía

Balacheff, N. (1987).Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM the International Journal on Mathematics Education* 40, 501–512.

Beuchot, M. (1998). Abducción y Analogía. *Analogía filosófica: revista de filosofía, investigación y difusión., 12*(1), 57-68.

Camargo, L., Samper, C., & Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas, Especial*, 371–383.

Clemens, S., O´Daffer, P., & Cooney, T. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas.* México D.F: Adisson Wesley Longman.

Dimakos, G., Nikoloudakis, E., Ferentinos, S. & Choustulakis, E. (2007). Developing a Proof-writing tool for novice lyceum geometry students. *The Teaching of Mathematics, 10*(2), 87-106.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3),(233-261).

Duval, R. (2000).Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 20/2(135-170).

Fann, K. T. (1970). *Peirce's Theory of Abduction.* La Haya, Holanda: Martinus Nijhoff.

Ferrando, E. (2007). The application of the abductive system to Different kinds of problems. En D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Ed.), *Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (págs. 2280-2289). Larnaca, Cyprus: ERME

Fiallo, J., Camargo, L. y Gutiérrez, A. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración, 31*(2), 181-205.

Senk, S.L., How well do students write geometry proofs? Mathematics Teacher, 1985. 78(6): p. 448-456.

Tall, D. (1999). The Cognitive Development of Proof Is Mathematical Proof For All or For Some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World, 4,* 117-136. Reston, Virginia NCTM. ISBN 0-87353-473-5