# Del Valor del Juego a la Esperanza Matemática: Una Mirada Alrededor de 1650

*Diego Díaz, diegoden09@gmail.com*
*Estudiante Maestría*
*Universidad del Valle-Cali*

## 1. Presentación del problema.

Se pretende mostrar mediante este trabajo, los avances que se han realizado sobre la propuesta de investigación de la Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática bajo la línea de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle. Específicamente se trata de realizar un análisis histórico epistemológico de la noción de esperanza matemática; se mostrarán cuáles fueron los elementos que posibilitaron su aparición desde una postura filosófica, el uso en los juegos de azar y finalmente se involucrarán a los principales matemáticos de la época para su constitución. En este sentido, se trabajará sobre algunos resultados originados mediante la comunicación epistolar entre Pascal y Fermat acerca del problema de los puntos y algunas proposiciones y demostraciones del libro de Huygens (1657) titulado "Libellus *The Ratiociniis in ludo aleae"*.

Se puede afirmar que la historia de la probabilidad y la estadística son aspectos que están cargados de hechos, conjeturas, paradojas y problemas desafiantes mostrando que en muchas ocasiones, la intuición, los aspectos filosóficos, teológicos, políticos y sociales han jugado un papel importante en la constitución de los objetos estocásticos. Factores como los de suerte, azar y probabilidad están inmersos en el pensamiento probabilístico y es por ello que pertenecen a objetos de naturaleza distinta de los matemáticos.

Si bien es cierto que la introducción de los objetos relacionados con la probabilidad y estadística en la escolaridad (preescolar, básica y media) es nuevo y en su gran mayoría relacionados con la Didáctica[61], se considera pertinente realizar estudios de carácter histórico-epistemológicos sobre estas nociones como preludio a un análisis didáctico posterior; la riqueza que se logra describiendo la génesis, estructuras, métodos, funciones, problemas, aspectos filosóficos, alrededor de un concepto de este tipo se torna significativamente potente y por qué no, desafiante.

En este sentido, el término esperanza matemática que se reconoce actualmente en los diferentes campos, que cumple de alguna manera con la exigencia de la sociedad para una cultura en el

[61] Véase IASE/ICOTS en http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/

pensamiento estocástico, tiene un carácter importante desde su génesis hasta nuestros días. Insistimos en que no solo es útil para la estadística, matemática o para la educación matemática, sino para el colectivo de personas que a diario se le exige comprensión en estos aspectos.

Se sabe que el término ***probabilidad*** ha estado en concordancia con el de ***esperanza*** y por ello, hay aspectos subyacentes propios de la época del siglo XVII que merecen la atención para la formulación del problema de investigación:

¿La esperanza matemática surge vía operatoria o es el resultado de un marco axiomático de las matemáticas?, ¿Qué tanto influyó el avance de las matemáticas durante el siglo XVII para el surgimiento de los conceptos tardíos probabilísticos?, ¿Por qué fue necesaria la introducción de la noción de esperanza matemática en la década de 1650 en Europa?, ¿Cómo se pueden interrelacionar los aspectos de azar, suerte y probabilidad con la esperanza matemática?, ¿Quiénes contribuyeron a la consolidación de la noción esperanza matemática en la década de 1650?

Los anteriores interrogantes convergen a la siguiente pregunta problema que será directriz para el proyecto:

*¿Cómo llegó a constituirse la noción de esperanza matemática para la justificación de ciertos eventos aleatorios en la década de 1650 y quienes fueron los precursores que posibilitaron su aparición?*

Para darle sentido a las preguntas anteriormente formuladas y en especial a la pregunta problema, se pueden identificar las siguientes hipótesis:

*$H_1$: El ingreso tardío de la Teoría de la Probabilidad en la sociedad estuvo supeditado al avance de las Matemáticas.*

*$H_2$: El surgimiento de la esperanza matemática en la década de 1650 se debe a aspectos externalistas.*

*$H_3$: Huygens fue el primer matemático en justificar la esperanza matemática para medir el valor de los juegos de azar, bajo ciertas condiciones.*

*$H_4$: La naturaleza de los objetos "probabilísticos", difieren notoriamente de los matemáticos.*

## 2. Marco teórico.

En virtud que la esperanza matemática está intrínsecamente relacionada con el concepto de *probabilidad*, y este último ha tenido una serie de análisis por filósofos de la ciencia, didactas y educadores en general, es preponderante considerar un estudio de este concepto alrededor de las "preconcepciones" que posibilitaron el surgimiento de la probabilidad, su influencia y significados permeados por el pensamiento europeo de la época, contribuyendo de este modo al análisis epistemológico alrededor de la esperanza matemática. Expresiones como suerte y azar también serán consideradas como influyentes en el cambio de un determinismo "natural", a un pensamiento en donde las leyes de la naturaleza, juegos de azar y del mundo en general pueden ser domesticadas. Siguiendo un texto de referencia para este análisis, Hacking (1995*) El surgimiento de la probabilidad: Un estudio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia estadística,* se puede afirmar que la probabilidad tiene dos enfoques bien diferenciados: el primero como creencia garantizada por la evidencia (probabilidad epistemológica) y el segundo como estabilidad de frecuencias relativas (probabilidad aleatoria). En particular en el siglo XVII, las tensiones que posibilitaron esta categorización pueden haberse originado por los siguientes aspectos no concluyentes:

a) Determinismo versus azar: se afirma que en 1660 surge el cálculo de probabilidades en Europa, sin embargo una mirada al periodo precedente, la guerra civil en Inglaterra, la guerra de los 30 años en el continente europeo, presencia una nueva preocupación a los filósofos del azar, creando de este modo el escenario perfecto para la matemática del azar (Rescher 1997). En este sentido, moralistas, teólogos y filósofos una vez que se ocuparon de estos aspectos, la tensión paso a manos de los matemáticos como intento de dominar el "azar". El capitulo VI en Rescher, trata sobre los "Filósofos del Juego" colocando en evidencia los trabajos de Gataker, Gracián, Pascal y Leibniz. De manera sintética Gataker (1574-1654) indaga el uso de la suerte en el Antiguo y Nuevo Testamento, afirma que un sorteo es un suceso meramente casual aplicado deliberadamente a la decisión de una duda. El uso de la suerte lo establece en tres aspectos denominados *divisorios, consultivos y adivinatorios,* criticando ante todo la opinión que la suerte revela a los hombres la voluntad de Dios. Gracián (1601,1658), un teólogo moralista, acogió una visión más favorable comparando la vida con los juegos de Naipes y reinterpreta las reglas del buen juego como los principios básicos de la vida. Pascal, con su fuerte influencia religiosa, teológica, filosófica y matemática, realiza la famosa *Apuesta de Pascal,* en la que haciendo uso de una lógica muy particular, demuestra la utilidad de creer en Dios con tres acepciones de lo que hoy conocemos como esperanza matemática. Finalmente Leibniz, sentía gran interés por los juegos de azar y contribuyó notablemente al cálculo de probabilidades. Sin embargo, para Leibniz no puede existir un azar real, con fundamento ontológico en un mundo donde todos los acontecimientos ya están determinados, solo hay azar en nuestras imperfecciones.

b) Teorías económicas de la sociedad: podemos afirmar que una ciencia se desarrolla debido a los problemas y necesidades que la sociedad exige o por cuestiones internas dentro de la misma ciencia. Hacking (1997), afirma que un conjunto finito de estos ejemplos, relacionados con la probabilidad pueden ser los juegos de azar-seguros de vida-pensiones en el siglo XVII, teoría de la astronomía en el siglo XVIII, la biometría y mecánica estadística en el siglo siguiente hasta llegar a la teoría de la medida. Al parecer, pensadores como Huygens, De Moivre, Gauss, Galton, Pearson, Von Mises, Kolmogorov, promovieron sus avances en medios de producción de la sociedad.

Es importante caracterizar la dualidad de la probabilidad, e intentar extrapolar estas nociones a la esperanza matemática: una esperanza matemática epistemológica y una esperanza matemática aleatoria. Lo anterior, será definitivo en la conceptualización de los objetos probabilísticos dada su naturaleza.

## 3. Metodología

Este trabajo tiene como finalidad utilizar la componente epistemológica-histórica del concepto de esperanza matemática. Se pretende conocer su naturaleza e interrelaciones de acuerdo a la forma en cómo el concepto ha surgido históricamente, así como las dificultades a las que se ha enfrentado desde su surgimiento. Lo anterior posibilitará caracterizar los elementos constituyentes alrededor de la esperanza matemática o valor del juego como se conoció inicialmente y por tanto, identificar los usos y validaciones para su utilización en los juegos de azar como el lanzamiento de dados. En este sentido, siguiendo a Campos (2004), bajo este análisis epistemológico se pretende abarcar cinco aspectos centrales para este objeto: *génesis, estructura, método, función y problemas.*

## 4. Análisis de la información.

En virtud del tipo de metodología a utilizar, la principal fuente de información es el libro de Huygens en 1657 en Holandés "*Van Rekening in Spelen Van Geluck*" y luego traducido al latín "Libellus *The Ratiociniis in ludo aleae"*. Se trata del primer libro de probabilidad impreso en donde se expone de manera elegante 14 proposiciones con sus respectivas demostraciones alrededor del concepto valor del juego, que luego se convertiría en esperanza matemática. Junto a este libro, se encuentra además otra fuente de referencia que consiste en las comunicaciones entre Pascal y Fermat alrededor del problema de los puntos, formulado por Luca Paccioli en 1494 en su obra *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita.* Actualmente se está recogiendo información de estas fuentes principales y se está elaborando el constructo para la finalidad del proyecto, analizando el tipo de método utilizado para las demostraciones, el tipo de problemas, la validación de sus argumentos.

## 5. Conclusiones.

Alrededor de estos preliminares del proyecto, podemos observar algunas generalidades (más que conclusiones definitivas), que se han encontrado con base en el libro de referencia de Ian Hacking (1995) y de Huygens (1657), detectando ante todo una dualidad necesaria alrededor del concepto de probabilidad y un método analítico para la resolución de problemas en donde interviene el azar en una serie larga de ensayos. Estos avances se pueden sintetizar en lo siguiente:

Como punto de partida ubicamos a Pascal quien teniendo en cuenta el texto de Huygens centró su objetivo en la primera aplicación del razonamiento probabilístico a problemas que no fueran de azar, avanzando de esta forma a lo que hoy se denomina *teoría de la decisión*. Su famosa apuesta de Dios fue impresa en 1670, en donde se puede afirmar la realización de mediciones numéricas de probabilidad. Con su fuerte influencia religiosa, teológica, filosófica y matemática, realiza la *Apuesta de Pascal* con estas tensiones*,* en la que haciendo uso de una lógica muy particular, demuestra la *utilidad* de creer en Dios con tres argumentos distintos, cada uno de la forma de un argumento de la teoría de la decisión.

En palabras de Hacking (1997):

> La popularidad de los *Pensamientos de Pascal,* impulsó los juegos de azar como <u>*modelo*</u> para otros problemas sobre formas de decisión en presencia de la incertidumbre. Pascal no tiene datos sobre la existencia de un Dios cristiano y de esta forma establece las tres formas de argumentos válidos: argumento de dominio, esperanza matemática y esperanza dominante. (p.85).

Es evidente la dualidad en Pascal, por un lado resolviendo el problema de los puntos (probabilidad aleatoria) y de otro lado estableciendo la utilidad de creer en un Dios cristiano (probabilidad epistemológica). En este mismo sentido, aparece Leibniz, quien inicia sus estudios de leyes desde una probabilidad epistemológica en los grados de prueba en el derecho y posteriormente conoce los trabajos de Huygens y Pascal aceptando que las matemáticas de estos cuadraban en su esquema. No solamente estos autores tenían posturas alrededor del concepto de probabilidad, también los siguientes filósofos tanto de la época como contemporáneos tenían posturas alrededor:

Condorcet sugirió *facilité* para lo aleatorio y *motif* para lo epistemológico. Poisson y Cournot establecieron *chance* y *probabilité,* Bertrand Russel atribuía “credibilidad” como lo epistemológico, Feyeraben define la opinión como la portadora de la probabilidad, Richard Von Mises asumió la probabilidad como estabilidad de las frecuencias en largos ensayos (secuencias infinitas), Kolmogorov y Per Martin-Löf estabilidad en secuencias finitas, Popper la asume como la propensión de una prueba entre varios posible. Hacking (1997).

Claramente estos cuatro últimos autores hacen referencia a una probabilidad aleatoria, atendiendo a lo fenoménico, construyendo teorías sobre lo aleatorio.

Ahora bien, ubicando a Huygens en su tratado*,* la noción de esperanza matemática es utilizada de manera precisa y única sobre el valor de los juegos de azar. Bajo la concepción de *utilidad* como veremos más adelante en el texto de Huygens, parece ser más sencilla de utilizar que la idea de probabilidad (Es más natural ver la ganancia promedio que la probabilidad). No obstante el promedio, antes de 1650, no era calculado por la mayoría de las personas y por ello, existía el problema de cuantificar esa esperanza. La correspondencia establecida entre Pascal y Fermat alrededor del problema de los puntos pudiese anticipar que ya conocían de este argumento para justificar su solución. Huygens retoma los trabajos de estos grandes de las matemáticas y realiza de manera rigurosa su tratado, estableciendo un axioma y 14 proposiciones, primero en holandés "*Van Rekening in Spelen Van Geluck*" y luego traducido al latín "Libellus *The Ratiociniis in ludo aleae"*.

Huygens necesitaba saber el valor de cualquier juego (con apuestas equivalentes), en términos de Hacking:

> Esto es, si se nos invita a jugar con un esquema dado de premios que dependen de los diversos resultados, exigimos un precio justo para aceptar la apuesta. Siglos de hábitos hacen que esta respuesta nos parezca evidente, pero no era la respuesta establecida en la época en que Huygens escribía. Por lo tanto el debía justificar la esperanza matemática. (p.119).

Se establecen así tres principios de utilidad tácitos a lo largo de su libro:

i) Los precios justos son aditivos

ii) Los billetes de loterías no son más baratos por docenas

iii) Los premios consuelos no cambian los precios justos.

Con este panorama, establece tres proposiciones que entraremos sólo a mencionar y a hacer utilidad de éstas en la demostración de la proposición iv relacionada con el problema de la división o problema de los puntos:

Sobre la mesa de juego hay una cantidad definida de dinero $t$; el valor del juego se mide entonces en las mismas unidades de $t$, de acuerdo a lo siguiente:

**Proposición I**: Sí existe igual chance de recibir $a$ y $b$, entonces el valor del juego o esperanza matemática es $(a+b)/2$

**Proposición II**: Sí existe igual chance para recibir $a,b,c$, entonces el valor del juego es $(a+b+c)/3$

**Proposición III**: Sí el número de chances que producen $a$ es $p$, y el número de chances que producen $b$ es $q$ y todos los chances tienen las mismas posibilidades entonces el valor esperado de ese juego es $(pa+qb)/(p+q)$.

Con estas tres proposiciones básicas, se hace posible resolver "todos los problemas de los juegos de azar", aplicando repetidamente su técnica y de este modo se puede percibir un aroma de recursividad en su propuesta. Veamos cómo se materializa esto en la proposición cuatro, denominado la solución al problema de los puntos, (ya resuelta por Pascal y Fermat de manera recursiva y combinatoria).

**Proposición IV**: Suponga que acepta jugar con otra persona bajo la siguiente condición: El primero que consiga ganar tres juegos, se llevará el total de la apuesta. Yo he ganado dos de los juegos y mi oponente solamente uno. Sí aceptamos retirarnos del juego por alguna razón de fuerza mayor, ¿Cómo debe ser recogida o dividida la apuesta?

Demostración: El juego es equivalente al juego de ganar 20 juegos, un jugador lleva 19 y el otro 18. Sí acepto continuar el juego y gano, gano el total de la apuesta, llámese "**a**". Sí el otro gana, quedamos con igual chance, cada uno le falta un juego. De este modo, representamos la división de la siguiente forma: f(1,2)**a**. Se divide la apuesta "**a**" entre dos y de esta forma se tienen igual chances de ganar o perder. En este punto tengo igual chance además de conseguir "**a**" ó f(1,2)**a**, *primera proposición.* De este modo, aplicando la proposición I, tenemos: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right)+\frac{1}{2}a=\frac{3}{4}a.$

Dejando como remanente para mi oponente $\frac{1}{4}$ de la apuesta. Q.E.D

Las siguientes proposiciones hasta la nueve, hace procedimientos de recursividad, utilizando los casos anteriores demostrados. Lo interesante de esta forma de demostración o justificación es que podemos inferir el tipo de "esperanza" o valor del juego en Huygens: aparentemente es de tipo aleatoria.

Algo de resaltar en Huygens y uno de los principales aportes que realiza a la probabilidad, además de los numerosos en otras disciplinas, es que en términos de James Bernoulli, surge el *método analítico de Huygens*, para juegos con un horizonte indeterminado. Utiliza el álgebra elemental y muestra cómo se pueden resolver algunos problemas de juegos con horizonte indefinido sin acudir a las series infinitas.

**Proposición X**: Para encontrar cuantos lanzamientos tengo que tomar para obtener el primer seis.

En Arbeláez & Díaz (2010) encontramos una explicación para esa época:

> Un jugador lanza un dado tantas veces sea necesario hasta obtener el primer seis. Por cada lanzamiento el casino le paga \$1. ¿Cuánto debe apostar el jugador?
>
> Sea $x$ el valor del juego antes de comenzar. El primer juego se puede ganar con probabilidad $1/6$ con su recompensa correspondiente \$1. Si no es así, con probabilidad 5/6 se tendría que volver a comenzar ahora con un premio de $x+1$. (p.5).

Sin pérdida de generalidad se tiene:

x=1(1/6)+(x+1) (5/6)

x=1/6 + (5/6) x+5/6

(1/6) x=1, de donde x=6 es el valor esperado.

Años después de la publicación del libro, surgieron ciertas dificultades como la paradoja de San Petersburgo, en la cual, se discutía sobre los precios justos en una serie infinitas de jugadas, dada la justificación del método de Huygens. Trabajos posteriores como los de Graund en 1662 posibilitaron el uso de la esperanza de vida de las personas utilizando el modelo de Huygens a los datos demográficos recogidos en tablas estadísticas. Se habla así de una primera aproximación para la intersección entre Estadística y Probabilidad en la sociedad Europea. Actualmente vemos estos conceptos en el sistema pensional, seguros de vida, o vida media de un aparato y de manera general en otros campos como herederos de la tradición de la época de Huygens.

**Bibliografía**

ARBELAEZ, D; DIAZ D. (2010). *¿Cómo se inicia el periplo del valor esperado?* Notas de clase del curso Historia de la Estadística. Universidad del Valle, programa de Estadística, Cali. Colombia.

BENNETT, D. (1993). *The development of the mathematical concept of randomness; educational implications.* Tesis doctoral. New York University.

CAMPOS, A. (2004). *Acerca de la epistemología de las matemáticas*. Memorias del *XV ENCUENTRO DE GEOMETRÍA* sus aplicaciones y III Encuentro de *ARITMÉTICA*. Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado el 20 de febrero de 2010 en http://www.sectormatematica.cl/articulos/epistemologia.pdf

CORRESPONDENCE WITH BLAISE PASCAL AND FERMAT. Materials for the History of Statistics. University of York. Recuperado el 4 de Marzo de 2010 en http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf

DATSON, L. (1998). *The Cambridge History of Seventeenth-Century Philosophy* Series vol 2. Chapter Title 31*: Probability and evidence*. Cambridge University Press, 2008.

HACKING, I. (1995). *El surgimiento de la probabilidad: un estudio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia.* Gedisa.

HALD, *A.* (1990)*. A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750.* Wiley series in Probability and Statistics.

HUYGENS, C. (1714). *Libellus The Ratiociniis in ludo aleae. The value of all the chances in Game of Fortune, English Translation 1714.* London.

RESCHER, N. (1997). *La suerte.* Capítulo VI, Los filósofos del juego. Editorial Andrés Bello.

STEMERDINK, G.J. (2009). *The Statistical work of Cristiian Huygens.* Articulo presentado en el marco de la sesión 57 del ISI, International Statistical Institute, South África.