Un ejemplo de lo que podemos hacer los profesores de matemáticas ante la llegada del EEES: iteración de punto fijo mediante animaciones.

Fernández Gutiérrez, M.J.[1], García Gonzalo, M.E.[2]
Departamento de Matemáticas. Universidad de Oviedo. España

Resumen

La adaptación de una asignatura al nuevo modelo propuesto por el EEES conlleva el hecho de tener que pensar en nuevas estrategias didácticas para facilitar el aprendizaje. Se puede proponer que los alumnos trabajen de forma guiada sobre documentos y materiales elaborados por los profesores.

En esta ponencia presentamos un material que hemos realizado para la asignatura de métodos numéricos en la E.U.I.T. Informática de Oviedo. Se desarrollan simulaciones de procesos iterativos de punto fijo, mediante animaciones en tiempo real realizadas con MATLAB.

1. El espacio europeo de educación superior

En junio de 1999, los Ministros de Educación de 29 países europeos firmaron la declaración de Bolonia, con el fin de poder disponer, en el año 2010, de un Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), esto es, de un sistema educativo de calidad que permita a Europa fomentar su crecimiento económico, su competitividad internacional y su cohesión social a través de la educación y la formación de los ciudadanos a lo largo de la vida y su movilidad. Los objetivos estratégicos del EEES son:

1. Sistema fácilmente comprensible y comparable de titulaciones.

[1]E-mail:mjfg@uniovi.es
[2]E-mail:espe@uniovi.es

2. Sistema basado en dos niveles y tres ciclos: GRADO y POSTGRADO (máster y doctorado).

3. Adopción de un sistema de acumulación y transferencia de créditos que favorezca la movilidad (créditos ECTS).

4. Promoción de la cooperación europea en materia de garantía de la calidad y desarrollo de criterios y metodologías comparables.

5. Impulso de la movilidad de estudiantes, profesores y personal administrativo de las universidades y otras instituciones de educación superior europeas.

6. Fomento de la dimensión europea en la educación superior como condición necesaria para el logro de los objetivos del EEES.

El sistema europeo de créditos (ECTS) es un sistema que permite medir el trabajo que deben realizar los estudiantes para la adquisición de los conocimientos, capacidades y destrezas necesarias para superar las distintas materias de su plan de estudios. La actividad de estudio (entre 25 y 30 horas por crédito), incluye el tiempo dedicado a clases lectivas, 2 horas de estudio, tutorías, seminarios, trabajos, prácticas o proyectos, así como las exigidas para la preparación y realización de exámenes y evaluaciones.

El objetivo de los estudios de Grado es lograr una formación académica y profesional de los estudiantes que les capacite tanto para incorporarse al ámbito laboral europeo como para proseguir su formación en el postgrado. El número total de créditos necesarios para obtener el Grado estará comprendido entre 180 y 240 créditos ECTS.

El Postgrado comprende dos ciclos:

a) Formación avanzada para la obtención del titulo de MÁSTER (60-120 créditos ECTS).

b) Formación investigadora para la obtención del titulo de DOCTOR.

Para acceder al Doctorado se requieren al menos 300 créditos de Grado y Postgrado.
Es necesario un *nuevo enfoque metodológico*, que transforme nuestro sistema educativo, basado en la “enseñanza” a otro basado en el “aprendizaje”. Este proceso de mejora debe ser interactivo y se sustenta en tres principios:

i) mayor implicación y autonomía del estudiante

ii) utilización de metodologías más activas: casos prácticos, trabajo en equipo, tutorías, seminarios, tecnologías multimedia, ...

iii) papel del profesorado, como agente creador de entornos de aprendizaje que estimulen a los alumnos.

Cada titulación debe ofrecer un perfil de egresado que se ajuste mejor a los perfiles profesionales que demanda el mercado laboral. Se trata de basar el diseño del plan de estudios en la adquisición de *competencias profesionales*, que constituirán los objetivos de aprendizaje de las asignaturas diseñadas a tal fin en el plan de estudios.
Entendemos por **Competencias Profesionales la integración de conocimientos, destrezas y actitudes que permiten el desempeño profesional de calidad**. La competencia es algo más que saber y que saber aplicar: implica una capacidad de decisión estratégica sobre cómo, cuándo y por qué utilizar un determinado conocimiento o destreza. Se distinguen dos tipos de competencias:

- Técnicas o Específicas.

- Transversales o Genéricas.

Las competencias Técnicas son aquellas propias de una profesión o ámbito de conocimiento y cada titulación tendrá las suyas.
Las competencias transversales son las relativas a aspectos de desarrollo de capacidades generales, y necesarias para el desenvolvimiento como profesional. En mayor o menor grado, estas competencias son compartidas por las distintas profesiones. Algunas de ellas podrían ser: trabajo en equipo, planificación, organización del tiempo, redacción técnica, presentación oral y habilidades comunicativas, idioma extranjero, creatividad, espíritu emprendedor, responsabilidad y ética en el trabajo, aprendizaje autodirigido, pensamiento crítico y divergente, inteligencia emocional y práctica, capacidad para adaptarse a un mundo global, etc.

2. Introducción al material realizado

En la línea de lo comentado anteriormente, sobre la utilización de metodologías más activas que faciliten el aprendizaje, presentamos una técnica del cálculo numérico, el

llamado *método de iteración de punto fijo*, utilizando los medios informáticos PowerPoint 3 y Matlab. Esta técnica se encuadra en el tema de resolución numérica de ecuaciones no lineales.
El Power Point se ha utilizado como un apoyo para escribir las fórmulas y el desarrollo matemático. El eje principal de la exposición son las gráficas y sobre todo las animaciones, ambas realizadas con Matlab, que muestran cómo evolucionan las distintas sucesiones de punto fijo hacia la solución del problema. Consideramos que en este tema en particular, las animaciones son muy importantes debido a que así se puede visualizar cómo a partir de una situación inicial parecida la evolución puede ser totalmente distinta según la función de iteración elegida.
Las animaciones dan un acceso sencillo e intuitivo a secciones del tema que habitualmente no se tratan, contribuyendo así no sólo a aclarar y fijar los conceptos habituales sino también a su ampliación y comparación con los nuevos.
Dada la sencillez y brevedad de los programas utilizados, éstos pueden ser realizados y modificados por prácticamente todos los alumnos (en nuestro caso primer curso de ingeniería técnica informática) y repetidos tantas veces como sea necesario, incluso en un ordenador con pocos requerimientos tanto de procesador como de memoria, ya que los programas ocupan muy poco espacio y generan la animación en el instante en que se corre el programa.

3. El método de iteración de punto fijo

a) Antecedentes matemáticos

La iteración de punto fijo es una técnica que se utiliza, entre otras cosas, para obtener una raíz de la ecuación $F(x) = 0$. Se comienza buscando una ecuación de la forma $x = f(x)$, de manera que cualquier solución de esta ecuación, es decir, cualquier punto fijo de f es una raíz de la ecuación $F(x) = 0$. En otras palabras, se busca una función f que verifique lo siguiente:

$$\text{Si } \alpha \in R \text{ es punto fijo de } f(\alpha = f(\alpha)) \text{ entonces } F(\alpha) = 0.$$

Toda función f que verifica lo anterior se dice que es una función de iteración asociada a F.

Ejemplo:

Las siguientes funciones son funciones de iteración asociadas a $F(x) = x^2 - x - 1$
$f_1(x) = x^2 - 1,\ f_2(x) = \sqrt{x+1},\ f_3(x) = 1 + \frac{1}{x},\ f_4(x) = x - \frac{x^2-x-1}{m} \quad m \neq 0$
Gráficamente los puntos fijos de f se corresponden con las abscisas de los puntos de corte de las gráficas de f y de la función identidad.

La iteración de punto fijo consiste en elegir un punto $x_0 \in Domf$ y construir la sucesión $\{x_n\}$ definida recursivamente por $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$. Para que este algoritmo resuelva el problema planteado hemos de comprobar que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $x_n \in Domf\ \forall n$
2. $\{x_m\} \to \alpha \in R$
3. $\alpha = f(\alpha)$

Para garantizar 1), supongamos que f esta definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ que los valores que toma la función, es decir los puntos imágenes, también pertenecen a dicho intervalo. Dicho de otra manera, $\forall x \in [a, b] \ \Rightarrow \ f(x) \in [a, b]$ y lo denotamos de la siguiente forma:

$$f : [a, b] \to [a, b]$$

Geométricamente esto significa que la gráfica de f está contenida en el cuadrado

$$[a, b] \times [a, b] = \{(x, y)/x \in [a, b], y \in [a, b]\}.$$

De esta manera si $x_0 \in [a, b] \Rightarrow x_1 = f(x_0) \in [a, b] \Rightarrow x_2 = f(x_1) \in [a, b] \Rightarrow x_3 \in [a, b]$ $\Rightarrow \ldots$
Por inducción se demuestra que $x_n \in [a, b]\ \forall n$
Veamos un resultado sobre existencia de puntos fijos.
Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ continua. Entonces f tiene al menos un punto fijo en $[a, b]$, es decir, $\exists \alpha \in [a, b]/f(\alpha) = \alpha$.

Nota.
Para comprobar si se cumple que $f : [a, b] \to [a, b]$ siendo f continua, se evalúa la función en los extremos del intervalo y en los puntos interiores que anulan a su derivada. De esta manera se obtiene el máximo y el mínimo absoluto de la función en dicho intervalo. Si tanto el máximo como el mínimo pertenecen al intervalo la condición esta verificada.

Por supuesto si la función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente es suficiente con evaluar la función en los extremos del intervalo.

Definición.
f *es contractiva* en $[a,b] \Leftrightarrow: \exists L \in [0,1)/|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,\ \forall x_1, x_2 \in [a,b]$. A L se le llama constante de contractividad.

Se verifica que si f es contractiva en $[a,b] \Rightarrow f$ es continua en $[a,b]$. Sin embargo una función puede ser contractiva en $[a,b]$ no ser derivable en todos los puntos del intervalo.

Para funciones derivables, la condición de contractividad está relacionada con el valor de la derivada y más concretamente con que la derivada sea una función acotada con cota superior menor que 1 y cota inferior mayor que -1.

Si $f : [a,b] \to R$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) se verifica que f es contractiva en $[a,b]$ constante $L \in [0,1) \Leftrightarrow |f'(x)| \leq L < 1\ \forall x \in (a,b)$.

Nótese que $|f'(x)| \leq L < 1$ equivale a que $-1 < -L \leq f'(x) \leq L < 1$. Lo ideal es elegir $L = \sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| < 1$, sup = menor de las cotas superiores (supremo).
Veamos un resultado sobre existencia y unicidad de puntos fijos.
Sea $f : [a,b] \to [a,b]$, contractiva en $[a,b]$. Entonces f tiene un único punto fijo en $[a,b]$, es decir, $\exists \alpha \in [a,b]/f(\alpha) = \alpha$ y es el único en dicho intervalo.

Nota.
Para comprobar si f es contractiva en $[a,b]$, calculamos los puntos interiores que anulan a su derivada segunda y luego evaluamos la función $|f'|$ en los extremos del intervalo y en tales puntos (si existen). Si los valores obtenidos son todos menores que uno resulta que se verifica la contractividad de f con L igual al máximo valor.

Definición (*orden de convergencia*).
Sea $\{x_n\}$ una sucesión de numeros reales convergente / $\{x_n\} \to \alpha$ y sea $e_n = x_n - \alpha$ $n \geq 0$. Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge a α con orden de convergencia al menos 1 (al menos lineal) si existe una constante $C \in (0,1)$ tal que $|e_{n+1}| \leq C|e_n|$. Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge a α con orden de convergencia al menos 2 (al menos cuadrática)

si existe $C > 0$ tal que $|e_{n+1}| \leq C|e_n|^2$. En general, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge a α con orden de convergencia al menos $p > 1$ si existe $C > 0$ tal que $|e_{n+1}| \leq C|e_n|^p$.

Observación.
Si se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = q \in (-1, 1)$ entonces el orden de convergencia es al menos 1 y si además $q \neq 0$ el orden de convergencia es exactamente 1.
Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n^2} = q$ entonces el orden de convergencia es al menos 2 y si $q \neq 0$ el orden de convergencia es exactamente 2.

Distinguiremos entre convergencia *global* y convergencia *local*. En la primera se darán condiciones para f en un intervalo $[a, b]$ bajo las cuales el algoritmo de punto fijo converge $\forall x_0 \in [a, b]$. En la local se dan condiciones mas débiles bajo las cuales el algoritmo converge siempre que el punto inicial este suficientemente próximo a la solución.

Teorema. (convergencia global y estimación del error).
Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ contractiva con constante $L \in [0, 1)$ y sea $x_0 \in [a, b]$. Entonces, la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_{n+1} = f(x_n)$ es convergente, y converge al único punto fijo α de f en $[a, b]$. Además, el orden de convergencia es al menos lineal y se tiene la siguiente estimación para el error:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \frac{L^n}{1-L}(b-a)$$

Observaciones al teorema anterior.

1. Si f es derivable con derivada continua se demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = f'(\alpha)$; en este caso si $f'(\alpha) \neq 0$ el orden de convergencia es exactamente 1.

2. Cuanto más próximo este L a cero, mas rápidamente convergerá la sucesión al punto fijo.

3. Para garantizar que el error cometido $|x_n - \alpha|$ es menor que un ε dado, es suficiente realizar n iteraciones con n verificando $\frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| < \varepsilon$, es decir:

$$n > \frac{\log \varepsilon + \log(1-L) - \log|x_1 - x_0|}{\log L}$$

4. Si f es contractiva en un intervalo $[a,b]$ existe $\alpha \in (a,b)/f(\alpha)=\alpha$, la condición $f:[a,b]\to[a,b]$, puede que no se verifique. En esta situación siempre se puede reducir el intervalo por uno de los extremos (el mas distante de α) hasta conseguir que en el nuevo intervalo se verifiquen las dos condiciones del teorema de convergencia global.

5. Si no existe ningún intervalo que contenga al punto fijo en el que f sea contractiva resulta que esta función no va a ser útil para aproximar dicho punto.

Si las condiciones del teorema anterior se debilitan, podrá tenerse convergencia, pero entonces será necesario tener un punto inicial de partida suficientemente próximo a la solución, es decir, se tendrá convergencia local.

Teorema (convergencia local).
Sea $f:[a,b]\to R$ con un punto fijo$\alpha \in (a,b)$. Se supone que f es derivable con f' continua en un entorno de α y $|f'(\alpha)|<1$. Entonces $\exists\delta>0$ tal que $\forall x_0 \in [\alpha-\delta,\alpha+\delta]$, la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_{n+1}=f(x_n)$ converge a α, al menos con orden 1.

Observación.
Si $f'(\alpha)>1$ ó $f'(\alpha)<-1$ la sucesión es divergente (salvo que $x_0=\alpha$).

Convergencia cuadrática y método de Newton.
Si f tiene derivada 2^a continua en un entorno de $\alpha/f(\alpha)=\alpha$ y $f'(\alpha)=0$ se demuestra (usando el teorema de Taylor) que el orden de convergencia es, al menos, cuadrática.
Si, además, $f''(\alpha)\neq 0$ entonces la convergencia es exactamente cuadrática.

La convergencia cuadrática es mucho más rápida que la lineal.

De manera análoga se demuestra que si f tiene derivada de orden $m \geq 1$ continua en un entorno de $\alpha/f(\alpha)=\alpha$ y $f'(\alpha)=f''(\alpha)=\ldots=f^{(m-1)}(\alpha)=0$ entonces la convergencia es, al menos, de orden m.

El método de Newton es un método iterativo de punto fijo para aproximar una raíz α de la ecuación $F(x)=0$. Partimos de un punto x_0 y determinamos x_1 como el punto de corte con el eje de abscisas de la recta tangente a la curva $y = F(x)$ en el punto $(x_0, F(x_0))$

$$\left.\begin{array}{c} F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 \end{array}\right\} \quad x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

Trazamos la recta tangente a la curva $y = F(x)$ en el punto $(x_1, F(x_1))$ y el punto de corte de de esta recta con el eje de abscisas sera el punto x_2 y así sucesivamente. Resulta el algoritmo de Newton:

$$x_0 \text{ dado, } x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \; n \geq 0$$

Por tanto la función de iteración de este algoritmo es: $f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$

Este algoritmo requiere el conocimiento de la derivada de F la cual, además, para que el algoritmo esté bien definido, no debe anularse en los puntos x_n.
Evidentemente, si α es raíz de la ecuación $F(x) = 0$ y $F'(\alpha) \neq 0$ entonces $f(\alpha) = \alpha$.
Además,

$$f'(\alpha) = 1 - \frac{[F'(\alpha)]^2 - F(\alpha)F''(\alpha)}{[F'(\alpha)]^2} = \frac{F(\alpha)F''(\alpha)}{[F'(\alpha)]^2} = 0$$

Por tanto, si α es raíz de la ecuación $F(x) = 0$ y $F'(\alpha) \neq 0$ resulta que la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$ converge localmente a α y el orden de convergencia es, al menos, cuadrática (damos por supuesto que en un entorno de α la función F tiene derivada 3^a continua).

Teorema. (convergencia global del método de Newton).
Sea F una función con derivada 2^a continua en $[a, b]$, verificando:

i) $F(a) \cdot F(b) < 0$,

ii) $F'(x) \neq 0 \; \forall x \in [a, b]$

iii) $F''(x) \geq 0$ ó $F''(x) \leq 0 \; \forall x \in [a, b]$

iv) Si $c \in \{a, b\}$ es el extremo de $[a, b]$ donde $|F'|$ es más pequeño, se tiene $\left|\frac{F(c)}{F'(c)}\right| \leq b - a$.

Entonces, $\forall x_0 \in [a, b]$ la sucesión $\{x_n\}$ generada aplicando el método de Newton converge a la única raíz de $F(x) = 0$ en (a, b).

b) Desarrollo gráfico

Se comienza con una descripción gráfica del planteamiento del problema, mostrando la diferencia entre la función F asociada a la ecuación de partida y la correspondiente función de iteración f. Se señala cómo la raíz de la ecuación coincide con el punto fijo de la función de iteración. Se describe brevemente en qué consiste el método de iteración de punto fijo y se ofrecen tanto gráfica como analíticamente distintas posibilidades de funciones de iteración para una misma ecuación.

Pero no todas las funciones de iteración son útiles para resolver el problema. Es necesario que la función de iteración genere una sucesión y que esta converja al punto fijo. Esto se expresa por medio de tres condiciones. Se van estudiando los requerimientos uno a uno y se proponen hipótesis para cada uno de ellos. Conforme establecemos hipótesis vamos viendo gráficamente como se van eliminando posibles funciones de iteración. Al final, las condiciones que ha de reunir la función de iteración se reducen a dos. Se expresa formalmente el teorema de convergencia global y de él se infieren gráficamente condiciones de convergencia local.

A continuación se ve una animación de los típicos cuatro casos (convergente/divergente, escalera/tela de araña) de sucesiones generadas por el método, resaltando la ausencia de convergencia cuando no se cumplen las condiciones de convergencia local aunque el punto inicial de la sucesión esté cerca de la solución.

En la siguiente animación se pueden ver las diferencias entre distintas velocidades de convergencia y distinto orden de convergencia. Así, se observa que para orden de convergencia uno la velocidad de convergencia aumenta al disminuir el valor absoluto de la derivada de la función de iteración en el punto fijo y como se pasa a un orden de convergencia al menos dos cuando la curva tiene tangente horizontal en el punto fijo (la derivada en el punto fijo es cero). También se aprecia que cuando la curva es plana en este punto (derivada primera y segunda cero) se pasa al orden de convergencia al menos tres. Así, a partir de una observación gráfica, se da un criterio analítico para aumentar el orden de convergencia (derivadas sucesivas de la función de iteración en el punto fijo iguales a cero).

Con las condiciones analíticas obtenidas se plantea la construcción de un método iterativo de orden dos, el de Newton-Raphson y se deduce la función de iteración del método a partir de la función correspondiente a la ecuación de partida. Nos parece más interesante en el contexto actual, la segunda opción de construcción del método que se presenta, que tiene como no, una aproximación gráfica.

La convergencia local del método de Newton-Raphson esta asegurada por la construcción del método, pero parece interesante estudiar condiciones de convergencia global. Como punto de partida se muestra en una animación como perjudica a la convergencia del método la existencia en las proximidades de la raíz de máximos, mínimos y puntos de inflexion. Esto permite motivar las tres primeras condiciones del teorema de convergencia global. La cuarta se puede justificar diciendo que puesto que estamos hablando de convergencia global todos los elementos de la sucesión han de estar dentro de un intervalo $[a, b]$ conocido. La cuarta condición esta orientada a garantizar que incluso si partimos del punto mas desfavorable del intervalo, el siguiente y todos los demás estarán también dentro de el. A continuación se demuestra analíticamente el teorema ilustrando gráficamente cada uno de los pasos de esta demostración.

Junto con las animaciones que presentan el método de Newton-Raphson con esta interpretación geométrica tradicional, es decir, con F, se presentan también las animaciones con la función de iteración correspondiente f, que permiten apreciar mejor el orden de convergencia. Esta forma de contemplar para un mismo ejemplo la sucesión utilizando F y f permite apreciar mejor el hecho siguiente: aunque en general el orden de convergencia de la sucesión generada por la función de iteración de Newton es dos, hay casos donde esto no sucede. Así, se ilustra el caso de raíces multiples, donde el orden de convergencia se convierte en uno y se ve como modificando de forma adecuada la función de iteración se recupera el orden de convergencia dos (modificación de Schroder). También se ve un caso mas favorable, donde el orden de convergencia del método de Newton es al menos tres, que es el caso en el que la raíz es un punto de inflexion con tangente no horizontal $(F(\alpha) = F''(\alpha) = 0, F'(\alpha) \neq 0)$.

Las animaciones permiten abordar la siguiente parte del tema de forma intuitiva y por analogía con el método de Newton. En el método de Newton sustituíamos en cada paso la curva correspondiente a la ecuación por la recta tangente a la curva en el punto de la sucesión (aproximación de la raíz). En el método de Euler se aproxima la curva por la parábola tangente en el punto y que tiene en dicho punto la misma curvatura (polinomio de Taylor de segundo grado). Se ve con una animación, como efectivamente este método es más rápido en su convergencia que el de Newton.

Ya de forma analítica se ven otros dos métodos de orden de convergencia tres, el de Halley y el de Chebyshev, planteados como aproximaciones del método de Euler.

Por último, como motivación para los alumnos, se ve un caso de la vida real. Se aplica la resolución de ecuaciones al cálculo de las condiciones de una hipoteca o préstamo. Se supone que partimos de un presupuesto mensual aproximado para afrontar el préstamo y se resuelve el problema tanto analítica como gráficamente con las condiciones de interés y cuota que se quiera. El resultado será el número de meses que tendremos que estar pagando dicho préstamo.

4. Conclusiones

La finalidad principal de este trabajo es mostrar la utilización de métodos informáticos sencillos y accesibles a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Supone un avance sobre el papel impreso en el sentido de que básicamente se trata de animaciones que en gran parte se explican por sí mismas. Así que no es sólo la visión de la imagen estática; a ella se añade el movimiento que permite no sólo asimilar situaciones sino también procesos. El alumno también puede actuar para modificar e incluso construir las animaciones con lo que se añade una componente activa por su parte. De esta manera, no sólo se facilita el apoyo del aprendizaje de la materia principal sino que permite el acceso intuitivo y comparado con vistas a ampliaciones de la misma.

Referencias

[1] Aubanell, A., Benseny, A. y Delshams, A. (1993). *Útiles básicos de cálculo numérico.* Labor.

[2] Hamming, R.W. (1986). *Numerical Methods for Scientists and Engineers.* Dover.

[3] Hildebrand, F.B. (1956). *Introduction to Numerical Analysis.* Dover Publications.

[4] Jaluria, Y. (1988). *Computer Methods for Engineering.* Allyn and Bacon.

[5] Pérez, C. (1996). *Matemática informatizada con MATLAB.* RA-MA.

[6] Rodríguez, R., Hernández, N. y Díaz, M. (2007). *Cómo planificar asignaturas para el aprendizaje de competencias.* Documentos ICE. U. de Oviedo.

[7] Sanz-Serna, J.M. (1998). *Diez lecciones de Cálculo Numérico.* U. de Valladolid.

[8] Viaño Rey, J.M. (1997). *Lecciones de Métodos Numéricos. Resolución de ecuaciones numéricas.* Tórculo Edicions.