El Infinito: Concepciones de los Estudiantes que Transitan del Colegio a la Universidad

Mayrely Vera P/. ; magavi03@gmail.com
Luz Dary Pinilla Cano; capidaluz@gmail.com
Solange Roa Fuentes; sroa@matematicas.uis.edu.co
Universidad Industrial de Santander; Cinvestav - IPN

1. Presentación del problema.

En el presente trabajo nos interesa principalmente determinar qué concepciones sobre el infinito han desarrollado estudiantes de último año de secundaria y estudiantes universitarios de primer año. Aunque este concepto no aparece como un contenido específico del currículo de matemáticas, sobre él se desarrollan diferentes concepciones en escenarios no escolares que de una u otra manera afectan la construcción de conceptos matemáticos relacionados con él.

Además, nos interesa confrontar las ideas que surgen cuando se habla de infinito en lo grande e infinito en lo pequeño, ya que aunque se trata de la construcción de un mismo concepto sus concepciones emergen de manera diferente en la mente de los individuos (Núñez, 1997). Lo que se puede justificar considerando que es más fácil comprender el infinito en lo grande como un proceso que continua sin parar y que no tiene fin, que el infinito en lo pequeño, en donde a pesar de conservarse el hecho de un proceso sin fin, aparece una nueva situación que sugiere que dicho proceso tiene un límite.

Nuestro análisis se reducirá a ilustrar los argumentos antes expuestos. Por una parte mediante una versión de las paradojas de Zenón, en donde se plantea la subdivisión repetida de un segmento por sus mitades; y por otra, planteando la comparación de los tamaños en algunos conjuntos.

Esto constituye una herramienta interesante para determinar cómo la mente de los estudiantes construye esta idea de infinito en lo pequeño y de qué manera ellos abordan las contradicciones que surgen alrededor del tema.

Los procesos de subdivisiones iterativas, aunque no son la única forma en la que se puede llevar a concebir el infinito en su dualidad grande-pequeño, son muy útiles, ya que presentan una estructura en donde se lleva a cabo una coordinación simultánea entre el número de divisiones del segmento (creciente) y la longitud del mismo (decreciente). Es así que "desde un punto de vista cognitivo, resulta de gran interés estudiar cómo esta compleja coordinación emerge en la actividad mental y qué formas toma a través de diferentes contextos conceptuales" (Nuñez, 1997, p. 22).

Por otro lado, abordamos esta temática teniendo en cuenta que en el contenido de los cursos de matemáticas del nivel básico en la universidad, se tratan diferentes conceptos relacionados con el infinito. Donde se asume de alguna manera que los estudiantes tienen cierta experiencia con este concepto. Por lo tanto, también es de interés determinar cuáles son sus concepciones sobre el infinito y si estas están influenciadas por las ideas intuitivas que sobre él han desarrollado los estudiantes. De manera tal que podamos determinar la manera como ellas intervienen en la construcción de conceptos matemáticos y saber cómo estas concepciones se transforman al analizar principalmente el concepto de límite.

Para abordar los argumentos tratados pretendemos principalmente dar respuesta a la siguiente pregunta: *¿Cuáles son las concepciones que sobre el infinito tienen los estudiantes al ingresar a la universidad y cómo estás evolucionan al desarrollar los cursos de cálculo I y II?*

En consecuencia, para dar respuesta a este planteamiento consideramos otros cuestionamientos que guían y enfatizan el camino a seguir, los cuales son: *¿qué ideas intuitivas desarrollan estos estudiantes sobre el infinito en escenarios no escolares?*, *¿cómo estas ideas permean su construcción del concepto en situaciones matemáticas?* Y *¿cómo el análisis de conceptos como límite genera la evolución de las concepciones de los estudiantes sobre el infinito?*

A continuación presentamos el referente teórico que fundamenta las situaciones presentadas en cada una de las etapas del trabajo.

2. Marco de referencia

El infinito ha sido un concepto que ha causado gran controversia desde mucho tiempo atrás y aún en la actualidad lo sigue haciendo. Aunque han pasado siglos desde su primera aparición existen ideas alrededor de él que no son del todo claras para la humanidad. Adicional a esto, está la manera de construir dicho concepto en la clase de matemáticas, ya que como se plantea en varios libros y textos relacionados con él, este proceso involucra evidentemente las ideas intuitivas que el individuo adquiere en ambientes no escolares y que de alguna manera parecen obstaculizar la construcción del infinito actual.

En primer lugar Fischbein (1979) considera que una intuición o en particular una idea intuitiva puede entenderse como una concepción cerrada, que por lo general se establece prematuramente. En la cual la falta de información se oculta de manera tal que la persona la entiende como coherente, completa e inmediata (Lestón, 2007).

Es cuando se ingresa a la escuela y el docente empieza a tratar de introducir temas como el de límite, que los conflictos surgen. Debido a que se da el enfrentamiento entre lo que el alumno piensa y ve en su entorno y lo que el docente pretende que se imagine y cree. Ya que evidentemente hablar de infinito implica que cada uno elabore construcciones mentales más complejas que van en contra de su intuición.

Para intentar entender el por qué de estas situaciones tomamos como fundamento la teoría de los modelos tácitos o modelos mentales que Fischbein (2001) expone, al igual que trabajos de autores muy relacionados con el tema como lo son Garbín (2005), Lestón (2007), Montoro y Scheuer (2008), entre otros. El fundamento que predomina como referente teórico de nuestro trabajo es el aporte de la investigación de Fischbein, el cual, tiene que ver con la explicación de cómo los modelos tácitos reemplazan los conceptos matemáticos; influyendo en el proceso de razonamiento del individuo, sin que este sea consciente de la forma cómo estos fueron originados y los efectos que causan sobre su pensamiento.

Es importante aclarar que nuestro interés de trabajar con jóvenes que se encuentran en la etapa de transición del colegio a la universidad, nace del hecho que generalmente el concepto de infinito aparece en los programas curriculares en los cursos de cálculo, cuando los estudiantes deben enfrentarse con los conceptos de límite, asíntotas de funciones racionales, sucesiones infinitas y series e integrales impropias (Roa, 2008). Es decir, en el bachillerato este concepto no pasa de ser concebido como algo que no tiene fin, que no se puede contar o que no se agota, a ser un tema matemático más fuerte sobre el que se desarrollan varias teorías.

En cuanto a la construcción de lo infinito en lo pequeño basada en paradojas, Núñez (1997) plantea que la idea de iteración o subdivisión es un interesante punto de partida para estudiar los procesos cognitivos subyacentes a la noción de infinito, ya que en ellos se pone en evidencia de qué manera la concepción de ciertos conceptos emerge en nuestras mentes. Igualmente Núñez considera que el pensamiento abstracto hace parte de una dimensión de la actividad mental humana, la cual no está basada en la experiencia directa con lo que nos rodea. Es decir, necesita que el individuo tenga la capacidad de desprenderse un poco de su entorno físico, para considerar elementos que aunque no los puede tocar ni ver, pueden ser concebidos en su mente.

En concordancia, Garbín (2005) aborda la misma cuestión sobre la que se ha venido hablando del infinito en lo grande y el infinito en lo pequeño, o dicho en otras palabras la dualidad potencial-actual del concepto, desde un trabajo hecho con estudiantes que han tenido conocimientos previos de cálculo diferencial y en algunos casos integral. La cuestión para ella consiste en ver cuál es la posible influencia de los lenguajes matemáticos en la concepción del infinito actual y en las inconsistencias de los alumnos. Dichos lenguajes matemáticos corresponden a las expresiones verbales, geométricas, gráficas, algebraicas y analíticas que sobre determinado concepto matemático puedan surgir.

Con base en los aspectos que acabamos de mencionar, a continuación presentamos los principales aspectos metodológicos de este trabajo.

3. Metodología

Para lograr nuestros objetivos nos basamos principalmente por la teoría descrita en la sección anterior, la cual permite el desarrollo de las preguntas planteadas, al igual que nos guía para encontrar los aspectos más importantes que fundamentan la metodología que seguimos durante la realización de este proyecto.

En su desarrollo, consideramos que lo más conveniente para abordar toda la temática ya expuesta, es dividir la metodología en dos fases, pues esto permite llevar un orden en la recolección de los datos, su análisis y las conclusiones que de ellos emerjan.

A continuación se describimos dichas fases:

Fase uno: Diagnóstico de las ideas intuitivas de los estudiantes.

Para detectar las ideas que sobre el infinito han desarrollado los estudiantes aplicamos lo que denominamos *"prueba piloto"* (ver anexo), la cual consistió en un diagnóstico dividido en dos partes. Una compuesta por cuatro ítems, en donde el contenido de cada uno tiene inmerso el infinito en su dualidad potencial-actual. La segunda parte se basa en la paradoja del Hotel de Hilbert, en la cual se presentan dos situaciones que conducen a una contradicción e involucran las posibles relaciones que se pueden establecer entre lo infinito y lo finito, dependiendo de las consideraciones de cada uno.

La prueba piloto fue aplicada a 42 estudiantes de undécimo grado y 40 de un curso de cálculo II. En esta fase se pretendió detectar qué ideas han construido a lo largo de su vida (escolar y no escolar) en cuanto al infinito, cuáles han modificado y cuáles aún prevalecen. De esta manera, estas ideas las relacionaremos con las teorías estudiadas y esperamos demostrar o refutar las hipótesis ya expuestas. Con base en el análisis realizado sobre los resultados de esta fase, escogimos 4 estudiantes dos de cada grupo para participar en la segunda fase. Principalmente nos interesamos por aquellos estudiantes que mostraban cierto nivel de facilidad para expresar sus ideas.

Fase dos: Desarrollo de la entrevista. Con los estudiantes seleccionados en la fase anterior desarrollamos entrevistas didácticas, que consisten fundamentalmente en un diálogo entre el estudiante y el entrevistador. En donde el entrevistador con base en un análisis a priori analiza las posibles soluciones de los estudiantes y está preparado para refutar o apoyar sus argumentos de tal manera que durante la aplicación del instrumento el estudiante puede analizar aspectos de las situaciones que no son evidentes para él inicialmente.

Este tipo de entrevistas son video grabadas y luego transcritas para analizar con detalle los razonamientos que sobre el concepto esperamos se generen. Los resultados se verán cuando al trascribir cada una de las entrevistas logremos identificar qué modelos subyacen en la mente de los alumnos, qué concepciones intuitivas prevalecen y cuáles se han modificado con la aparición de nuevos conceptos matemáticos.

4. Análisis de datos

El análisis de datos al igual que la metodología se estructuraron en dos etapas, una primera en donde se consideraron los resultados de la prueba piloto y en la cual se escogieron los estudiantes con quienes posteriormente realizamos las entrevistas cuyos datos serán analizados en una segunda etapa.

A grandes rasgos este análisis consistió en estudiar cada una de las respuestas de los estudiantes, encontrar similitudes, diferencias y contradicciones entre los dos grupos y mostrar aquellas más relevantes que pueden ser sustentadas con nuestro marco teórico. Vale la pena mencionar, que el análisis a posteriori se basa en un análisis a priori que se fundamenta en los principales elementos que ofrece el marco presentado.

Análisis de datos de la prueba piloto. Para iniciar con el análisis como primera medida se consideró el ejercicio sobre una versión de la paradoja de Zenón. Inicialmente se presentó contextualizado en una situación de subdivisiones de un segmento y más adelante se mostró la suma de los términos que aparecían al hacer las iteraciones, pidiéndoles a los estudiantes que hallaran el resultado (ver anexo, problema 1).

De esta manera los resultados de los estudiantes para la primera situación, tanto en la universidad como en el colegio reflejaron tres tipos de respuestas, una en donde se afirmaba que el móvil si llega, otra en donde se afirmaba que el móvil no llega y una última en donde los estudiantes evidenciaron las contradicciones que la situación generaba en sus razonamientos.

Sin embargo, en este ejercicio prevaleció la idea de infinito como un proceso que está en construcción y que no termina, una idea puramente potencial. Esto reafirma que tal como lo muestran la historia de la matemática y algunos estudios en el desarrollo cognitivo del pensamiento matemático, el infinito en lo pequeño (involucrado en subdivisiones iterativas) ha sido mucho más controvertido y esquivo que el infinito en lo grande (Núñez 1997). Como lo explica Núñez, en esta situación hay dos procesos que se iteran simultáneamente el número de pasos que debe realizarse y la distancia que cada paso recorre; donde mientras el número de pasos aumenta (proceso divergente), la distancia cubierta por ellos disminuye (proceso convergente). Sumado a esto los procesos asignan atributos diferentes uno de cardinalidad y otro de espacio. La coordinación de estos procesos requiere de un análisis cognitivo complejo, para el cual los estudiantes parecen no estar preparados.

Para la parte de la suma de la serie (ver anexo), aunque no se esperaba, en los estudiantes universitarios se dieron casos en donde sumaron los valores presentado sin tener en cuenta los puntos suspensivos, tomando esta como finita. Es decir, no tuvieron en cuenta la infinitud que esta presenta. Para dar una explicación Garbín (2005) menciona que situaciones de este tipo se presentan cuando los esquemas finitos prevalecen en los estudiantes, a pesar de que los ejercicios sean representados de una manera infinita.

Si comparamos las respuestas de los estudiantes del colegio con las de la universidad, nos damos cuenta que no hay un cambio significativo. Es decir, a pesar que los jóvenes del curso de cálculo II utilizan términos matemáticos más avanzados la esencia en sus respuestas refleja que aún el infinito no habita en sus mentes de una manera clara.

En cuanto a las ideas intuitivas, notamos que aunque algunos estudiantes consideran el concepto de límite en estas situaciones, la idea de un infinito en crecimiento formado a lo largo de su vida y la percepción visual de las situaciones permean su mente causando contradicciones en sus respuestas.

> *"No es posible, porque entre el punto A y el punto B hay infinitos puntos, así que por más que se acerque, realmente nunca va a ser el punto B exactamente, va a llegar a ser muy cercano. Sin embargo, si el automóvil está en constante movimiento o sea de que llega al punto B obvio que llega, pero si analizamos esto por puntos medios matemáticamente diríamos que no, ya que entre estos dos puntos hay infinitos puntos" (Estudiante calculo II)*

Para el caso de los ejercicios de la prueba piloto en donde la situación requería comparar el número de elementos de ciertos conjuntos (ver anexo, el conjunto de los números pares, el conjunto de números impares, el conjunto de puntos de segmentos diferentes, etc.). Muchos de los estudiantes coincidieron en afirmar que todos los conjuntos tenían el mismo número de elementos, sin embargo justificaban este hecho con el argumento que la característica de todos estos conjuntos es que se podían agregar más y más elementos sin llegar a un final.

En estos resultados nuevamente las ideas intuitivas prevalecen, púes según Garbín (2005) el infinito potencial, se considera como una idea intuitiva, mientras que el infinito actual es una noción contra intuitiva (Garbín y Azcarate, 2001. Citado en Garbín, 2005), siendo precisamente esta la razón que causa toda la controversia existente alrededor del tema.

Adicional a esto surgieron varios cuestionamientos por parte de los estudiantes, ya que en sus respuestas manifestaron preguntas como: ¿hay infinitos más grandes que otros? Veamos:

> *"Cualquier segmento de recta está formado por una sucesión infinita de puntos. Partiendo de esto digo que el segmento $\overline{AB}$ tiene ∞ puntos y el segmento $\overline{CD}$ tiene ∞ puntos; todos tienen el mismo número de puntos" (Estudiante Cálculo II).*

> *"Si es posible pero se emplea una problemática, que el hotel tendría un infinito+1 de habitantes"; "El infinito, no es tan infinito, pero es infinito"; "Que el número infinito se le es posible agregar otro número infinito" (Estudiante Undécimo).*

En consecuencia aunque la mayoría de los estudiantes coincidieron en decir que todos los conjuntos tienen el mismo número de elementos, justificaron sus respuestas considerando que esta igualdad en el número de elementos se debía a que todos los conjuntos eran infinitos.

Cabe destacar una situación en donde unos pocos estudiantes incluyendo del curso de cálculo II, pasaron por alto los puntos suspensivos de algunos ejercicios que sugerían el conjunto continuaba. Ya que contaron los elementos como si se tratara de un conjunto finito. Hecho que confirma como la percepción finita de las cosas se encuentra arraigada en sus mentes.

Estos aspectos nos permitieron analizar y clasificar las respuestas de los estudiantes, para de esta manera seleccionar aquellos que mostraron una noción más estructurada del concepto, matemáticamente hablando, con ellos continuamos en la segunda fase de la metodología.

5. Conclusiones

Los resultados encontrados en la prueba piloto de los estudiantes de undécimo grado y del curso de cálculo II nos permitieron señalar principalmente la importancia de generar la reflexión por parte de los maestros, sobre la necesidad de analizar las concepciones que sobre el infinito tienen los estudiantes.

Además es necesario tener en cuenta cómo las ideas intuitivas adquiridas en ambientes no escolares permean la construcción de conceptos matemáticos avanzados. Aunque los resultados expuestos hasta ahora se basan sólo en la prueba piloto esperamos que los resultados de nuestro trabajo, después de la aplicación de la entrevista, nos permitan proponer aspectos metodológicos y didácticos que promuevan la construcción de concepciones específicas sobre el infinito, para de esta manera facilitar la construcción de conceptos matemáticos avanzados relacionados con él.

Bibliografía

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinty. *Educational Studies in Mathematics*, **23**(48), 309- 329.

Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 3 – 40.

Garbin, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, **8** (2), 169-193.

Lestón, P. (2007). Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares. Tesis de Maestría, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. México.

Roa, S. (2008). El infinito: Un análisis cognitivo de niños talento en matemáticas. Proyecto doctoral. Cinvestav – IPN, México.

Montoro, V. y Scheuer, N. (2008). Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios. *Epsilon*, 20 (3), 435-447.

Arrigo, G. (1998). Lo veo, pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación Matemática*, **11** (1), 5-24.

Garbin, S. (2005). Ideas del infinito, percepciones y concepciones en distintos contextos: el caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo. *Investigación Didáctica*, **23** (1), 61-80.

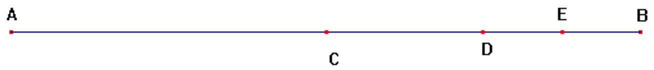
Nuñez, R. (1997). Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: Paradojas y espacios consensuales. *Educación Matemática*, **9** (1), 20-32.

ANEXO

PRUEBA PILOTO

1. *Analiza la siguiente situación y responde:*

   a) *Un móvil viaja del punto A al punto B y para esto tiene que pasar por el punto C, que resulta ser el punto medio entre A y B. Luego debe pasar por el punto D que resulta ser el punto medio entre C y B. Luego por el punto E, que es el punto medio entre D y B; y así sucesivamente debe ir pasando por el punto medio de cada segmento resultante. Siguiendo este proceso, ¿es posible que en algún momento el móvil alcance el punto B? Justifica ampliamente tu respuesta.*



   b) *Dada las siguientes figuras, analiza cada pregunta planteada y justifica ampliamente tus respuestas.*

      En la figura1, ¿El segmento AB representa el mismo número de puntos que el segmento CD?

      En la figura 2, ¿El segmento AB representa el mismo número de puntos que el segmento CD? y ¿El segmento AB representa el mismo número de puntos que el segmento EF?

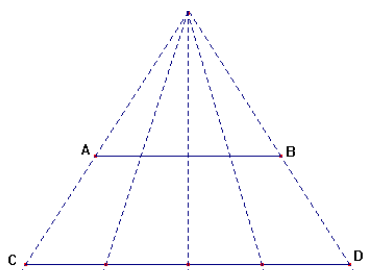


Figura 1.

Figura 2.

2. *Compara los siguientes conjuntos y señala cuáles tienen la misma cantidad de elementos y cuáles no; justifica ampliamente tus respuestas:*

3. Considera la siguiente suma:

¿Cuál crees que es su resultado? Justifica tu respuesta

4. ¿Cuáles cuestiones a lo largo de tu vida se relacionan con el infinito? ¿Por qué?

5. Lee atentamente la siguiente situación:

El Hotel de Hilbert

I. *Imaginen un hotel con un número infinito de cuartos, donde todos están ocupados. A dicho hotel viene un nuevo huésped y pide una habitación. "¡Por supuesto!" -exclama el propietario; y traslada la persona que ocupa anteriormente el cuarto N° 1 al cuarto N° 2, el ocupante del cuarto N° 2 al N° 3, el ocupante del cuarto N° 3 al N° 4 y así sucesivamente. El nuevo huésped recibe la habitación N° 1, que queda libre como consecuencia de los traslados.*

II. *Imaginemos ahora un hotel con un número infinito de cuartos, todos ocupados, y un número infinito de nuevos huéspedes que vienen y piden habitaciones. "Sin duda, caballeros -dice el propietario-; esperen por favor un minuto". El propietario pasa al ocupante del cuarto N° 1 al N° 2, el del N° 2 al N° 4, el del N° 3 al N° 6 y así sucesivamente… Ahora todos los cuartos con número impar quedan desocupados y todos los nuevos huéspedes se pueden acomodar fácilmente en ellos.*

Analicen para cada caso las siguientes preguntas:

¿Es posible que el propietario del Hotel acomode a los nuevos huéspedes?

¿Podrían plantear otra forma de acomodar a los nuevos huéspedes?

Escriban todas las ideas o razonamientos que desarrollen sobre esta situación.