

APORTES DE LA PSICOLOGÍA DEL PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LEONOR CAMARGO

La psicología cognitiva ha desarrollado un amplio trabajo investigativo en el campo de la adquisición de conocimiento matemático y del desempeño en resolución de problemas. Este artículo pretende realizar una revisión de antecedentes investigativos en la línea del procesamiento de información, que permitan identificar elementos básicos para explicar las diferencias en la manera como los individuos procesan la información matemática. El hilo conductor para la presentación de los estudios realizados será la categorización de Pressley para el "buen pensador", modelo general que consta de cinco componentes básicos: el conocimiento base, la capacidad de la memoria operativa, el conocimiento estratégico, la motivación y las estrategias metacognitivas.

INTRODUCCIÓN

Se ha preguntado usted alguna vez, ¿por qué algunas personas resuelven determinadas tareas mejor que otras personas? Esta es una de las preguntas fundamentales de quienes trabajan en psicología cognitiva, psicología diferencial y en general en aquellas ciencias interesadas en la cognición humana.

En la historia de la psicología se constató desde muy pronto que las personas diferían unas de otras en relación con el modo de reaccionar en determinadas situaciones, en la manera de interactuar con otras personas, en sus gustos y disgustos, y en muchos otros aspectos. En el ámbito de la enseñanza, se tiene conocimiento, desde hace mucho tiempo, de las grandes diferencias que se presentan entre los estudiantes en cuanto a su rapidez y forma de aprendizaje. Es evidente que algunos alumnos son capaces de saltar a veces requisitos previos y aprender conductas complejas sin practicar explícitamente las habilidades que, se supone, son requisitos de dichas conductas. Otros, por el contrario, acceden a conocimientos complejos sólo a través de secuencias de tareas organizadas en orden de dificultad. En intentos por explicar estas diferencias, investigadores en el área han formulado hipótesis

acerca de la contribución de factores como la motivación por aprender, o el nivel de conocimiento previo sobre el tema, para el establecimiento de patrones diferenciales de acceso al conocimiento (Resnick y Ford, 1991).

Las investigaciones realizadas desde principios de siglo evidencian una disyuntiva en el sentido de abordar el estudio de estas diferencias a partir de capacidades cognitivas generales, o a partir de capacidades específicas relacionadas con tareas concretas. Spearman (1927, citado en Mayer, 1985), por ejemplo, propuso la existencia de dos tipos de factores: un factor general (*g*) y un conjunto de factores específicos (*s*). La capacidad representada por el factor general permite la realización de todas las tareas intelectuales y explica puntuaciones similares en las pruebas de desempeño aplicadas a una persona; las capacidades representadas por los factores específicos hacen referencia a tareas concretas, y explican variaciones en las puntuaciones de una misma persona en diferentes pruebas. Según Spearman, las diferencias individuales observadas en el factor *g* pueden entenderse como diferencias en cantidad de “energía mental” que las personas utilizan en la resolución de tareas intelectuales, o como diferencias en la capacidad para utilizar tres “principios cualitativos de cognición”: 1) aprehensión de la experiencia (interiorización, percepción, comprensión), 2) deducción de relaciones (inferencia de principios) y 3) deducción de correlaciones (aplicación de principios). Thurstone (1938, citado en Mayer, 1985), en un estudio posterior, propuso que la inteligencia está comprendida por siete capacidades mentales primarias: 1) comprensión verbal, 2) fluidez verbal, 3) sentido numérico (que en esa época se medía mediante problemas aritméticos verbales en los que se hacía énfasis en el cálculo y el razonamiento), 4) visualización espacial (que solía medirse con pruebas de manipulación mental de símbolos y figuras geométricas), 5) memoria, 6) razonamiento y 7) velocidad de percepción.

Teorías más elaboradas, como la del análisis factorial de Guilford (1959, citado en Mayer, 1985), se encaminaron posteriormente por el mismo rumbo y han mantenido hasta nuestros días una tensión entre realizar estudios de capacidades generales o pruebas de habilidades específicas.

En general, las investigaciones en el campo de la educación matemática siguieron una progresión similar de ideas y metodologías. Entre 1960 y 1970, en los Estados Unidos se realizaron estudios de factores analíticos y comparaciones estadísticas para identificar diferencias en “pensamiento” y “aprendizaje”, en el contexto de la resolución de problemas. Sin embargo, para poder estudiar un problema, muchos investigadores se centraron en aquellos similares a los rompecabezas, del tipo “torre de Hanoi”, o “cazadores y caníbales”, en donde es relativamente fácil determinar un estado inicial y uno final bien definidos, y un pequeño grupo de operaciones claramente

delimitadas (“movidas”) que pueden ir transformando sucesivamente el estado inicial en el estado final. Estas investigaciones, sin embargo, causaron frustración entre los investigadores por las limitadas contribuciones al estudio de las diferencias individuales en habilidad matemática. Kilpatrick (1978, citado en Schoenfeld, 1992), por ejemplo, comparó los métodos investigativos que prevalecían en los Estados Unidos con las investigaciones que simultáneamente estaban realizando Krutetskii y sus colaboradores en la Unión Soviética, que eran menos rigurosas y se centraban en aspectos concretos del pensamiento matemático como la determinación de modelos de competencia para la resolución de problemas aritméticos y algebraicos.

Con el advenimiento de la psicología del procesamiento de la información, se han proporcionado más y mejores respuestas a estos interrogantes que intentos realizados desde otras teorías psicológicas, incluidas las teorías fundamentadas en el análisis del comportamiento y la teoría piagetiana. Sin embargo, permanece la disyuntiva sobre cuál es el mejor camino para abordar estos estudios de competencia cognitiva. Algunos autores señalan que la naturaleza de la tarea determina su éxito y esto ha significado para la psicología cognitiva un énfasis en el estudio de tareas específicas, conocido como el análisis de tareas. En otros casos, se plantea la posibilidad de reconocer características individuales de tipo general, que distingan a las personas “cognitivamente eficientes” de aquellas que muestran menores niveles de logro.

En alguna medida, estos dos puntos de vista pueden ser complementarios. La intención de este texto es presentar un panorama general que muestre el aporte de la psicología del procesamiento de la información al campo de la educación matemática y algunos mecanismos individuales que han sido propuestos como determinantes de la competencia cognitiva matemática, cada uno de los cuales focaliza componentes específicos y contempla competencias cognitivas diferentes. El hilo conductor de la presentación será el esquema organizativo general planteado por Michell Pressley (1994) en su exposición del “modelo del buen procesador de información”.

Antes de abordar el estudio de los componentes particulares del modelo, realizaremos una breve explicación del modelo de arquitectura de memoria, propuesto por los psicólogos que se orientan hacia los sistemas generales de procesamiento de la información simbólica, con la idea de aportar al lector un marco general que le permita fluidez en la comprensión de los componentes del modelo.

PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Las investigaciones de los últimos 25 años se han centrado en la pregunta sobre cómo se organiza la información contenida en la “cabeza” y la manera como se accede a ella. La tesis central de la psicología del procesamiento de la información es que los seres humanos somos procesadores de información y que nuestra mente construye representaciones simbólicas del mundo. De acuerdo con este punto de vista, el pensamiento consiste en las operaciones mentales sobre estas representaciones. Las representaciones son procesadas y transformadas en otras, en un período determinado de tiempo, por lo que es posible identificar niveles de complejidad de una tarea por medio de la medición de tiempos de respuesta de las subtareas que la componen.

La metáfora del cerebro como un computador proporciona una imagen de la forma como los psicólogos del procesamiento de la información resuelven estos interrogantes. De acuerdo con este modelo, en todo sistema cognitivo puede identificarse una serie de bloques de memoria, concebidos como espacios en los que se almacena cierta cantidad de información durante un período variable de tiempo. Los modelos más comunes para la descripción de la estructura de la memoria diferencian memorias de tipo “sensorial”, “de corto plazo” y “de largo plazo” (ver Figura N° 1, tomada de Schoenfeld (1992)).

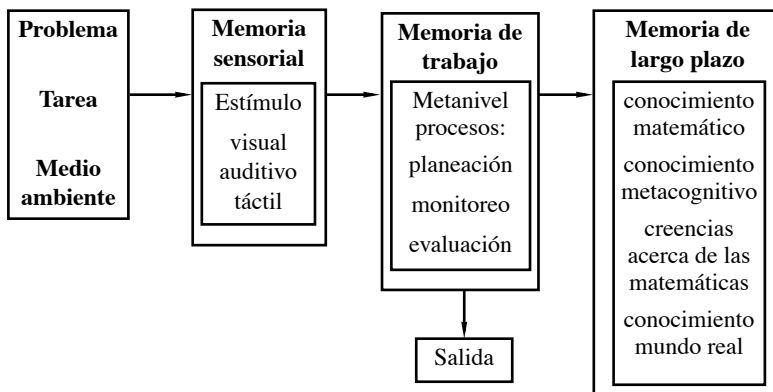


Figura N° 1. Modelo de Silver para la estructura de la memoria

La idea central es que los humanos comienzan su procesamiento de la información registrando las experiencias sensoriales que reciben del medio. Estos estímulos son almacenados en la memoria “sensorial” si han estado en

el ambiente durante un período mínimo de tiempo. Dada la gran cantidad de información que es captada por los órganos de los sentidos en un momento cualquiera de tiempo, usualmente se asume que el almacén sensorial tiene una capacidad virtualmente infinita para el almacenamiento de la información. Esta extraordinaria capacidad está en necesaria consonancia con los muy breves tiempos en que la información puede ser mantenida en el sistema (no mayores de dos segundos, según el sentido comprometido). Después de este tiempo, la información se pierde por desvanecimiento temporal (Mayer, 1985).

Este proceso de pérdida de la información puede evitarse por medio del desencadenamiento de procesos de atención, a través de los cuales la información presente en el almacén sensorial puede ser trasladada a un segundo bloque de memoria, la memoria a “corto plazo”. Lo que se sabe de la capacidad de la memoria a corto plazo ha quedado ligado al artículo clásico de G.A. Miller (1956). De acuerdo con este autor, la memoria a corto plazo se limita a conservar hasta siete unidades aisladas o paquetes de información conocidas como *chunks*¹. Los *chunks* contienen la información activa en el momento de realizar operaciones mentales. La información presente en algún momento en la memoria a corto plazo puede perderse por la entrada de nueva información a este espacio de memoria. En ausencia de repaso, la información presente es desplazada de este bloque de memoria por la nueva información recibida.

El lugar de almacenamiento de toda la información previamente codificada, es la memoria a “largo plazo”. Dada la enorme magnitud de la memoria humana, la capacidad de la memoria de largo plazo es considerada por los teóricos como virtualmente ilimitada. Se considera también que la información allí almacenada se retiene de forma permanente, si bien en muchos casos no puede ser hallada (es olvidada) por su escaso vínculo con la señal estímulo que intenta evocarla.

Uno de los dominios en los que se ha explorado el conocimiento base contenido en la memoria a largo plazo es el del ajedrez. De Groot (1965, citado en Schoenfeld, 1992), exploró la competencia en ajedrez y encontró que la diferencia entre expertos y novicios radicaba básicamente en la cantidad de configuraciones del tablero que se tenían almacenadas. De Groot llegó a predecir que se necesitaban por lo menos 50.000 tableros de ajedrez para ser considerado experto en este juego.

Son muchas las versiones sobre cómo está organizado el conocimiento en la memoria a largo plazo, pero existe un consenso acerca de que esta or-

1. En el artículo se utiliza el término *chunk* para hacer referencia al “empaquetamiento” de la información por bloques y la expresión *chunking* para denominar el proceso de construcción de estos bloques.

ganización difiere en mucho del orden lexicográfico de un diccionario, por ejemplo. Se está de acuerdo en que el conocimiento está organizado a través de estructuras específicas, como las redes semánticas o los esquemas (Resnick y Ford, 1991; Hiebert y Carpenter, Cuadro N° 1 1992).

Con este marco general pasamos ahora a desarrollar el modelo al que queremos hacer referencia: el modelo del “buen procesador de información”.

MODELO DEL BUEN PROCESADOR

Bajo el supuesto de que la organización “arquitectónica” de la mente obedece a la estructura que se ha explicado anteriormente, la idea central es identificar qué elementos hacen diferente la manera de procesar la información entre los individuos.

Pressley (1994) presenta, en su modelo del “buen pensador” cinco factores (Cuadro N° 1).

Conocimiento base. Una buena cantidad de conocimientos base de un dominio específico, almacenados en la memoria a largo plazo, permite un pensamiento más acertado y efectivo.

Capacidad operativa. La capacidad de procesamiento de la memoria a corto plazo es esencial para un procesamiento efectivo.

Conocimiento estratégico. Un “buen pensador” es más estratégico que un pensador menos competente.

Metacognición. La metacognición es un determinante crítico del buen pensamiento.

Motivación. La motivación es un factor determinante de la competencia académica.

Cuadro N° 1. Modelo del “buen procesador” de Pressley

La integración de estos cinco componentes es de vital importancia para un pensamiento efectivo. Muchas de las investigaciones experimentales de Pressley han estado ligadas a la intención de probar experimentalmente este hecho. Según el autor, no sólo el estilo personal de procesamiento, sino el momento y la tarea en sí, determinan la mayor o menor influencia de algunos de estos componentes sobre la tarea cognitiva: algunas veces el procesamiento estratégico será más prominente que los otros; en otras oportunidades, relacionadas con nuevo contenido declarativo, será el conocimiento base que tenga la persona el que influya más; en otras ocasiones,

lo fundamental será la reflexión sobre qué conoce y cómo lo conoció en situaciones pasadas; y en otras circunstancias, la motivación por la tarea será el determinante.

A continuación, realizaremos una revisión de algunos de los antecedentes investigativos en la línea del procesamiento diferencial específico de las matemáticas, atendiendo a cada uno de los componentes del modelo.

COMPETENCIA COGNITIVA EN MATEMÁTICAS

Conocimiento base

Parece evidente que la cantidad de conocimientos que se tenga sobre un dominio específico permite un mejor desempeño. Cuando nos encontramos con una situación que implica un manejo matemático para interpretar o resolver problemas, necesitamos hacer uso de la información relevante que poseemos. Dentro de esta información se incluyen los conocimientos formales e intuitivos acerca del dominio: hechos, definiciones, procedimientos algorítmicos, rutinas, e incluso, conocimientos acerca de las reglas del discurso en el dominio dado. Cabe resaltar, sin embargo, que una cosa es tener mucha información y otra tenerla bien organizada.

Para responder a la pregunta ¿cómo está organizado el contenido en la memoria? Hinsley, Hayes y Simon (1977, citados en Schoenfeld, 1992) realizaron un estudio en el que leían a un grupo de personas las primeras frases de problemas algebraicos expresados en palabras y les pedían que los clasificaran, dijeran qué información esperaban que les proporcionara y lo que posiblemente se les preguntaría en ellos. Después de escuchar las primeras cinco palabras del enunciado de un problema, “En un río, un bote...” un sujeto dijo: “Este es uno de esos problemas de viajes a favor y en contra de la corriente. Usted tiene que comparar los tiempos del viaje, o, si el tiempo es constante, tocará hallar la distancia...”. Otro sujeto, al escuchar las cinco palabras de un problema sobre triángulos dijo: “Esto puede ser algo acerca de a qué distancia está de la meta,... usando el teorema de Pitágoras”. De este estudio, Hinsley, Hayes y Simon concluyeron que la gente categoriza los problemas en tipos aunque no se haga una formulación completa de ellos, siempre y cuando el problema corresponda con un “esquema” que tengan almacenado. Así, al momento de leer un problema, el esquema se activará antes de terminarse la enunciación del mismo, y condicionará las acciones que se emprendan para resolverlo. La organización de un esquema en la memoria se caracteriza por configurar los contenidos en unidades o agrupaciones de carácter holístico, que se activan al acceder a uno de sus componentes. Los contenidos dentro de cada unidad responden a una ordenación de carác-

ter temporal y están agrupados en subunidades interrelacionadas; las unidades se ajustan a una estructura jerárquica y secuencial.

A manera de ejemplo, presentamos la propuesta de estructura semántica de Greeno (1977, citado en Resnick y Ford, 1991) para las relaciones entre las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Greeno plantea que inicialmente, en los niños, la estructura total del esquema de “operación aritmética” podía estar desarticulada por no conocerse todavía las relaciones inversas entre suma y resta o multiplicación y división, o los objetivos mismos de la operación. Al ir aumentando el conocimiento conceptual de la aritmética irá creciendo el número de relaciones de unión en la representación estructural y sólo se añadirán unas pocas unidades más. Según Greeno, un mayor aprendizaje suele suponer una mayor estructuración de conocimiento, más que el aumento de unidades de información en el sistema. Entre más completa una estructura debería ser más sencilla porque la adquisición de mayor información debe hacer que las mismas unidades funcionen en varias estructuras y no se repitan.

En resumen, los trabajos de investigación sobre el conocimiento matemático base muestran la gran importancia de éste en la habilidad matemática. Parece ser que la eficiencia en varios dominios depende de tener acceso a un gran número de esquemas organizativos de conocimiento en la memoria a largo plazo. A medida que las personas recuperan varias configuraciones se van estableciendo nuevas conexiones que disminuyen cada vez más el tiempo de recuperación en otros momentos.

Capacidad operativa

Las características ya explicadas de la memoria a corto plazo producen serias limitaciones en la cantidad de procesos mentales que la gente puede realizar. La operación de *chunking*, por la cual se pueden componer entidades para trabajar por bloques en la memoria a corto plazo, facilita en algún grado el proceso. Intente, por ejemplo, memorizar la serie numérica: 1491625364964. Este experimento fue diseñado por Katona (1967, citado en Resnick y Ford, 1991), para estudiar la efectividad en el proceso de memorización. Encontró que los sujetos que organizaban la información en paquetes obtenían mejores resultados que los que se dedicaban a repetir varias veces la serie. (¿Encontró usted una forma sencilla de organización que le permita recordar esta serie cada vez que la necesite?)

En el mismo sentido, se producen serios problemas cuando la gente trata de activar simultáneamente múltiples ideas en la mente, como cuando se está resolviendo un problema, o incluso en la resolución de ejercicios sencillos como “ $31/2 + 81/4 = ?$ ”. Si la memoria de trabajo dedica espacio a la realización de cálculos como 8×4 , 2×3 , o, a recordar algoritmos simples

como la forma de reducir fracciones a común denominador, es probable que las funciones de memoria para recordar en qué paso del procedimiento se va y cuáles son los cálculos intermedios (si la operación se hace sin papel y lápiz) sufran grandes interferencias. Lo anterior justifica las prácticas de automatismo de las respuestas en ejercicios de cálculo matemático ya que, si se pueden realizar algunos procesos de manera automática, sin tener que dedicarles atención directa, quedará libre más espacio en la memoria de trabajo para los procedimientos que sí requieren atención directa. Un ejercicio como el anterior implica una secuencia larga de procedimientos y, por lo tanto, supone mantener mucha información en la memoria de trabajo mientras se realiza el procedimiento.

Diversos investigadores en la línea del procesamiento de la información han estudiado las diferencias en la capacidad de la memoria a través del estudio de medidas indirectas como la velocidad de procesamiento. Este énfasis en los estudios cronométricos parte del supuesto de que las diferencias en los tiempos de reacción obedecen a la capacidad de la memoria a corto plazo, aunque también a modelos de procesamientos diferenciales, y a dificultades cognitivas intrínsecas a la tarea. Los métodos cronométricos fueron propuestos por primera vez por Donders y reformulados posteriormente por Stemberg (1969). Aunque esta técnica cayó en desuso por muchos años, en las últimas décadas se ha vuelto a utilizar en patrones de cognición, búsquedas en la memoria y razonamiento deductivo elemental (Stemberg, 1969), en tanto se reconoce que es posible partir una tarea en subtareas cuya suma dé como resultado la tarea inicial. El caso más simple ocurre cuando una tarea es descompuesta en un número de pasos idénticos. Si este es el caso, se puede fácilmente suponer que, bajo un adecuado supuesto estadístico, el tiempo de reacción será una función lineal del número de pasos requeridos para cumplir la tarea. Por ejemplo, para el estudio de la tarea de sumas sencillas de dos dígitos, es conveniente considerar que el individuo realiza un conteo en el cual dos operaciones básicas son posibles: la operación de “colocar un contador en un valor inicial específico” y la de “incrementar el valor del contador en uno” (Figura N° 2).

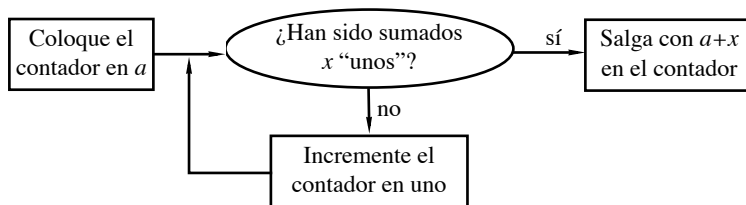


Figura N° 2. Modelo general para la suma de $a + x$

Las diferencias en el tiempo de reacción de los individuos dependerán entonces, en primera instancia, de la velocidad para realizar estas dos operaciones y en segundo lugar de las estrategias utilizadas para realizar la suma.

En la sección correspondiente a estrategias se explicarán diversos modelos de conteo para la suma de dos dígitos simples, estudiados por Groen y Parkman. Dichos estudios confirman la hipótesis de que la capacidad de la memoria a corto plazo se incrementa con la edad, y con la forma como los individuos organizan la información que se les presenta. Algunos niños tienen mejor organizada la información, lo que reduce el número total de *chunks* de información procesada y disminuye la cantidad de esfuerzo para recuperar la información de la memoria a largo plazo (Mayer, 1986).

Contrapuestos a los estudios cronométricos se desarrollaron programas de inteligencia artificial tales como el “simulador de problemas” de Newell y Simon (1972) que pretendían estudiar los procesos de resolución de problemas. Estos trabajos legitimaron el usar protocolos y el “pensar en voz alta” para estudiar la resolución de problemas. Inicialmente, los estudios de sistema de procesamiento de la información eran de muy poco alcance porque se quería ganar en claridad y en resultados científicos. Se trabajó entonces con tareas cognitivas muy simples como el dominio de un acertijo (torre de Hanoi), seguros de que con el análisis de un dominio muy simple se encontrarían las estrategias generales de resolución. Los resultados iniciales se utilizaron posteriormente para estudiar las diversas estrategias de resolución de problemas matemáticos enunciados en forma de texto o simbólicamente. Este tema es objeto de la siguiente sección.

Conocimiento estratégico

Además del conocimiento base y las capacidades que se tengan, lo que diferencia a una persona experta en la solución de problemas de una no experta no sólo es el uso de estrategias diferentes, sino la capacidad de elegir el mejor camino hacia la solución, sin tener que considerar todos los demás. La evidencia indica que lo que hacen realmente las personas es construir, a lo largo de los años de experiencia, un almacén extremadamente grande de caminos típicos de solución guardados en *chunks* que fácilmente pueden recuperarse en el momento que se necesiten. Los problemas a los que se ve enfrentado alguien que estudia matemáticas son de diversos tipos: tareas elementales de cálculo que implican el uso de estrategias operativas; problemas escritos en lenguaje matemático que requieren de estrategias de razonamiento algorítmico para encontrar la solución; y problemas expresados en palabras que implican un proceso de representación antes de aplicar una estrategia de solución. A continuación se destacan tres tipos de estrategias.

Estrategias de cálculos numéricos

Como ya se mencionó, Groen y Parkman (1972) realizaron un estudio que pretendía analizar las sumas simples a través de modelos de conteo. En este estudio se identificaron cinco estrategias diferentes para la adición de sumas de dígitos simples, cuya diferencia se basa en la forma de realizar el conteo. Al utilizar el modelo general, explicado anteriormente, la adición de $m+n$ se explica de las siguientes formas:

- 1) El contador se inicia en 0; m y n son sumados por incrementos sucesivos de uno.
- 2) El contador se inicia en el número que está a la izquierda (m). El número que está a la derecha (n) es sumado por incrementos sucesivos de uno.
- 3) El contador se inicia en n y el número m es sumado luego por incrementos sucesivos.
- 4) El contador se inicia en el mínimo de m y n . El máximo de m y n se suma por incrementos sucesivos de uno.
- 5) El contador se inicia con el máximo de m y n . El mínimo de m y n es luego sumado por incrementos de uno en uno.

El tiempo de reacción para dar la respuesta está en relación directa con el número de “unos” que se incrementan y, por lo tanto, con el modelo escogido. Groen y Parkman encontraron que las personas más eficientes en la suma de dígitos simples utilizaban el modelo 5, en donde el tiempo de reacción dependía directamente del mínimo entre los dos sumandos, ya que el individuo escoge el máximo y desde allí realiza el conteo. También encontraron que la mayoría de adultos tiene automatizado el proceso de conteo para las sumas de dígitos iguales ($3+3$, $2+2$, etc.) de forma tal que en todas ellas, el tiempo de reacción era parecido y menor que en las demás operaciones.

Igualmente, se han realizado estudios para la sustracción de dos números de una cifra y para la sustracción de números de tres cifras (Brown y Burton, 1978). En esencia, todos estos estudios realizan una partición de la tarea en cuestión en un número de subtareas y le asignan un tiempo a cada una de ellas para estudiar modelos de procedimientos y diferencias en tiempo de reacción. La construcción de diagramas de flujo o de programas algorítmicos correspondientes a las tareas de cálculo se logra a partir de la observación directa de los niños que tienen éxito en la tarea, del diálogo y la entrevista, y del posterior estudio de tiempo de reacción para la ejecución de la tarea.

Estrategias de cálculo algorítmico

Suponga usted que debe realizar el siguiente ejercicio:

$$2x - 6/5 = 3((x - 11) + 9)$$

Una de las estrategias comúnmente utilizada en matemáticas para esta clase de ejercicios, en donde se busca el valor de x , es la estrategia deductiva. Tal como lo señala Stemberg (1969):

Una deducción es un proceso sistemático de pensamiento que conduce de un grupo de proposiciones a otro, y que se supone que está basado en los principios de la lógica. El propósito de los principios lógicos es el de garantizar la validez, y una deducción es válida, si y sólo si la certeza de sus premisas es suficiente para garantizar la certeza de su conclusión. (p. 225)

Dicha estrategia se combina en ocasiones con estrategias de reducción o estrategias de aislamiento en donde se intenta simplificar la tarea inicial reduciendo la información (Stemberg, 1969). Por ejemplo, en el ejercicio propuesto, intentar desarrollar las operaciones indicadas, o clarificar los paréntesis lo más pronto posible son estrategias válidas de reducción, y el intento de trasladar las variables a un lado de la igualdad y los números al otro corresponde a una estrategia de aislamiento. Las personas a las que se les presenta el problema en formato de ecuación (no verbalmente) prefieren utilizar esta estrategia, lo que les permite una reordenación mental de la misma de tipo puramente sintáctico.

Estrategias de resolución de problemas

Gran cantidad de metodologías se han usado en los estudios sobre la resolución de problemas: análisis comparativos entre expertos y novatos, entrevistas clínicas, análisis de protocolos, etc. El enfoque del procesamiento de la información, representado por el trabajo de Newell y Simon, cambió significativamente la investigación sobre la resolución de problemas, al apartar la atención de las condiciones bajo las cuales se dan las soluciones y dirigirla hacia los procesos cognitivos y los componentes implicados que transforman el estado inicial del problema para conseguir el estado final propuesto.

Como ya se mencionó, para hacer manejable un problema en cuanto a su estudio, muchos investigadores de la década de los años 60 se centraron en una clase de problemas, llamados problemas de movimiento o transformación. Todos estos problemas tienen un estado inicial y uno final bien defini-

dos, y un pequeño grupo de operaciones claramente delimitadas (“movidas”) que pueden ir transformando sucesivamente el estado inicial en el estado final (recuérdese el problema de la torre de Hanoi). Para representar una estrategia de resolución de un problema, se parte de dos ideas. 1) El problema tiene que representarse en un “espacio del problema” que contiene el estado actual del mismo, su estado final (o meta) y todos los estados intermedios. En teoría, el espacio del problema puede tener múltiples caminos inútiles y callejones sin salida. 2) La resolución de un problema conlleva una búsqueda dirigida por el objetivo, a través del espacio del problema (Mayer, 1985, Sternberg, 1969). Debido a que existe un solo estado inicial, y a que normalmente puede aplicarse más de una operación a cada estado, el espacio de solución se parece a un árbol cabeza abajo.

Stemberg señala toda una variedad de estrategias para realizar la búsqueda de la solución a través del espacio del problema. En la siguiente página, el Cuadro N° 2 recoge algunas de ellas.

Convertirse en un “buen solucionador de problemas” constituye uno de los objetivos del matemático. Algunos investigadores preocupados por desarrollar destreza en los estudiantes han diseñado listados de estrategias de resolución de problemas que implican la toma de conciencia de las etapas por las que se debe pasar para resolver un problema. En particular, Mayer, Schoenfeld, Kilpatrick, Lester y otros, han sido reconocidos como importantes investigadores en este campo.

Metacognición

Hacia 1970, la metacognición entendida como “el monitoreo constante de la actividad cognitiva por parte de la persona, y la toma de conciencia del reconocimiento de la utilidad específica de estrategias particulares” (Pressley, 1994), se volvió tópico de investigación al considerarse que el uso más eficaz del sistema de procesamiento podría lograrse, a partir del empleo de estrategias de control de los procesos a realizar. Flavell caracterizó el término metacognición como “el conocimiento acerca del propio proceso de conocimiento” y en consecuencia, correspondería a los procesos ejecutivos del modelo del procesamiento de la información.

Stemberg y sus colaboradores (1969) encontraron que la raíz principal de muchas diferencias individuales era la facilidad que tenían algunas personas para realizar eficientemente actividades de control. Específicamente, los niños con mayores éxitos: 1) aprovechan mejor las situaciones de aprendizaje objetivamente idénticas; 2) llegan a saber más respecto del aprendizaje en sí mismo; 3) muestran mejores señales de planificación; 4) dirigen sus esfuerzos en forma más adecuada; y 5) controlan su propio progreso. En consecuencia, este tipo de niños consideran los problemas nuevos no como hechos

aislados, sino como componentes de una clase general; suponen que lo que aprenden será relevante en otras situaciones, y construyen hipótesis respecto al dónde y al cuándo. El simple hecho de saber que una generalización puede construirse de situaciones anteriores a la actual, o bien, puede elaborarse de la situación actual a otras futuras, ya forma parte de este proceso.

Subobjetivos. Consiste en escoger un estado intermedio en el camino de solución y considerarlo como un objetivo temporal. Esta propuesta divide el problema en dos o más subproblemas y, consecuentemente, se transforma el espacio global de búsqueda en dos o más espacios de menor profundidad.

Búsqueda al azar. Consiste en seleccionar caminos al azar, esperando encontrarse por casualidad con el objetivo. Puede ser adecuada si el espacio de búsqueda es pequeño. Sin embargo, puesto que el espacio de búsqueda se expande exponencialmente en la mayor parte de los problemas, la posibilidad de éxito generalmente es muy pequeña.

Búsqueda en profundidad. Contrariamente a la anterior, intenta una búsqueda sistemática en el árbol que configura el espacio del problema, investigando un camino determinado hasta su final. Si este estado no es el objetivo final, se comienza de nuevo a través de otro camino. Este método, como cualquier otro método exhaustivo, requiere de una gran cantidad de memorización para no perder la pista de los caminos que ya se han intentado, y el estado al que hay que remitirse cuando ya se han intentado todos los caminos del estado presente.

Análisis de medios-fines. Es una poderosa estrategia que consiste en averiguar las diferencias existentes entre el estado real y el estado final y, a continuación, encontrar las operaciones que las pueden reducir. Si existe más de una de estas operaciones, se puede aplicar en primer lugar la operación que reduzca más la diferencia. En otras palabras, se trata de encontrar el mejor medio para conseguir el fin propuesto.

Generación y comprobación. Consiste en generar un grupo de posibles soluciones directamente a partir del problema, y luego comprobar cada una de ellas para ver si la solución es correcta. Esta estrategia es útil solamente cuando es razonablemente fácil la generación del grupo de soluciones potenciales y su comprobación (Mayer, 1985).

Inducción. Hace referencia a la “capacidad para generalizar a partir de experiencias específicas” (Stemberg, 1969). Según Pellegrino (citado en Stemberg, 1969), la inducción se define como el desarrollo de reglas, ideas o conceptos generales a partir de grupos específicos de ejemplos.

Cuadro N° 2. Estrategias de resolución de problemas

Las investigaciones realizadas por Lesh (1985, citado en Schoenfeld, 1992), que se centran en la debilidad de las conceptualizaciones de los estudiantes sobre los problemas matemáticos y las situaciones problemáticas, lo llevaron a la siguiente conclusión: “No es suficiente lo que usted conoce; es cómo, cuándo, y a través de qué lo utiliza”. A partir de esta idea, Lester y otros (1989, citado en Schoenfeld, 1992) realizaron un estudio más completo sobre el papel de la metacognición con estudiantes de séptimo grado en tareas de resolución de problemas. El objetivo de la instrucción era lograr mejores destrezas metacognitivas en los estudiantes. Para ello, utilizaron al profesor de la clase como monitor externo; fomentaron discusiones de los comportamientos considerados importantes para la internalización de las herramientas metacognitivas; y plantearon un modelo de “buen comportamiento metacognitivo”. Una de las conclusiones obtenidas por Lester y sus colaboradores es que existe una interacción dinámica entre los conceptos matemáticos y los procesos generales, incluidos aquellos de tipo metacognitivo. Los procesos de control y la conciencia del manejo de procesos cognitivos deben trabajarse de manera paralela a la comprensión de los conceptos matemáticos. El desarrollo de la metacognición por medios pedagógicos es más efectiva cuando tiene lugar en contextos específicos. El perfeccionamiento de herramientas de autorregulación en dominios complejos es difícil, y siempre involucra modificaciones de comportamientos para “desaprender” desarrollos previos que resultan inadecuados. Tal cambio requiere un período de tiempo largo. En esta medida, la tarea de creación de contextos instruccionales adecuados y el diseño de modelos de guía en el salón de clase debe ser asumida por el profesor.

Schoenfeld (1985, citado en Hernández y Socas, 1994), inspirado en las ideas de Polya, diseñó uno de los modelos instruccionales más completos, a través del manejo de estrategias heurísticas en sus cursos sobre resolución de problemas. Su objetivo prioritario era mejorar los procesos ejecutivos de control buscando que sus estudiantes adquirieran mejores habilidades para resolver problemas por ellos mismos. Schoenfeld realizó una observación minuciosa del proceso de resolución de problemas realizado por sujetos reales; construyó, *a posteriori*, bloques de conductas más o menos homogéneas que se daban en un período de tiempo; y calificó los bloques de modo que especificaran su función en la globalidad del proceso. Distinguió así cuatro fases: 1) análisis, 2) exploración, 3) ejecución y 4) comprobación de la solución obtenida.

Los principios heurísticos propios de la fase de análisis son: la realización de un diagrama; la elección de valores especiales para examinar casos particulares; el intento de una simplificación del problema sacando partido de posibles simetrías o mediante razonamientos sin pérdida de generalidad.

En la fase de exploración se pueden examinar problemas esencialmente equivalentes o ligeramente modificados al elegir subobjetivos o al descomponer el problema en casos, y al estudiar cada caso por separado; también se puede usar la estrategia de examinar problemas ampliamente modificados para construir problemas análogos con menos variables, o tratar de mantener fijas todas las variables menos una para determinar el efecto que éstas tienen. En la fase de comprobación cabe preguntarse si la solución verifica los criterios específicos siguientes, si está acorde con las predicciones o estimaciones razonables, o si resiste ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala.

Por su parte, Pressley (1994) señala que la competencia metacognitiva sensibiliza a los estudiantes para recibir nueva información metacognitiva ofrecida como parte de la instrucción y es el mejor indicador para saber si el estudiante generalizará las estrategias que está aprendiendo. Una estrategia de instrucción metacognitivamente rica tiene un impacto más durable sobre los estudiantes que cualquier otro tipo de estrategia.

Motivación

Hasta hace algún tiempo se establecía una separación clara entre los dominios cognitivo y afectivo (recuérdese la taxonomía de objetivos de Bloom). La ansiedad matemática, por ejemplo, era medida a través de cuestionarios diseñados por psicólogos específicamente para estudiar los sentimientos frente al trabajo matemático; mientras que los aspectos referidos al dominio cognitivo eran estudiados por separado y referidos estrictamente al conocimiento de la materia.

Actualmente, se ha modificado esta visión y se reconocen las estrechas interrelaciones entre los dominios cognitivo y afectivo. Una de las principales causas del reciente énfasis sobre las cuestiones afectivas ha sido la importancia de la motivación en el desarrollo del “pensamiento de alto nivel” que se espera lograr en los estudiantes. Las nuevas propuestas curriculares los invitan a enfrentar problemas no rutinarios y a ser autónomos en el trabajo matemático. Por ejemplo, el *National Council of Teachers of Mathematics* ha reafirmado la importancia central del dominio afectivo al proponer como una de las metas de la educación matemática el “aprender a valorar las matemáticas y adquirir confianza e interés por ellas” (NCTM, 1989).

La investigación en el dominio afectivo ha identificado tres grandes temáticas que recogen un amplio rango de cuestiones referentes a la motivación: las creencias, las actitudes y las emociones. Dichos aspectos difieren unos de otros en cuanto a la estabilidad de la respuesta afectiva que ellos representan. Las creencias y actitudes son generalmente estables pero las emociones pueden variar rápidamente. También hay diferencias en cuanto al

nivel de intensidad con que se manifiestan. Las creencias proporcionan una postura “fría” acerca de las matemáticas, producto de experiencias de aprendizaje, elementos culturales y sociales, etc. Las actitudes son relativas al gusto o disgusto hacia las matemáticas y se manifiestan de una manera “serena y tranquila”, mientras que las emociones son reacciones instantáneas con altos niveles de intensidad y “acaloramiento”—de frustración o éxito.

Las creencias actitudes y emociones, también difieren en el grado de influencia sobre la cognición y en el tiempo en que toman para desarrollarse. Las creencias influyen altamente en el dominio cognitivo y se desarrollan en períodos largos de tiempo, mientras que las emociones pueden influir poco en el dominio cognitivo, y aparecer y desaparecer rápidamente, como en el caso en que, la frustración al tratar de resolver un problema difícil, se torna en alegría al encontrar la solución (Mandler, 1984 citado en McLeod, 1992).

Uno de los aspectos que ha recibido mayor atención en el dominio afectivo es la ansiedad. Un análisis basado en un estudio con 151 personas confirmó que la ansiedad matemática está correlacionada con niveles bajos de desempeño en matemáticas (Hembree, 1990 citado en McLeod, 1992). A manera de ejemplo en el contexto nacional, el Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Educación, organismo del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, realizó una prueba que intentaba disminuir la ansiedad matemática a partir de una presentación llamativa de una situación fantástica, situada en un escenario futurista. La misma prueba se aplicó posteriormente sin esta presentación y se contrastaron las opiniones de los estudiantes frente a las pruebas. La lectura de las opiniones mostró una decidida aceptación del primer instrumento por parte de los alumnos y aunque no hubo procesamiento formal de los datos a ese respecto, fueron evidentes las diferencias en los resultados obtenidos al observar mayores logros en el contexto de situación fantástica (Hederich, 1992).

Otro de los aspectos estudiados dentro del campo de las creencias ha sido el nivel de autoconfianza como aspecto fundamental para el logro del éxito. Los estudios de algunos patrones de diferencias reflejan que las mujeres tienden a ser menos seguras de sí mismas que los hombres, y esto las lleva a tomar menos cursos avanzados de matemáticas. Este hecho es más marcado en estudios con hombres y mujeres en edad adulta, y en escolares de secundaria que en los niveles elementales. Parece ser que los hombres son más dados a atribuir sus éxitos a sus habilidades personales y sus fracasos a la falta de esfuerzo; mientras que las mujeres suelen atribuir sus fracasos a su propia falta de habilidad (Fennema, 1989; Meyer y Fennema, 1988 citados en McLeod, 1992). Ames y Archer (1987, citados en McLeod, 1992) encontraron que los estudiantes de escuela elemental, que atribuían el éxito al esfuerzo personal, enfocaban su aprendizaje en la adquisición de destrezas a través

del trabajo duro, el logro de desafíos y el avance en los progresos. En cambio, los estudiantes que atribuían el éxito a su propia habilidad enfocaban su esfuerzo en obtener buenas notas y menos a entender lo que quería enseñárseles. Estudios comparativos, realizados en Japón y los Estados Unidos, encontraron que los japoneses prestan más atención al éxito a través del esfuerzo, mientras que la habilidad es de primordial importancia para los norteamericanos. Aparentemente los hogares japoneses se encargan de promover e incentivar el esfuerzo (Holloway, 1988 citado en McLeod, 1992).

Por otra parte, investigaciones relativas a la autonomía en el trabajo, han encontrado que existe una estrecha relación entre el estilo cognitivo y la habilidad para trabajar en forma autónoma. McLeod encontró que los patrones de comportamiento de un individuo autónomo y aquel que tiene un estilo cognitivo “independiente de campo” son muy similares, aunque la noción de dependencia e independencia de campo se haya desarrollado básicamente en el dominio cognitivo (Witkin y Goodenough, 1981).

Dada la importancia de la autonomía y el pensamiento independiente en el éxito del “buen pensador” es ahora conveniente retornar al estudio de los estilos cognitivos. Un reciente esfuerzo en esta dirección, que investigaba diferencias entre estilos de aprendizaje en matemáticas, sugiere que los estilos de aprendizaje de las matemáticas son diferentes y que estas diferencias deben incidir en los ambientes de aprendizaje de las matemáticas (Benjamín, 1990 citado en McLeod, 1992).

En resumen, una buena motivación, proporciona las energías para un conocimiento intensivo en tanto que se consigue una atención intensa sobre la tarea y un repaso exhaustivo sobre el material. La falta de motivación puede bloquear las estrategias, el acceso al conocimiento base y hasta los procesos metacognitivos (Pressley, 1994).

CONCLUSIÓN

A lo largo de la exposición se ha presentado un panorama general que permite apreciar los alcances de los trabajos realizados por la psicología del procesamiento en el desempeño en matemáticas. Esperamos que las personas interesadas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se encuentren motivadas para profundizar en este campo y buscar en la psicología del procesamiento y la psicología cognitiva en general, herramientas de estudio y análisis del fenómeno educativo.

Como se puede apreciar, los estudios sobre procesamiento diferencial en matemáticas son de múltiples órdenes. Pero, si se reconoce que una de las metas centrales de la educación matemática es el desarrollo de competencias cognitivas para resolver problemas complejos, la psicología del procesa-

miento de la información está aportando valiosos resultados investigativos que derivan en propuestas metodológicas para el desarrollo de estas competencias (Hernández y Socas, 1994).

Actualmente se adelanta en el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional, Colombia, con el apoyo de Colciencias, una investigación sobre “estilos cognitivos” una de cuyas líneas aborda el problema de la cognición de saberes básicos específicos de las matemáticas. Se está intentando desarrollar un modelo teórico que vincule el Sistema de Procesamiento de la Información (SPF) con el estilo cognitivo, que identifique procesos propios de cada tendencia cognitiva en la ejecución de tareas matemáticas y de lectoescritura. Además de la revisión teórica realizada, se han logrado avances en la construcción de instrumentos para la determinación de tiempos de latencia de respuesta y determinación del estilo cognitivo. Actualmente nos encontramos en la fase de formulación de hipótesis de trabajo encaminadas a establecer relaciones entre la competencia en resolución de problemas algebraicos y el estilo cognitivo².

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brown, J. & Burton, R. (1978). Diagnostic models for procedural buggs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 155-192.
- Groen, J.G. y Parkman, J.M. (1972). A cronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, 79, 329-343.
- Hederich, C. (1992). Algunas innovaciones en la construcción de instrumentos para la evaluación del logro académico. *Enfoques Pedagógicos*, 1 (1), 37-43.
- Hernández, J. y Socas, M. (1994). Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en matemáticas. *Revista SUMA*, 16, 82-90.
- Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- Mayer, R. (1985). *El futuro de la psicología cognitiva*. Madrid: Alianza Editorial.
- Mayer, R. (1986). *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información* (pp. 165-194). Barcelona: Editorial Labor Universitaria.
- Miller, G. A. (1956). The magic number seven, plus or minus two. *Psychological Review*, 63, 81-97.

2. Para una ampliación del trabajo de investigación se recomienda la lectura del informe de avance del proyecto: “Estilo Cognitivo de Aprendizaje” presentado a COLCIENCIAS por C. Hederich, L. Guzmán y L. Camargo.

- McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, Va.:The Council.
- Newell, A. & Simon, H. A. (1972). *Human problem-solving*. Englewood-Cliffs, N.J.: Prentice Hall.
- Pressley, M. (1994). Embracing the complexity of individual differences in cognition: Studying good information processing and how it might develop. *Learning and Individual Differences*, 6 (3).
- Resnick, L. y Ford, W. (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos* (pp. 52, 131, 216-221, 234-280). Madrid: Paidós.
- Pellegrino, J. W. (1986). Capacidad de razonamiento inductivo. En R. Stemberg (Ed.). *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información*. Barcelona: Editorial Labor Universitaria.
- Schoenfeld, D. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- Stemberg, S. (1969). Memory-scanning: Mental processes revealed by reaction time experiments. *American Scientist*, 57, 421-457.
- Witkin, H. y Goodenough, D. (1981). *Estilos Cognitivos: Naturaleza y orígenes*. Madrid: Pirámide.

Leonor Camargo
Universidad Pedagógica Nacional
Departamento de Matemáticas
Calle 73 N° 11-95
Tel.: 3473548
Fax: 3473535
Bogotá, Colombia