DE LA GEOMETRÍA AL CÁLCULO: PROBLEMAS QUE PROPICIAN ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA DE CLASE

Gil Alberto Donado Núñez
Jorge Adelmo Hernández Pardo
José Reinaldo Montañez Puentes

Universidad Pedagógica Nacional
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Universidad Nacional de Colombia

adonado@pedagogica.edu.co
jahernandezp@udistrital.edu.co
jrmontanezp@unal.edu.co

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

RESUMEN

Haciendo uso de elementos históricos y de la tecnología, se presenta una propuesta de actividades de origen geométrico que pueden apoyar la enseñanza del cálculo en los niveles de la educación media y primeros cursos universitarios.

Con un poco más de precisión, revisaremos los números reales y los conceptos de función, límite y continuidad a través de problemas no rutinarios de tipo geométrico que motivan la experimentación y la argumentación haciendo uso de la tecnología, herramienta muy potente para observar patrones, regularidades, invariantes y hacer conjeturas, que ayuden a formalizar las ideas y a desarrollar la teoría.

TEMÁTICAS A DESARROLLAR

A continuación se relacionan algunas actividades a desarrollar, ideas que a lo largo del cursillo y a través de discusiones serán ampliadas y enriquecidas, enmarcadas en las temáticas de:

1. Los números reales, completitud. El problema de la inconmensurabilidad. Problemas en la historia de los números reales, representación decimal y n–*mal* de un número racional.

2. Hacia el concepto de función. Algunos problemas que motivan el estudio de la función de segundo grado y de las cónicas desde otras perspectivas en la que se hace conveniente el uso de la tecnología para su estudio detallado.

3. Con referencia a la noción de continuidad, al tratar de enunciarla de una manera informal en términos de cercanía de puntos, dicha noción puede distorsionarse y llevar a errores. Con estas ideas en mente, se proponen problemas que revisten algún análisis de la noción formal y de las posibles nociones informales de continuidad correctas e incorrectas. En particular, hemos observado que algunos ejemplos de funciones de R^2 en R^2 permiten apreciar la noción de continuidad de manera más tangible.

4. Apoyados conceptos físicos se motiva la noción de derivada, que a su vez sugiere varias presentaciones de lo que podría ser la derivada; se estudian cuáles de estas definiciones son equivalentes a la noción clásica y en cada caso sus posibles modelaciones.

5. En algunos pasajes, los trabajos de Leibniz son de tipo categórico, con esto se quiere expresar que trabajos en un área se reflejan en otra. En particular algunos algoritmos relacionados con sucesiones y series al darles interpretación geométrica permiten llegar de manera sorprendente a relaciones estrechas entre la derivada y la integral. Específicamente se muestra como haciendo uso de estos elementos, se llega a una aproximación del teorema fundamental del cálculo.

6. Se considera el siguiente problema: ¿Sea A un subconjunto de los números reales R, dada una función, $f : A \to R$ para que valor de y existe x, tal que $f(x) = y$? Al analizar la estructura topológica del conjunto A y la función f se conduce al estudio de la continuidad y de las propiedades de los intervalos abiertos y cerrados en el conjunto de los números reales, así como también a las ideas intuitivas de conexidad y compacidad. Además, de allí surgen resultados importantes del cálculo, entre otros, el teorema del valor intermedio y la proposición que asegura que una función continua definida en un intervalo cerrado en el conjunto de los números reales admite máximo y mínimo.

DE LA GEOMETRÍA AL CÁLCULO: PROBLEMAS QUE PROPICIAN ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA DE CLASE

Gil Alberto Donado Núñez
Jorge Adelmo Hernández Pardo
José Reinaldo Montañez Puentes

Universidad Pedagógica Nacional
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Universidad Nacional de Colombia

adonado@pedagogica.edu.co
jahernandezp@udistrital.edu.co
jrmontanezp@unal.edu.co

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

NÚMEROS REALES

1. ¿Se puede llenar una circunferencia con un ángulo dado?. Tome un ángulo α. Considere una circunferencia y un punto P sobre su borde. A partir de P, marque puntos sobre la circunferencia como lo indica la figura. Continuando con este proceso se podrá cubrir la circunferencia?

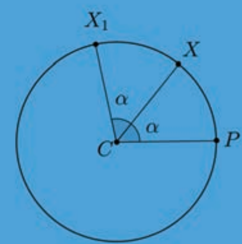

Figura 1: Punto 1 Números Reales

   a) Si la medida de α es 7 grados, ¿cuál es el menor número de vueltas que debe darse para que se repitan las marcas sobre la circunferencia? Y para un ángulo de 14 grados?
   b) ¿Si α es un ángulo medido un número entero de grados, las marcas puestas sobre la circunferencia comienzan a repetirse?
   c) ¿Si en vez de usar grados usamos radianes y α es un radián, en algún momento comienzan a repetirse las marcas?
   d) ¿Existirán ángulos α de tal manera que con este proceso de "marcado" puedan "cubrir" la circunferencia?

2. Todo número real positivo se puede escribir de la forma $x = \sum_{n \geq n_0}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$, donde $0 \leq a_i \leq 9$ y $n_0 \in Z$. Nótese que esta representación no es en sentido estricto un polinomio. Para el caso que nos ocupa, de forma intuitiva vamos a decir que todo número real positivo se puede escribir "en forma polinomica" como combinación lineal de potencias de 10, positivas o negativas, de forma finita o infinita.
   a) Escriba 23405 como un polinomio finito con potencias de 10.
   b) Escriba $\frac{1}{3}$ como un polinomio infinito con potencias de 10.
   c) ¿Es posible escribir 23405 y $\frac{1}{3}$en base 4, esto es, como polinomios con potencias de 4? ¿Se puede generalizar este hecho?
   d) Todo número racional tiene representación decimal finita o infinita periódica. Compruebe que $\frac{7}{4}$ tiene representación periódica en base 7 y representación finita en base 10.
   e) Hallar una base n para que el número $0,369369369...$ tenga representación $n-mal$ finita.
   f) Dado un número racional $\frac{p}{q}$ existe alguna base n de tal manera que su representación $n-mal$ sea finita?
   g) Sabemos que un número de la forma $\frac{p}{q}$ donde p y q son enteros y $q \neq 0$ es un número racional; ¿Con base en lo expuesto en este ejercicio, podría caracterizar los números racionales de otro modo?
   h) Dado número racional $\frac{p}{q}$, si n es un divisor de q , $\frac{p}{q}$ tiene representación $n-mal$ finita?
   i) Dado un número racional, puede encontrar un algoritmo para determinar la menor base n en la que dicho número tenga representación $n-mal$ finita?

¿Observa relaciones entre el ejercicio 1 y el ejercicio 2?

3. Recordemos que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son conmensurables si existe un segmento U tal que $\overline{AB} = mU$ y $\overline{CD} = nU$, donde m y n son números naturales. Considere un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1, como lo muestra la figura. Apóyese en la figura 2 para mostrar que la hipotenusa y el cateto no son conmensurables. Nótese que este es un camino para ver que $\sqrt{2}$ no es racional.

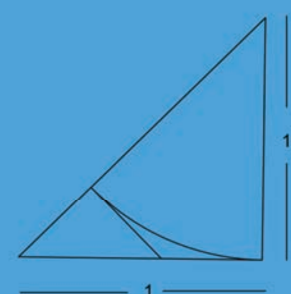

Figura 2: Punto 3 Números Reales

DE LA GEOMETRÍA AL CÁLCULO: PROBLEMAS QUE PROPICIAN ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA DE CLASE

Gil Alberto Donado Núñez
Jorge Adelmo Hernández Pardo
José Reinaldo Montañez Puentes

Universidad Pedagógica Nacional
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Universidad Nacional de Colombia

adonado@pedagogica.edu.co
jahernandezp@udistrital.edu.co
jrmontanezp@unal.edu.co

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

FUNCIONES Y CONTINUIDAD

Dada una función, considere las siguientes interpretaciones de la noción formal de continuidad "Una función es continua en un punto, si un pequeño cambio en el punto produce un pequeño cambio su imagen" "puntos cercanos entre si son llevados por medio de la función en puntos cercanos"; ¿son correctas estas interpretaciones?. Precisamente por la informalidad, la noción de continuidad puede distorsionarse y llevar a errores. Con estas ideas en mente, se proponen problemas que revisten algún análisis de la noción formal y de las posibles nociones informales de continuidad. Al respecto, hemos observado que algunos ejemplos de funciones de R^2 en R^2 permiten apreciar la noción de continuidad de manera más tangible.

1. Sea $f : R^2 \longrightarrow R^2$ la función que deja fijo todo punto del plano excepto un único punto p tal que $f(p) = q$. En particular sea p el origen de coordenadas $(0,0)$ y q el punto $(1,0)$, tal como lo ilustra la figura 3.

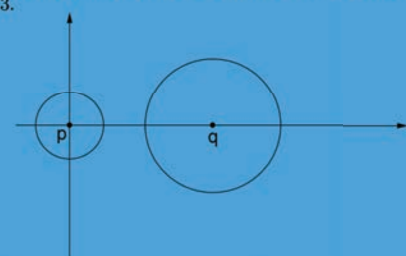

Figura 3: Punto 1 Funciones y Continuidad

   a) ¿En qué puntos es f continua?.
   b) ¿ f envía puntos cercanos en puntos cercanos?
   c) ¿Un pequeño cambio en un punto produce un pequeño cambio en su imagen?

2. Se divide el plano R^2 en dos semiplanos A, B, donde A incluye todos los puntos (x_1, x_2) tales que $x_1 \geq 0$, y B es un complemento. Obsérvese que la recta L correspondiente al eje y, está incluida en A (Vease la figura 4). Defina f como una función de R^2 a R^2 tal que la restricción de f a A es la traslación hacia la derecha una unidad longitud, y la restricción de f a B, es la traslación hacia la izquierda también de valor unidad. Puesto que $L \subset A$, la recta L se mueve hacia la derecha.

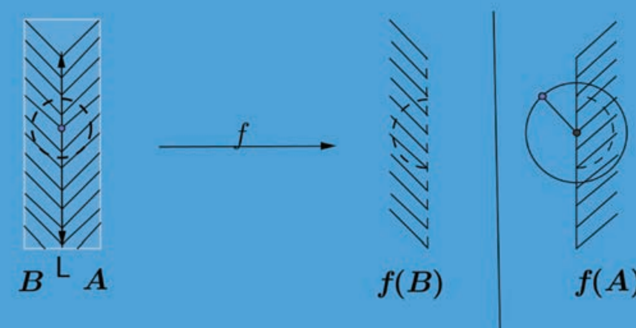

Figura 4: Punto 2 Funciones y Continuidad

   a) ¿En qué puntos es f continua?.
   b) ¿ f envía puntos cercanos en puntos cercanos?
   c) ¿Un pequeño cambio en un punto produce un pequeño cambio en su imagen?

3. Se da una recta l y una circunferencia C sin un punto (C^*) como lo muestra la figura. Considere a C y a l como subespacios de R^2 y de R respectivamente con sus topologías usuales. Se define la función $f : C^* \longrightarrow l$ como lo ilustra la figura 5 .

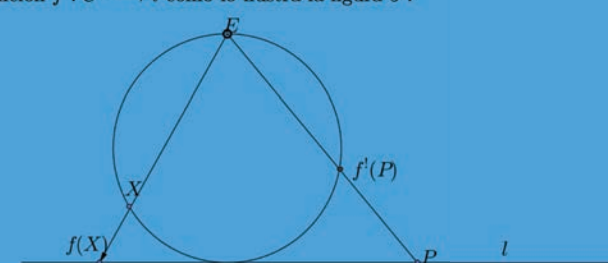

Figura 5: Punto 3 Funciones y continuidad

   a) ¿En qué puntos es f continua?.
   b) ¿Es la inversa de f una función continua?

DE LA GEOMETRÍA AL CÁLCULO: PROBLEMAS QUE PROPICIAN ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA DE CLASE

Gil Alberto Donado Núñez
Jorge Adelmo Hernández Pardo
José Reinaldo Montañez Puentes

Universidad Pedagógica Nacional
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Universidad Nacional de Colombia

adonado@pedagogica.edu.co
jahernandezp@udistrital.edu.co
jrmontanezp@unal.edu.co

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

c) ¿f envía puntos cercanos en puntos cercanos?

4. La proyección estereográfica desde el polo norte es una función f en la cual el dominio X es la superficie esférica, excluido el polo norte, y el rango Y es un plano paralelo al ecuador. f asigna a cada punto x de la superficie esférica (exceptuando al polo norte) el punto y, donde el rayo que va del polo norte a x corta al plano(vease la figura 6). supongamos que el plano Y es tangente a la esfera en su polo sur S.

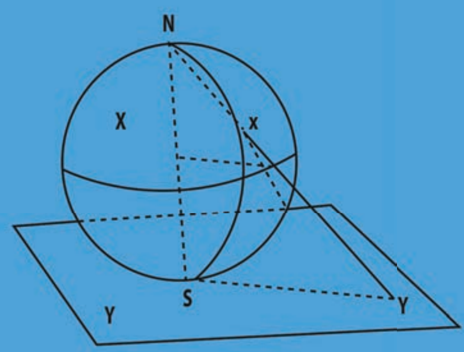

Figura 6: Punto 4 Funciones y continuidad

a) ¿Cuál es la imagen de un paralelo de latitud?

b) ¿Cuál es la imagen de un círculo meridiano?

c) ¿Cuál es la imagen inversa de un segmento de recta de Y?

d) La imagen del ecuador es un círculo del plano. ¿Cuánto vale el radio del círculo imagen respecto del radio de la esfera ?

e) ¿Cuál es la imagen inversa de un rayo a través del polo sur?

f) ¿En qué puntos es f continua?.

g) ¿Es la inversa de f una función continua?

h) ¿f envía puntos cercanos en puntos cercanos?

5. ¿Existen funciones continuas que verifiquen las nociones informales dadas en la introducción de está sección?

6. ¿Dada una función, $f : A \longrightarrow R$ para que valor de y existe x, tal que $f(x) = y$?, ¿de otro modo qué propiedades debe tener una función para poder resolver la ecuación planteada?. Antes de resolver este problema, puede ser de ayuda considerar la siguiente secuencia de ejercicios:

a) Encuéntrese los valores mínimo y máximo de $f(x) = 4+2x-x^2$ en el intervalo $0 \leq x \leq 3$. ¿Para qué valores de y no exiten correspondientes valores de x en el intervalo?

b) La función $f(x) = x^3 - 5$ toma el valor -4 en $x = 1$ y el valor 3 en $x = 2$; es continua en el intervalo $1 \leq x \leq 2$. ¿Cómo se demostraría que $\sqrt[3]{5}$ está entre 1 y 2?

c) ¿Entre qué valores enteros positivos de x tiene un cero el polinomio $x^2 - 2x + 4$?

d) Encuéntrense los valores máximo y mínimo si existen de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $0 < x \leq 5$.

e) Encuéntrense los valores máximos y mínimos si existen de $f(x) = 3$ en el intervalo $0 \leq x \leq 7$

f) Encuéntrense los valores máximos y mínimos si existen de $f(x) = x$ en el intervalo $0 \leq x \leq 5$.

g) Encuéntrense los valores máximo y mínimo si existen de $f(x) = |1 - x|$ en el intervalo $-4 \leq x \leq 5$

7. ¿Existen funciones continuas que verifiquen las nociones informales dadas en la introducción de está sección?

LUGARES GEOMÉTRICOS

1. Considere una recta l y un punto F fuera de l.

a) Hallar algunos puntos P tales que la distancia de F a P sea igual a la distancia de P a l

b) Sea m una recta perpendicular a l como lo ilustra la gráfica 7 ¿existe algún punto sobre m que equidiste de F y de l?

c) Dibuje un sistema de coordenadas con ejes x e y, como lo ilustra la grafica 8 y determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de F y l.

DE LA GEOMETRÍA AL CÁLCULO: PROBLEMAS QUE PROPICIAN ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA DE CLASE

Gil Alberto Donado Núñez
Jorge Adelmo Hernández Pardo
José Reinaldo Montañez Puentes

Universidad Pedagógica Nacional
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Universidad Nacional de Colombia

adonado@pedagogica.edu.co
jahernandezp@udistrital.edu.co
jrmontanezp@unal.edu.co

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

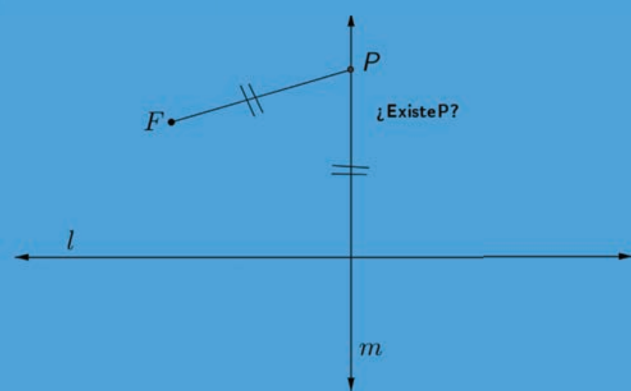

Figura 7: Punto 1 item b Lugares Geométricos

2. Considere otra forma de medir en el plano, por ejemplo la métrica del taxista, la cual esta definida por $\rho_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$
   a) Usando esta métrica, repita la primera parte del ejercicio anterior.
   b) Dados A y B puntos de R^2, se dice que un punto C está entre A y B, lo cual se escribe $A-C-B$, si $d(A,C)+d(C,B)=d(A,B)$. En el sistema de coordenadas usual determine dos puntos A y B de tal manera que la recta que pasa por A y B no sea paralela al eje x. Encuentre los puntos que están entre A y B.
   c) Dados dos puntos A y B, la recta que contiene a A y B está formada por los puntos A y B y todos los puntos X tales que $A-X-B$ o $X-A-B$ o $A-B-X$. Seleccione dos puntos A y B y dibuje la recta que pasa por A y B.
   d) Seleccione un punto F que no esté en la recta construida en la parte c, usando la definición usual de parábola, pero teniendo en cuenta la métrica del taxista, ¿puede encontrar la parábola con F como foco y la recta como directriz?.

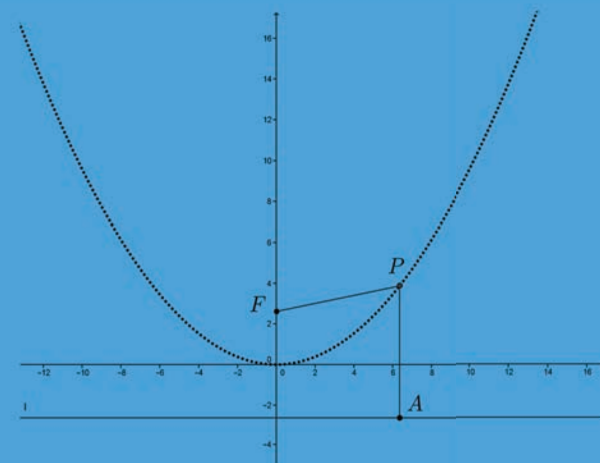

Figura 8: Punto 1 item c Lugares Geométricos

3. En un sistema de coordenadas cartesianas, dibuje dos circunferencias concéntricas, digamos de radios a y b, con $a > b$, con centro en el origen. Dibuje un ángulo α en posición normal cuyo lado terminal intersecte las circunferencias en los puntos P y Q respectivamente. Por P trace la paralela al eje x y por Q trace la paralela al eje y. Llame R al punto de corte de dichas rectas. ¿Puede describir el lugar geométrico del punto R cuando el ángulo α varía entre 0 y 2π. Si R tiene coordenadas (x,y) ¿Cuál es la ecuación del lugar geométrico encontrado?
4. En un sistema de coordenadas cartesianas considere el triángulo de vértices $A(-1,0), B(1,0)$ y $C(0,t)$. Halle el punto medio M del $\overline{BC}$ y trace la recta OM donde $O(0,0)$. Trace la altura correspondiente al lado $\overline{BC}$. Sea R el punto de corte de dicha altura con la recta OM. Describa el lugar geométrico del punto R cuando C se mueve sobre el eje Y. ¿Cuál es la ecuación de este lugar geométrico?

DERIVADAS

1. Máximos y mínimos sin cálculo:
   La distancia entre dos postes uno de $3m$ y otro de $5m$ que se emplean en las instalaciones telefonicas es de $10cm$, como se muestra

DE LA GEOMETRÍA AL CÁLCULO: PROBLEMAS QUE PROPICIAN ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA DE CLASE

Gil Alberto Donado Núñez
Jorge Adelmo Hernández Pardo
José Reinaldo Montañez Puentes

Universidad Pedagógica Nacional
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Universidad Nacional de Colombia

adonado@pedagogica.edu.co
jahernandezp@udistrital.edu.co
jrmontanezp@unal.edu.co

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

en la figura. A manera de soporte,un cable que une la parte superior de los postes se sujetará a un punto en tierra, localizado sobre la linea que une los dos postes.

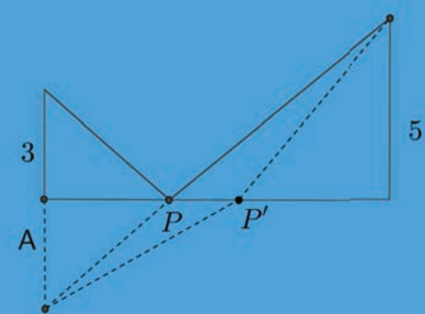

Figura 9: Punto 1 Derivadas

a) ¿Dónde debe situarse el punto sobre la tierra de manera que la longitud del cable sea la menor?

b) Sea x la distancia de A a P. Halle una función que permita determinar la longitud del cable. ¿cuál es el valor de x para que la longitud del cable sea mínimo?.

c) Observe la figura, puede encontrar un argumento geométrico que resuelva el problema.

d) Ubique un sistema de coordenadas con el origen el punto A, use métodos algébraicos para determinar el punto P.

2. Suponga que $s = f(t)$ corresponde al espacio recorrido s por una partícula en un instante t.

   a) Halle una expresión para determinar aproximaciones para la velocidad instantánea en $t = 3$, calculando velocidades promedio en los instantes $t = 2$ y $t = 4$, $t = 2,5$ y $t = 3,5$, $t = 2,9$ y $t = 3,1$.

   b) Halle una expresión para calcular la velocidad instantánea en un tiempo $t = a$ usando aproximaciones como las anteriores.

   c) Conociendo que la velocidad instantánea en $t = a$ es la derivada $f'(a)$, compare la expresión anterior con $f'(a)$.

3. Considere las siguientes expresiones:¿cuáles de ellas corresponden a la noción clásica de derivada?

   a) $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$

   b) $f'(a) = \lim\limits_{h\to a} \dfrac{f(h) - f(a)}{h - a}$

   c) $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a) - f(a-h)}{h}$

   d) $f'(a) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+2t) - f(a)}{t}$

   e) $f'(a) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+2t) - f(a+t)}{2t}$

   En aquellas que no sean equivalentes a la noción de derivada clásica, se cumplen reglas como la del producto y la suma?

4. Siguiendo a Leibniz consideremos algunos de sus desarrollos en álgebra y geometría al estudiar la geometría de curvas estaba mas interesado en los métodos que en los resultados, y muy especialmente en la posible manera de transformar estos métodos en algoritmos que pudieran llevarse a cabo por medio de formulas. Dicho en pocas palabras, lo que buscaba era un cálculo para tratar los problemas geométrico-infinitesimales.

   La segunda de estas ideal fundamentales se refiere a las sucesiones de diferencias; en sus estudios sobre sucesiones numéricas $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y sus sucesiones numéricas asociadas, $b_1 = a_1 - a_2, b_2 = a_2 - a_3, b_3 = a_3 - a_4, \ldots$ se habia dado cuenta Leibniz de la relación:

   $$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = a_1 - a_{n+1},$$

   lo que significa que las sucesiones de diferencias se podian sumar facilmente, un descubrimiento del que hizo buen uso para resolver el problema que le habia planteado Huygens en 1672, consistente en sumar la serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots$, donde los denominadores son los llamados «números triangulares» $\frac{r(r+1)}{2}$. Descubrió que los términos de la serie pueden expresarse como diferencias,

   $$\frac{2}{r(r+1)} = \frac{2}{r} - \frac{2}{r+1},$$

Gil Alberto Donado Núñez
Jorge Adelmo Hernández Pardo
José Reinaldo Montañez Puentes

Universidad Pedagógica Nacional
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Universidad Nacional de Colombia

adonado@pedagogica.edu.co
jahernandezp@udistrital.edu.co
jrmontanezp@unal.edu.co

DE LA GEOMETRÍA AL CÁLCULO: PROBLEMAS QUE PROPICIAN ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA DE CLASE

de donde

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{r(r+1)} = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

Y en particular la serie infinita dada tiene como suma 2. Este resultado le impulsó a estudiar todo un sistema de sucesiones de sumas y diferencias relacionadas con ésta, que resumió en el denominado «triángulo armónico», en el que las filas oblicuas son las sucesivas sucesiones de diferencias de la primera de ellas, de modo que sus sumas pueden ser facilmente obtenidas del diagrama.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & & \\
 & & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & & \\
 & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & & \\
 & \frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} & \\
\frac{1}{8} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{8} \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & &
\end{array}$$

Figura 10: Triángulo armónico de Leibniz

«triángulo armónico» de leibniz. Los números que aparecen en la fila enésima son

$$\left[(n-1)\binom{n}{k}\right]^{-1}$$

Las sumas se pueden obtener directamente del diagrama, por ejemplo

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

a) Use el diagrama para encontrar las siguientes sumas:

a' $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots$

b' $\frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \ldots$

b) Justifique su respuesta.

c) Usando el diagrama escribir $\sqrt{\frac{1}{5}}$ como una serie telescopia

Estos resultados no eran del todo nuevos pero hiceron darse cuenta a Leibniz de que el formar las suceines de sumas eran operaciones inversas una de la otra. Esta idea fundamental adquirio todo su significado cuando la aplicó a la geometría. La curva de la figura 11 define una sucesion de ordenadas equidistantes y. Si su distancia es 1, la sucesión de ordenadas da una aproximación de la cuadratura de la curva, y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas nos da aproximadamente la pendiente de la correspondiente tangente.

Más aún, cuando más pequeña se elija la unidad 1, mejor es la aproximación. Leibiniz dedujo de esto que si la unidad pudiera ser tomada *infinitamente pequeña*, estas aproximaciones se harían exactas; en este caso la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangentesería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas. De esta manera, de la reciprocidad de las operaciones de tomar sumas y diferencias, sacó Leibniz la conclusión de que las determinaciones de cuadraturas y de tangentes eran tambiémn operaciones inversas una de la otra.

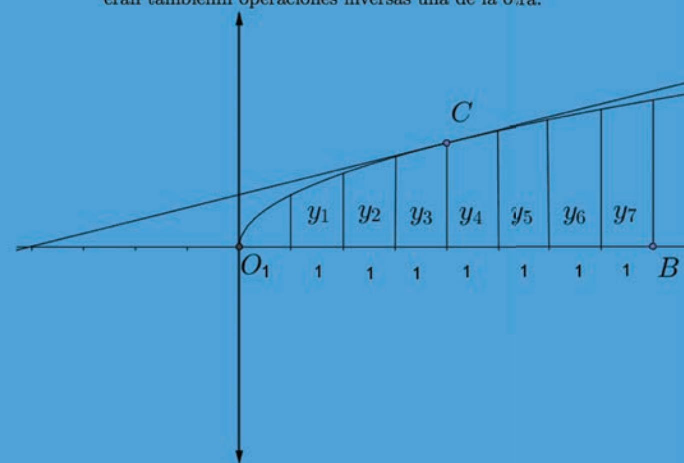

Figura 11: Sucesiones de Leibniz

DE LA GEOMETRÍA AL CÁLCULO: PROBLEMAS QUE PROPICIAN ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA DE CLASE

Gil Alberto Donado Núñez
Jorge Adelmo Hernández Pardo
José Reinaldo Montañez Puentes

Universidad Pedagógica Nacional
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Universidad Nacional de Colombia

adonado@pedagogica.edu.co
jahernandezp@udistrital.edu.co
jrmontanezp@unal.edu.co

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Así pues, la segunda idea principal de Leibniz, a pesar de lo imprecisa que hacia 1673, sugería ya un cálculo inifinitesimal de sumas y diferencias de ordenadas mediante el cual podían ser determinadas cuadraturas y tangentes y en el que estas determinaciones aparecian como procesos inversos. La idea hacia asimismo plausible el que, de la misma manera que en las sucesiones la determinación de diferencias es siempre posible, pero no la determinación de sumas, así en el caso de las curvas las tangentes son siempre faciles de hallar pero no así las cuadraturas.

Imagine que en la figura anterior entre O y B hay n unidades que notaremos $0 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = B$.

Una aproximación de la pendiente de la tangente es:

$$x_i = \frac{f(x_i) - f(x_i - 1)}{x_i - x_i - 1} = f(xi) - f(x_i - 1),$$

para $0 < i \leq n$.

a) Utilice lo anterior para intuir una aproximación al segundo teorema fundamental del cálculo mediante la expresión:

$$\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$$

b) Discuta la veracidad de la siguiente igualdad:

$$\int \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Referencias

1. Apostol, T. (1988)., *CALCULUS*. Vol I. Reverté, Colombia.

2. Azcárate, C. Deulofeu, J. (1996)., *Funciones y Gráficas*. Síntesis. España.

3. Chinn, W. Steenrod, N., (1975). , *Primeros conceptos en topología*. Alianza. Madrid, España.

4. Guinness, G. (1980). , *Form the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History*. Alambra, España.

5. Santos, L. (2007). *La resolución de problemas matemáticos*. Trillas, México.

6. Spivak, M.(1992). *CALCULUS*. Ed II. Reverté, México.