REVISTA EMA
1997, VOL. 2, Nº 3, 237-246

UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN COSENO[1]

MARGARITA LASCANO Y ROSA RAMÍREZ

Este artículo reporta un trabajo de investigación-acción realizado en torno a la enseñanza y aprendizaje de la función coseno en un grupo de alumnos de bachillerato. La propuesta de enseñanza enfatiza la importancia del empleo de un instrumento manipulable que facilita la construcción de significado del correspondiente tópico.

INTRODUCCIÓN

La investigación-acción[2] que aquí se reporta es un primer esfuerzo para buscar estrategias de enseñanza que promuevan el desarrollo del pensamiento de alto nivel en nuestros estudiantes. Comenzamos con una pequeña experiencia en la enseñanza de la función coseno. Se realizó un diagnóstico a los estudiantes de grados 10 y 11, y a los profesores del área de matemáticas de la institución con la intención de identificar errores y dificultades en el manejo del tema y de sus prerrequisitos. Posteriormente, se diseñó una secuencia de enseñanza para tratar una dificultad específica en la comprensión del tema por parte de los estudiantes, se llevó a la práctica, y se observaron y analizaron los resultados obtenidos.

Al diseñar la secuencia tuvimos dos presupuestos. En primer lugar, la construcción del conocimiento matemático es un proceso que trasciende las acciones que se representan con signos y símbolos, para encontrar la riqueza de relaciones entre los objetos matemáticos. En segundo lugar, "hacer" matemáticas es experimentar, abstraer, generalizara y globalizar.

Con estas ideas en mente, quisimos diseñar una secuencia de enseñanza que le permitiera al estudiante empezar por la manipulación de un objeto (pensamiento concreto), después realizar la simbolización (pensamiento simbólico) y luego generalizar el concepto que había estado manipulando (pensamiento formal). En este artículo se presenta la experiencia vivida, los logros obtenidos y las dificultades encontradas en el desarrollo del trabajo.

1. Este artículo fue editado por Patricia Perry, investigadora de "una empresa docente".
2. Este trabajo se realizó en el marco del proyecto PRIME I, desarrollado por "una empresa docente" entre 1995 y 1997 y financiado por el Ministerio de Educación Nacional, la Fundación Corona, Colciencias, el Banco Internacional de Desarrollo, y el IDEP.

CONTEXTO

La experiencia se desarrolló con un grupo de estudiantes de grado 10, del Colegios Distrital Rodrigo Lara Bonilla en la jornada de la tarde. Este plantel está ubicado en Ciudad Bolívar, al suroccidente de Bogotá. Tiene una población de 200 estudiantes en 10 grado, con edades que oscilan entre los 15 y los 17 años. De estatus social medio-bajo, estos alumnos presentan un grado bajo de desnutrición; 15% de los estudiantes trabaja y estudia, 10% sostiene la familia, 6% es padre o madre de familia y 30% proviene del campo por causa de la violencia que allí se vive. Además, algunos son maltratados tanto física como psicológicamente por sus padres o adultos que los tienen a su cargo, y algunos se involucran en actividades de pandillas juveniles para sobrevivir en este medio. Tales características no son las más favorables para un ambiente óptimo de aprendizaje.

Además, se ha observado que los estudiantes presentan dificultades en la conceptualización de algunos temas en matemáticas y que hay desinterés y desmotivación hacia la materia. Esta situación hace que se presenten problemas en otras áreas que requieren de la utilización de conceptos matemáticos.

En el curso en el que se realizó la experiencia ya se había tratado el concepto de coseno como una razón trigonométrica en el contexto de los triángulos rectángulos. También, algunos conceptos relacionados con las funciones: función como un subconjunto de pares ordenados, dominio y recorrido y representación gráfica en el plano cartesiano.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

En nuestra labor como educadoras hemos visto que los estudiantes, al iniciar los estudios de trigonometría tienen dificultad en la apropiación de los conceptos relacionados con las funciones trigonométricas. Esto provoca en ellos una “matemafobia” y desinterés por la asignatura. Sin embargo, para aprobar las evaluaciones, los estudiantes memorizan dichos temas y mecanizan el desarrollo de los ejercicios que se les proponen sin tener en cuenta ni analizar el significado y aplicación de esos conceptos en otras áreas.

La prueba de diagnóstico nos corroboró que un error típico y quizás uno de los más sobresalientes en el tema, es que los estudiantes escriben igualdades del tipo $\cos = a$, donde a representa algún número. Esto refleja que ellos no conciben el coseno como un operador que se aplica sobre medidas de ángulos y por tanto tienen una comprensión deficiente del concepto.

Esta deficiencia parece transferirse al concepto de coseno como función y se refleja particularmente en errores relacionados con transformaciones de la función coseno, tales como: $\cos(kx) = k\cos x$, y, $\cos(x + k) = \cos x + k$.

Los resultados obtenidos en el diagnóstico y nuestra experiencia docente nos lleva a suponer que, en general, la dificultad de los estudiantes en este tema, dificultad que explica los errores mencionados, consiste básicamente en que no dan significado a la expresión $f(x) = \cos x$. Por tanto, consideramos pertinente construir un apoyo didáctico para soportar experiencias concretas que permitieran a los estudiantes tener una vivencia a partir de la cual pudieran elaborar el significado del concepto en cuestión.

FUNDAMENTO DE LA ESTRATEGIA

Creemos que en el proceso de aprender se requieren experiencias en las que el estudiante se pueda involucrar de diversas maneras, que van desde manipular objetos concretos hasta símbolos con los que se representan las ideas matemáticas, todo ello con el propósito de dar significado a los conceptos y procedimientos matemáticos que centran la atención de las matemáticas en el colegio. Para el caso particular de la función coseno se tiene la hipótesis de que el estudiante puede construir un significado de la expresión $f(x) = \cos x$, por medio de su interacción con un instrumento ortogonal manipulable cuando realiza una serie de tareas propuestas por el profesor.

Dicho instrumento, cuya construcción se describe en el Anexo, consta de dos cuadrados de cartulina, cada uno de 20 cm. de lado, que se superponen. En la cara superior hay dibujada una circunferencia unitaria —la unidad de medida es 5 cm.— cuyo centro es el origen de un plano cartesiano, también dibujado en la cara superior. A la circunferencia se le ha recortado 1/4 de ella, que corresponde a una porción del primer cuadrante del plano. Sobre el correspondiente arco de circunferencia se han marcado medidas de amplitudes de ángulos entre 0° y 90°, tal como se aprecia en un transportador. Sobre la parte positiva de los ejes hay escritos algunos valores del intervalo [0, 1] que representan algunos valores de la función coseno. Entre los dos cuadrados de cartulina hay insertado un mecanismo manipulable conformado por otro pedazo de cartulina y un pedazo de papel mantequilla. En el pedazo de cartulina —sujeto al cuadrado inferior— hay señalado un plano cartesiano cuyo origen coincide con el centro de la circunferencia. Sobre el pedazo de cartulina está colocado el pedazo de papel mantequilla en el que hay dibujado un plano cartesiano cuyo origen se puede deslizar sobre el arco de circunferencia para formar infinidad de triángulos rectángulos para los cuales la hipotenusa es uno de los ejes del plano dibujado en el pedazo de cartulina del mecanismo manipulable; un cateto es uno de los ejes dibujado en el pedazo de papel mantequilla, que cae perpendicularmente sobre alguno de los ejes del plano dibujado en el cuadrado de cartulina, y el otro cateto es la proyección ortogonal correspondiente.

Consideramos que el valor del empleo del instrumento radica en que para cada triángulo rectángulo que el estudiante construya, él puede asociar la razón trigonométrica —que maneja previamente— con el valor del coseno visto como la abscisa de la proyección del punto de corte de la hipotenusa y la circunferencia, sobre el eje X. Además, al poder construir sucesivamente diversos triángulos rectángulos y encontrar para cada ángulo agudo un valor correspondiente para la abscisa de la proyección, el estudiante puede experimentar la noción de variación para la función coseno. La actividad física y mental que el estudiante debe realizar para responder la guía de trabajo que se le proponga, utilizando el instrumento, le permite pasar de una representación concreta a una representación simbólica con lo cual se inicia la abstracción de la relación funcional y se abre el camino para la construcción de la gráfica cartesiana de $f(x) = \cos x$.

Suponemos que la estrategia pedagógica —uso del instrumento para desarrollar la guía de trabajo— permite que el estudiante, por medio de una manipulación concreta, alcance la comprensión de un objeto matemático abstracto, $f(x) = \cos x$.. Al utilizar el instrumento, el estudiante puede observar las características del objeto matemático cuyo significado se está construyendo; en particular, puede "ver" la existencia de un ángulo de 0º y los valores del coseno para los ángulos de 0º y 90º. Además, el instrumento propicia una actitud de búsqueda y de ensayo de caminos. Estas actitudes son coherentes con lo que suponemos es "hacer" matemáticas y se alejan de las que propicia una concepción autoritaria de la enseñanza que privilegia una sola forma de entender y aprender.

Así, pues, lo que esperamos es aproximar al estudiante al desarrollo de sus capacidades de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, rigor y precisión que caracterizan al pensamiento formal. El instrumento tiene utilidad práctica ya que permite codificar información (asociar amplitudes de ángulos con el valor del coseno) y proporciona una comprensión, entendida como un proceso a través del cual el alumno relaciona (conexión) un *objeto de comprensión* (el concepto $f(x) = \cos x$.) con una *representación* del mismo (simbólica y gráfica) y con sus *modelos mentales* (preconceptos). El proceso descrito anteriormente pretende apuntar al logro de los fines y metas de la educación matemática que propone Rico (1995, p. 13).

PROPUESTA SECUENCIAL DE LA ENSEÑANZA

A continuación se describe la secuencia de actividades que se desarrolló con los estudiantes para abordar el problema de la falta de significado de la expresión $f(x) = \cos x$.. Se presentan también las observaciones más importantes registradas en torno al desarrollo de las actividades.

Primera actividad

Esta actividad tuvo dos partes. Con ella se pretendía favorecer el pensamiento concreto de los alumnos. Se inició con la construcción del instrumento ortogonal manipulable, para lo cual se entregó a cada alumno una guía con las correspondientes instrucciones (ver Anexo). Enseguida, se explicó el uso del instrumento. Durante esta primera actividad se observó que cuando los alumnos manipularon el instrumento pudieron ver claramente cómo un triángulo rectángulo que mantiene constante la longitud de su hipotenusa, modifica la longitud de sus catetos según la variación de las amplitudes de sus ángulos agudos.

La segunda tarea se centró en la utilización del instrumento por parte de los alumnos para construir ciertos triángulos rectángulos y así establecer la medida de la longitud de uno de los catetos (el adyacente al ángulo considerado); además, se pidió a los alumnos que representaran las situaciones correspondientes gráficamente. En esta actividad se trabajaron triángulos rectángulos de 45º y de 65º. También se preguntó el valor del cateto adyacente para un ángulo de 0º y uno de 90º. Con respecto a la construcción de los dos triángulos y a la respuesta a la pregunta sobre la medida del cateto adyacente se obtuvo 90% de aciertos, lo cual indica que los estudiantes pudieron identificar y construir triángulos rectángulos para casos específicos y también pudieron asociar la medida del cateto adyacente con la abscisa de la proyección del punto de corte (del arco de circunferencia con la hipotenusa del triángulo) sobre el eje X. Con respecto a encontrar el valor del cateto adyacente para los ángulos de 0º y 90º se obtuvo 60% de aciertos, lo cual nos indica que no todos lograron realizar la proyección para esos casos especiales.

Segunda actividad

En la primera parte de esta actividad se plantearon dos tipos de preguntas que debían ser respondidas con la ayuda del instrumento: dado el valor del ángulo —no mayor de 90º, se pedía calcular el correspondiente valor del coseno; y dado el valor del coseno (entre 0 y 1), se pedía determinar el valor del ángulo. En estos ejercicios, la pregunta se formuló empleando tanto la expresión verbal como la simbólica, por ejemplo:

1) El coseno del ángulo de 22º es _____; cos 22º = _____

2) El coseno del ángulo β es 0.8, cos β = 0.8; m (β) = ______

En la segunda parte de la actividad se introdujeron dos formas de notación relacionadas: por un lado, cos $x = y$, y por otro lado, la notación en términos de pareja ordenada, (x, cos x). Se plantearon doce situaciones en las que se daba diferente tipo de información y los alumnos debían utilizarla para completar lo que faltara, por ejemplo:

1) cos 45º = _____; (45º, _____)

2) cos _____ = ______; (270º, 0)

Con esta actividad se pretendía que el alumno llegara a relacionar dos formas de representación simbólica. Dado el valor del ángulo, hallar el valor del coseno se dio con acierto en un porcentaje de 78%. Esto indica que los alumnos fueron capaces de hallar el valor de la proyección y relacionar ese valor con el valor del coseno. Dado el valor de la proyección, identificar uno de los ángulos (arcocoseno) se presentó con un porcentaje de 53%. La diferencia en los porcentajes de acierto frente a los dos tipos de preguntas nos hace pensar que una buena proporción de alumnos no tiene completamente desarrollado el pensamiento reversible. Con respecto a la tarea en que se les pidió completar las parejas según el modelo, 53% de los estudiantes no presentó dificultad; esto indica que pudieron relacionar el valor del ángulo y el valor de la proyección ortogonal como una pareja ordenada (x, cos x) y expresarla como cos $x = y$, es decir como una función donde el valor de y depende del valor del ángulo.

En esta tarea se plantearon casos en los que debían buscar el coseno de ángulos mayores de 90º y casos en los que debían encontrar un ángulo cuyo coseno es negativo; esto tenía la intención de presentar al alumno situaciones en las que tuviera la necesidad de buscar una forma de calcular los valores sin la ayuda directa del instrumento pero con base en el método dado para ángulos del primer cuadrante. En el primer caso, los estudiantes no presentaron dificultad para completar las expresiones tales como cos120º = __; (120º, ___). En el segundo caso, casi la totalidad del grupo presentó dificultad. Para calcular, por ejemplo, el valor del ángulo x en la expresión cos x = -0.3 buscaban el valor del ángulo del primer cuadrante para el cual su coseno es 0.3 —más exactamente, buscaban el punto de corte de ese ángulo con la circunferencia y luego consideraban su opuesto en el segundo cuadrante; pero, como en el instrumento el correspondiente arco de circunferencia no estaba graduado, no podían deducir el valor del ángulo. Ante esa dificultad, ellos recurrían al uso de la calculadora pero como no sabían introducir datos negativos, decidieron calcular arcocos 0.3 y tomaban como respuesta del ejercicio que estaban realizando el opuesto del valor que hallaban.

Tercera actividad

En la tercera actividad se pidió a cada alumno que construyera, sobre un pliego de cartulina, la gráfica cartesiana de la función coseno. Se les sugirió que todos trabajaran con una misma escala y que comenzaran por ubicar las parejas ordenadas que habían encontrado en la actividad anterior. Unieron los puntos ubicados y así lograron la gráfica de la función para valores de la variable menores de 90º. Puesto que el instrumento ortogonal manipulable con base en el cual se había trabajado hasta el momento está diseñado para ser utilizado en casos de ángulos no mayores de 90º, la determinación de otros puntos de la gráfica, se hizo con base en preguntas formuladas por el profesor a todo el curso, que buscaban que los alumnos transfirieran lo hecho hasta ese momento. Al final de ese proceso, 86% de los alumnos tenía construida la gráfica de la función coseno para valores del ángulo entre -360º y 360º. Con esto se pretendía que los alumnos alcanzaran un mayor nivel de globalización del concepto de la función coseno.

Frente a esta actividad, los estudiantes mostraron una actitud positiva: todos tenían su material completo y se preocuparon por entregar el trabajo de la mejor manera posible. Gracias a que todos estaban utilizando la misma escala para hacer la gráfica, los alumnos fueron capaces de corregir un error que presentaba la guía de trabajo. La mayoría de los alumnos pudieron argumentar con facilidad y propiedad en la puesta en común sobre las características de la función y entender que el valor de la función coseno lo da la abscisa de la proyección del punto de corte del radio del círculo goniométrico con la circunferencia, medida que depende del valor de la amplitud del ángulo en cuestión.

Entendieron con facilidad por medio del instrumento, por qué el coseno de 0º es igual a 1 y el coseno de 90º es igual a 0, ya que pudieron verlo concretamente. Además esta actividad despertó la necesidad de trabajar la operación inversa de la función coseno (arcocoseno) y aunque no se llegó a la simbolización el estudiante entendió el concepto y con esto consideramos que se favoreció el desarrollo de su pensamiento reversible. También se observó que al trazar la curva, los estudiantes tienden a hacer trazo rectilíneo, es decir, unir dos puntos consecutivos por medio de una línea recta. Cuando se les pidió que generalizaran las características de la gráfica para los ángulos negativos concluyeron que ella es simétrica con respecto al origen.

Después de terminada la representación gráfica se formularon tres preguntas acerca de la función, preguntas que debían poder responder al interpretar la representación gráfica hecha anteriormente. Se encontró que 97,9% de los alumnos identificó el dominio, el rango, el valor máximo y el valor mínimo de la función. Esto nos da indicios acerca de la interiorización del concepto de función coseno y el establecimiento de un significado.

Sin previo aviso se realizó una evaluación del trabajo por medio de una prueba escrita. El resultado obtenido fue satisfactorio: 77% de los estudiantes alcanzó el objetivo. Consideramos que este porcentaje es alto si se tiene en cuenta el contexto en que se ha venido desarrollando el estudiante y que la evaluación fue realizada sorpresivamente y no inmediatamente a la terminación de la actividad cuando estaban trabajando otro tema.

CONCLUSIONES

Puesto que la matemática es una ciencia cuyos objetos son abstracciones mentales, su enseñanza requiere de referentes concretos a través de los cuales sea posible la manipulación de dichos objetos para lograr esas abstracciones. De acuerdo con los resultados obtenidos, la actividad realizada con el instrumento ortogonal manipulable permitió a los estudiantes observar, comparar, construir, relacionar y analizar el comportamiento y características de un objeto matemático encontrándole un sentido.

Esto nos demuestra que como educadores en matemáticas, debemos ser creativos en la búsqueda de alternativas que permitan a los estudiantes caminar por los diferentes niveles del pensamiento y superarlos para llegar a una comprensión del conocimiento matemático en una forma más dinámica, interactiva y útil. Un trabajo de los educadores en este sentido, además, permite hacer notar a los estudiantes que los datos y objetos obtenidos no forman parte de una invención arbitraria de la mente del profesor sino que son reales, que los estudiantes mismos pueden construir tales objetos con sus propios recursos y que el maestro está allí sólo para orientar mas no para transmitir un recetario porque sí.

Como conclusiones del trabajo que hemos realizado en este proyecto hemos comprendido varios puntos.

En primer lugar, al tener un referente concreto (el instrumento manipulable) los alumnos tienen oportunidades de desarrollar los niveles del pensamiento lógico-formal como son: el concreto, el simbólico y la generalización; pueden involucrar juicios, interpretar, comprender, y apropiarse de un conocimiento (función coseno). Con la manipulación de un instrumento que sirva de apoyo para construir un objeto matemático (función coseno) el estudiante puede desarrollar un manejo coherente e inteligente del conocimiento matemático.

En segundo lugar, al abordar un tema suponemos que los estudiantes tienen las estructuras mentales necesarias para la comprensión de dicho tema y esto no siempre es así, por lo tanto cada vez que se pretende que los alumnos adquieran una nueva estructura de conocimiento es necesario buscar estrategias para que vayan asimilando niveles progresivos hasta llegar a las estructuras mentales necesarias paras comprender el concepto.

En tercer lugar, un cambio de actitud de los maestros y la implementación de nuevas estrategias contribuye a que los alumnos se apropien de una manera más fácil del conocimiento; además la clase se hace más activa y agradable. Ahí tenemos nuestro mayor reto.

REFLEXIÓN FINAL

Realizar esta experiencia de investigación-acción nos llevó a leer, a consultar e investigar en diferentes campos: lo psicológico, lo cognitivo, lo didáctico; a retomar el objetivo de la enseñanza de las matemáticas; y a reflexionar sobre nuestro quehacer diario como educadoras. La participación en este proyecto nos ha hecho varios aportes, entre ellos, despertar la consciencia acerca de la importancia de tomar al estudiante como persona que está en pleno desarrollo de sus potencialidades; la necesidad de no partir de supuestos erróneos como el pensar que todos los estudiantes, por estar en décimo grado y tener edades que oscilan entre 15 y 18 años, ya tienen desarrollado el pensamiento formal y por tanto no requieren de experiencias concretas; y la importancia de dominar el conocimiento matemático que se enseña.

Por otra parte, los profesores estamos acostumbrados a realizar en el aula acciones pedagógicas que son evaluadas sin dejar ningún registro escrito de manera que ese trabajo se pudiera retomar para mirar errores, dificultades y logros que podrían conducir a mejorar la enseñanza. Escribir este artículo nos llevó a tener una visión más real de cada una de las actividades, los logros alcanzados, las dificultades encontradas, y a vislumbrar posibles modificaciones que enriquezcan la estrategia.

Agradecemos a "una empresa docente", en especial a Paola Valero y a Patricia Perry por la colaboración y apoyo que nos brindaron en una forma muy amable.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *Revista EMA,* 1, 4-24.

ANEXO

Tema: Construcción del instrumento ortogonal manipulable.
Objetivo: Elaborar el instrumento ortogonal manipulable.
Material: Medio pliego de cartulina, tijeras, papel mantequilla, regla, compás, transportador, broches de presió y cinta pegante.

Actividad

1) Corta dos cuadrados de cartulina de 22 cm. de lado. Llámalos A y B.

2) Haciendo centro en el centro de la pieza B, traza un círculo de radio 5 cm. (esta medida será la unidad de longitud en el instrumento).

3) Divide el círculo en cuatro regiones congruentes, dibujando un plano cartesiano cuyos ejes coincidan con los ejes de simetría horizontal y vertical del cuadrado. Sobre el eje X positivo escribe "proyección ortogonal de la hipotenusa sobre X". Sobre el eje Y positivo escribe "proyección ortogonal de la hipotenusa sobre Y".

4) Recorta un cuarto de círculo (esto dará lugar al primer cuadrante del instrumento). Sobre ese arco marca amplitudes de ángulos centrales de 0º a 90º. Sobre el eje X positivo del cuarto de círculo recortado marca los valores correspondientes a las décimas de unidad.

5) Corta un rectángulo de cartulina de 10 cm. por 14 cm. Llámalo C. En esa pieza dibuja un plano cartesiano de ejes paralelos a los bordes de ella y de origen un punto que puede estar a 6 cm. del borde superior y a 5 cm. del borde izquierdo. Sobre el eje X positivo, localiza un punto a 5 cm., llamado C'.

6) Corta un cuadrado de papel mantequilla de 14 cm. de lado. Llámalo D. En esa pieza dibuja un plano cartesiano de ejes paralelos a los bordes de ella y de origen un punto que puede estar a 6 cm. del borde inferior y a 5 cm. del borde derecho.

7) Para unir las piezas construidas procede de la siguiente manera:

   a. En el centro de la pieza A, ubica el centro del plano cartesiano de la pieza C. Unelas con un broche.

   b. Une, por medio de un broche, el origen del plano cartesiano de la pieza D con el punto C'.

   c. Coloca la pieza B sobre la pieza D, de tal manera que coincida el eje X positivo de B con el eje X negativo de D.

   d. Pega con cinta las piezas A y B por el borde superior.

Margarita Lascano
Rosa Ramírez
Colegio Distrital Rodrigo Lara Bonilla (J.T.)
Carrera 44 No. 66 40 sur
Tel.: 7 15 10 28
Bogotá, Colombia