V Encuentro de Matemáticas Del Caribe Colombiano
1 al 4 de Julio de 2008
Barranquilla-Colombia

El proceso cognitivo de la visualización en los estudiantes de nivel superior mediante el uso de software dinámico (Cabri) en la resolución de problemas geométricos

Carlos Wilson Lizarazo Gómez [1]

1. Introducción

¿Qué ventajas o limitaciones ofrece a los estudiantes el empleo de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas? ¿Qué tipo de representaciones utilizan los alumnos al resolver problemas a través del empleo de alguna herramienta tecnológica? ¿Qué tipo de preguntas o conjeturas formulan los estudiantes en la resolución de problemas con la ayuda de la tecnología? Estas son algunas preguntas que aparecen en la agenda de investigación relacionadas con el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas.

Así, investigar y documentar los procesos cognitivos que muestren los alumnos mientras resuelven problemas o actividades con apoyo de la tecnología, como el software dinámico, resulta una tarea que puede ayudar a identificar y analizar las ventajas y/o desventajas que el uso de dichas herramientas representa en el aprendizaje de las matemáticas.

El empleo de herramientas tecnológicas en la resolución de problemas requiere amplia investigación acerca de los diferentes usos en los procesos de aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, Steen mencionan que "los resultados producidos por las computadoras y sus aplicaciones están cambiando profundamente la forma de desarrollar las matemáticas, la forma de enseñarlas, así como la forma de aprenderlas" (situado en Santos, 1997, p.10).

[1]Docente investigador Universidad del Atlántico. Adscrito a la Facultad de Ciencias Básicas

Un aspecto relevante en el empleo de la tecnología es el tipo de demostraciones o pruebas que pueden presentar los estudiantes; así, resulta necesario identificar los aspectos que se favorecen al utilizar software dinámico en actividades en la que los alumnos tengan oportunidad de descubrir relaciones, plantear conjeturas, generalizar resultados y utilizar argumentos que justifiquen sus soluciones o resultados.

La resolución de problemas que contemplen actividades que estimulen la experimentación, el descubrimiento, el planteamiento de conjeturas y la explicación, en ambientes de uso de formas de razonamiento que les permita explicar y justificar distintas relaciones matemáticas. Así, es importante analizar el impacto o relevancia del uso del software. Dinámico en ambientes de resolución de problemas donde los estudiantes consistentemente, exhiban sus formas de razonamiento.

Santos y Moreno (2001) resaltan que el uso sistemático de la tecnología con el tiempo se va convirtiendo en una herramienta poderosa para que los estudiantes le den sentido a la información, que realicen conjeturas y que examinen diferentes estrategias en la resolución de problemas. El objetivo de este estudio es documentar lo que muestra estudiantes de nivel medio superior al trabajar un conjunto de actividades con la ayuda del software dinámico. En particular, interesa analizar el tipo de representaciones, conjeturas y argumentos que utilizan los alumnos durante la solución de esas tareas.

2. Importancia del uso del software dinámico

Con el empleo software dinámico, como The Geometer's Sketchpad (Sketchpad en adelante) o Cabri-Géométre (Cabri en adelante), los estudiantes pueden trabajar actividades problemas donde tengan oportunidades de explorar, conjeturar y utilizar argumentos matemáticos, que les permitan explicar o justificar resultados que obtienen como producto de la experimentación. Un aspecto relevante con el uso de Sketchpad o Cabrí es que lo estudiantes pueden construir figuras geométricas simples y, eventualmente, involucrarse en procesos de formulación de conjeturas o búsqueda de relaciones. Así, el software puede convertirse en una herramienta poderosa que facilite el desarrollo de estrategias importantes del quehacer matemático por parte de los alumnos. Por ejemplo, en el proceso de construcción de ciertas configuraciones geométricas los estudiantes pueden formular preguntas, investigar conjeturas y buscar elementos que les permita explicar resultados.

En el siguiente ejemplo se muestra algunos conceptos y relaciones relevantes que emergen durante la construcción de una figura que incluye puntos, segmentos y triangulas, a partir del empleo de software dinámico. Además, se identifican procesos importantes del quehacer matemático, como la formulación de conjeturas, la necesidad de plantear argumentos que justifiquen la validez de ciertas relaciones, la búsqueda de invariantes y la importancia de explorar casos particulares, entre otros.

Con software dinámico los estudiantes pueden iniciar con construcciones sencillas y, también, cuestionarse acerca de relaciones que puedan surgir al ir incorporando otros elementos de la configuración inicial. En este contexto, no existe un problema inicial que resolver, sino que durante el proceso de construcción emergen preguntas que se exploran con el empleo del software.

2.1 ¿Qué significa formular preguntas y encontrar relaciones?

Los estudiantes pueden iniciar con la construcción de un segmento **AB** e identificar su punto medio **M** (ver Figura 2.1), pueden trazar la mediatriz n del segmento **AB** (la mediatriz n es la línea recta perpendicular al segmento **AB** y que contiene su punto medio **M**).

La tarea ha iniciado con un trazo sencillo; considerando la construcción que se muestra en la Figura 2.1 se pueden identificar algunas ideas importantes como por ejemplo, la igualdad de los segmentos **AM** y **MB** Y el valor de 90° para las medidas de los ángulos formados por n y el segmento **AB**, ideas que los estudiantes pueden reconocer y examinar a partir del empleo de distintos recursos matemáticos, como por ejemplo la medición de algunas partes de la configuración y la búsqueda de relaciones.

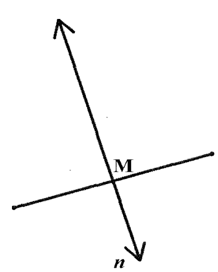


Figura 2.1: Mediatriz del segmento AB.

Los estudiantes pueden considerar el triángulo que se forma al unir un punto e de la recta n con los puntos **A** y **B**, respectivamente. Dado que C se puede mover a lo largo de n (ver Figura 2.2), los alumnos pueden preguntarse acerca de las propiedades invariantes del triángulo ABC, por ejemplo, ¿cuál es la relación entre las medidas de los segmentos AC y BC? o ¿cómo se relacionan las medidas de los ángulos CAB y CBA?

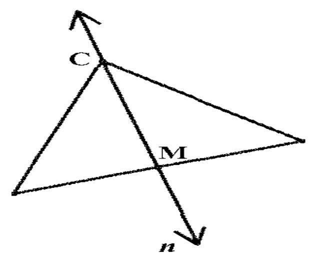


Figura 2.2: triángulo isósceles

Al calcular las medidas de los lados y ángulos internos del triángulo **ARC**, los alumnos pueden identificar algunas propiedades invariantes de la construcción. Por ejemplo, al medir los segmentos **AC** y **RC** y mover el punto C los estudiantes pueden observar que estas medidas son siempre iguales, o bien, al medir los ángulos **CAR** y **CRA** y mover el punto C pueden percibir que estos ángulos son congruentes; es decir, que el triángulo **ARC** es un triángulo isósceles (ver Figura 2.3). Con estos datos los alumnos pueden plantear alguna conjetura que los lleva al primer resultado.

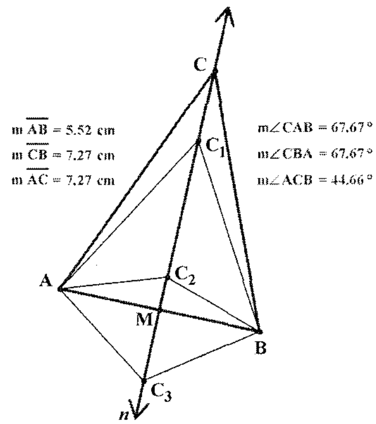
2.2 Primer Resultado: Triángulo Isósceles:

En la Figura 2.3 se muestran varias posiciones de C-Cl, C_2 y C_r sobre la recta n, además se han calculado las medidas de los lados y de los ángulos internos del triángulo **ARC**.

Los estudiantes pueden conjeturar que:

El triángulo **ARC** que se forma al unir los extremos del segmento **AR** con cualquier punto C localizado sobre la mediatriz de **AR** es un triángulo isósceles.

Figura 2.3: triángulo isósceles en varias posiciones de C



Convencidos de la validez de dicha conjetura (convencimiento obtenido por propiedades invariantes en las medidas calculadas), los estudiantes se pueden plantear la pregunta ¿por qué la conjetura es válida? (Furinghetti y Paola, 2003, p. 402); es decir, los alumnos pueden justificar la igualdad de los segmentos AC y BC utilizando argumentos formales que contemplen aspectos relacionados con congruencia de triángulos.

Justificación o prueba de la conjetura: Considerando los triángulos AMC y BMC (ver Figura 2.4) los alumnos pueden justificar la congruencia entre los lados AC y BC ya que, con base en dichos triángulos, se puede deducir que (a) los segmentos MA y MB son de igual medida (M es el punto medio de AB), (b) las medidas de los ángulos AMC y BMC son de 90° (*n* es perpendicular al segmento AB por el punto M) y (e) ambos triángulos rectángulos comparten el cateto MC.

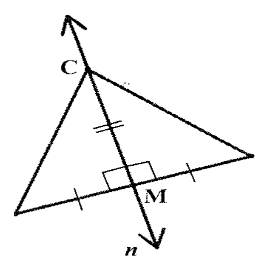


Figura 2.4: triángulo rectángulos congruentes

Por las tres consideraciones anteriores y utilizando el criterio de congruencia *lado ángulo lado* los alumnos pueden concluir que, 6, AMC, 6, BMC y confirmar el resultado; es decir, los estudiantes pueden corroborar la igualdad de los lados AC y BC.

Es importante que los estudiantes no sólo identifiquen algunas relaciones que se presentan en la construcción sino que, además, presenten argumentos que las respalden. La construcción de dichos argumentos se puede favorecer cuando los alumnos realizan las construcciones con *Sketchpad* o *Cabri*, ya que en estas construcciones deben tomar en cuenta las propiedades que están detrás de los trazos. Además, con la ayuda del software los alumnos pueden, fácilmente, asignar medidas a los segmentos o ángulos y observar sus respectivos comportamientos al mover, en este caso, el punto C a lo largo de la recta n.

Así, los estudiantes exploran o examinan la construcción, asignan medidas (segmentos, ángulos), observan invariantes, plantean una conjetura y, eventualmente, formulan una demostración; en este caso, los alumnos pueden plantear la conjetura y, en algún momento, demostrar que el triángulo ABC es un triángulo isósceles para cualquier posición de C sobre n. Considerando la misma construcción los alumnos pueden investigar otras relaciones o propiedades de las figuras.

2.3 Segundo Resultado: Triángulo Equilátero:

Moviendo C los alumnos pueden observar que hay posiciones de dicho punto sobre la recta n para las que se cumple que el triángulo formado, además de ser triángulo isósceles, es un triángulo equilátero (tres lados congruentes). Con base en las medidas calculadas, los estudiantes pueden mover el punto C hasta que las medidas de los lados y de los ángulos sean iguales, respectivamente; así, los alumnos pueden responder la pregunta ¿dónde ubicar la puna C para que el triángulo ABC sea un triángulo equilátero?

Al unir los extremos del segmento AB con cualquiera de los puntos de intersección entre la recta n y la circunferencia de centro B y radio BA, se obtiene un triángulo equilátero.

Para ubicar la posición del punto C, los estudiantes pueden construir una circunferencia de centro B y radio BA, como la que se muestra en la Figura 2.5; con esta construcción se obtiene?, dos puntos de intersección, C' y **C**", entre la línea n y la circunferencia de centro **B**. Los estudiantes pueden trazar los segmentos AC', BC', AC" y BC", al calcular las medidas de estos segmentos los alumnos pueden comprobar que son iguales a la medida del segmentos AB.

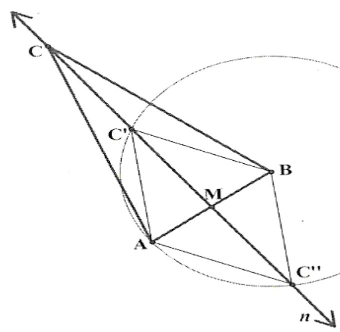


Figura 2.5: Triángulo equiláteros.

Justificación o prueba de la conjetura:
Los estudiantes pueden demostrar, por ejemplo, que el triángulo ABC' que se muestra en la figura 2.5 es un triángulo equilátero. Los lados AC' y BC' son congruentes ya que todo triángulo ABC', con C sobre n, es un triángulo isósceles. También se tiene que los lados BA y BC' también son congruentes ya que ambos segmentos corresponden a radios de una misma circunferencia.

De esta manera, los tres lados del triángulo equilátero ABC tienen la misma medida por lo que el triángulo ABC' es un triángulo equilátero. Similarmente, los estudiantes pueden demostrar que el triángulo ABC' es un triángulo equilátero.

El éxito en la construcción del triángulo equilátero puede motivar a los alumnos a preguntarse si existe otra clase de triángulos isósceles que se puedan formar en la configuración.

2.4 Tercer Resultado: Triángulo Rectángulo:

Los estudiantes pueden observar que la medida del ángulo ACB toma valores cercanos a 90°; es decir, que existen medidas para este ángulo que son menores de 90° y también existen valores mayores de 90°, lo que implica la existencia de un ángulo recto en la construcción. Específicamente, pueden surgir las preguntas: ¿existen puntos sobre la recta n con los que se pueden formar triángulos rectángulos?, ¿Dónde se localizan estos puntos? y ¿Cómo se pueden trazar dichos puntos?

Moviendo C los estudiantes pueden obtener una conjetura sobre la existencia de algún punto que permita la construcción de un triangulo rectángulo. Nuevamente, las medidas calculadas pueden jugar un papel importante en la formulación de la conjetura de los alumnos ya que se puede hallar la posición sobre la recta n en la que se logra que el ángulo ACB mida 90°.

Al unir los extremos del segmento AB con cualquiera de los puntos de intersección entre la recta n y la circunferencia de centro M y radio MA se forma un triángulo rectángulo. Una forma en que los estudiantes pueden hallar los puntos sobre la recta n para los que el triángulo formado sea un triángulo rectángulo, es trazado la circunferencia que tiene como centro el punto M y como radio la mitad del segmento **AB** (los puntos A y B pertenecen a esta circunferencia porque el segmento **AB** es diámetro de dicho círculo, ver Figura 2.6).

Justificación o prueba de la conjetura:
Al considerar, por ejemplo, el triángulo **ABC'** trazado en la Figura 2.6, se tiene que el ángulo **AC'B** es un ángulo recto. Para justificar el hecho anterior, los alumnos pueden considerar que el ángulo **AC'B** es un ángulo inscrito en una circunferencia y que su medida está dada por la mitad de lo que mide el arco que subtiende.

Dado que **AB** es diámetro de la circunferencia se concluye que el ángulo **AC'B** mide 90° y, de esta manera, se justifica que el triángulo trazado es un triángulo rectángulo. Con un procedimiento similar se puede probar que el triángulo **ABC"** también es un triángulo rectángulo. Aquí, los estudiantes emplean un teorema seguramente estudiado antes "si uno de los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia es el diámetro del círculo, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo". En este sentido, los estudiantes acceden a un resultado previamente estudiado para probar un resultado que emerge de la construcción en estudio.

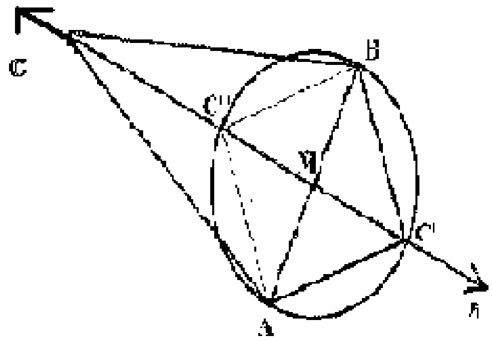


Figura 2.6: Triángulo rectángulos

El software dinámico, además de ser un recurso importante en tareas como las mostradas anteriormente, facilita el desarrollo de actividades que contemplen la generación de lugares geométricos. Este tipo de herramientas puede hacer sencilla la manipulación de figuras y es posible que ayude a los estudiantes a desarrollar y comprender pruebas matemáticas.

[Con software dinámico] los estudiantes también pueden analizar, de manera sencilla, conjeturas mediante la exploración de propiedades específicas de las construcciones que han producido, o incluso 'descubrir' nuevas propiedades. (Hanna, 1998, p. 7).

Con relación al descubrimiento de nuevas propiedades, los estudiantes pueden volver a la construcción inicial (Figura 2.2) y, con base en los trazos que ahí se presentan, los alumnos pueden cuestionarse acerca de algunas rectas notables del triángulo isósceles.
Considerando el triángulo **ABC** (ver Figura 2.7), los estudiantes pueden determinar el punto de intersección P entre el rayo bisector del ángulo **BAC** y la mediatriz del lado **BC** (recta que pasa por el punto medio del lado **BC** y es perpendicular a dicho lado).

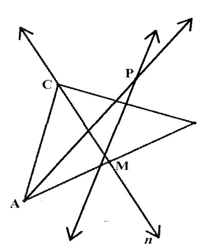


Figura 2.7: Intersección entre el rayo bisector del ángulo BAC y la mediatriz del lado BC.

Los alumnos se pueden preguntar acerca de las propiedades o características de P. Al mover C a lo largo de n, P describe un movimiento que puede ser el centro de atención de los estudiantes. Una tarea que puede ser interesante para los alumnos es la descripción de la trayectoria de P. Es posible que los estudiantes mencionen que la trayectoria de P es en forma de una parábola, o bien, que indiquen que dicha trayectoria describe parte de una hipérbola.

Es necesario propiciar un ambiente en el que los alumnos justifiquen sus observaciones ya que, de esta manera, los estudiantes tienen la facilidad de buscar evidencia que les convenza y que convenzan a los demás, aspecto importante de la argumentación en el quehacer matemático (Godino y Recio, 2001, p. 412).

2.5. Observación: La Búsqueda De Una Ecuación De Un Lugar Geométrico:

Con *Sketchpad* o *Cabri* los estudiantes pueden determinar el lugar geométrico de P cuando C se desplaza sobre la recta n -en adelante se mencionará como lugar geométrico de $P-$.

En la Figura 2.8 se muestra el rastro que deja P al mover C sobre n. Con el lugar geométrico construido, los estudiantes pueden buscar evidencia que les indique si el desplazamiento de P coincide con alguna cónica o si, por el contrario, es una trayectoria que no representa alguna cónica conocida.

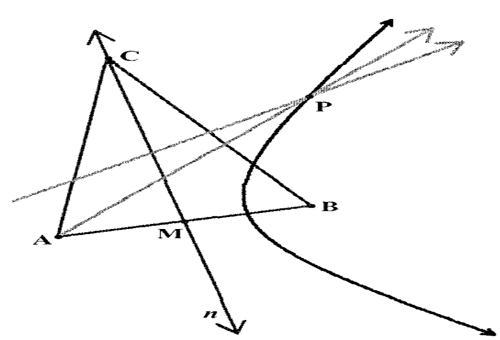


Figura 2.8: Lugar geométrico de P cuando C se desplaza sobre n.

Los estudiantes pueden utilizar *Sketchpad* o *Cabri* para explorar o analizar la construcción que se ha realizado. Usando la herramienta que permite la generación de cónicas por cinco puntos arbitrarios, los estudiantes pueden obtener trazos que les ayude a plantear alguna conjetura relacionada con el lugar geométrico de P.

La investigación empírica producida en un ambiente dinámico de geometría contiene objetos y transformaciones sobre los objetos. Preferiblemente, las investigaciones deben estimular a los estudiantes a observar y describir un patrón y, además, explorar ese patrón para determinar una generalización. (Pence, 1999, p. 430.)

Asociando una cónica al lugar geométrico: Trazando la cónica que se genera con cinco puntos arbitrarios pertenecientes al lugar geométrico de P, los alumnos pueden justificar, con un claro contraejemplo, que dicho lugar geométrico no corresponde ni a una parábola ni a una hipérbola y que, en general, no corresponde a alguna cónica.

En la Figura 2.9 se presenta una cónica generada con cinco puntos que pertenecen al lugar geométrico en discusión; se puede apreciar que dicha cónica, a la que pertenecen los puntos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 y Q_5 no contiene (o no coincide) con el lugar geométrico de P.

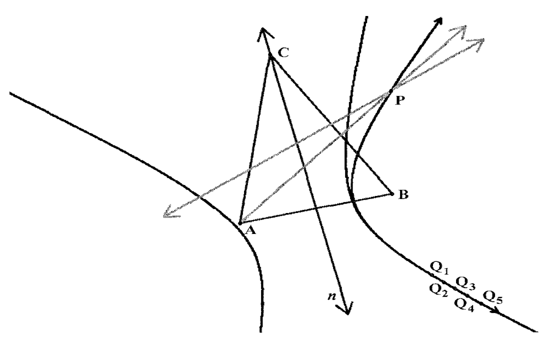


Figura 2.9: Cónica generada por cinco puntos del lugar geométrico de P.

El hecho que los trazos de la cónica de los cinco puntos y del lugar geométrico de P no quedan encimados, presenta a los estudiantes evidencia suficiente que les permite tomar la decisión de no buscar argumentos que justifiquen que el lugar geométrico de P corresponde a alguna cónica.

Así, el software permite que se tomen decisiones relevantes antes de intentar probar algún resultado; en este caso, se muestra evidencia que el lugar geométrico no corresponde a alguna cónica. En este sentido, de ViUiers (1999) menciona que "en los procesos de justificación deductiva, un papel importante lo ocupa la **búsqueda de contraejemplos**, principalmente los que resultan **empíricamente**, ya que logran el **convencimiento** del fallo de la conjetura" (p. 4, letra negrita agregada).

En el caso anterior (intersección entre una bisectriz y una mediatriz) no se generó algún tipo de cónica, sin embargo, los estudiantes pueden considerar otras rectas relacionadas con la construcción del triángulo y, de esta manera, explorar y analizar propiedades o características que se presenten. Por ejemplo, los alumnos pueden preguntarse: ¿qué sucede al considerar otro tipo de rectas?, ¿se puede generar otro tipo de lugares geométricos?, ¿existe alguna cónica al realizar otras construcciones?

2.6. La Generación De Una Hipérbola:

Los estudiantes pueden considerar la recta m (ver Figura 2.10) que contiene los puntos medios de los lados **BC** y **AB** (N Y M, respectivamente) y, además, considerar la altura h del triángulo **ABC** con respecto al lado **BC**. Al obtener el punto de intersección R entre las rectas h y m, los estudiantes pueden determinar el lugar geométrico de R cuando e se mueve sobre *n*-en adelante lugar geométrico de R-.

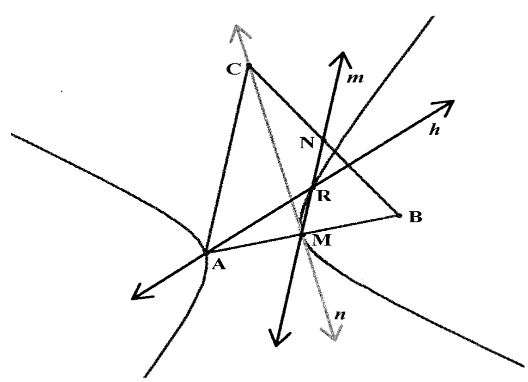


Figura 2.10: Lugar geométrico de R cuando C se mueve sobre n.

La trayectoria que sigue R al desplazarse e puede ser descrita por los estudiantes como una hipérbola ya que el lugar geométrico de R parece dicha cónica; esta conjetura la pueden comprobar generando una cónica por cinco puntos que pertenezcan al lugar geométrico de R y observar que el lugar geométrico coincide con la cónica. Con el planteamiento de la conjetura "el lugar geométrico generado por R corresponde a una hipérbola" y teniendo evidencia empírica de la validez de su conjetura, los estudiantes pueden cuestionarse acerca de los elementos que están involucrados con dicha cónica.

En este sentido, los alumnos pueden investigar la posición de los focos de esta hipérbola, los ejes de simetría, los vértices y el centro de simetría (intersección de los dos ejes de simetría).

2.6.1. Ejes de simetría, centro de simetría y vértices de la hipérbola:

Con base en la construcción que se muestra en la Figura 2.11, los estudiantes pueden suponer que uno de los ejes de simetría de la hipérbola es la recta 1 que pasa por los puntos A y B y, además, señalar que el centro de simetría de dicha hipérbola es el punto medio O del segmento AM (utilizando las herramientas del software, los estudiantes pueden trazar el punto O como la homotecia -o dilatación- del punto B con centro en A).

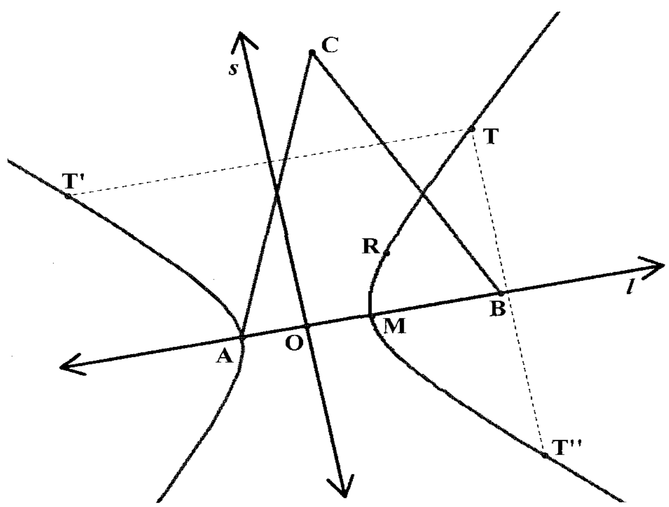


Figura 2.11: Ejes de simetría de la hipérbola generada por R.

La línea recta s (perpendicular a 1 por O) representa el otro eje de simetría; con los ejes de simetría mencionados anteriormente también se está suponiendo que los vértices de la hipérbola son los puntos A y M, respectivamente.

Aunque lo que se presenta con ayuda del software puede ser convincente, no suministra evidencia que garantice por qué las conjeturas son verdaderas. Esto puede motivar a los estudiantes a desarrollar argumentos matemáticos y justificaciones más formales para determinar si la conjetura es siempre verdadera (Santos, 2004).

Utilizando transformaciones (como rotación, traslación, reflexión, etc.) los estudiantes pueden comprobar si 1 y s son los ejes de simetría de la hipérbola; para esto, pueden colocar un punto arbitrario T sobre el lugar geométrico de R y reflejado respecto a dichos ejes de simetría (ver Figura 2.11). Moviendo T los estudiantes pueden verificar que las reflexiones respectivas, **T'** y **T"**, siempre están sobre el lugar geométrico de **R**.

Es importante resaltar que el uso del software puede ser de gran utilidad en aspectos que permitan a los estudiantes:

- Relacionar la construcción de un triángulo isósceles con hipérbolas.
- Discutir la existencia de elementos de una hipérbola -ejes de simetría, vértices, focos y centro de simetría- y sus ubicaciones respectivas dentro de la configuración.
- Realizar transformaciones geométricas -rotar, reflejar y/o dilatar puntos- para

Verificar hipótesis y conjeturar relaciones- como la relación de las posicione de los vértices respecto al segmento AB- presentando ideas matemáticas que las sustenten.

2.6.2 Focos de la hipérbola

Al identificar (i) los ejes de simetría -rectas l y s, respectivamente-, (ii) el centro de la simetría -punto O- y (iii) los vértices -puntos A y M, respectivamente-, los estudiantes pueden investigar la posición la posición en la que se ubican los focos de la hipérbola.

Retomando la definición: "hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano tal que, el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a 2 puntos fijos (llamados focos) es constante", los alumnos se pueden preguntar ¿Dónde se localiza los focos de la hipérbola? y pueden verificar si se satisface la definición de este lugar geométrico.

Los estudiantes pueden suponer que uno de los focos de la hipérbola es el punto B(con lo que B‘ -reflejo de B respecto a s- sería el otro foco, ver figura 2.12). Haciendo los cálculos pertinentes y moviendo T, los estudiantes pueden desechar su hipótesis de que B y B’ sean los focos de la hipérbola ya que no se mantiene constante el valor absoluto de la diferencia de las distancias de T a B y de T a B’.

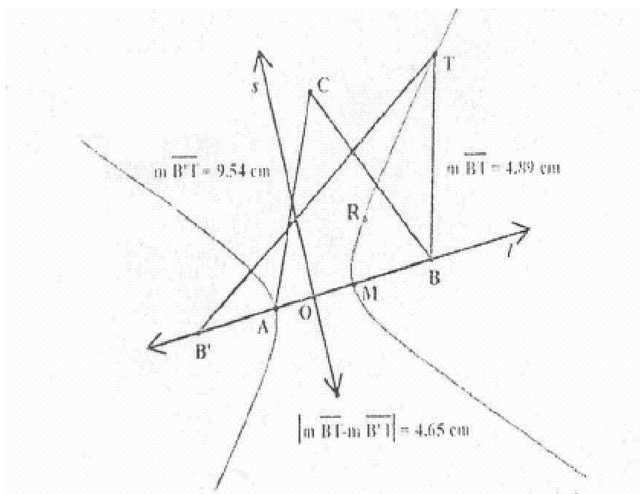


Figura 2.12: Verificación utilizando definición de hipérbola.

Para ubicar los focos de la hipérbola, los estudiantes pueden utilizar Cabri y definir un sistema de coordenadas conveniente; es decir, un sistema de coordenadas que les permita determinar una ecuación de la cónica de tal manera que sea lo más sencilla posible. Así, se debe buscar un origen del sistema de coordenadas para el cual la ecuación de la hipérbola sea de la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, ya que esta es la forma canónica de la ecuación de una hipérbola donde su centro es el punto (h, k), sus focos los puntos $(h - c, k)$ y $(h + c, k)$, donde se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$.

Los estudiantes pueden considerar el punto A como el Origen del sistema de coordenadas (ver la figura 2.13); asimismo, pueden contemplar la recta l como el eje de las abscisas y la recta u (línea perpendicular a l por A) como el eje de las ordenadas.

Por otra parte, los estudiantes pueden considerar el caso específico -sin pérdida de generalidad- en el que el punto B posee las coordenadas (1,0), es decir, AB representa la unidad; de esta manera, los puntos A y B están sobre el eje de las abscisas, lo que provoca que la ecuación de la hipérbola no sea una expresión difícil de manipular algebraicamente.

Los alumnos pueden determinar la cónica que se genera con cinco puntos del lugar geométrico de R y, utilizando la herramienta del software que permite el trazo de cónica por cinco puntos, pueden encontrar la ecuación de dicho lugar geométrico, en este caso la ecuación de la hipérbola con las características mencionadas es $2x^2 - 2y^2 - x = 0$(ver fígura 2.13).

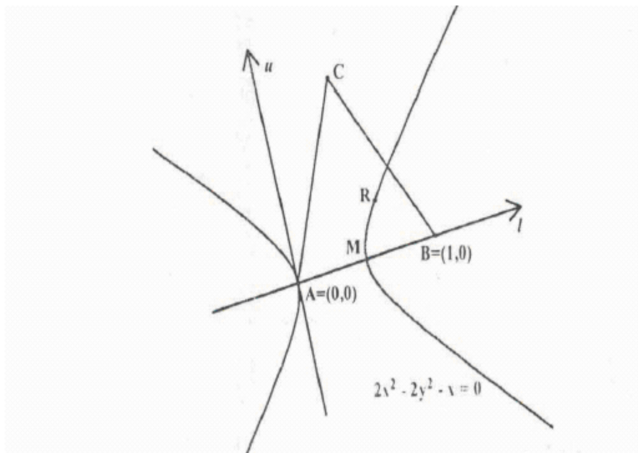


Figura 2.13: *Sistema de coordenadas y ecuación de la hipérbola.*

Con este caso particular los estudiantes pueden obtener las coordenadas de los focos de la hipérbola y, eventualmente, generalizar el resultado. Los alumnos pueden completar cuadrados para llevar la ecuación $2x^2 - 2y^2 - x = 0$ a la forma de la ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

De esta manera los estudiantes pueden determinar que la ecuación de la hipérbola se pueden expresar como:

$$\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1$$

Es importante que los alumnos hallen el valor de c, que está dado por $c = \sqrt{(1/4)^2 + (1/4)^2} = (1/4)\sqrt{2}$ ya que teniendo dicho valor los estudiantes pueden identificar los focos de la hipérbola(puntos que están sobre el eje de las abscisas); uno de dichos focos(F1) tiene como abscisa: $(1/4) + (1/4)\sqrt{2} = (1/4)(1+\sqrt{2})$; o bien ,F1 está a una distancia de $(1/4)(1+\sqrt{2})$ unidades del punto A.

Como B corresponde al punto (1,0), es decir, AB mide la unidad, el valor de la abscisa para uno de los focos F1 de la hipérbola de todo triángulo de esta construcción es $[(AB)/4](1+\sqrt{2})$ o bien, F1 está a una distancia de $[(AB)/4](1+\sqrt{2})$ unidades de A; una manera de graficar el punto F1 es trazar la homotecia o dilatación de B con centro en A y razón de $(1/4)(1+\sqrt{2})$.

Existen varias maneras de obtener los focos de la hipérbola, una es calcular la medida del segmento AB y trazar el círculo con centro en A y radio $[(AB)/4](1+\sqrt{2})$-ver figura 2.14-, el otro foco F2 se puede obtener reflejando F1 respecto al eje de simetría s.

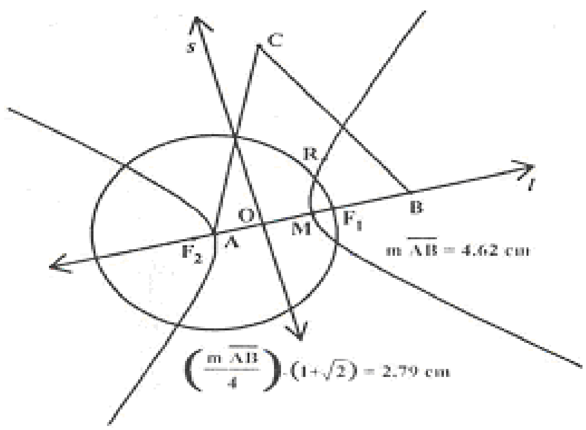


Figura 2.14: *Focos de la hipérbola.*

2.6.3 verificación usando la definición de hipérbola

Los estudiantes pueden verificar que con F1 y F2 se satisface la definición de hipérbola, para esto pueden seleccionar un punto T que pertenezca al lugar geométrico de R. en la figura 2.15 se presentan las medidas necesarias para comprobar la definición de hipérbola. Moviendo T los estudiantes pueden observar que la diferencia es una constante.

Otra forma en que los estudiantes pueden comprobar que el lugar geométrico de R es una hipérbola y que F1 y F2 son los focos de dicha hipérbola, es utilizando la herramienta de Sketchpad que permite trazar dicha cónica conociendo sus focos y algún punto del lugar.

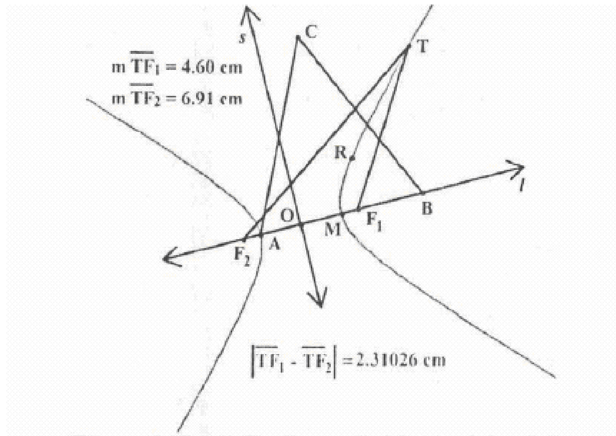


Figura 2.15: *Verificación usando definición de hipérbola.*

Geométrico de R (T); para el trazo sólo se seleccionan los puntos que representan los focos y algún punto del lugar geométrico, la hipérbola que se genera estaría sobrepuesta al lugar geométrico de R.

2.7. Visión retrospectiva

Conviene revisar los aspectos relevantes del quehacer matemático que emergen durante el desarrollo de la actividad. Un aspecto importante en la actividad desarrollada es que con el uso de software dinámico, los alumnos pueden iniciar con construcciones sencillas y pueden investigar relaciones que les permite plantear y verificar conjeturas.

Los estudiantes pueden modificar su construcción (por medio de arrastre de objetos) y observar que se mantienen las propiedades de los trazos realizados, esta es una ventaja que permite que los alumnos determinen propiedades invariantes en la configuración.

Algunas conjeturas pueden surgir a partir del proceso de medir partes de la figura y observar su comportamiento; por ejemplo, en la sección 2.2 "Primer resultado: triángulo isósceles", la conjetura "el triángulo ARC que se forma al unir los extremos del segmento AB con cualquier punto C localizado sobre la mediatriz de AB es un triángulo isósceles" se formula con base en la .medición de los lados y de los ángulos internos del triángulo ARC, posteriormente, se presenta una demostración formal de esta conjetura.

En otro sentido, hay conjeturas que pueden surgir mediante la observación de algunos objetos de la construcción; por ejemplo, en la sección 2.6 "La generación de una hipérbola", una conjetura es que ´´los ejes de simetría son las rectas 1 y s"; en este caso, se comprueba por medio de la *reflexión de un punto* que, efectivamente, dichas rectas son los ejes de simetría de la hipérbola.

Las justificaciones de resultados van desde argumentos formales (como en el Primer resultado: triángulo isósceles), hasta argumentos relacionados con el comportamiento de la longitud de ciertos segmentos al variar algún punto (comprobación de la definición de Hipérbola) y construcciones directas del software (como el trazo de cónicas por cinco puntos arbitrarios).

Algunas justificaciones no formales de ciertas conjeturas tienen detrás ideas importantes relacionadas con resultados matemáticos; por ejemplo, justificar que los focos de la hipérbola son los puntos F1 y F2 involucra ideas ligadas con la definición de hipérbola y la simetría de los focos respecto al eje simétrico s. Otro ejemplo es la justificación para los ejes de simetría (rectas 1 y .s), ya que en los argumentos se utiliza la *reflexión de un punto* del lugar geométrico de R.

Por último, es importante resaltar que en todo momento los estudiantes, con cierta dirección, son quienes experimentan, realizan construcciones, calculan medidas, buscan relaciones, plantean conjeturas, buscan evidencia para verificar resultados y, eventualmente, plantean demostraciones formales de algunas conjeturas. En esta dirección, resulta importante investigar a qué nivel un ambiente de instrucción que promueve el empleo de software dinámico, ayuda a los estudiantes en la construcción de su propio repertorio de relaciones matemáticas.

3. Objetivos de la investigación

En el desarrollo del estudio se pretende que los estudiantes se encuentren en ambientes de aprendizaje en los que se tenga oportunidad de trabajar con software dinámico un conjunto de tareas que les permita una constante reflexión acerca de las relaciones que emerjan durante el proceso de solución.

El objetivo principal del estudio es identificar algunos aspectos relacionados con el tipo de razonamiento que muestran los estudiantes en procesos de formulación y justificación de conjeturas durante el desarrollo de una serie de tareas con el uso de software dinámico. En este sentido, se pretende investigar y documentar algunos aspectos del quehacer matemático, como el trabajo con casos particulares, la formulación de preguntas, el cálculo de medidas y la búsqueda de invariantes, entre otros.

Por último, se intenta identificar alguna línea de evolución o perfil de los estudiantes en procesos de formulación y justificación de conjeturas cuando resuelven problemas con uso de software dinámico.

4. Preguntas de investigación

Las siguientes preguntas se utilizan como guías para el desarrollo del estudio; además se indican los datos o las fuentes que se utilizan para responderlas.

1. ¿Qué aspectos del quehacer matemático se favorecen cuando los estudiantes emplean sistemáticamente, el software dinámico en sus experiencias de aprendizaje? Particularmente, ¿qué tipo de conjeturas formulan los estudiantes al trabajar actividades de resolución de problemas cuando emplean, sistemáticamente, el software dinámico?.
   Se dará respuesta a esta pregunta con base en los reportes escritos que presenten los estudiantes; el análisis de dichos reportes se complementará con vídeo-grabaciones de algunos alumnos mientras trabajan en forma individual o de manera grupal, tanto en el desarrollo de las actividades como en las presentaciones o exposiciones de resultados.

2. ¿Cuál es el proceso que muestran los estudiantes al convertir el artefacto "software" en una herramienta matemática de trabajo?
   Para dar respuesta a esta pregunta, se tomará en cuenta vídeo-grabaciones de lo que realicen algunos estudiantes al resolver las actividades ya sea de manera grupal o individualmente. También se analizarán grabaciones de las construcciones realizadas en Sketchpad por parte de los estudiantes.

3. ¿Existe alguna línea de evolución en los procesos de formulación y explicación de conjeturas por parte de los estudiantes en ambientes de resolución de problemas con

uso de software dinámico?
Las fuentes principales para dar respuesta a esta pregunta serán los reportes escritos que en el transcurso de las sesiones presenten los estudiantes y las vídeo-grabaciones de presentaciones de resultados de algunos alumnos.

4.) ¿Qué tipo de estrategias de resolución de problemas muestran los estudiantes al trabajar en algunas actividades con la ayuda del software dinámico? Particularmente, ¿cuáles son las estrategias que más utilizan los alumnos en las tareas de resolución de problemas? y ¿cuáles tendencias muestran los estudiantes al usar el software dinámico como herramienta durante el proceso de solución de problemas propuestos?
Se contará con vídeo-grabación del proceso de solución que realizan algunos estudiantes y con reportes escritos que presenten en cada actividad. Las presentaciones o exposiciones de los resultados obtenidos por los estudiantes también serán datos importantes para dar respuesta a esta pregunta.

Marco Teórico

En este capítulo se presentan algunos resultados de investigación en Educación Matemática. Se revisan temas relacionados con el uso de software dinámico de geometría en actividades de resolución de problemas y, además, algunos aspectos relacionados con la demostración en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Con la incorporación de herramientas tecnológicas en Educación Matemática es importarte examinar aspectos relacionados con sus ventajas y limitaciones al utilizar tales herramientas en la resolución de problemas, asimismo, es necesario indicar algunos usos que se le puede dar a la computadora en procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

6. Resolución de problemas

La resolución de problemas ha sido identificada como un aspecto importante en Educación Matemática. En los últimos años, principalmente, se ha realizado investigación trascendental en este campo (Osawa, 2002; Polya, 1965; Santos, 1996, 1997, 1998; Schoenfeld, 1985, 1992). En relación con la resolución de problemas, el NCTM (2000) menciona que los problemas matemáticos "dan a los estudiantes la oportunidad de solidificar y ampliar sus conocimientos matemáticos [...] y pueden estimular el aprendizaje de las matemáticas en los alumnos" (p. 51).

La resolución de problemas se relaciona no sólo con el uso y el desarrollo de habilidades para que los estudiantes tengan acceso a recursos matemáticos y los utilicen (como la exploración y la generalización), sino también con estrategias que les permita trabajar con dichos recursos en diversas situaciones. Santos (1998) menciona que durante la exploración de problemas matemáticos es cuando salen a flote las.conjeturas de los estudiantes, lo cual provoca que los alumnos utilicen diversas estrategias que les permita justificar dichas conjeturas.

El NCTM (2000) señala que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas mediante la resolución de problemas se debe propiciar un ambiente de clase en el que los estudiantes:

a. tengan libertad de *comunicar* sus ideas,

b. realicen *conexiones* de nuevos contenidos con conocimientos previos y con la(vida real,

c. *razonen* acerca de algunas ideas involucradas en problemas y realicen *demostraciones* matemáticas y

d. empleen diversas *representaciones* para que puedan comprender y explicar los procedimientos que desarrollan.

Para lograr que los estudiantes reflexionen sobre el potencial de sus recursos matemáticos (uso de representaciones, razonamiento deductivo, justificación de resultados, etc.), un camino es que trabajen con problemas o con ejercicios propuestos y que propongan distintas formas de solución (Santos y Díaz-Barriga, 1999). En este sentido, "la resolución de problemas puede y debe ser usada para ayudar a los estudiantes a desarrollar fluidez en .el manejo de destrezas específicas" (NCTM, 2000, p. 51). Asimismo, Perkins menciona que "durante el proceso de resolución de problemas, el individuo usa estructuras de pensamiento para organizar y respaldar su proceso de pensamiento" (citado en Santos, 1996, p. 265), de esta manera, la resolución de problemas se convierte en una actividad importante en Educación Matemática.

6.1. Componentes de un problema

Polya establece que tener un problema significa buscar, conscientemente, alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar (citado en Santos, 1997, p. 29). Esta caracterización identifica tres componentes de un problema:

i. estar consiente de una dificultad,

ii. tener deseos de resolverlo

iii. la no existencia de un camino inmediato para resolverlo.

Un problema matemático se identifica como una tarea que requiere conocimientos matemáticos para resolverla y para la cual no existe un camino directo o inmediato para obtener su solución o soluciones (Santos, *ipíd*). En términos generales, un problema es una tarea o situación en la cual se presentan los siguientes componentes (Santos, 1997, p. 30):

i. *la existencia de un interés.* Una persona o un grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución;

ii. *la no existencia de una solución inmediata.* No hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea. Por ejemplo, la aplicación directa de algún algoritmo o conjunto de reglas no es suficiente para determinar la solución;

iii. *la presencia de diversos caminos o métodos de solución* (algebraico, geométrico, numérico). Aquí, también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución;

iv. *la atención por parte de-una persona o grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esa tarea.* Un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo.

6.2. Algunas etapas importantes en la resolución de problemas

Polya (1965) desarrolló un trabajo en tomo a la resolución de problemas matemáticos en el que identifica cuatro etapas fundamentales; en dichas fases, juega un papel importante el uso de métodos heurísticos como por ejemplo, descomponer el problema en subproblemas, resolver problemas más simples que reflejen algunos aspectos de la tarea principal y usar diagramas, entre otros.

En el inicio del proceso de solución de un problema se tiene una concepción incompleta de dicha tarea, la visión será diferente cuando se avanza un poco y cambia, nuevamente, cuando se esté cerca de encontrar su solución. Es importante tener presente diferentes etapas que están detrás del proceso de resolución de problemas ya que, así, se puede orientar a los estudiantes para que logren el resultado deseado en la tarea.

6.2.1. Fase 1: Comprensión del problema

En muchas ocasiones los estudiantes cometen el error de trabajar en la resolución de un problema para contestar una pregunta que no comprenden. Es de temerse lo peor si los estudiantes comienzan a realizar cálculos o construcciones sin haber entendido el problema. En esta etapa se encuentran las estrategias que ayudan a representar y comprender las condiciones del problema.

Los alumnos no sólo deben comprender el problema sino también deben desear resolverlo. La tarea debe seleccionarse en términos del tipo de recursos y estrategias potenciales que los estudiantes puedan emplear en su solución; es decir, el problema debe estar al alcance cognitivo de los alumnos de manera que sean tareas que puedan solucionar.

Algunas preguntas que se pueden presentar en la fase de comprensión del problema y que ayudan a que los estudiantes puedan separar las principales partes del problema, la incógnita, los datos y la condición son, por ejemplo: ¿cuál es la incógnita?; ¿cuáles son los datos?; ¿cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿es insuficiente?, ¿redundante?, ¿contradictoria?

Como parte de otras heurísticas importantes presentes en esta fase, los estudiantes deben considerar las principales partes del problema bajo diversos ángulos y repetidas veces. Si el problema tiene relación con alguna figura, los alumnos deben dibujar una gráfica o diagrama y destacar en dicha figura la incógnita y los datos. Los estudiantes deben introducir una notación adecuada para dar los nombres a los diferentes elementos que se presentan en la figura.

6.2.2. Fase 2: Concepción de un plan

Poner en pie un plan y concebir la idea de la solución no tiene nada de fácil. En este proceso de la elaboración de un plan para resolver un problema se ponen en juego los conocimientos ya adquiridos, los hábitos de pensamiento y la disposición que muestren los estudiantes. Es importante captar las relaciones que existen entre los diversos elementos del problema, ver lo que liga a la incógnita con los datos con el fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan. Se tiene un plan cuando se sabe qué cálculos, qué razonamientos o construcciones se han de efectuar para determinar la solución de la tarea.

Esta fase se considera como la etapa esencial en el proceso de solución de un problema. Aunque el diseño de un plan puede tomar forma poco a poco. También puede tomar forma después de ensayos, aparentemente, infructuosos que pueden provocar ideas brillantes. Claro está, las buenas ideas se basan en la experiencia pasada y en los conocimientos adquiridos previamente.

Es recomendable pensar en problemas conocidos que tengan una estructura análoga a la del que se quiere resolver y, así, establecer un plan de solución. Por lo tanto, es conveniente que los alumnos aborden un problema planteándose la pregunta ¿conoce algún problema relacionado? Asimismo, se recomienda que los estudiantes observen la incógnita y que piensen en algún problema que sea familiar y que tenga la misma incógnita o al menos una similar.

Otra estrategia que puede ayudar a los estudiantes en la construcción de un plan de solución es cambiar, transformar o modificar el problema. Una pregunta sugerida para dicha transformación del problema es: ¿puede enunciarse el problema en forma diferente?, de esta manera, se puede trabajar con casos generales o particulares, se pueden emplear analogías, se puede descartar una parte de la condición, etc.

Es importante resaltar que en esta fase los alumnos pueden desviarse y alejarse del problema hasta perderlo totalmente de vista, para evitar este riesgo o para conducir a los estudiantes nuevamente al problema original, se pueden usar las preguntas: ¿ha empleado todos los datos?, ¿ha hecho uso de toda la condición?, ¿ha considerado todas 'las nociones esenciales concernientes al problema?

6.2.3. Fase 3: Ejecución del plan

Llevar a cabo el plan es mucho más fácil que su elaboración; principalmente, lo que se requiere en esta, fase es traducir las ideas y estrategias del plan en una serie de operaciones matemáticas. Si los estudiantes trabajan en la concepción del plan, aunque lo hagan con ayuda del profesor, no existe el peligro de que se les olvide. Una estrategia importante en esta fase es que los estudiantes verifiquen cada paso que realizan, es decir, que estén *monitoreando* lo que efectúan.

Los estudiantes deben comenzar a resolver un problema cuando estén seguros de poder suplir los detalles menores que puedan necesitarse.

6.2.4. Fase 4: Visión retrospectiva

Esta etapa es una fase importante y muy instructiva de la resolución de problemas. Si los estudiantes, en vez de dar por concluida la tarea y dedicarse a otras cosas una vez que han obtenido la solución y expuesto el resultado, reconsideran la solución, reexaminando el resultado y el camino que los condujo a ella, pueden consolidar sus conocimientos y desarrollar sus aptitudes de resolución de problemas.

Después de haber ejecutado el plan, los estudiantes tienen buenos motivos para creer que su solución es correcta ya que han redactado dicha solución verificando cada paso del razonamiento. No obstante, puede haber errores, sobre todo si el razonamiento es largo y enredado. Por lo tanto, se recomienda que los estudiantes verifiquen sus resultados y para esto se pueden utilizar las preguntas: ¿puede verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?

¿Puede obtener el resultado de un modo distinto? La pregunta anterior es importante que se presente en la resolución de problemas ya que obtener pruebas diferentes ayuda a que los estudiantes se convenzan del resultado; asimismo, los alumnos se pueden preguntar si ¿pueden ver el resultado de golpe?, es decir, si pueden obtener, el resultado de forma inmediata, ya que es preferible un razonamiento corto y simple a uno largo y complicado.

Un punto importante es que para resolver un problema, no hay que estar casados con una técnica de resolución, sino que hay que ser flexibles y estar abiertos a otros métodos de solución. Combinando la utilización de varios métodos, evitaremos la utilización ciega de un método, (Flores, 1997, p. 49)

Es importante que los estudiantes se cuestionen si ¿pueden utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema? Examinando el método que les ha llevado a la solución, los estudiantes pueden captar su razón de ser y tratar de aplicarlo a otros problemas, obteniendo otro beneficio de su esfuerzo.

6.3 Algunos procedimientos que realizan los estudiantes al resolver problemas

Perkins y Simmons (1988) indican que la resolución de problemas comprende más que heurísticas generales, tales como descomponer el problema en partes manejables, controlar el tiempo consumido en algún procedimiento de solución y buscar caminos alternativos para su solución. La resolución de problemas también puede comprender actitudes y creencias de apoyo en su proceso.

Sin embargo, el enfoque de resolución de problemas por parte de algunos estudiantes puede más bien ser surtido con un número de estrategias, actitudes y creencias contraproducentes o de poca utilidad. Algunos procedimientos que pueden presentar los estudiantes durante el proceso de solución de problemas se detallan a continuación.

6.3.1. Ensayo y error

Métodos desorganizados de ensayo y error son, sorprendentemente, comunes en muchos estudiantes. Un ejemplo de esta manera de intentar resolver problemas aparece en un alumno al que se le presenta un problema de construcción geométrica, los estudiantes supone incorrectamente una solución en el primer minuto de la lectura del problema, continúa suponiendo otras posibles soluciones hasta que propone una solución razonable en su tercera conjetura, sin embargo, los alumnos fue incapaz de mencionar por qué funciona

la solución (Perkins y Simmons, 1988)
Es importante que el profesor contemple el hecho descrito anteriormente y, así, pueda orientar a los estudiantes para que expliquen sus resultados cuando realicen procedimientos basados en suposiciones.

6.3.2. Persistencia y abandono

Otro riesgo común en la resolución de problemas es la persistencia con un enfoque que no está rindiendo progreso verdadero en la solución del problema. El abandono es lo contrario a la persistencia.

El comportamiento de evaluar a simple vista un problema matemático y abandonarlo, inmediatamente, si no se presenta algún camino obvio de solución con dicho procedimiento es, frecuentemente, observado en muchos estudiantes.

Considerar este tipo de procedimiento que pueden realizar los estudiantes implica un papel importante para el profesor ya que, mediante la observación de lo que realizan sus alumnos, el docente puede lograr que los estudiantes se alejen, gradualmente, de algún procedimiento que no provoque progreso en la solución del problema, o bien, orientar a que sus estudiantes vuelva a contemplar algún procedimiento que sí puede traer resultados satisfactorios en la tarea.

6.3.3. Procedimiento basado en una suposición

Los estudiantes que no recuerdan cuál es la "regla" a aplicar, frecuentemente, utilizan conjeturas razonables y luego proceden sobre esas bases sin hacer algo para probar dichas conjeturas. Así, los estudiantes razonan por analogía para generar una posibilidad pero no logran el despliegue de alguna clase de organización para verificar esa posibilidad.

Por ejemplo, en álgebra es común que los estudiantes supongan como una regla que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, probablemente, los alumnos generalizan este resultado a partir de la identidad $(ab)^2 = a^2b^2$, pero no intentan, verificar el "resultado" con valores numéricos específicos, por ejemplo, considerar $a = 3$ y $b = 2$ para obtener 25 diferente de 13.

6.3.4. Respuestas cotidianas

Una táctica común que los estudiantes adoptan para hacer frente a la “enorme cantidad de nueva información”, como ellos encuentran un tema nuevo, es desarrollar respuestas en forma metódica para casos particulares, sin comprensión de los principios esenciales del planteamiento.

El pensamiento formulista por parte de los estudiantes se presenta a cuando, confrontado ante una nueva situación, responden de manera estereotipada. Por ejemplo, algunos estudiantes de cursos de aritmética formulan respuestas en forma metódica de acuerdo con algunas palabras claves presentes en el enunciado del problema; por ejemplo, relacionan la palabra “menos‘” con la acción de sustraer y la palabra “por” la relacionan con multiplicar.

7. Herramientas tecnológicas en Educación Matemática

Desde finales del siglo pasado han surgido cambios en la manera de enseñar y aprender matemáticas, se ha desarrollado una forma de enseñanza-aprendizaje que contempla la incorporación de la computadora en esta disciplina (Stewart, 1990). Sin embargo, aún existe la necesidad de investigar distintas formas de utilizar algunas herramientas tecnológicas en procesos educativos.

El desarrollo tecnológico en las últimas tres décadas no fue asimilado completamente por el sistema educativo. Posiblemente, se daba a la carencia de estudios serios sobre maneras eficientes para utilizar la tecnología en la educación, que nos muestre sus aciertos así como sus desventajas, y con ello crear una infraestructura de apoyo al profesor de matemáticas para que pueda hacer un buen uso de la tecnología en el aula de matemáticas. (Guzmán, Hitt) Santos, 2002, p. 1 H)

La incorporación de herramientas tecnológicas en diferentes áreas, como por ejemplo, la medicina, la agricultura, las telecomunicaciones, el transporte y el comercio, ha permitido avances importantes no sólo en la identificación y solución de nuevos problemas, sino también en los métodos o formas de trabajo en esas áreas (Mann, 2002). Así, resulta importante reflexionar acerca de la integración de herramientas tecnológicas al salón de clases (Hitt, 1996).

La manera eficiente y eficaz de utilizar herramientas computacionales en Educación Matemática es de gran importancia para el aprendizaje de los estudiantes. Noss y Hoyles mencionan que la computadora ofrece medios especiales para interactuar con objetos y al usar esos medios, los alumnos aumentan sus concepciones de los objetos, especialmente, con respecto a generalización y formalización (citados en Lagrange, 1999, p. 55).

La falta de autoevaluación en los procesos realizados por un alumno en un contexto de *papel y lápiz* puede ser complementada en un ambiente de *papel, lápiz y microcomputadora*. Esta última en muchos casos, permite visualizar el error, provocando una revisión de su proceso para una mejor aproximación en la resolución de un problema. (Hitt, 1996, p.42)

La incorporación de herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no puede dejar por fuera el análisis de los diferentes usos que se le pueda dar en esta disciplina, sus ventajas y sus limitaciones.

7.1 Limitaciones en el uso de herramientas tecnológicas

No todas las actividades realizadas con uso de herramientas tecnológicas, como la calculadora gráfica y la computadora, pueden ser adecuadas para una buena actividad de aprendizaje por parte de los estudiantes.

Por ejemplo, Guin y Trouche (1999) indican que un ejemplo de una actividad que no es recomendable realizar con el uso de algún graficador es el cálculo de $\text{lím}(\ln x + 10\sin x)$, ya que al realizar la gráfica de $\ln x + 10\sin x$ (ver Figura 7.1) no se logra observar, de manera clara, que la función tiende a infinito cuando x crece, indefinidamente, sino que parece una función oscilante en el eje x (o alguna recta paralela a dicho eje). En el estudio realizado por Guin y Trouche, los estudiantes que realizaron el límite, algebraicamente lo resolvieron, mientras que los alumnos a los que se les permitió usar herramientas tecnológicas realizaron la gráfica y fallaron en la estimación de dicho límite.

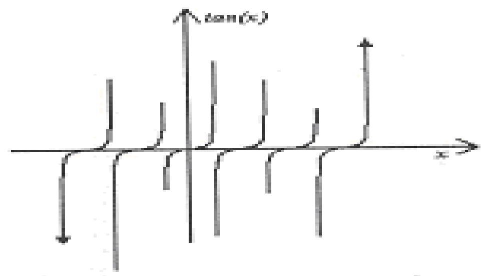


Figura 7.1: Gráfica de la función $\ln x + 10 \sin x$

Guin y Trouche (1999, p. 203) mencionan que se presentan limitaciones en el manejo de la TI-92 (calculadora graficadora de la Texas Instruments) ya que, por una parte, se reconoce la expresión $cos\frac{\pi}{8}$ y no así $cos\frac{\pi}{16}$ donde $cos\frac{\pi}{16}$ se puede obtener de la ecuación $cos\frac{\pi}{8} = 2\left(cos\frac{\pi}{16}\right)^2 - 1$ y, por otra parte, el finito número de píxeles *discretiza* trazos de gráficas, provocando en algunas ocasiones gráficas inconsistentes.

La calculadora no determina soluciones obvias de algunas ecuaciones; por ejemplo, en la ecuación $x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$, con raíces 1 y raíz de 2, la calculadora establece valores no simplificados que, aunque son equivalentes a las soluciones mencionadas, no las reconoce como iguales (por las limitaciones de aproximación); una última limitación es que en las calculadoras y en software de cálculo algebraico se muestran dificultades en los estudiantes relacionadas con los comandos y los modos de operar, es decir, en muchas ocasiones a los alumnos se les dificulta el aprendizaje del uso de las herramientas y comandos de este tipo de software.

El uso de la computadora en el proceso de aprendizaje de los alumnos presenta algunas limitaciones. Lagrange (1999) menciona que los estudiantes no están familiarizados con el uso de la computadora y de otras herramientas tecnológicas en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, Guin y Trouche (1999) hacen referencia a los problemas que puede causar el uso herramientas de graficación en los estudiantes, indican que algunas representaciones gráficas en computadoras y calculadoras pueden traer confusiones a los estudiantes en cuanto a la interpretación que le den a lo que observan en pantalla. Por ejemplo, en algunos graficadores de funciones se obtiene una representación como la que se muestra en la Figura 7.2 para la función $f(x) = \tan x$. La interpretación que los estudiantes le den al hecho que algunos trazos son más cortos que otros puede ser muy variada; además, algunos alumnos pueden interpretar que en cada corte de la gráfica con el eje de las abscisas, como en el origen del sistema de coordenadas, se hallan muchos punto; de intersección ya que "parece" que la gráfica toca en más de un punto al eje x.

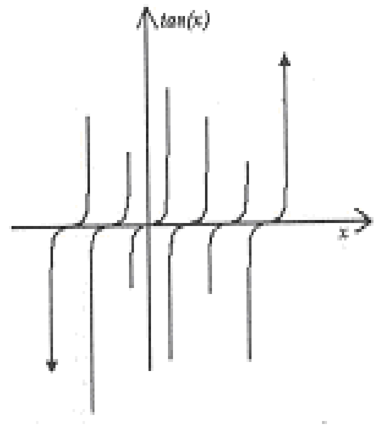


Figura 7.2: Función $\tan x$ que se presenta en algunos graficadores

Chamblee y Slough (2002) mencionan que algunos profesores se intimidan por los cambios que trae consigo la incorporación de herramientas tecnológicas al salón de clases y, además, dichos profesores señalan que no quieren nada con el cambio; es decir, algunos profesores no muestran interés en incorporar herramientas tecnológicas en sus ambientes de enseñanza-aprendizajes de las matemáticas.

Una creencia común en muchos educadores e inclusive en estudiantes, es considerar que la incorporación de herramientas tecnológicas en el salan de clases soluciona todos los problemas que se presentan en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, de esta manera, creen que dichas herramientas tecnológicas son como *cajas mágicas*. En esta dirección, la Office of Technology Assessment indica que la incorporación de la tecnología, por sí misma, no garantiza un cambio directo en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se debe buscar la manera eficiente de su incorporación dentro de la instrucción (cita en Bailar y Ritchie, 2002).

Uso de herramientas tecnológicas en el aula, ya que no basta con tener laboratorios equipados con potentes máquinas si los educadores no tienen la capacidad de utilizarlos de manera que se mejore el proceso educativo.

El profesor no cuenta con apoyos específicos que le ayuden a mejorar su enseñanza, más bien, el uso de la tecnología se orienta hacia un aspecto eficiente de la forma tradicional de aprendizaje. Es decir, ella se centra más en liberar a los estudiantes de los cálculos que en vincular su uso con aspectos propios del quehacer matemático y formación de conceptos. (Guzmán, Hitt y Santos, 2002, p. 126)

Una de las mayores limitaciones que presenta la incorporación de herramientas tecnológicas en el salón de clases es el uso que los profesores le asignen en las actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Las razones que han impedido el uso de las calculadoras en la escuela primaria, aluden a la inhibición de las habilidades de mecanización de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. La argumentación anterior se refiere al uso de la calculadora en su expresión más pobre. La reflexión sobre su uso, más bien debe encaminarse a la posibilidad de utilizar esta tecnología en la formación de conceptos matemáticos. (Hitt, 1996, p. 24)

Asimismo, se ha encontrado que en muchos educadores de matemáticas existe la preocupación de que el frecuente uso de herramientas computacionales debilitan el desarrollo de comprensión conceptual, habilidades o destrezas en la resolución de problemas y la habilidad para aprender nuevos avances matemáticos (Fey, 1990).

Aunque en muchas escuelas y colegios se tenga la intención de utilizar herramientas tecnológicas en actividades de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, algunas veces no es posible que se logre desarrollar dicha acción. En este sentido, Kaput (1992) indica que en los colegios y escuelas hay pocas computadoras disponibles y, de las que hay, la mayoría son de potencial limitado, lo cual hace imposible que se lleven a cabo actividades educativas que contemplen su uso. Otro factor que indica Kaput (ibíd), es que no existe software en suficiente cantidad y de suficiente calidad que amerite la inversión requerida para un uso masivo de computadoras en el aula.

Un reciente estudio acerca de los factores que influyen en el éxito o fracaso al utilizar la tecnología en el salón de clases, contempla aspectos relacionados con el uso que los profesores le dan a la computadora en actividades no escolares. Baylor y Ritchie (2002) han encontrado que los profesores que utilizan la tecnología fuera de ambientes de enseñanza-aprendizaje, es decir, en situaciones no escolares, generalmente enfatizan en el uso mismo de la tecnología (como por ejemplo utilizar el teclado para una eficiente manera de mecanografiar) más que en las aplicaciones de la computadora en el aula (p. 409). Asimismo, Baylor y Ritchie (ibíd) mencionan que los profesores manifiestan que no pueden organizar lecciones basadas en el uso de la computadora ya que no hay suficiente tiempo para su preparación.

7.2 Algunos usos de la computadora en Matemática

El desarrollo de herramientas tecnológicas ha aumentado el número y variedad de aplicaciones incluidas en Educación Matemática (Santos y Espinosa, 2002). Así, con el uso de la tecnología se debe realizar y promover nuevas y más interesantes tareas matemáticas relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de dicha disciplina. Dubinsky y Tall mencionan que se obtienen resultados exitosos cuando la computadora es usada para mejorar significados a través de actividades que contemplen la exploración y la construcción de conceptos (citado en Guin y Trouche, 1999, p. 199). De esta manera, es importante el desarrollo de actividades por parte de los estudiantes que les permita descubrir propiedades y que dichos descubrimientos les proporcione nuevos caminos para comprender un concepto.

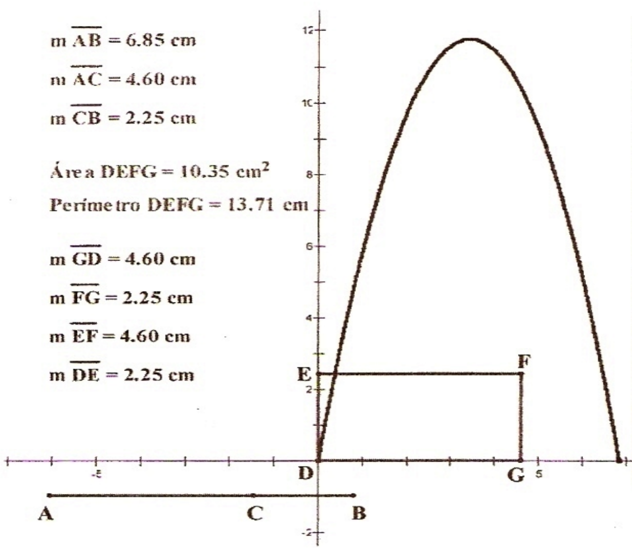
Con relación a la incorporación de las computadoras en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, se han desarrollado varios usos de estas herramientas tecnológicas con el fin de mejorar el aprendizaje por parte de los estudiantes. Algunos de dichos usos se detallan a continuación (se hace hincapié que no son los únicos usos que se le puede dar a la computadora en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas pero que son, de alguna manera, los más importes y de mayor investigación).

Simulación

Utilizar la computadora para la simulación de fenómenos ha sido uno de los usos más importantes de dicha herramienta tecnológica en Educación Matemática.
Con la ayuda de la computadora es posible establecer simulaciones de fenómenos donde simultáneamente se analice tanto la situación real como varias de sus representaciones

(fórmula, tabla, gráfica). Es aquí donde el estudiante puede analizar diversas conexiones entre tales representaciones. [... J Es posible analizar cómo cierta representación es funcional para identificar algunas propiedades del fenómeno (puntos de optimización, por ejemplo) y otras ayudan a identificar exactamente el valor de algunos puntos críticos del fenómeno. (Santos, 1997, pp. 95-96).

Los sistemas computacionales de simulación presentan situaciones en las que es posible observar, de manera dinámica, lo que sucede para un fenómeno específico cuando se cambian algunos de los parámetros involucrados en él. Un ejemplo de simulación en Matemática con el uso de la computadora es el siguiente: dada la medida del semiperímetro de un rectángulo, determinar cuáles son las dimensiones del rectángulo (de todos los que se pueden construir con tal semiperímetro) de mayor área.



m $\overline{DE}$	m $\overline{EF}$	Área DEFG	Perímetro DEFG
6.43 cm	0.42 cm	2.72 cm^2	13.71 cm
6.06 cm	0.79 cm	4.81 cm^2	13.71 cm
5.87 cm	0.98 cm	5.75 cm^2	13.71 cm
5.50 cm	1.35 cm	7.43 cm^2	13.71 cm
5.08 cm	1.77 cm	9.01 cm^2	13.71 cm
4.34 cm	2.51 cm	10.91 cm^2	13.71 cm
3.60 cm	3.25 cm	11.71 cm^2	13.71 cm
2.91 cm	3.94 cm	11.47 cm^2	13.71 cm
2.30 cm	4.55 cm	10.48 cm^2	13.71 cm
1.83 cm	5.03 cm	9.18 cm^2	13.71 cm
1.40 cm	5.45 cm	7.64 cm^2	13.71 cm
0.98 cm	5.87 cm	5.75 cm^2	13.71 cm
0.61 cm	6.24 cm	3.80 cm^2	13.71 cm
0.26 cm	6.59 cm	1.74 cm^2	13.71 cm
0.19 cm	6.67 cm	1.23 cm^2	13.71 cm

Figura 7.3: Varias representaciones para determinar el rectángulo de mayor área

En la Figura 7.3 el segmento **AB** representa el semiperímetro del rectángulo **DEFG**; además, en dicha figura se indican el área y el perímetro del rectángulo. Las dimensiones del rectángulo **DEFG** dependen de las longitudes de los segmentos **AC** y **CB** (ya que, por construcción, **AC** y **BC** representan las medidas de los lados del rectángulo DEFG, para así lograr que su perímetro sea fijo), al mover el punto C a lo largo del segmento

AB, las dimensiones del polígono cambian dinámicamente.

La gráfica, otra representación que se puede obtener con software dinámico, corresponde al área del rectángulo como función de uno de sus lados; asimismo, se hace uso de la representación tabular; en la tabla que aparece en la Figura 7.3 se presentan los valores para la medida de los lados del rectángulo, su perímetro y su área. Con la simulación de este problema, los estudiantes pueden hacer uso de diferentes representaciones y conjeturar valores que determinan las dimensiones del rectángulo de perímetro fijo que contiene mayor área.

7.2.2. Exploración o impacto esperado.

Otra manera de utilizar la computadora es como herramienta para la exploración. Meza (2001) menciona que con el uso de la computadora y de software apropiado (como por ejemplo, software dinámico de geometría), los estudiantes tienen oportunidad de explorar para verificar o para descubrir. Dentro de los resultados que los alumnos pueden verificar se encuentran algunos teoremas geométricos. Meza (ibíd) indica que mientras los estudiantes interactúan con la computadora realizan exploración e intercambian ideas con sus compañeros, de esta manera los alumnos pueden “descubrir” algunos resultados. Asimismo, “el uso de la computadora permite al estudiante explorar diversos casos y tener acceso a situaciones en donde es posible encontrar el sentido de algunas ideas matemáticas” (Santos, 1997, p. 98).
Una actividad en la que los estudiantes pueden explorar para verificar consiste en trazar las medianas de cualquier triángulo ABC (ver Figura 3.4). Cuando los alumnos mueven cualquier vértice del triángulo ABC pueden observar que, efectivamente, las tres rectas son concurrentes y que, además, el punto de concurrencia de las rectas siempre queda en el interior del triángulo.

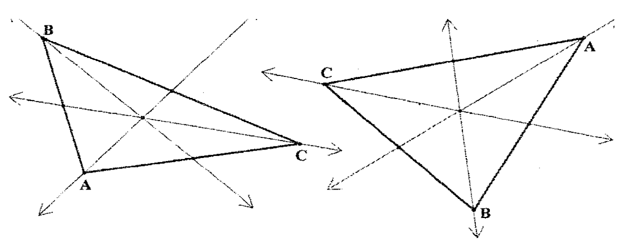


Figura 7.4: punto de intersección de las medianas de un triángulo

Por otra parte, con el fin de explorar para descubrir los estudiantes pueden considerar el polígono que se forma al unir los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero (ver Figura 3.5). Los alumnos pueden mover los vértices del cuadrilátero **ABCD** y obtener alguna conjetura relacionada con las propiedades invariantes del cuadrilátero **EFGH**, pueden descubrir que al unir los puntos medios de cualquier cuadrilátero se forma un paralelogramo.

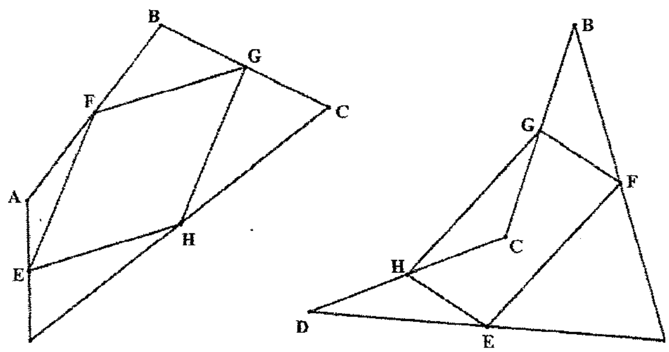


Figura 7.5: paralelogramo al unir los puntos medios de cualquier cuadrilátero

Los alumnos pueden convencerse de que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo mediante el cálculo de las medidas de lados y de ángulos y, eventualmente, pueden demostrar que el polígono EFGH siempre es un paralelogramo.

Referencias

[1] Arcavi, A. Y Hadas, N. (2000). Computer Mediated Learning: An Example of An Approach. *International Journal oJ ComputeN; Jor A1athematical Learning*, 5,25-45.

[2] Amold, K. Y Gosling, 1. (1998). *The Java Programming Language*. Segunda Edición. Reading, MA, USA: Addison-Wesley.

[3] Balacheff, N. Y Kaput, J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde. (Eds.), *International Handbook oJ Mathematics Education*, pp. 469-501. Netherlands: Kluwer Academic Publi hers.

[4] Battista, M. y Clements, D. (1995). GeOIJ y and Proof. *The Mathematics Teacher*, 88(1),48-54.

[5] Baylor, A. Y Ritchie, D. (2002). What Factors Facilitate Teacher Skill, Teacher Morale, and Perceived Student Leaming in Technology-Using Classrooms? *Computers & Education*, 39,395-414.

[6] Chamblee, G. Y Slough, S. (2002). Implementing Technology in Secondary Science and Mathematics Classrooms: Is the Implementation Process the Same for Both Disciplines? *Journal of Computers in Mathematics and Science Teachfng*,21(1),3-15.

[7] Chazan, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educatfonal Stlldies in Mathematics*, 24,359-387.

[8] Fey, J. (1990). Quantity. En L. Steen (Ed.), *On the S/1.oulders ofCiants. New Approaches to Numeracy*, pp. 61-94. Washington, DC, USA: National Academy Press.

[9] Flores, A. (1996). Acción, Comunicación y Reflexión: Componentes Esenciales para Entender Matemáticas. En M. Santos y E. Sánchez (Eds.), *Perspectivas en Educación Matemática*, pp. 85-102. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

[10] Flores, A. (1997). Soluciones Geométricas a Problemas de Máximos y Mínimos. *Miscelánea matemática*, 26,49-57.

[11] Flores, H. Y Steketee, S. (2002). Exploración, Visualización y Demostración: La Enseñanza de las Matemáticas con El Geómetra. En *Memorias de 16va Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Havana, Cuba.

[12] Fritzler, W. (1997). Triángulos y Cuadriláteros Inscritos en un Círculo. Una Aplicación del Software Educativo "Cabri Géometre". *Educación Matemática*, 9(2), 116-136.

[13] Furinghetti, F. Y Paola, D. (2003). To Produce Conjectures and to Prove them Within a Dynamic Geometry Environment: a Case Study. En N. Pateman, B. Dougherty y 1. Zilliox (Eds.), *proceedings 01 the 27th Conference of the international Group*

for the Psychology o[Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA, Vol. 2, pp. 397-404. Honolulu, HI, USA: Center for Research and Development Group, University of Hawaii.

[14] Godino, J. Y Recio, A. (2001). Significados Institucionales de la Demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3),405-414.

[15] Guin, D. Y Trouche, L. (1999). The Complex Process of Converting Tools loto Mathematical Instruments: The Case of Calculators. *International Journal of Computers Jor Mathematical Learning*, 3, 195-227.

[16] Guzmán, J., Hitt, F. Y Santos, M. (2002). El Currículo de Matemáticas en México en la Escuela Media. En A. Maz, M. Torralbo y C. Abraira (Eds.), Currículo y *Matemáticas en la Enseñanza Secundaria en lberoamérica*, pp. 111-131. Córdoba, México: Universidad de Córdoba. Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. For the Learning of Mathematics An International Journal of mathematics, 15(3),42-49.

[17] Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics An International Journal of mathematics*, 15(3),42-49.

[18] Hanna, G. (1998). Proof as Explanation in Geometry. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2),4-13.

[19] Hitt, F. (1996). Educación Matemática y Uso de Herramientas tecnológicas. En M. Santos y E. Sánchez (Eds.), *Perspectivas en Educación Matemática*, pp. 21-44. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

[20] Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 515-556. New York, USA: Macmillan.

[21] Lagrange, J. (1999). Complex Calculators in the Classroom: Theoretical and Practical Reflections on Teaching Pre-Calculus, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4,51-81.