Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas

Edgar Alberto Guacaneme Suárez

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI

2016

Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas

Edgar Alberto Guacaneme Suárez

Tesis presentada como requisito parcial para obtener el grado de Doctor en Educación – Énfasis en Educación Matemática

Director: Doctor Luis Carlos Arboleda Aparicio

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI

2016

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
DOCTORADO EN EDUCACION

SUSTENTACIÓN DEL PROYECTO DOCTORAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE DOCTOR

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

FECHA DE LA SUSTENTACION: *Santiago de Cali, 7 de Septiembre de 2016*

ESTUDIANTE: *EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ - CODIGO: 0608193*

TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN:

"POTENCIAL FORMATIVO DE LA HISTORIA DE LA TEORÍA EUCLIDIANA DE LA PROPORCIÓN EN LA CONSTITUCIÓN DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS"

DIRECTOR DE TESIS: *Profesor LUIS CARLOS ARBOLEDA APARICIO*

EVALUADORES: Dra. GABRIELA INÉS ARBELAÉZ ROJAS, Universidad del Cauca
Dr. JAVIER LEZAMA ANDALÓN , CINVESTAV, México
Dr. BRUNO D'AMORE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas

APROBADO X
APLAZADO ___
RECHAZADO ___

Por unanimidad. Por su caracter novedoso y lo bien q' está escrita y por los aspectos tan importantes para la DM y la formacion docente, recomiendan su publicación, para difundir en la comunidad estas ideas. Y por la misma razon recomiendan sea distinguida como Laureada, unanimemente.

Prof SANTIAGO A. ARBOLEDA FRANO
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. LUIS CARLOS ARBOLEDA A.
Director de Tesis

Prof. GABRIELA INÉS ARBELAÉZ ROJAS
Jurado Evaluador

Prof. JAVIER LEZAMA ANDALÓN.
Jurado Evaluador

Prof. BRUNO D'AMORE
Jurado Evaluador

Prof. EVELIO BEDOYA MORENO
(En reemplazo del Subdirector de Investigaciones)

A Luz Marina, Felipe y Andrea.

Su incondicional apoyo
acompañó cada uno de los momentos
de elaboración del presente documento
y del proceso de formación en el que se sustentó.

Agradecimientos

Manifiesto mi más sincero agradecimiento a la educación pública como proyecto político que permite, a todos quienes así lo desean, mejorar su formación, su acción y su ser. En respuesta a dicho proyecto político, la Universidad del Valle, la Universidad Pedagógica Nacional y la Universidad Distrital "Francisco José de Caldas" propusieron el Doctorado Interinstitucional en Educación, como apuesta de convergencia de potencialidades, a favor de la formación de alto nivel de profesionales e intelectuales de la educación. Adicionalmente, la Universidad Pedagógica Nacional tuvo a bien concederme tres y medio años de comisión de estudios para adelantar mi formación doctoral. A las tres universidades y a los funcionarios administrativos y académicos que hicieron del Doctorado una realidad y de mi comisión un hecho, mis agradecimientos.

Durante los años de vínculo con el Doctorado tuve la sinigual oportunidad de compartir espacios de formación académica con los profesores de las tres instituciones y con profesores invitados, de quienes me queda no solo un grato recuerdo, sino también aprendizajes mediados por su gestión educativa y mi interés por sus discursos y formas de vida académica; a todos ellos un abrazo de gratitud. De ellos, destaco como un representante ilustre al Doctor Luis Carlos Arboleda Aparicio, quién vivió de cerca mi proceso de formación doctoral a tal punto que logró conocer no solo lo que yo pensaba y hacía, sino también lo que sentía; definitivamente un maestro en todo el sentido profundo que esta palabra encierra. A él mi gratitud y respeto infinito, y a través suyo mi expresión de iguales sentimientos para los demás profesores.

Agradezco también a la vida el haberme permitido encontrar (o re-encontrar) como parte del grupo de estudiantes, a seres humanos y académicos tan valiosos como mis compañeros de cohorte de la Universidad del Valle; infortunadamente no todos ellos, a pesar de su envidiable capacidad y disciplina académica, consiguieron culminar todos los procesos que el Doctorado implica, pero cada uno de ellos dejó una huella en mi formación y en mi ser, por ello mi especial agradecimiento y mis deseos porque encuentren la manera de concluir sus proyectos académicos y mantenerse en la senda de la academia que han recorrido con esfuerzo y dedicación.

Quiero también agradecer a mis amigos y familiares de quienes recibí un respaldo constante y muestras de preocupación por la no finalización del proceso doctoral en los tiempos previstos; de ellos siempre recibí muestras de confianza y, sobre todo al final, de orgullo. A ellos simplemente les puedo decir que los esfuerzos que muchos de ellos hacen por sobrevivir, por construir una familia, por trascender entre los que los rodean, por construir sociedad, por realizar un trabajo de excelencia o por disfrutar de la vida, a pesar de sus vicisitudes, son tan valiosos como los que se realizan en el marco del Doctorado. Así, un especial agradecimiento a mis padres y mi hermano, y sobre todo a mi esposa y mis hijos; su felicidad y orgullo es un reflejo de nuestro amor y de lo grande que han sido para mí.

Tabla de contenido

Índice de tablas

Resumen

El papel de la Historia de las Matemáticas en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas configura el contexto general desde el cual emerge, y en el cual se ubica, el presente proyecto de investigación. Este contexto, abordado desde las perspectivas clásicas de análisis de los componentes del conocimiento del profesor, dispone a la historia de la disciplina como parte integral del conocimiento disciplinar; entre tanto, abordado desde el ámbito de estudio del conocimiento del profesor de Matemáticas, se revela exiguo y un tanto anodino.

A partir de tal reconocimiento de tal contexto, y en procura de concretar el problema de investigación, se establece la historia de la razón y la proporción, como objeto específico de la Historia de las Matemáticas sobre el cual focalizar el estudio, y dentro de ella la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción expuesta en el Libro V de *Elementos* de Euclides. De manera natural se determina que dicha historia se concreta a través del *corpus* documental proveniente de la investigación histórica.

De esta manera se llega a formular la pregunta que pretende responder esta investigación: ¿cuál es el potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción, contenida en el Libro V de *Elementos*, en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas?

En procura de una respuesta, se establece la necesidad de lograr una aproximación al *estado del arte* de la reflexión e investigación en torno a la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática", desde la producción del campo de la Educación Matemática. Esta aproximación nos lleva a reconocer: (i) la existencia de cuatro ámbitos de interpretación de la relación (la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas, la Historia de las Matemáticas en las investigaciones del campo de la

Educación Matemática, la Historia de las Matemáticas en la educación del profesor de Matemáticas y la Historia de la enseñanza de las Matemáticas); (ii) la Didáctica de la Historia de las Matemáticas como escenario para el estudio de la relación; y, (iii) la exigua atención a los vínculos de la Filosofía de las Matemáticas con la relación.

A partir de tal estado del arte se procura explorar la relación "Historia de las Matemáticas – Conocimiento del profesor de Matemáticas", guiado por las preguntas relacionadas con los argumentos que se esgrimen a favor de la integración de la Historia de las Matemáticas en tales procesos, las intenciones que se persiguen con dicha integración, las características de la Historia de las Matemáticas que se vincula a los procesos educativos de los profesores de Matemáticas y las estrategias metodológicas que se han diseñado e implementado para que los profesores de Matemáticas se apropien y usen los discursos históricos. Se construye así un marco de referencia para la relación mencionada.

Con relación a por qué se plantea la apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los profesores, se identifican cuatro respuestas generales, a saber: (i) existencia de académicos o comunidades con formación en Historia de las Matemáticas e interés en el conocimiento del profesor de Matemáticas, (ii) valoración social de la historicidad de las Matemáticas, (iii) la Historia de las Matemáticas constituye una cornucopia de visiones, y (iv) la Historia de las Matemáticas configura una fuente de artefactos.

En relación con la pregunta para qué se procura la apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los profesores, se distinguen dos grupos de respuestas, que son: (i) para dotar al profesor de visiones pertinentes para su ejercicio profesional (*v.g.*, visión de la actividad matemática, visión de las Matemáticas, visión del conocimiento matemático, y visión de los objetos matemáticos), y (ii) para dotar al profesor de artefactos adecuados para su ejercicio profesional (*v.g.*, mirada epistemológica y del pensamiento matemático, maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo, y competencias personales y profesionales).

Respecto de la pregunta sobre qué tipo de HM debe ser apropiada por un profesor, se identifican dos perspectivas de respuesta; una de ellas refiere a los objetos de estudio de la Historia de las Matemáticas (*i.e.*, los asuntos que son propuestos para ser estudiados con el fin de favorecer los conocimientos del profesor de Matemáticas) y la otra al tipo de tratamiento de la Historia de las Matemáticas (*i.e.*, los enfoques que podría tener la Historia de las Matemáticas que se ponga en juego en la formación de profesores). Dentro de la primera se reconocen ocho tipos de objeto de estudio (Biografías y cronología;

fuentes primarias, secundarias, terciarias; teorías / subdisciplinas / disciplinas; temas / procesos / problemas; pensamiento matemático; Matemáticas hegemónicas / Matemáticas de culturas no hegemónicas; asuntos meta-matemáticos o meta-históricos; y, relación de HM con lo educativo). La segunda identifica cinco tipologías de Historia de las Matemáticas (internalista / externalista; relato / análisis; evolutiva / situada; historia / herencia; original / anacrónico).

Se estudian entonces la teoría euclidiana de la razón y la proporción del Libro V de *Elementos* para obtener una perspectiva de esta. Asimismo se estudian, a modo de recensión, los documentos que versan sobre la historia de la razón y proporción; a través de ello se identifican seis hitos (teorías pre-euclidianas, teoría euclidiana, la proporción en la época helenística, las traducciones árabes y latinas, las adaptaciones de la teoría en la Baja Edad Media y el Renacimiento, y la influencia de la teoría de la proporción en la construcción de los reales). A partir de esto se analiza la historia de la teoría euclidiana de la proporción a través de las categorías de análisis para las pregunta qué Historia de las Matemáticas y para qué la Historia de las Matemáticas. El resultado global muestra que el conjunto de documentos cubre la casi totalidad de las categorías de análisis.

Finalmente, se establece el potencial formativo que los documentos que versan sobre la teoría euclidiana de la proporción tienen a favor del conocimiento del profesor. Particularmente se establece cómo el estudio de la teoría contenida en el Libro V de *Elementos* propicia una experiencia de aprendizaje didáctico-matemático *sui generis*, y cómo el estudio de su historia propicia aprendizajes de orden histórico; además se precisa los aportes efectivos en relación con las intenciones de formación y los objetos de estudio.

Introducción

La formación de investigadores en el campo de la Educación Matemática es una empresa que desde hace algunos años compromete a la comunidad académica colombiana y se ha convertido en uno de los mayores retos que ha enfrentado tal comunidad. Para encararlo, en el último cuarto del Siglo XX, algunos formadores de profesores y otros académicos cualificaron y ampliaron su formación profesional e investigativa a través de la realización de estudios de postgrado en universidades extranjeras y retornaron al país para aportar a los procesos educativos de los profesionales colombianos de la educación en Matemáticas y al diseño de políticas educativas para favorecer la constitución de una cultura matemática en la sociedad colombiana. Hoy en día, después de varias décadas de arduo trabajo de estos pioneros, y de otros que con ímpetu se sumaron a la causa, la sociedad colombiana reconoce en los esfuerzos de creación o transformación de programas de postgrado (especializaciones, maestrías y doctorados) en Educación Matemática, llevados a cabo en la década de los noventa, un hito de dicha empresa[1]. Igualmente, reconoce la apertura del Énfasis en Educación Matemática del Doctorado Interinstitucional en Educación, bajo la responsabilidad de las universidades del Valle y Distrital "Francisco José de Caldas", como una audaz acción para contribuir a la ampliación del capital humano e intelectual del campo de investigación.

Precisamente el presente documento de tesis puede considerarse como un resultado concreto de los esfuerzos adelantados en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, para aportar a la construcción de una comunidad académica colombiana, a través de la formación de investigadores que contribuyan con sus planteamientos al crecimiento del acervo que configura la producción nacional de conocimiento en Educación Matemática, o, como lo mostraremos adelante, en uno de sus campos descendientes, la Educación del Profesor de Matemáticas.

[1] So pena de ser considerados inmodestos y poco objetivos, nos parece sensato reconocer acá dos programas de maestría que han contribuido de manera trascendental a la empresa académica reseñada, a saber: La *Maestría en Educación – Énfasis en Educación Matemática* del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle y la *Maestría en Docencia de la Matemática* del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Asimismo, esta tesis puede reconocerse como un aporte más al desarrollo del trabajo que en la Universidad del Valle ha adelantado el *Grupo de Historia de las Matemáticas*, liderado académicamente durante casi toda su existencia por el Doctor Luis Carlos Arboleda[2], particularmente en la línea de investigación denominada *Historia y enseñanza de las Matemáticas*, línea que a partir de la configuración del estado de arte de la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática" lograda en la tesis, podría denominar en adelante con el nombre de dicha relación.

Igualmente, la tesis puede concebirse como acicate de los trabajos académicos que le dan nacimiento al grupo de investigación denominado con el acrónimo *RE-MATE* (*Research on Mathematics Teacher Education*), del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional; grupo en el que con un ápice de utopía y un tanto de realidad, hemos puesto en la investigación en/sobre la educación de los profesores de Matemáticas un horizonte de esperanza para desarrollar mejores procesos de formación de profesionales que promuevan la educación en Matemáticas de los colombianos y con ello una cultura matemática para nuestra sociedad y su futuro.

Los tres ambientes reseñados en los párrafos anteriores, coinciden —de manera no casual— con discursos provenientes de al menos tres diferentes campos (la Educación Matemática, la Historia de las Matemáticas, la Educación del Profesor de Matemáticas) que reclaman una confluencia en la tesis. Dicha confluencia evidencia la complejidad de la naturaleza de los fenómenos educativos e investigativos, que a la vez que se convierte en reto para el pensar y el sentir de los investigadores de estos, y en deleite para el espíritu humano que goza moviéndose entre la simplicidad y la complejidad, aspecto que le imprime un "sabor" humano a la investigación educativa. Pero nos hemos visto incapaces de expresar plenamente esta complejidad en un documento de tesis, por lo cual hemos decidido que su configuración atienda más a esa simplicidad, que en ocasiones favorece la comunicación de las ideas, so pena de sacrificar sus interrelaciones. Así, hemos determinado organizar este documento a través de cinco capítulos como sigue.

En el primer capítulo presentamos la problemática que se aborda en la tesis. Para ello mostramos cómo llegamos a plantearnos la inquietud sobre el papel que la Historia de las Matemáticas puede llegar a desempeñar en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas. Luego, presentamos y caracterizamos el campo de la Educación del

[2] Actualmente, según el aplicativo GrupLac de COLCIENCIAS, el equipo de investigación es liderado por el Doctor Luis Cornelio Recalde, profesor de la Universidad del Valle, discípulo y alumno del Doctor Arboleda, graduado del Doctorado en Educación de la Universidad del Valle.

Profesor de Matemáticas, como ámbito de investigación donde es propicio ubicar la inquietud de investigación. Por otra parte, establecemos, como marco documental para la tesis, la producción histórica que versa sobre la teoría euclidiana de la razón y la proporción expuesta en el Libro V de *Elementos* de Euclides. Así, llegamos a presentar un marco de interrogantes que configuran el problema que aborda la tesis. Concluimos el capítulo exponiendo la intencionalidad y la estrategia metodológica del proyecto de investigación.

El segundo capítulo contiene un resultado del estudio de la literatura proveniente esencialmente del campo de la Educación Matemática, a través de la cual se reportan las acciones y reflexiones académicas en torno a la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática". El contenido del capítulo permite entonces disponer de una aproximación al *estado del arte* en torno a tal relación.

La aproximación citada permite advertir un interesante y comparativamente poco explorado ámbito de estudio en torno al papel del conocimiento histórico en el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. Precisamente, es desde este ámbito que en el tercer capítulo presentamos un marco de referencia, construido como desarrollo de la tesis misma, en torno a las preguntas relacionadas con las características de la HM que se vincula a los procesos educativos de los profesores de Matemáticas, los argumentos que se esgrimen a favor de la integración de la HM en tales procesos, las intenciones que se persiguen con dicha integración, y las estrategias metodológicas que se han diseñado e implementado para que los profesores de Matemáticas se apropien y usen los discursos históricos.

En el cuarto capítulo reportamos los resultados del estudio de los documentos que hemos identificado versan sobre la teoría euclidiana de la razón y la proporción del Libro V de *Elementos* para, de una parte, obtener una perspectiva de la teoría expresada en tal tratado y, de otra parte, familiarizarnos con los discursos expresados en los documentos. En este mismo capítulo caracterizamos los documentos estudiados, atendiendo a algunas de las categorías de análisis constituidas en el marco de referencia, reportado en el capítulo tres. Adicionalmente, allí exploramos el potencial formativo que los documentos que versan sobre la teoría euclidiana de la proporción tienen a favor del conocimiento del profesor.

Finalmente, en el quinto capítulo, exponemos de manera sintética las conclusiones de la tesis y presentamos algunas cuestiones que la misma permite reconocer como objeto de futuras investigaciones.

1 Presentación de la problemática

En este capítulo mostramos, de manera inicial y breve, el recorrido que lleva a que nos planteemos la inquietud sobre el papel que la Historia de las Matemáticas puede llegar a desempeñar en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas. Luego, presentamos el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas, como ámbito de investigación en el cual es propicio ubicar la inquietud de investigación y que está caracterizado por: tener existencia propia, diferenciarse del campo de la Educación Matemática y disponer de líneas y objetos propios de investigación. Posteriormente hacemos una aproximación al lugar que se le asigna a la inquietud citada, en las líneas de investigación del campo, en el estudio de los componentes del conocimiento del profesor y en el estudio del conocimiento del profesor de Matemáticas. A partir de ello, y en procura de concretar el problema de investigación, establecemos la historia de las razones y proporciones, como contexto del cual elegimos como marco documental para la tesis la producción histórica que versa sobre la teoría euclidiana de la razón y la proporción expuesta en el Libro V de *Elementos* de Euclides. Una vez dispuesto el ámbito de investigación anterior presentamos un marco de interrogantes que configuran el problema que aborda la tesis y que constituye un reelaboración de la inquietud inicial[3]. Finalizamos el capítulo exponiendo la intencionalidad y la estrategia metodológica del proyecto de investigación.

Antes de entrar en el contenido central del capítulo, debemos reseñar que algunas de las ideas acá presentadas han sido expuestas en algunos eventos académicos. Particularmente, algunos de los planteamientos respecto de la Educación del Profesor de Matemáticas como campo de investigación se presentaron en el *Primer Simposio Internacional de Formación de Educadores en competencias docentes*, realizado en

[3] Desde nuestra experiencia profesional advertimos que es muy usual que la elaboración de un proyecto de investigación implique la transformación de una inquietud inicial en un problema de investigación que puede formularse a través de preguntas o hipótesis. Este proceso, implica, entre otras acciones, la ubicación de la inquietud en un campo de investigación y la toma de decisiones que acotan y demarcan el problema de investigación. Como se puede reconocer, intentamos seguir este derrotero.

Bogotá, el 5 y 6 de octubre de 2012 (Guacaneme & Mora, 2012b) y en el *X Encuentro de Matemáticas Aplicada & VII Encuentro de Estadística*, llevado a cabo en San José de Cúcuta, el 7 y 8 de junio de 2012 (Guacaneme, 2012b). Una aproximación inicial a la razón y la proporción en la Historia de las Matemáticas se presentó como conferencia en el *XVIII Encuentro de Geometría y sus aplicaciones y VI Encuentro de Aritmética*, realizado en Bogotá, del 21 a 23 de junio de 2007. Adicionalmente, debemos señalar que a través de la participación en estos y otros eventos de la comunidad académica, pudimos ir configurando el marco de ideas que constituyen el primer capítulo de la tesis y que en su momento se presentaron como proyecto de investigación. En tal sentido, el contenido de este capítulo debe entenderse como la versión más reciente de las diferentes versiones que ha tenido el proyecto de investigación[4] y su formulación procura incorporar los avances de la investigación y algunas de las discusiones sostenidas a lo largo de estos años en el equipo de investigación (director-estudiante), con los compañeros y profesores del Doctorado y con la comunidad académica del campo de la Educación Matemática.

1.1 La inquietud inicial

La Universidad Pedagógica Nacional es una Institución de Educación Superior que dedica su quehacer de manera esencial a la formación de educadores; en este ambiente, su Departamento de Matemáticas tiene como misión formar licenciados en Matemáticas[5] y gestionar programas de postgrado que favorezcan el desarrollo profesional de los profesores de Matemáticas en ejercicio o de los profesionales vinculados a la educación en Matemáticas. En desarrollo de dicha tarea, cotidianamente el conjunto de profesores del Departamento enfrentamos las preguntas sobre: las características del conocimiento que se espera promover en la formación de profesores de Matemáticas, las estrategias metodológicas para favorecer el aprendizaje en nuestros estudiantes —e incluso en nosotros mismos como formadores—, el lugar y papel de los resultados de la investigación en Matemáticas y en Didáctica de las Matemáticas —entre otras disciplinas— en los currículos de formación, los requerimientos que —en su devenir— la sociedad hace sobre el quehacer de los profesores de Matemáticas y sobre los resultados de formación esperados para las nuevas generaciones, la ideología sobre las Matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje que se promueve a través de las experiencias de formación en Matemáticas que tiene los miembros de la sociedad colombiana, entre otras.

[4] Cuyas primeras ideas fueron registradas en el anteproyecto de admisión al programa doctoral (Guacaneme, 2006).

[5] En Colombia el título "Licenciado en Matemáticas" refiere al profesor de Matemáticas y no al matemático.

No obstante la conciencia de que las respuestas a las preguntas sobre tales asuntos se interrelacionan y determinan mutuamente, desde hace algunos años he centrado mis intereses en el primero de ellos; en efecto, he tenido un interés en profundizar en la caracterización del conocimiento del profesor de Matemáticas.

En el tiempo, este interés se remonta al mismo momento en que recibo el grado universitario que me acredita como licenciado en Matemáticas y con ello se me declara como profesional de la educación, a mis primeras experiencias como profesor de Matemáticas en donde se hace evidente la insuficiencia de mi conocimiento frente a los retos y exigencia del quehacer docente —y, consecuentemente, la necesidad de lo que hoy se conoce como desarrollo profesional—, y a las actividades que desarrollé como miembro del *Seminario Taller de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*[6]. Este interés cobra una nueva dimensión cuando decido abordar la pregunta sobre la caracterización del conocimiento del profesor de Matemáticas como objeto inicial de investigación en mis estudios doctorales[7] y encuentro en las reflexiones y planteamientos del *Grupo de Historia de las Matemáticas*[8] (Anacona, 2003; Arboleda, 1984) una especial resonancia —y por qué no, nuevos registros sonoros— en torno a esta preocupación. En cierto sentido, el anteproyecto presentado como requisito para la admisión al Doctorado (Guacaneme, 2006) puede considerarse como un intento germinal de encuentro y afinación de mis inquietudes e intereses, con los desarrollos académicos del mencionado grupo; en tal documento se reconoce ya el interés y propósito de decantar el papel que la Historia de las Matemáticas [HM] cumple (o puede llegar a cumplir) en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas.

Igualmente, la presente tesis puede considerarse como un avance académico de construcción de una opción investigativa para atender tal propósito. Dicha opción refiere a la conciencia sobre la imposibilidad de satisfacer el propósito enunciado, a través de una tesis doctoral, y restringe su ámbito en al menos dos direcciones, a saber: no aborda la totalidad de la HM, sino que selecciona de esta un ápice relacionado con la historia de la

[6] Este grupo, dirigido por la Doctora Myriam Ortiz Hurtado, estuvo conformado por estudiantes, egresados y profesores del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Distrital "Francisco José de Caldas". Luego devino en lo que hoy en día se conoce como el *Centro de Investigación y de Estudios sobre el Aprendizaje Escolar – AprendEs* (http://www.aprendes.org.co/).

[7] Doctorado Interinstitucional de Educación – Énfasis en Educación Matemática —ofrecido por el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle (Cali – Colombia)—.

[8] Desde aproximadamente tres décadas, este equipo de profesores —constituido bajo las divisas del Doctor Luis Carlos Arboleda Aparicio— ha realizado diferentes trabajos en Historia de las Matemáticas; desde hace cerca de diez años, sus reflexiones y trabajos se inscriben en el plan de desarrollo del *Área de Educación Matemática* del *Instituto de Educación y Pedagogía* de la *Universidad del Valle* (http://historiadelasmatematicas.univalle.edu.co/index.html).

teoría euclidiana de las proporciones en el campo de la geometría; y, no pretende explicitar el papel efectivo de esta historia en el conocimiento del profesor de Matemáticas, pero sí de su carácter potencial.

No obstante la anterior precisión, consideramos conveniente, presentar inicialmente una visión emergente —y en construcción— del campo de investigación donde es pertinente ubicar la problemática abordada en la tesis: el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas [EPM] —y no precisamente en el campo de la Educación Matemática [EM] como creímos durante parte del desarrollo de la tesis—.

1.2 La Educación del Profesor de Matemáticas como campo de investigación

Desde hace varios años la formación de profesores de Matemáticas, además de ser una actividad educativa específica ubicada fundamentalmente en el nivel de la Educación Superior, fue reconocida y tratada como línea de investigación de la Educación Matemática[9], a la que se le denominó "Educación del Profesor de Matemáticas" [EPM][10]. Sin embargo, en la actualidad preferimos entender la EPM como un campo de investigación con existencia propia —pero aún dependiente de la actividad de su comunidad ascendiente, es decir la Educación Matemática—, como ámbito de acción específico —esencialmente diferente de aquel de la Educación Matemática [EM]— y con objetos de investigación agrupables en líneas de investigación. Veamos a continuación una aproximación a cada una de estas características.

1.2.1 La existencia de la Educación del Profesor de Matemáticas

La existencia de la EPM como campo de investigación presenta un amplio escenario de evidencias que contempla fundamentalmente:

(i) La existencia de al menos cinco revistas (*Journal of Mathematics Teacher Education*, *Mathematics Teacher Education and Development*, *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, *Mathematics Teaching-Research Journal* y *The Mathematics Teacher Educator*), algunas con un poco más de una década de circulación, cuyo título y contenido

[9] *Matemática Educativa* en varios países latinoamericanos o *Didáctica de las Matemáticas* en algunos países europeos.

[10] *Mathematics Teacher Education*, en la literatura anglosajona.

aborda de manera específica el asunto de la educación y el conocimiento del profesor de Matemáticas.

(ii) La existencia de estudios internacionales o de comunidades acerca de la educación del profesor de Matemáticas (Ball, 1988; CBMS, 2001, 2012; Even & Ball, 2009; Tatto et al., 2008; Tatto et al., 2012).

(iii) La publicación de al menos un *Handbook* sobre la educación del profesor de Matemáticas (Jaworski & Wood, 2008; Krainer & Wood, 2008; Sullivan & Wood, 2008; Tirosh & Wood, 2008).

(iv) La publicación de números especiales sobre la educación del profesor de Matemáticas en reconocidas revistas o libros seriados del campo de la EM (*v.g.*, Revista UNO 51, 2009 - La formación de profesores de matemáticas; *ZDM* 40, (5), 2008 - *Empirical Research on Mathematics Teachers and their Education*; Revista UNO 41, 2006 - Formación del profesorado y matemáticas; Yearbook 66, 2004 - *Professional development guidebook for Perspectives on the teaching of mathematics*; Revista UNO 17, 1998 - El profesor de matemáticas como profesional; Yearbook, 1994 - *Professional development for teachers of mathematics*).

(v) El lugar que el tema ocupa en eventos internacionales de la comunidad de EM. Por ejemplo en la undécima versión del *International Congress on Mathematical Education* (ICME 11, México, 2008) tres de los grupos temáticos[11] se referían a la educación o el conocimiento del profesor de Matemáticas, en tanto que en la duodécima versión de este congreso (ICME 12, Korea, 2012) cuatro grupos temáticos[12] aludían a este asunto. También, en la mayoría de las versiones del *Congress of European Research in Mathematics Education* (*v.g.*, CERME 3, Italia, 2003; CERME 4, España, 2005; CERME 5, Chipre, 2007; CERME 7, Polonia, 2011 y CERME 8, Turquía, 2013) ha existido un grupo de trabajo[13] que aborda la discusión sobre las creencias de los profesores y el papel del profesor en el aula de clase, así como las estrategias para la educación del profesor y los vínculos entre teoría y práctica, investigación y enseñanza y educación del profesor.

[11] TSG 27: *Mathematical knowledge for teaching*, TSG 28: *Inservice education, professional life and development of mathematics teachers* y TSG 29: *The preservice mathematical education of teachers*.

[12] TSG 23: *Mathematical knowledge for teaching at primary level*, TSG 24: *Mathematical knowledge for teaching at secondary level*, TSG 25: *In-services education, professional development of mathematics teachers* y TSG 26: *Preservice mathematical education of teachers.*

[13] *From a study of teaching practices to issues in teacher education*.

Desde nuestra perspectiva, las tres primeras evidencias exhiben el carácter propio del campo, y en cierto sentido, su autonomía; las dos últimas, muestran su dependencia de la actividad de la comunidad dedicada a la investigación en EM.

1.2.2 El ámbito de acción de la Educación del Profesor de Matemáticas

Para referirnos al ámbito de acción específico de la EPM —y para entender que desde nuestra óptica está constituido por un conjunto de planos en los cuales se ubican sistemas didácticos y los conocimientos de profesores de Matemáticas y de sus formadores— procederemos inicialmente a recapitular un análisis simplificado de los sistemas didácticos como objeto de estudio, el cual constituyó un apartado[14] de una conferencia sobre la EPM (Guacaneme, 2012b), y posteriormente a presentar un modelo hipotético constituido por cuatro planos que configuran el ámbito de la EPM.

Una mirada panorámica, y aparentemente muy simple a la EM permite reconocer que los sistemas didácticos son en esencia sus objetos de estudio. Estos sistemas didácticos están definidos por sus agentes (profesor de **Matemáticas**, estudiante, saber **matemático** [el resaltado es intencional]), por sus interrelaciones y por sus interacciones con el medio sociocultural en donde se instituyen en tanto agentes e interrelaciones (Ver Imagen 1).

Imagen 1. Sistema Didáctico estudiado por el campo EM

Estos sistemas existen principalmente en las instituciones escolares de manera independiente del nivel de escolaridad, siempre y cuando el objeto de estudio (es decir los saberes) sean las Matemáticas; así, se reconocen sistemas didácticos estudiados por la Educación Matemática en las instituciones escolares de la Educación Básica, Media y Superior.

[14] Titulado “¿La Educación Matemática versus la Educación del profesor de Matemáticas?”

Por su parte, los sistemas didácticos de los programas de formación de profesores de Matemáticas no están definidos exclusivamente por los saberes matemáticos, debido a que el conocimiento que se pone en juego en estos, si bien incluye al conocimiento matemático, lo trasciende. En efecto, hoy en día, salvo algunas excepciones de perspectivas anquilosadas, se reconoce abiertamente que el conocimiento de un profesor de Matemáticas incluye otros componentes adicionales a las Matemáticas mismas, no menos importantes y útiles que estas. Desde algunos enfoques (v.g., H. c. Hill, Ball, & Schilling, 2008; Piccolo, 2008; Pinto Sosa & González Astudillo, 2008; Silverman & Thompson, 2008; Soanes, 2008), el conocimiento didáctico del contenido matemático es uno de tales componentes; desde otros enfoques (v.g., Stacey, 2008), además del discurso matemático, se reconoce la necesidad de discursos meta-matemáticos en la formación del profesor de Matemáticas.

Bajo esta óptica, se advierte que el carácter epistémico del conocimiento del profesor de Matemáticas amerita la consideración de un sistema didáctico (Ver Imagen 2) diferente al estudiado por la Educación Matemática, es decir, el estudiado por el campo de investigación "Educación del profesor de Matemáticas".

Imagen 2. Sistema Didáctico estudiado por el campo EPM

Al respecto de lo anterior, es necesario aclarar que entendemos que en los programas universitarios de formación inicial de profesores de Matemáticas sí existen sistemas didácticos estudiados por la Educación Matemática —es decir, cuando los maestros en formación asumen el lugar de "Estudiantes", los formadores de licenciados constituyen el agente "Profesor de Matemáticas" y las asignaturas o seminarios de Matemáticas se ubican en el ítem denominado "Saber matemático"—, pero estos no son los únicos y los otros no siempre están determinados específicamente por las Matemáticas, aunque sí eventualmente por discursos meta-matemáticos. Por ejemplo, cuando los programas de formación de profesores contemplan el estudio de asuntos pedagógicos generales o de desarrollos de la Didáctica de las Matemáticas, se establecen sistemas didácticos que no se corresponden con los estudiados por la EM, en tanto que allí la disciplina y sus saberes no son las Matemáticas, sino la Pedagogía o la Educación Matemática. Por supuesto que otro ejemplo interesante lo constituye el sistema didáctico establecido cuando la disciplina objeto de estudio es la Historia de las Matemáticas.

A pesar de reconocer en los dos sistemas didácticos ambientes de acción pedagógica[15] en los cuales, salvo la temporalidad, los sujetos pueden llegar a ser los mismos[16], y de advertir que ello podría poner a los dos sistemas en un mismo plano, las diferencias epistémicas entre los dos llevan a procurar una visión de los mismos en planos diferentes, pero interrelacionados. Precisamente las interrelaciones nos han llevado a concebir unos planos adicionales y en ellos ubicar los conocimientos del profesor de Matemáticas o del formador, respectivamente, como determinantes de las interacciones.

Bajo tal consideración[17] estamos proponiendo un modelo (Ver Imagen 3) que incluye un plano de fondo [plano α] en donde se ubican los sistemas didácticos estudiados por la EM; sobre este, un segundo plano [β] en donde se sitúa el conocimiento del profesor de Matemáticas que determina la interacción docente en el plano de fondo, pero que es determinado por las acciones llevadas a cabo en el plano [γ] donde se disponen los sistemas didácticos de formación de profesores (ya sean en formación inicial o en formación continuada, e independiente de las modalidades[18] en que se realice la formación). En el plano frontal [δ] se ubica el conocimiento del formador de profesores de Matemáticas.

[15] Es decir, ambientes en donde hay interacciones, tensiones, movimientos, etc. en torno a unos discursos matemáticos y meta-matemáticos, con el fin de que estos sean apropiados por quienes desempeñan el papel de aprendices, mediados por la acción de quienes ocupan el lugar de profesores del sistema.

[16] Existe una interesante interrelación no despreciable entre estos dos sistemas didácticos, que se advierte particularmente en el hecho de que el *profesor* del sistema didáctico de la Educación Matemática, fue estudiante del sistema didáctico de la Educación del Profesor de Matemáticas. Asimismo, no es inusual encontrar profesores que en una jornada laboral se desempeñan como formadores y en otra como profesores.

[17] Actualmente con un carácter de hipótesis de trabajo esta consideración es empleada para perfilar las acciones investigativas que en la EPM hemos emprendido conjuntamente con la profesora Lyda Constanza Mora de la Universidad Pedagógica Nacional.

[18] Presencial, virtual, a distancia, etc.

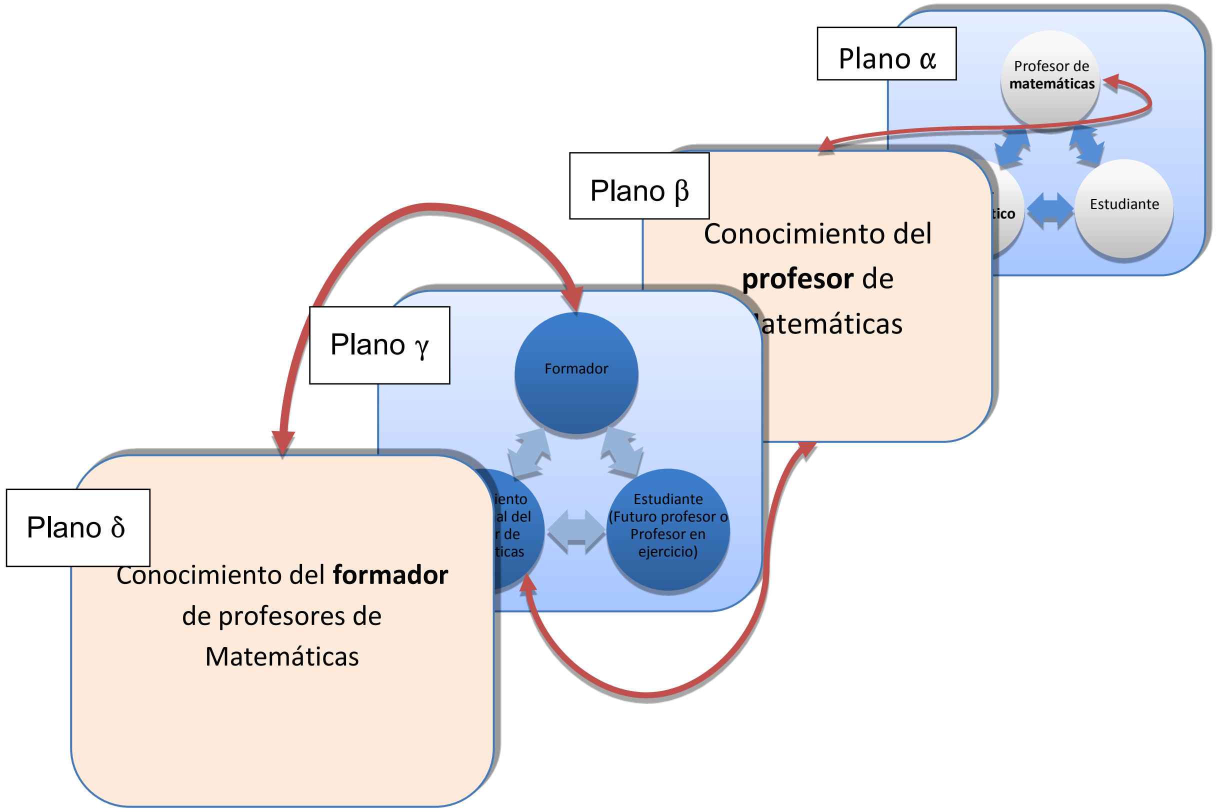

Imagen 3. Modelo hipotético de definición del ámbito de acción de la EPM

El conocimiento del profesor de Matemáticas, ubicado entre los planos de los sistemas didácticos, está constituido por el conocimiento resultante del aprendizaje logrado en el sistema de formación de profesores, de la praxis que tiene como referencia la actividad en el sistema didáctico en donde se desempeña como profesor y de los aprendizajes logrados en sus interacciones con los demás miembros de la comunidad de práctica. Además, contempla las creencias, concepciones y pensamientos del profesor, los cuales han sido generados por su experiencia como estudiante de Matemáticas, como profesor en formación o en su ejercicio docente. El conocimiento del formador de profesores de Matemáticas, ubicado en el plano frontal, se constituye a partir de la experiencia lograda en el funcionamiento del sistema de formación de profesores, de la reflexión sobre el conocimiento del profesor de Matemáticas y de sus estudios realizados, en ambientes formales o informales. Incluye, además sus creencias, concepciones y pensamientos acerca del funcionamiento de los sistemas didácticos.

1.2.3 Los objetos de estudio de la Educación del Profesor de Matemáticas

Con la intención de disponer de una descripción del campo de investigación, en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional recientemente nos hemos dado a la tarea de identificar y organizar los objetos de estudio del campo EPM (Guacaneme & Mora, 2012a, 2012b), para lo cual hemos seleccionado dos artículos (Cardeñoso, Flores, & Azcárate, 2001; M. Sánchez, 2011), un libro que corresponde a un estudio ICMI (Even & Ball, 2009) y los cuatro volúmenes del *Handbook* citado antes (Jaworski & Wood, 2008; Krainer & Wood, 2008; Sullivan & Wood, 2008; Tirosh & Wood, 2008), los cuales asumen el campo como objeto de estudio. Con base en ellos, hemos sintetizado sus cuatro posturas, a partir de lo cual perfilamos una mirada de los objetos de estudio del campo.

Bajo esta dinámica, y como primera postura, reconocemos que hace un poco más de una década Cardeñoso y sus colegas (Cardeñoso, et al., 2001) procurando precisar la línea "Formación y Desarrollo de los Profesores de Matemáticas" y reconociendo el "Desarrollo profesional de los profesores de Matemáticas" como campo de investigación de la Educación Matemática, deciden distinguir dos bloques de problemas de las investigaciones dentro de la línea:

> 1) Problemáticas sobre el conocimiento profesional del profesor, sus dimensiones, sus relaciones, su estructura. ¿Qué caracteriza al profesor de matemáticas? ¿Cómo se concibe la profesión docente por estos profesores? ¿Y por los formadores? ¿Y por la comunidad escolar?
> 2) Problemáticas sobre elaboración del conocimiento profesional, que tiene que ver con la socialización del profesorado (¿cómo ayudarlo a incorporarse a la comunidad de educadores matemáticos?), de estrategias, (¿qué métodos emplear en la formación de profesores?), de relación con la práctica, (¿cómo dar significado a los problemas prácticos del profesor?),... (p. 237).

Adicionalmente, estos autores distinguen entre la figura del profesor que actúa como investigador de su propia práctica, y el investigador que estudia el conocimiento del profesor o las estrategias de educación del profesor.

Por otra parte, y como segunda postura, al examinar los planteamientos de Mario Sánchez (2011) identificamos un listado de áreas de investigación de las que principalmente se ocupa el campo de investigación EPM, a saber:

i. las creencias, visiones y concepciones de los profesores,
ii. las prácticas de los profesores,
iii. los conocimientos y destrezas de los profesores,
iv. la relación entre teoría y práctica,
v. la práctica reflexiva,

Adicionalmente, Sánchez (2011) identifica algunos conceptos teóricos que influyen en la investigación en el campo, estos son:

vi. Conocimiento pedagógico del contenido y otras formas de conocimiento,
vii. reflexión en la acción y reflexión sobre la acción (e incluso la reflexión para la acción),
viii. comunidades de práctica,

Asimismo, Sánchez (2011) reseña algunos asuntos o tendencias emergentes en el campo:

ix. la educación on-line de profesores,
x. el diseño y papel de tareas en la educación de los profesores de Matemáticas,
xi. la educación y desarrollo de los educadores de profesores y
xii. la justicia social en la investigación de la educación del profesor.

Ahora bien, la tercera postura corresponde al resultado de examinar la estructura del reporte del decimoquinto estudio ICMI (Even & Ball, 2009) a través de lo cual hemos identificado dos asuntos nucleares: la formación inicial y el aprendizaje en/desde la práctica. En cuanto a la formación inicial se identifican tres temáticas:

A. La educación de los profesores en lo relacionado con los sistemas educativos, los componentes del conocimiento del profesor y las estrategias curriculares empleadas.
B. Las experiencias de los futuros profesores y las experiencias en los primeros años de ejercicio profesional.
C. Las actividades y conocimientos de los educadores de profesores.

En lo relacionado con el aprendizaje en/desde la práctica encontramos dos temáticas:

D. Los procesos de enseñanza en/desde la práctica.
E. Los procesos de aprendizaje en/desde la práctica.

Como cuarta postura identificamos que las temáticas que titulan cada uno de los cuatro volúmenes del *Handbook* (Jaworski & Wood, 2008; Krainer & Wood, 2008; Sullivan & Wood, 2008; Tirosh & Wood, 2008) ofrecen un amplio panorama de clasificación de los asuntos de los que se ocupa el campo EPM; estos títulos son:

a) Conocimiento y creencias en la enseñanza de las Matemáticas y el desarrollo de la enseñanza.
b) Herramientas y procesos en la formación del profesor de Matemáticas.
c) Participantes en la educación del profesor de Matemáticas: Individuos, equipos, comunidad, redes.

d) El formador de profesores de Matemáticas como un promotor profesional.

Así, los tres temas de los tres primeros volúmenes se refieren, respectivamente, al “qué”, “cómo” y “quién” de la educación del profesor de Matemáticas, respectivamente, en tanto que el último alude al conocimiento y papel de los formadores de profesores de Matemáticas.

Ahora bien, el modelo hipotético de cuatro planos —presentado antes— ofrece inicialmente una posibilidad de ubicar y organizar los objetos/asuntos del campo EPM reseñados por los diferentes autores citados. La Tabla 1 exhibe tal ubicación y organización; en esta se ha utilizado la numeración empleada antes cuando presentamos las cuatro posturas sintetizando los enunciados de los objetos/asuntos aludidos:

	Primera postura (Cardeñoso, et al., 2001)	**Segunda postura** (M. Sánchez, 2011)	**Tercera postura** (Even & Ball, 2009)	**Cuarta postura** (Jaworski & Wood, 2008; Krainer & Wood, 2008; Sullivan & Wood, 2008; Tirosh & Wood, 2008)
Plano α		ii. Prácticas viii. Comunidades de práctica	B. Experiencias docentes E. Aprendizaje desde la práctica	c) Participantes
Plano β	1) Conocimiento del profesor	i. Creencias, visiones y concepciones iii. Conocimientos y destrezas iv. Relación entre teoría y práctica v. Práctica reflexiva vii. Reflexión		a) Conocimiento y creencias
Plano γ	2) Elaboración del conocimiento	vi. Conocimiento pedagógico del contenido ix. Educación *on-line* x. Diseño de tareas xii. Justicia social	A. Educación del profesor D. Enseñanza desde la práctica	b) Herramientas y procesos
Plano δ		xi. Educación de formadores	C. Conocimientos de los educadores	d) Formador como promotor

Tabla 1 Ubicación de objetos de investigación en los planos de la EPM

Bajo esta perspectiva hemos establecido líneas de investigación asociadas a cada uno de los planos y las hemos denominado de manera genérica. Su correspondencia con los planos reseñados, permite especular en la idea y denominación de “líneas/planos de investigación”; así (ver Tabla 2):

	Líneas de investigación
Plano α	Prácticas profesionales de los profesores de Matemáticas
Plano β	Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas
Plano γ	Formación de los profesores de Matemáticas
Plano δ	Conocimiento profesional del formador de profesores de Matemáticas

Tabla 2 Líneas/planos de investigación en la EPM

Estas líneas/planos las describimos (Guacaneme & Mora, 2012a) como sigue:

> **La línea/plano prácticas profesionales de los profesores de Matemáticas** aborda el estudio de: las acciones que el profesor de Matemáticas lleva a cabo en su desempeño docente, en general en las instituciones educativas; las interacciones en las que el profesor se vincula (casi siempre con colegas) para promover aprendizajes profesionales en comunidades de práctica (de tamaños muy variados); o, el aprendizaje que el profesor logra a partir del estudio personal/individual sobre asuntos que le conmina su práctica.
> **La línea/plano conocimiento profesional del profesor de Matemáticas** se ocupa del estudio de: las creencias, visiones y concepciones de los profesores de Matemáticas; los conocimientos, destrezas o competencias de los profesores; las diferentes expresiones de la relación entre teoría y práctica o, si se prefiere, entre la fundamentación conceptual y el conocimiento práctico, o entre el discurso y la acción; o el aprendizaje logrado a través de la práctica reflexiva y la reflexión como actividad que promueve el aprendizaje desde/para la práctica.
> **La línea/plano formación de los profesores de Matemáticas** contempla el estudio de: las prácticas docentes que realizan los formadores y los procesos de aprendizaje en que se vinculan los futuros profesores o los profesores en ejercicio en el marco de programas de educación de profesores de Matemáticas (sean presenciales, a distancia, virtuales, etc.); las tareas que el formador diseña o propone en el marco de los programas de educación de profesores; o, la gestión del conocimiento de fundamentación conceptual y de las experiencias de formación a través de las prácticas iniciales en los programas de educación de profesores.
> **La línea/plano conocimiento profesional del formador de profesores de Matemáticas** incluye, de manera análoga a la descripción de la segunda línea/plano reseñada, el estudio de: las creencias, visiones y concepciones de los formadores de profesores de Matemáticas; los conocimientos, destrezas o competencias de los formadores de profesores; las diferentes expresiones de la relación entre teoría y práctica o, si se prefiere, entre la fundamentación

conceptual y el conocimiento práctico, o entre el discurso y la acción, de los formadores de profesores; o el aprendizaje logrado a través de la práctica reflexiva y la reflexión como actividad que promueve el aprendizaje desde/para la práctica de formación de profesores de Matemáticas. (pp. 8-9).

1.3 La Historia de las Matemáticas en el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas

Una vez enunciadas tres de las características del campo de la EPM (existencia propia, ámbito de acción específico y reconocimiento de líneas de investigación) y recordando que el asunto central de nuestro interés es decantar el papel que la Historia de las Matemáticas cumple (o puede llegar a cumplir) en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas, procuraremos establecer una aproximación al lugar que se le asigna a la HM en: el modelo hipotético del ámbito de acción de la EPM o en los planos/líneas de investigación (Prácticas profesionales de los profesores de Matemáticas, Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, Formación de los profesores de Matemáticas y Conocimiento profesional del formador de profesores de Matemáticas); el estudio de los componentes del conocimiento del profesor de Matemáticas; y, la esfera de algunas de las evidencias de existencia propias de la EPM enunciadas antes (revistas especializadas, estudios internacionales, *Handbook*).

1.3.1 La Historia de las Matemáticas en los líneas/planos de investigación de la Educación del Profesor de Matemáticas

Cuando se centra la atención en el lugar de la Historia de las Matemáticas en la línea/plano de las *prácticas profesionales de los profesores de Matemáticas* surgen preguntas relacionadas, entre otras, con: las maneras de integración de la HM en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; los modos en que la HM determina los currículos o programas de estudio para educar matemáticamente a la sociedad en ambientes escolares; las formas en que la HM participa de las interacciones en las comunidades de práctica de profesores de Matemáticas en ejercicio; la necesidad, surgida de la práctica, de recurrir al estudio del discurso histórico como medio para la acción docente y los aprendizajes logrados a través de este.[19]

[19] Reconocemos que el orden de las cuestiones formuladas se corresponde con el orden de lo enunciado en la descripción de la línea/plano citada al final del apartado 1.2.3, más que con una ordenación jerárquica que obedezca a algún criterio.

Si la atención se concentra en el lugar de la HM en la línea/plano del *conocimiento profesional del profesor de Matemáticas* encontramos un conjunto de asuntos tales como: los efectos que la HM produce sobre las concepciones de los profesores de Matemáticas; el aporte que la HM hace a los conocimientos, destrezas o competencias de los profesores; los modos en que una fundamentación en HM afecta la acción educativa del profesor de Matemáticas; o, el tipo de reflexiones que se generan en/desde/para la práctica docente a partir de la consideración del discurso de la HM.

Considerar el lugar de la HM en la línea/plano de la *formación de los profesores de Matemáticas* nos conduce a identificar algunas cuestiones similares a las planteadas para la primera línea/plano reseñada. Así, entre otras, reconocemos preguntas acerca de: las estrategias curriculares de integración de la HM en los planes de estudio de los programas de formación de profesores de Matemáticas; los modos en que la HM participa de los lineamientos, políticas o normatividad para la formulación de programas de formación de profesores de Matemáticas; las formas en que la HM participa de las interacciones en las comunidades de práctica de formadores de profesores de Matemáticas; o, las necesidades, surgidas de las prácticas formativas, de recurrir al estudio del discurso histórico como recurso para la acción docente del formador y los aprendizajes logrados a través de este a favor de los procesos de docencia del formador.

Cuando se enfoca el papel de la HM en la línea/plano del *conocimiento profesional del formador de profesores de Matemáticas* emergen también preguntas, semejantes a las reseñadas para la segunda línea/plano citada antes, referidas a, entre otras: los efectos que la HM produce sobre las concepciones de los formadores de profesores de Matemáticas; el aporte que la HM hace a los conocimientos, destrezas o competencias de los formadores; los modos en que una fundamentación en HM afecta la acción educativa del formador; o, el tipo de reflexiones que se generan en/desde/para la práctica formativa a partir de la consideración del discurso de la HM.

Las cuestiones propuestas en los anteriores párrafos, sin duda alguna, constituyen un conjunto de asuntos potencialmente convertibles en preguntas de investigación, cuya respuesta permitiría, de una parte, efectivamente mejorar la comprensión del papel de la HM en el complejo ámbito de la formación y acción del profesor de Matemáticas y, de otra parte, establecer las bases para considerar la existencia de un programa de investigación en torno a tal papel. Debemos precisar que la investigación de un programa tal desborda a todas luces las pretensiones de nuestra tesis, aunque constituye un horizonte de sentido para la misma, y consideramos que este puede ser derrotero de investigación para una comunidad académica que asuma la relación "Historia de las Matemáticas – Conocimiento del profesor de Matemáticas" como objeto de estudio.

Por otra parte, este panorama de cuestiones permite ubicar el asunto central de preocupación, es decir el papel de la HM en la constitución del conocimiento del profesor. En efecto, el asunto tiene un nicho de expresión particular en la línea/plano del *conocimiento profesional del profesor de Matemáticas* en tanto que nos interesa establecer el aporte que la HM puede llegar a hacer a los conocimientos o competencias de los profesores de Matemáticas y, eventualmente, los efectos que la HM produce sobre las concepciones de los profesores de Matemáticas.

Antes de mirar con algún detalle el asunto de la HM en el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, debemos reconocer que el anterior panorama también permite ubicar algunas otras acciones investigativas en las que hemos participado. De un lado, se logra advertir que el proyecto de investigación *Caracterización de las estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en programas de formación inicial de profesores de Matemáticas*[20] (Torres & Guacaneme, 2011a, 2011b) asumió como objeto de estudio una de las preguntas ubicadas en la línea/plano de la *formación de los profesores de Matemáticas*, precisamente la que se refiere a la temática implicada en el título del proyecto. De otro lado, permite reconocer que dos de las tesis de grado[21] de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, se han enfocado en esta misma cuestión, particularmente en el lugar que ocupa la historia de la Aritmética y la historia del Álgebra en un curso de formación en Didáctica de la Aritmética y él Álgebra de la Licenciatura en Matemáticas de la misma universidad, y que las cuatro tesis que actualmente asesoramos, del mismo programa de postgrado, se ubican en las dos últimas de las cuatro líneas/planos reseñados. Asimismo, permite ubicar, en la línea/plano del *conocimiento profesional del formador de profesores de Matemáticas*, los Trabajos de grado de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional que hemos asesorado[22].

[20] Proyecto identificado con el código CI 5220, financiado por la Universidad del Valle en el marco de su convocatoria interna del año 2010 y desarrollado en las vigencias 2010 y 2011.

[21] En estas (Gálvez Socarrás & Maldonado Guinea, 2012; Manrique García & Triana Yaya, 2013), junto con la profesora Lyda Constanza Mora, hemos cumplido un papel de asesores.

[22] (Barón Bocanegra & Barragán Sánchez, 2013; Díaz Fernández & Moreno Escobar, 2012; Parra Buitrago & Vargas Solano, 2012; Rojas Hernández, 2012; Yazo Chipatecua & Poveda Córdoba, 2012; Zafra Granados, 2012).

1.3.2 La Historia de las Matemáticas en el estudio del conocimiento del profesor de Matemáticas

Veamos ahora, con más detenimiento, el papel que se le asigna a la HM en el conocimiento del profesor de Matemáticas, desde al menos dos perspectivas: una referida al conocimiento del profesor en general —es decir, sin precisar la disciplina a la que se adscribe— y otra al conocimiento del profesor de Matemáticas.

1.3.2.1 Perspectiva desde los componentes del conocimiento del profesor

Asumir como objeto de estudio los componentes del conocimiento del profesor, nos remite necesariamente a las elaboraciones del norteamericano Lee S. Shulman, quien desde la década del ochenta ha promovido de manera especial una perspectiva de entender el conocimiento del profesor; una síntesis de sus planteamientos se ubica en uno de sus textos más citados (Shulman, 1987)[23] en el que incorpora las siguientes siete categorías:

> … conocimiento de la materia impartida; conocimientos pedagógicos generales, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura; conocimiento del currículo, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio" del docente; conocimiento pedagógico de la materia: esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional; conocimiento de los educandos y de sus características; conocimiento de los contextos educacionales, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, o la gestión y el financiamiento de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educacionales, y de sus fundamentos filosóficos e históricos. (Shulman, 2001, pp. 174-175).

En desarrollo de sus planteamientos, Pamela Grossman introdujo un modelo descriptivo del conocimiento del profesor (Grossman, 1990), en cierto sentido más simplificado, el cual incluye cuatro áreas generales, a saber: el conocimiento disciplinar, el conocimiento pedagógico del contenido, el conocimiento pedagógico general y el conocimiento del contexto. Para Grossman, el **conocimiento disciplinar** (*Subject Matter Knowledge* [SMK]) incluye el conocimiento del contenido de una área temática (hechos y conceptos principales dentro de un campo y las relaciones entre ellos) así como el conocimiento de las estructuras sustantivas (paradigmas o modos de organización de la disciplina y preguntas que guían la investigación) y el conocimiento de las estructuras sintácticas de la disciplina (cánones de evidencia y demostración dentro de la disciplina). El **conocimiento**

[23] O en su traducción al español (Shulman, 2001)

pedagógico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge*[PCK]) es específico a la enseñanza de una disciplina e incluye las maneras de representar y formular los temas que las hacen comprensibles para otros, así como un conocimiento de lo que tales temas requieren e implican para el aprendizaje de los estudiantes; este conocimiento se puede descomponer en: (i) conocimiento y creencias sobre los propósitos de la enseñanza de una disciplina (o tema) en diferentes grados; (ii) conocimiento de la comprensión, concepciones, y aproximaciones erróneas a un tema particular de una disciplina; (iii) conocimiento sobre los materiales disponibles para la enseñanza de un tema, así como la ubicación curricular del tema; y (iv) conocimiento de estrategias de instrucción y representación del tema. Así mismo, para Grossman, el **conocimiento pedagógico general** (*General Pedagogical Knowledge*) incluye un cuerpo de conocimiento general, creencias y habilidades relacionadas con la enseñanza; por ejemplo, comprende el conocimiento de los aprendices y de los procesos de aprendizaje, y el conocimiento del manejo de la clase. El **conocimiento del contexto** (*Knowledge of Context*) se refiere a aquello que el profesor debe conocer de su entorno de trabajo para poder adaptar su conocimiento general a las condiciones de la escuela y de los estudiantes en específico.

Ahora bien, al examinar los planteamientos de Shulman y Grossman e indagar por el papel que le adjudican al conocimiento histórico de la disciplina en el conocimiento del profesor, encontramos que ambos lo ubican como parte del conocimiento disciplinar [SMK]. En efecto, Shulman (2001), en su descripción de la *Formación académica en la disciplina a enseñar*, entendida como una de las fuentes de la base de conocimientos necesarios para la enseñanza, señala que una de las bases del conocimiento de los contenidos es "el saber académico histórico y filosófico sobre la naturaleza del conocimiento" (p. 175) en cada área de estudio. Agrega, además, que el maestro como miembro de una comunidad académica debe:

> … comprender las estructuras de la materia enseñada, los principios de la organización conceptual, como también los principios de indagación que ayudan a responder dos tipos de preguntas en cada ámbito: ¿cuáles son las ideas y las destrezas importantes en este campo? y ¿de qué manera quienes generan conocimientos en esta área incorporan las nuevas ideas y descartan las deficientes? Vale decir, ¿cuáles son las reglas y los procedimientos de un saber académico y de la investigación de buen nivel? Estos interrogantes pueden compararse con lo que Schwab (1964) ha definido como conocimiento de estructuras sustantivas y sintácticas, respectivamente. Esta visión de las fuentes del conocimiento de los contenidos de la asignatura implica necesariamente que el profesor no solo debe comprender a fondo la materia específica que enseña, sino además debe poseer una amplia formación humanista, la que debe servir como un marco para el aprendizaje adquirido anteriormente y como un mecanismo que facilita la adquisición de una nueva comprensión. (Shulman, 2001, p. 176).

Por su parte, Grossman (1990), lo ubica de manera implícita como parte del conocimiento disciplinar, entendido este en términos de conocimiento de: hechos y conceptos principales, paradigmas u organización de la disciplina, y cánones de evidencia y demostración, como lo reseñamos antes. Decimos que lo hace de manera implícita pues, como lo discutimos en un trabajo que intentaba establecer consecuencias de asumir la citada propuesta de Grossman para el caso del conocimiento disciplinar del profesor de Matemáticas (Guacaneme, 2009, 2013a), sus ideas respecto del conocimiento disciplinar carecerían de sentido o, cuando menos, serían parciales o superficiales, si no se supusiera un papel a la Historia y la Epistemología de tal conocimiento. En otras palabras, no nos parece exhaustiva una descripción del conocimiento disciplinar, como el que hace esta autora, si esta que no incorpora los resultados de la investigación histórica y de la reflexión filosófica sobre la disciplina; así, por ejemplo, en dicho trabajo sostenemos que discutir las estructuras sintácticas de las Matemáticas —que debería conocer un profesor de Matemáticas— sin considerar, entre otros aspectos, la evolución histórica de las nociones de demostración, rigor y verdad en Matemáticas, puede conducir a un discurso fútil y poco funcional sobre tales estructuras.

En suma, desde nuestra interpretación de los planteamientos estudiados de Shulman y Grossman, consideramos que sus propuestas de componentes del conocimiento del profesor incorporan necesariamente el conocimiento histórico de la disciplina como parte fundamental del conocimiento disciplinar, pero no de los demás componentes. Sin embargo, queremos reseñar que una mirada a sus planteamientos nos permite advertir que el conocimiento pedagógico general y el conocimiento del contexto son componentes mucho más trasversales a la formación de cualquier profesor que el conocimiento disciplinar y el pedagógico del contenido; en efecto, estos últimos tienen un alto grado de especificidad relativo a la disciplina particular. Así, consideramos conveniente reconocer el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico de las Matemáticas (o conocimiento didáctico de las Matemáticas) como componentes específicos del conocimiento del profesor de Matemáticas, en tanto el conocimiento pedagógico general y el conocimiento del contexto como componentes no específicos; ello, de manera alguna pretende subvalorar estos dos últimos componentes así como tampoco desconocer la posibilidad de que estos tengan un cierto nivel de particularidad relativo a la disciplina.

1.3.2.2 Perspectiva desde el estudio del conocimiento del profesor de Matemáticas

Ahora bien, bajo el reconocimiento de que los planteamientos de Shulman y Grossman se expresaron no específicamente para el campo de la EPM, sino para un campo más general como el de la educación del profesor, intentamos develar la apropiación que estos han tenido en el marco de la EPM. En esta dirección, hacemos una mirada en parte de la literatura del mismo. De esta manera reconocemos que son numerosas las referencias que se identifican al hacer una búsqueda en dicha literatura con los criterios "*Subject Matter Knowledge*" y "*Mathematics*"; el número de estas aumenta considerablemente cuando los criterios de búsqueda son "*Pedagogical Content Knowledge*" y "*Mathematics*".

Adicionalmente, en dicha literatura se logra reconocer una extensa referencia a los trabajos de Shulman y de Grossman. Así, por ejemplo, solo en el *Journal of Mathematics Teacher Education* advertimos cerca de cuarenta documentos que referencian trabajos de Lee Shulman respecto del conocimiento del profesor, en tanto que en el *Mathematics Teacher Education and Development* el número es de trece; en este más de medio centenar de documentos, encontramos referencias a los trabajos pioneros de Shulman sobre el conocimiento del profesor bien sea como una simple alusión (v.g., Chinnappan, 2003; Goulding, Hatch, & Rodd, 2003; Lee, 2005; Leikin & Winicki-Landman, 2001; Muir & Beswick, 2007; Zevenbergen, 2004), como base de una propuesta teórica-investigativa (v.g., An, Kulm, & Wu, 2004; Blanco, 2004; Rowland, Huckstep, & Thwaites, 2005; Stacey et al., 2001) o de una evaluación de un programa de formación (J. Watson, Beswick, Caney, & Skalicky, 2005/2006; J. M. Watson, 2001) o bien para hacerle una crítica (Mason, 1998). Por otra parte, los trabajos clásicos de Pamela Grossman sobre la caracterización del conocimiento del profesor son referenciados en al menos nueve documentos del *Journal of Mathematics Teacher Education* y del *Mathematics Teacher Education and Development*, bien sea como una simple alusión a estos o a un resultado puntual (Blanton, 2002; Chinnappan & Lawson, 2005; Frykholm, 1999; Groth, 2005/2006; Morris, 2001; V. Sánchez & Llinares, 2003), bien para hacer una tenue crítica (Knuth, 2002), o bien para utilizarlos como marco teórico (McDuffie, 2004) o como parte de un modelo ampliado sobre dicho conocimiento (Kahan, Cooper, & Bethea, 2003). Así mismo, en los cuatro volúmenes de *The Handbook of Mathematics Teacher Education* (Jaworski & Wood, 2008; Krainer & Wood, 2008; Sullivan & Wood, 2008; Tirosh & Wood, 2008) son cerca de un centenar de citaciones las que refieren a los trabajos de Shulman y quince las que aluden a los trabajos de Grossman.

Atendiendo a los anteriores datos, para el caso del conocimiento del profesor de Matemáticas, reconocemos una tendencia de aceptación *de facto* de los planteamientos de Shulman y Grossman sin cuestionamientos sustanciales a sus propuestas, pero paradójicamente, con un uso poco significativo como marco teórico en las investigaciones.

A partir de este resultado, realizamos una exploración en algunas de las evidencias de existencia de la EPM, intentando identificar el lugar asignado a la HM en el conocimiento del profesor de Matemáticas. Así, al explorar los cerca de cuatrocientos artículos del *Journal of Mathematics Teacher Education* encontramos que solo siete hacen referencia a la HM, pero de manera no esencial, es decir, sin discutir a fondo su papel en la formación del conocimiento disciplinar. En efecto, solo identificamos:

(i) una alusión a un curso para profesores en ejercicio en el que se desarrolla un tema matemático a través de sus aspectos teóricos, históricos, epistemológicos y educativos, mediado por el uso de medios informáticos (Furinghetti & Barnett, 1998);

(ii) un uso de elementos históricos de la geometría fractal en un curso de métodos de enseñanza para cuestionar preceptos y nociones matemáticas que orientan teorías convencionales sobre la cognición (Davis, 1999);

(iii) una tímida alusión al uso de una visión histórica del desarrollo del Álgebra en el marco de un programa para profesores que lideran procesos de desarrollo profesional de profesores de matemáticas en ejercicio (Even, 1999);

(iv) una ligera mención a la inclusión opcional de cursos de Historia de las Matemáticas en los institutos universitarios franceses de formación de profesores – IUFM (Henry, 2000);

(v) una sutil mención a la Historia de las Matemáticas, y particularmente a la discusión del desarrollo histórico de los conceptos matemáticos, como una manera de que los futuros profesores logren una perspectiva de lo que es la creación y evolución de las ideas matemáticas, y de lo que es la naturaleza del pensamiento y desarrollo de los niños, señalando, además que las conexiones entre filogénesis y ontogénesis pueden ser vistas como una manera de relacionar matemáticas y pedagogía (Potari, 2001);

(vi) una rápida alusión a la Historia de las Matemáticas en un relato de un proyecto en donde los estudiantes, futuros profesores, podían trabajar una perspectiva histórica de los temas matemáticos que seleccionaban (da Ponte, Oliveira, & Varandas, 2002); y,

(vii) una investigación que examinó cómo se transforman las imágenes que los profesores tienen sobre las Matemáticas al comprometerlos con el estudio de algunos temas de Historia de las Matemáticas (Sterenberg, 2008).

La exploración al libro que reporta el decimoquinto estudio ICMI (Even & Ball, 2009) nos permite advertir un panorama semejante al que acabamos de reseñar para la revista más representativa del campo; en efecto, solo en dos de los treinta capítulos del libro hay alusiones a la HM, así:

(i) Bajo el supuesto de que el principal problema en la educación de los profesores radica en la inadecuada visión de los propósitos de la educación y del papel de los profesores de Matemáticas como educadores, D'Ambrosio (2009) hace un llamado a acudir a la HM para desde allí asumir una postura transcultural y comprender que en Matemáticas existen distintos modos de racionalidad, que redireccionan tal visión.

(ii) Neubrand y sus colegas (2009, p. 212) al referirse al conocimiento del contenido matemático como uno de los dominios del conocimiento del profesor, enuncian como ingredientes de tal conocimiento el disponer de comprensiones básicas de la Historia y la Epistemología de las Matemáticas.

En el informe del estudio TEDS-M (Tatto, et al., 2012, p. 256) y en el marco conceptual (Tatto, et al., 2008, p. 86) solo hay una tenue alusión a la HM como uno de los ejemplos en un ítem de una de las preguntas (identificada como *Foundations MFB4FOUN*) que indaga sobre temas de pedagogía de las Matemáticas que los profesores han estudiado; en la Imagen 4 presentamos la pregunta y resaltamos la grácil alusión a la HM.

Consider the following list of mathematics education/<pedagogy> topics. Please indicate whether you have studied each topic as part of your current teacher preparation program.

Check one box in *each* row

	Studied	Not Studied
A. Foundations of Mathematics (e.g., mathematics and philosophy, mathematics epistemology, history of mathematics)	☐1	☐2
B. Context of Mathematics Education (e.g., role of mathematics in society, gender/ethnic aspects of mathematics achievement)	☐1	☐2
C. Development of Mathematics Ability and Thinking (e.g., theories of mathematics ability and thinking; developing mathematical concepts; reasoning, argumentation, and proving; abstracting and generalizing; carrying out procedures and algorithms; application; modeling)	☐1	☐2
D. Mathematics Instruction (e.g., representation of mathematics content and concepts, teaching methods, analysis of mathematical problems and solutions, problem-posing strategies, teacher–pupil interaction)	☐1	☐2
E. Developing Teaching Plans (e.g., selection and sequencing the mathematics content, studying and selecting textbooks and instructional materials)	☐1	☐2
F. Mathematics Teaching: Observation, Analysis and Reflection	☐1	☐2
G. Mathematics Standards and Curriculum	☐1	☐2
H. Affective Issues in Mathematics (e.g., beliefs, attitudes, mathematics anxiety)	☐1	☐2

Imagen 4. Pregunta *Foundations MFB4FOUN* del estudio TEDS-M

La exigua atención a la integración de la HM en la educación del profesor revelada hasta acá, tiene una interesante disparidad en el tratamiento que reconocemos en el primer volumen de *Handbook* citado antes (Sullivan & Wood, 2008), pero no en el conjunto de los cuatro volúmenes que le configuran. En efecto solo cuatro capítulos[24], de los trece que conforman el primer volumen (y de los sesenta que constituyen el *Handbook*), destacan de diversas maneras el lugar de la HM en relación con las creencias y conocimientos de los profesores de Matemáticas.

[24] No hacemos alusión a más capítulos, aunque reconocemos que hay algunos que refieren a la HM (Bartolini Bussi & Maschietto, 2008; Gravemeijer, 2008; Leikin, 2008), pero de un modo secundario.

Mike Askew (2008) al asociar la HM al conocimiento del contenido (*Subject Matter Knowledge*) resalta el hecho que la HM puede ayudar al profesor de Matemáticas a apreciar tanto el carácter colectivo de la actividad matemática, es decir su carácter social, como las diferentes maneras de realizar dicha actividad; reseña que ello ayuda al profesor a entender las características efectivas de la actividad matemática y el aprendizaje en las aulas. Subraya, además, que el estudio de la HM le permite al profesor re-significarla y comprenderla, no como un listado de eventos matemáticos (organizados casi siempre de modo cronológico), sino más bien como *estados de ser*[25] de los objetos matemáticos; señala entonces que una postura semejante podría ser deseable en las clases, en donde más que una inventario de temas, se aborden tales estados de ser de los objetos de enseñanza y aprendizaje.

Por su parte, tres académicos orientales (Li, Huang, & Shin, 2008) al mostrar el panorama de educación de los profesores de Matemáticas en China y Corea refieren un lugar no muy destacado para la HM, reflejado en la existencia de un curso electivo de HM, a la vez que reseñan que en estos países se ha reconocido la necesidad de hacer cambios a esta situación y presentan que en ambos países un curso tal se ha ido adecuando para atender a la condición que se ofrece para la educación de los profesores de Matemáticas y que, en consecuencia, la HM que se trabaja en ese curso tiene una conexión explícita con la pedagogía de las Matemáticas. Presentan, además, un ejemplo de un curso innovador titulado *Historia de las Matemáticas y sus implicaciones para la educación en Matemáticas* reseñando sus énfasis y ejemplificando algunas tareas llevadas a cabo en el curso a través de dos casos (referidos a la construcción ecuaciones lineales con una incógnita y la introducción a los números imaginarios) que reportan la elaboración de diseños de enseñanza basados en la HM (Li, et al., 2008, pp. 75-77).

En un capítulo Kaye Stacey (2008) describe un llamativo modelo de componentes del conocimiento del profesor de Matemáticas necesario para la enseñanza; el tercer componente reseñado por Stacey es nominado "conocer acerca de las Matemáticas" (*Knowing about Mathematics*) y se refiere al conocimiento que el profesor debe lograr de la HM, la Filosofía de las Matemáticas y los desarrollos coetáneos de las Matemáticas. Destaca que la HM le permite al profesor un conocimiento que le brinda elementos para conocer efectivamente cómo funcionan las Matemáticas, de dónde provienen y cuál es (y ha sido) su papel en la sociedad.

[25] "*states of being*" (Askew, 2008, p. 28)

Discutiendo también el asunto de los componentes del conocimiento del profesor, Boero y Guala (2008) presentan y argumentan a favor de reconocer el "Análisis cultural del contenido" a ser enseñado (CAC – *Cultural Analysis of the Content*) como un componente central del conocimiento en cuestión. Como parte de su presentación enuncian que la Epistemología y la Historia de las Matemáticas son las herramientas relevantes "para enmarcar y fundamentar el componente CAC de la educación del profesor" (p. 227) pero advierten enfáticamente que el CAC será estéril si ingresa a la educación del profesor únicamente como un asunto de conferencias, pues ello podría proveer al profesor de un discurso para conversar con los colegas, pero no para actuar en la clase.

Esta exigua integración de la Historia de las Matemáticas a la discusión sobre la educación del profesor de Matemáticas —revelada en la limitada mención (en número y contenido) en una de las revistas especializadas, en dos de los estudios internacionales más importantes de la última década, o en el *Handbook* sobre la educación del profesor de Matemáticas— constituye un indicio que informa parcialmente sobre el estado de reflexión de la comunidad académica que tiene como empresa la investigación sobre la educación de profesores de Matemáticas, respecto de este asunto específico, a la vez que nos permite reconocer un terreno de indagación, al parecer, poco explorado por esta comunidad.

1.4 La historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción como un hito a estudiar

De manera sintética podemos señalar que hasta este punto hemos presentado nuestra preocupación por develar el papel que la HM puede llegar a cumplir en el conocimiento del profesor de Matemáticas y la hemos ubicado en el campo de investigación de la EPM y específicamente en la línea/plano de investigación que se ocupa del estudio del conocimiento del profesor de Matemáticas. Adicionalmente, hemos reconocido que en algunas posturas, hoy en día clásicas, la HM se ubica como parte del componente denominado conocimiento disciplinar; en tanto que en el campo de la EPM la integración de la HM no ha tenido un profuso tratamiento, aunque algunos autores le asignan un lugar destacado en sus planteamientos sobre los componentes del conocimiento del profesor de Matemáticas.

El trabajo hasta acá presentado permite reconocer también un carencia de investigaciones, realizadas en el campo de la EPM, que centradas en la historia de objetos matemáticos (*v.g.*, conceptos, procesos, formas de pensamiento matemático, actividades matemáticas) constituyan casos desde los cuales construir posturas que ofrezcan una base experimental para validar o ilustrar los planteamientos hipotéticos expresados por quienes han abordado la cuestión que nos ocupa. Este hecho nos genera la convicción de que es preciso realizar investigaciones sobre objetos específicos de las Matemáticas y que ello es pertinente y viable en el marco de una tesis doctoral como la presente. Así, para avanzar un poco más en la concreción del problema de investigación de la presente tesis, y bajo la convicción anterior, hemos considerado necesario abandonar la generalidad del discurso sobre la HM y, en consecuencia, seleccionar un tema de las Matemáticas y un momento de su historia.

1.4.1 La elección de la temática matemática

La elección del tema ha sido una consecuencia natural de la trayectoria académica personal. En efecto, atendiendo a que desde hace algunos años la proporcionalidad ha sido objeto de estudio de nuestro interés (Guacaneme, 2000, 2001, 2002; Guacaneme, Andrade, Perry, & Fernández, 2003; Perry, Guacaneme, Andrade, & Fernández, 2003; Aura Lucia Quintero, Molavoque, & Guacaneme, 2011), parece ser adecuado que constituya el objeto matemático sobre el cual centrar el interés investigativo.

En el apartado 2.3.2 de la tesis de Maestría (Guacaneme, 2001, pp. 37-42) argumentamos que la potencialidad de la proporcionalidad como objeto de estudio desde la Didáctica de las Matemáticas depende, entre otras razones, de: su situación en el interior de las Matemáticas —especialmente de las matemáticas escolares—, su vínculo como conocimiento instrumental auxiliar de otras ciencias y de la técnica, su utilización como elemento de juicio (evaluador) del desarrollo psicológico del individuo, su cualidad de obstáculo o dinamizador epistemológico, su ambigüedad lingüística y su permanente aparición temprana en contextos cotidianos no escolares; adicionalmente, y como resultado de un trabajo posterior en torno al pensamiento variacional (Guacaneme, 2003) y otro en torno a la proporcionalidad (Perry, et al., 2003), se advierte que las funciones de proporcionalidad son un ámbito potente para el estudio de la covariación, los patrones y regularidades numéricas, y la linealidad, y constituyen el punto de partida básico para la caracterización de las funciones polinómicas y el punto cúspide en la caracterización de las funciones exponenciales.

No obstante la elección de la proporcionalidad como objeto de estudio, advertimos que al elegirla, más que un tema matemático, hemos elegido un conjunto de temas matemáticos, entre los que se encuentran: las razones entre números o cantidades de magnitud —sean estas geométricas o en general cantidades adjetivadas (Schwartz, 1988)—; las proporciones entre tales razones; las covariaciones directa o inversamente proporcionales; las funciones de proporcionalidad directa, inversa y compuesta; la linealidad; etc. Bajo esta concepción de proporcionalidad, vemos la necesidad de enfocarnos en un tema, dentro de la gama de posibilidades expuesta para este conjunto. De esta manera, y apoyados en el tratamiento y análisis que hicimos en su momento en la tesis de Maestría sobre los conceptos de razón y proporción (Guacaneme, 2001, pp. 194-210) y en la certeza que allí logramos acerca de la necesidad de estudiar "… aquellas otras piezas que deseábamos y creíamos ser capaces de construir en el marco de la tesis y que tuvimos conscientemente que relegar (*v.g.*, la historia de las razones, las proporciones …; los conocimientos de los profesores acerca de estos temas) y otras …" (Guacaneme, 2001, p. 248), decidimos concentrarnos en la historia de las razones y las proporciones.

Quizá ingenuamente se puede llegar a pensar que este nivel de concreción es suficiente; sin embargo, advertimos que la aproximación a la historia de las razones y proporciones nos obliga a un nuevo nivel de especificidad.

1.4.2 La elección del momento de la historia de las razones y proporciones

La identificación y consulta preliminar de fuentes documentales que abordan el tratamiento de aspectos relacionados con la historia de las razones y proporciones, prevista desde el anteproyecto de esta tesis (Guacaneme, 2006), constituye una manera natural de explorarla. Esta estrategia, llevada a cabo desde nuestra condición de aprendices de la historia —y no de historiadores—, nos ha conducido a identificar cerca de un centenar de escritos de historiadores y filósofos, que versan sobre aspectos específicos de tal historia; esta especificidad contrasta con la ilusión —ingenua y hasta romántica— que teníamos al iniciar la búsqueda bibliográfica de encontrar *una historia*[26] de los conceptos de razón y proporción. A través del estudio de algunos de los documentos identificados, hemos podido perfilar varios hitos que, de manera cronológicamente secuencial, describen varias épocas de la historia de los conceptos de razón y proporción[27], a saber:

[26] Lo más cercano a una historia de las razones y las proporciones puede ser lo expuesto en el documento de Piedad Yuste (2004), identificado por nosotros hace poco tiempo.

[27] Una versión un tanto diferente de estos hitos fue incluida en un artículo recientemente publicado (Guacaneme, 2012d, p. 114)

(i) La época de la escuela pitagórica, en la cual existía una teoría de las proporciones que, según la tradición hegemónica[28], entra en crisis por el "descubrimiento" de la inconmensurabilidad. Algunos documentos sobre esta época, tratan el procedimiento conocido como *antanairesis* o *antifairesis* para encontrar sucesiones de parejas de números que se aproximan a la razón entre magnitudes inconmensurables, y cómo este es asociado a la idea de razón y la igualdad de dos de tales procedimientos a la idea de proporción.

(ii) La época dorada de los griegos (fundamentalmente de Eudoxo, Euclides y Apolonio) en la que se "crea" una teoría de las proporciones, se adapta a la versión hipotético-deductiva y se usa en la descripción de las cónicas. Varios documentos se centran en el tratamiento que hace Euclides en sus dos teorías de la razón y la proporción (una para magnitudes geométricas y otra para números) que se asocian a los Libros V y VI y Libro VII, de *Elementos*, respectivamente.

(iii) La época de la Baja Edad Media en la que la clásica teoría de proporciones griega se transforma y reformula para ampliar su ámbito de aplicación a magnitudes no geométricas y su empleo en las ciencias naturales y médicas. Sobresalen los documentos que reportan los intentos por generar teorías que abren el camino para la *aritmetización* de las razones entre magnitudes homogéneas y heterogéneas.

(iv) La época del inicio de la Edad Moderna, en donde se hace uso de las razones y las proporciones como lenguaje de la ciencia, y la época del surgimiento de lo que hoy se llama Álgebra —y particularmente de la Geometría Analítica— en la que se hace uso de la teoría de las proporciones en la solución de problemas geométricos, a través de procedimientos analíticos.

(v) La época de creación del Cálculo y del Análisis, en la que el lenguaje de las funciones sustituye el clásico lenguaje de las proporciones empleado por varios siglos, cayendo este último en un estado de aletargamiento.

(vi) La época de desarrollo de los trabajos del matemático alemán Julius W.R. Dedekind y del matemático y filósofo alemán Gottlob Frege, relativos a la construcción del conjunto de los números reales, en la que de manera un poco intempestiva, la teoría euclidiana parece renacer en cuanto a su protagonismo, como acicate en dichas construcciones.

[28] Esta tradición ha sido cuestionada por autores como Knorr (2001).

En la Tabla 3 hemos incluido algunas de las referencias identificadas para cada uno de los hitos reseñados antes.

Hito/Época	**Referencias bibliográficas**
La escuela pitagórica	(Cajori, 1928; Campos, 1994b; Filep, 1999, 2004; Gardies, 1988; González Urbaneja, 2008; Jiménez, 2006; Thorup, 1992)
La Grecia clásica	(Acerbi, 2003a; Aujac, 1986; Berghout, 1974, 1975; Bongiovanni, 2005; Campos, 1994a; de la Torre, 1997; Evans, 1927; Filep, 2003; Fine, 1917; Fowler, 1979, 1980, 1981, 1982a; Gardies, 1991, 1997, 2004; Grattan-Guinness, 1996; Heath, 1908; M. J. M. Hill, 1900, 1912b, 1923, 1928; Levi, 2003; McDowell & Sokolik, 1993; Mendell, 2007; Puertas, 1991, 1994, 1996; Rusnock & Thagard, 1995; Saïto, 1994a; Zubieta, 1991)
La Baja Edad Media	(Bradwardine & Crosby, 1955; Bradwardine, Rommevaux, & Oresme, 2009; de Parme, 2005; De Young, 1984, 1992, 1995, 2005; Drake, 1973; Glenie, 1777; Grant, 1960, 1972, 1975; Massa Esteve, 1997; Oresme & Grant, 1966; Rommevaux, 2013; Saïto, 1994b; Simonson, 2000b, 2000c; Vitrac, 2002)
El inicio de la Edad Moderna y del surgimiento del Álgebra	(Álvarez Jiménez, s.f; De Groot, 2000; Fernández González & Rondero Guerrero, 2004; Klein, 1968; Palmieri, 2001, 2003)
La creación del Cálculo	(Craik, 2009; Goldstein, 2000; Grosholz, 1987)
La construcción del conjunto de los números reales	(Corry, 1994; Cousquer, 1994; Dummett, 1991; Griesel, 2007; Knorr, 1992; Stein, 1990; Sutherland, 2006)

Tabla 3 Algunas referencias bibliográficas identificadas para los hitos históricos

Como se puede observar, hay una buena cantidad de documentos que versan sobre la historia de las razones y las proporciones en la época dorada de Grecia; al explorar estos documentos se advierte que la teoría de las razones y proporciones expuesta por Euclides en *Elementos* ocupa un lugar central, ello sin dejar de considerar que esta recapitula y organiza el trabajo atribuido a Eudoxo y que en *Los Data* (McDowell & Sokolik, 1993) también hay un tratamiento euclidiano para estos conceptos. Este hecho nos lleva a seleccionar esta teoría como momento de la historia a estudiar. Sin embargo, aún precisamos más el objeto de estudio, bajo los siguientes argumentos:

> Si bien los Libros V, VI, VII y X, de esta obra contienen información relativa a las proporciones, desde nuestra perspectiva ha merecido especial atención el Libro V, puesto que: (i) en este Euclides hace un tratamiento de la teoría de la proporción para las magnitudes geométricas; (ii) esta teoría contiene la definición de proporción, por demás ampliamente estudiada por los

> historiadores, la cual constituye la innovación central frente a la teoría de la proporción pitagórica; (iii) el Libro V maneja un nivel de generalidad *sui generis* en *Elementos*; (iv) la “proporcionalidad geométrica” no ha sido tan comentada y estudiada en la investigación didáctica (o al menos no tanto como la “proporcionalidad aritmética”) y por tanto, presenta un “sabor” especial a la reflexión; y (v) abordar el estudio de todos los libros mencionados desborda nuestras posibilidades de tiempo y espacio actuales. (Guacaneme, 2012c, p. 100)

De esta manera establecemos que la historia relativa a la teoría euclidiana de la razón y proporción del Libro V de Elementos de Euclides, reportada a través de los documentos identificados, constituye el objeto de estudio y referencia para la tesis.

1.5 El problema de investigación

A partir del panorama presentado en los anteriores apartados, la inquietud inicial (decantar el papel que la Historia de las Matemáticas [HM] cumple —o puede llegar a cumplir— en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas) se ha ubicado como una pregunta de la línea de investigación del EPM que estudia el conocimiento del profesor de Matemáticas, poco explorada en este campo, y se ha precisado el interés por la teoría euclidiana de la razón y la proporción, específicamente la referida en los documentos resultantes de la investigación histórica sobre el Libro V de *Elementos*. De esta manera la inquietud inicial se puede replantear a través de la siguiente pregunta de investigación: ¿cuál es el potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción, contenida en el Libro V de *Elementos*, en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas?

Esta pregunta, al examinarse a la luz de aquello que planteamos en el apartado 1.3.1, para el caso de la línea/plano del *conocimiento profesional del profesor de* Matemáticas, puede descomponerse en al menos cuatro preguntas, de las cuales a las dos primeras procuraremos aportar respuestas a través de la tesis, y en cierto sentido, a través de estas dos, se sintetiza el problema de investigación, a saber:

1. ¿Cuál es el potencial que la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción tiene para influir sobre las concepciones de los profesores de Matemáticas?
2. ¿Qué aportes podría llegar a hacer la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción a los conocimientos o competencias de los profesores de Matemáticas?

3. ¿Qué del conocimiento histórico sobre la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción afecta efectivamente la acción docente del profesor de Matemáticas?
4. ¿Qué tipo de reflexiones se generan en/desde la práctica docente, a partir de la integración de la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción en las acciones docentes del profesor de Matemáticas?

De manera colateral a las preguntas de los numerales 1 y 2 se disponen algunas otras preguntas que le complementan; así, a continuación planteamos ejemplos de interrogantes, los cuáles hemos venido decantando y son objeto también de nuestros intereses investigativos:

(i) ¿La teoría euclidiana de la razón y la proporción ha constituido un objeto de estudio para la investigación en el ámbito de la relación HM-CPM?
(ii) ¿Tiene la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción un valor pedagógico intrínseco a favor de la educación del profesor de Matemáticas?
(iii) ¿Qué características posee la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción efectivamente existente?
(iv) ¿Cómo las características de la teoría euclidiana de la razón y la proporción determinan las posibilidades de educación de los profesores de Matemáticas?
(v) ¿La historia de temas matemáticos (como la razón y la proporción) que tienen un tratamiento tan difuso en las matemáticas escolares (Guacaneme, 2001, pp. 236-249), provee conocimiento relevante[29] al profesor de Matemáticas?

Por otra parte, en el discurso presentado en los anteriores apartados, han quedado planteadas algunas cuestiones que consideramos necesario explicitar en este punto y que, por supuesto, incrementan el acervo de preguntas investigativas relacionadas con la tesis.

(vi) ¿Si bien el estudio de la relación entre la Historia de las Matemáticas y el conocimiento del profesor de Matemáticas no ha tenido un amplio tratamiento en el campo de la EPM, en la Educación Matemática (como campo de investigación ascendente del de la EPM) ha tenido un tratamiento semejante?
(vii) ¿Si bien en los modelos clásicos de los componentes del conocimiento del profesor la HM se ubica en relación con el conocimiento disciplinar, puede esta

[29] Usamos la palabra "relevancia", dado que en uno de los programas de integración de la HM en la educación del profesor de Matemáticas (Bruckheimer & Arcavi, 2000, p. 136) se reseña esta como una de las principales características de su trabajo.

tener una relación con otros componentes e incluso llegar a constituir un componente?

(viii) ¿Cómo se caracterizan las estrategias curriculares de formación en HM en los planes de estudio de los programas colombianos de formación de profesores de Matemáticas?

1.6 Intencionalidad

La investigación propuesta tiene algunos fines que atienden a su estatus de tesis en el marco de un Doctorado en Educación. Así, por un lado, el desarrollo de la tesis constituye un ejercicio académico de formación en la investigación que procura, a través de la acción investigativa y de la reflexión sobre esta, promover competencias investigativas de alta calidad en el doctorando. Igualmente, pretende apoyar la formación de un investigador colombiano, con proyección internacional, que aborde el estudio de problemáticas nacionales e internacionales en relación con la educación de los profesores de Matemáticas y, de esta manera, acrecentar el potencial investigativo del país en esta materia y apoyar el planteamiento y la solución de las problemáticas propias de la educación de los profesores de Matemáticas, desde una perspectiva no suficientemente explorada en el país, como lo es la Historia de las Matemáticas. En suma, desde esta perspectiva se pretende:

(i) Promover el desarrollo de competencias investigativas como parte fundamental de la formación doctoral.
(ii) Aportar a la comprensión, personal e institucional, de las problemáticas relacionadas con la educación del profesor de Matemáticas en el contexto nacional e internacional.

Desde una perspectiva diferente, a través del desarrollo del proyecto de investigación se propone lograr una ilustración, a través del estudio de la teoría euclidiana de la razón y la proporción, de las posibilidades reales de participación del discurso de la HM en la educación del profesor de Matemáticas. Esto implicará la identificación, recapitulación o diseño de algunas categorías de análisis, que versen sobre: las características de la HM (o, mejor, de los documentos resultantes de la investigación histórica) que podrían ser relevantes atender en la integración de la HM a la educación de los profesores, las razones que se arguyen a favor de incorporar el estudio de la HM como parte de los discursos necesarios para el ejercicio docente del profesor de Matemáticas, los propósitos que se persiguen con el estudio de la HM, y las estrategias metodológicas de incorporación de la HM en la educación de los profesores de Matemáticas. En este sentido interesa:

(iii) Contar con unas categorías de análisis que favorezcan la caracterización de los documentos resultantes de la investigación histórica sobre la teoría euclidiana de la razón y la proporción.

(iv) Analizar los documentos que reportan la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción a la luz de las categorías y develar, en consecuencia, el potencial formativo de tal historia.

1.7 Estrategia metodológica

1.7.1 Momentos o fases

Atendiendo al exiguo tratamiento que acerca de las preguntas de investigación reportadas antes, se hace en el campo de la EPM, una de las primeras acciones en el desarrollo de la tesis es el estudio de la literatura proveniente esencialmente del campo de la Educación Matemática, que reporta las acciones y reflexiones académicas en torno a la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática". Ello permite disponer de una aproximación al *estado del arte* de la reflexión e investigación en torno a tal relación.

Una vez realizada la aproximación a dicha relación, procuramos explorar si en efecto el papel del conocimiento histórico en el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas constituye —o podría constituir— una línea de investigación e intervención, y de ser así, establecer el estado de desarrollo de la misma. A través de esta exploración se intenta establecer un marco de referencia en torno a las preguntas relacionadas con las características de la HM que se vincula a los procesos educativos de los profesores de Matemáticas, los argumentos que se esgrimen a favor de la integración de la HM en tales procesos, las intenciones que se persiguen con dicha integración, y las estrategias metodológicas que se han diseñado e implementado para que los profesores de Matemáticas se apropien y usen los discursos históricos.

Estudiamos entonces, a modo de recensión, los documentos que hemos identificado versan sobre la teoría euclidiana de la razón y la proporción del Libro V de *Elementos* para, de una parte, obtener una perspectiva de la teoría expresada en tal tratado y, de otra parte, familiarizarnos con los discursos expresados en los documentos. Procedemos luego a caracterizar los documentos estudiados, atendiendo a las categorías de análisis constituidas en el marco de referencia, citado antes.

Finalmente, se precisa el potencial formativo que los documentos que versan sobre la teoría euclidiana de la proporción tienen a favor del conocimiento del profesor.

1.7.2 Tipo de investigación

Como se puede apreciar en las cuatro fases antes descritas, la investigación es esencialmente cualitativa e incluye estudios descriptivos e interpretativos.

La primera fase implica la identificación de la literatura a estudiar, una cierta categorización u ordenación que, en la medida de lo posible, supere la cronología de publicación y una interpretación de las líneas de investigación o problemas que han sido planteados o estudiados. Así mismo incluye una descripción de aspectos sociales relacionados con la existencia de comunidades dedicadas a la investigación y de los rituales académicos que las determina.

La segunda fase profundiza en la literatura que aborda específicamente la relación entre la HM y el conocimiento del profesor de Matemáticas. Su interés fundamental es construir unas categorías de análisis que emerjan de los planteamientos identificados en los documentos y que se refieran a los tipos de historia, las justificaciones, las intencionalidades y las estrategias metodológicas propuestas para la educación de los profesores en asuntos de la HM.

La tercera fase contempla el estudio de los documentos resultantes de la investigación histórica sobre la teoría euclidiana de la razón y la proporción; acá la investigación se realiza con apoyo del *análisis de contenido* [AC] (Bardin, 1986; Ruiz Silva, 2006), entendida como una opción metodológica primaria. Bajo esta, los documentos citados se asumen como fuente de información primaria y son sometidos a los tres niveles del AC. Así, en el nivel de superficie, inicialmente se hace una descripción de la información en ellos contenida. En un segundo nivel, o nivel analítico, se clasifica su contenido a través de algunas de las categorías establecidas previamente en la segunda fase referida antes o en las que eventualmente emerjan del estudio de los mismos documentos. Entonces, en el nivel interpretativo, y atendiendo al panorama logrado sobre los modelos del conocimiento del profesor de Matemáticas, se elaborará un texto que le asigne sentido a la investigación histórica analizada en relación con el conocimiento del profesor. Este último nivel corresponde a la cuarta fase reseñada antes.

Bajo esta óptica debe ser claro que la tesis no contempla una investigación de carácter empírico, quizá como sería deseable en las investigaciones educativas. En efecto, no incluye el diseño e implementación de estrategias educativas, ni la valoración de su efectividad o impacto. A pesar de ello, coincidimos con varios autores que han señalado la necesidad de realizar investigaciones de orden empírico que permitan develar el valor efectivo de la Historia de las Matemáticas en el aprendizaje de las Matemáticas, y ampliamos esta divisa al plano de la educación del profesor de Matemáticas y por tanto al conocimiento del mismo.

Asimismo, debería ser claro que esta no es una investigación de carácter histórico, pues no intenta describir ni interpretar un hecho u obra matemática del pasado, aunque sí aborda los resultados de la investigación histórica como objeto de estudio. Una manera alterna de formularlo es decir que la investigación no es de HM sino sobre la HM, o de manera más precisa sobre la apropiación y uso del conocimiento histórico.

1.7.3 Estrategias de divulgación

Desde el inicio de los estudios doctorales y en el anteproyecto presentado en ese momento (Guacaneme, 2006) definimos que los avances en la construcción del proyecto de investigación y los avances parciales de la investigación fuesen objeto de divulgación y discusión a través de los medios que ha definido la comunidad académica para comunicar sus inquietudes y desarrollos.

La razón fundamental de esta decisión es que creemos firmemente que el conocimiento sobre la educación del profesor de Matemáticas se nutre a través de la interacción que se da en una comunidad académica, cuando se discute con sus miembros los avances parciales de la investigación (aún en estados de desarrollo emergentes, hipotéticos o especulativos) y se construye en, y a través de, las acciones reflexivas y argumentativas del equipo de investigación (estudiante y asesor para el caso de la tesis).

Bajo esta decisión previmos la presentación de avances y resultados en algunos eventos de Historia de las Matemáticas y de Educación Matemática de ponencias, así como la publicación de documentos de avance en revistas o libros especializados.

2 Estudio de la relación Historia de las Matemáticas – Educación Matemática

Como lo anunciamos en la introducción de la tesis, en este capítulo presentamos una aproximación al *estado del arte* en torno a la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática"; tal aproximación, planteada como un primer momento o fase del desarrollo de la tesis, ha sido lograda al explorar la literatura proveniente del campo de la Educación Matemática, a través de la cual se reportan las acciones y reflexiones académicas en torno a tal relación.

Así, hemos verificado que esta relación ha sido un tema ampliamente documentado en la literatura especializada y que existe un estudio internacional sobre la misma; igualmente, hemos constatado la existencia y actividad de una comunidad internacional que la asume como objeto de estudio y en consecuencia la existencia de eventos académicos y revistas especializadas en tal relación. Esta aproximación nos lleva a reconocer: la existencia de cuatro ámbitos de interpretación de la relación HM–EM (la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas, la Historia de las Matemáticas en las investigaciones del campo de la Educación Matemática, la Historia de las Matemáticas en la educación del profesor de Matemáticas y la Historia de la enseñanza de las Matemáticas); la Didáctica de la Historia de las Matemáticas como escenario para el estudio de la relación HM–EM; y, la exigua atención a los vínculos de la Filosofía de las Matemáticas con la relación HM–EM.

Antes de entrar en materia, debemos señalar que algunas de las ideas acá expuestas constituyeron el objeto de cuatro ponencias presentadas a la comunidad nacional de Educación Matemática[30].

[30] Ponencia "Una aproximación al estado del arte de la relación Historia de las Matemáticas-Educación Matemática" presentada en el I Seminario Internacional y VI Nacional de investigación en Educación y Pedagogía (Simposio del Énfasis en Educación Matemática del Doctorado interinstitucional). Bogotá, 29 a 31 de mayo de 2007.

2.1 La literatura sobre la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática"

La revisión de la literatura especializada en la relación objeto de estudio, conduce a reconocer: monográficos de revistas del campo de la Educación Matemática, revistas especializadas, inventarios bibliográficos, artículos, libros (uno de ellos, un estudio internacional específico (Fauvel & van Maanen, 2000)) y conferencias, sobre la relación en cuestión.

Advertir tal panorama, caracterizado por una abundancia documental no evidente a gran parte de la comunidad de educadores matemáticos, constituye un avance y resultado del desarrollo de la tesis, a la vez que impone un reto mayúsculo a la comunidad interesada en la relación HM-EM, pues invita a la elaboración de clasificaciones documentales, tarea que supera ampliamente las posibilidades de una tesis como la nuestra. A este respecto vale la pena reseñar que incluso en el reporte del estudio internacional citado, a pesar de haber dado la discusión sobre posibles clasificaciones, no se presenta la documentación bibliográfica organizada a través de clasificación documental alguna y solo se hace mención a una clasificación de documentos alemanes y holandeses, propuesta por Harm Jan Smid, compuesta por cinco categorías[31]; igualmente, es pertinente mencionar que en el marco del programa de Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, con estudiantes de la cohorte 2013, se realizó una clasificación inicial, en siete categorías[32], de algunos documentos.

Conferencia "Una aproximación a la relación 'Historia de las Matemáticas – Educación Matemática'", expuesta en el marco del III Congreso Regional de Matemáticas. Girardot, 1 a 3 de noviembre de 2007.

Ponencia en la mesa temática "Historia de las Matemáticas y de la Educación Matemáticas" celebrada en el 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Medellín, 11 a 13 de octubre de 2012.

Comunicación "Aproximación a la relación 'Historia de las Matemáticas - Educación Matemática' en el último quinquenio", presentada en coautoría con Harry Augusto Gómez Espinoza (estudiante de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional), en el marco de la 4ª Escuela de Historia y Educación Matemática. Santiago de Cali, 9 a 11 de octubre de 2013.

[31] (i) Discusiones sobre las posibilidades y ventajas del uso de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. (ii) Ejemplos, guías didácticas y sugerencias para los maestros sobre cómo utilizar el material histórico en sus clases. (iii) Recursos históricos ya elaborados para su uso en el aula. (iv) Descripciones sobre el uso en la clase de material histórico. (v) Resultados de investigación sobre los resultados y efectos (afectivos y cognitivos) de la utilización de materiales históricos. (Fauvel et al., 2000, p. 372).

[32] (i) Documentos de Historia de las Matemáticas. (ii) Documentos de reflexiones teóricas sobre la HM en la educación en Matemáticas. (iii) Documentos que exhiben resultados de investigaciones sobre la comprensión o aprendizaje de ideas matemáticas, mediada por la intervención de HM. (iv) Proyectos de aula o talleres donde se integra la HM en la educación en Matemáticas (v) Documentos que exhiben problemas históricos propuestos en el aula. (vi) Diseños

Por ello, a continuación nos limitamos a presentar un inventario –naturalmente incompleto– organizado por el tipo de documento en cuestión y atendiendo a la cronología de los documentos; a propósito de esta última variable, debemos reconocer que si bien inicialmente creímos conveniente definir nuestra ventana de observación en un lapso que cubriera las tres últimas décadas, esta condición cobró un carácter tan relativo que difícilmente terminamos atendiéndola.

2.1.1 Monográficos de revistas

La indagación realizada, relativa a la identificación de la literatura pertinente, nos condujo a identificar más de una docena de números monográficos de revistas especializadas en Educación Matemática cuyo contenido aborda aspectos de la relación objeto de estudio:

- *For the learning of mathematics* 11 (2), 1991.
- *The Mathematical Gazette* 76, (475), 1992.
- *For the learning of mathematics* 17 (1), 1997.
- *Mathematics in school* 26 (3), 1997.
- *Mathematics in school* 27 (4), 1998.
- *Mathematics teacher* 93 (8), 2000.
- UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 26, 2001.
- *Mathematics in school* 32 (1), 2003.
- *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 3 (1-2), 2004
- *Educational Studies in Mathematics* 66 (2), 2007.
- Épsilon. Revista de Educación Matemática 28 (1), 2011.
- *ZDM* 44 (4) 2012.
- *Science & Education* 23 (1), 2014.
- *PRIMUS.* 24 (8), 2014.

Veamos, a continuación algunas anotaciones sobre el contenido de cada uno de los monográficos de las revistas citadas.

---

curriculares generados a partir de la consideración sobre el conocimiento histórico. (vii) Documentos que versan sobre la HM en la educación de los profesores de Matemáticas. (Guacaneme, Ángel, & Bello, 2013, p. 6).

2.1.1.1 *For the learning of mathematics* 11 (2), 1991

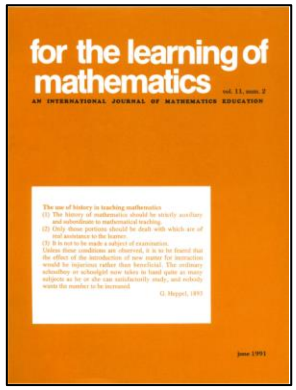

Imagen 5 Carátula de la revista *For the learning of mathematics* 11 (2), 1991

En el año 1991 se publicó este número de la revista canadiense, el cual incluyó el editorial y nueve[33] artículos (Fauvel, 1991b; Führer, 1991; Gardner, 1991; Ofir, 1991; Rogers, 1991; Russ, et al., 1991; Thomaidis, 1991; van Maanen, 1991; Zaslavsky, 1991), todos ellos referidos a la relación HM–EM, esto en razón a que contiene artículos presentados en la *International Conference on History in Mathematics Education*, *HIMED 90*, llevada a cabo en Leicester en abril de 1990. Particularmente, en aquel ejemplar se procuró una revisión de las maneras en que la Historia de las Matemáticas puede ser usada en las clases de matemáticas y de las motivaciones para hacerlo. Además, se discutieron otras cuestiones (*v.g.*, asuntos políticos) que rodean la introducción de una dimensión histórica en la educación en Matemáticas. Una exploración de los contenidos de los artículos permite reconocer documentos que aluden a: la intervención de la Historia como elemento de motivación hacia las Matemáticas, la intervención de la Historia ligada al pensamiento y comprensión matemática de los estudiantes, referencias bibliográficas sobre Historia de las Matemáticas, la reflexión sobre el papel de la Historia de las Matemáticas en la concepción o conocimiento sobre las Matemáticas, y reflexiones sobre el conocimiento de los profesores relativas a la intervención de la Historia de las Matemáticas en su quehacer docente.

[33] Este número puede variar (y llegar a ser quince) si se considera que uno de los artículos (Russ et al., 1991) tiene contribuciones separadas de varios autores.

2.1.1.2 *The Mathematical Gazette* 76 (475), 1992

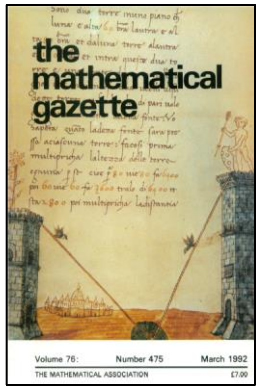

Imagen 6 Carátula de la revista *The Mathematical Gazette* 76 (475), 1992

El editorial de este ejemplar de la revista reporta que este número "[…] es una edición especial sobre el uso de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de esta materia."; se afirma, además, que el contenido pretende atender a la diversidad del público lector de la revista. Quizá para atender a esta intención, los veinte artículos en conjunto (Cooper, 1992; Crilly, 1992; Fauvel, 1992; Fowler, 1992; Führer, 1992; Furinghetti, 1992; Gardiner, 1992a, 1992b; Hadley & Singmaster, 1992; Heiede, 1992; Kool, 1992; Mackinnon, 1992a, 1992b; Ofir & Arcavi, 1992; Parameswaran, 1992; Pritchard, 1992; Ransom, 1992; Rauff, 1992; J. D. Smith, 1992; Tahta, 1992; van Maanen, 1992) abordan un amplio espectro temático de tal suerte que se reconocen trabajos que presentan referencias bibliográficas sobre Historia de las Matemáticas y otros que exhiben experiencias y reflexiones en torno a: la intervención de la Historia como elemento de motivación hacia las Matemáticas, la intervención de la Historia ligada al pensamiento y comprensión matemática de los estudiantes, la intervención de la Historia en la transformación de la enseñanza de las Matemáticas, y las reflexiones sobre el conocimiento de los profesores sobre la intervención de la Historia de las Matemáticas.

2.1.1.3 *For the learning of mathematics* 17 (1), 1997

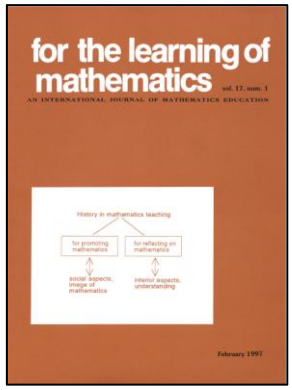

Imagen 7 Carátula de la revista *For the learning of mathematics* 17 (1), 1997

La revista canadiense publicó en la misma década un segundo ejemplar con varios artículos dedicados a la relación HM–EM, pero esta vez la reflexión se dirige no solo a la intervención en la clase de Matemáticas, sino que aborda también la intervención en la investigación en Didáctica de las Matemáticas y el nexo de la Historia de las Matemáticas con otros dominios disciplinares.

De manera específica seis de los nueve artículos versan sobre: (i) La enseñanza de los negativos desde diversas aproximaciones históricas, (Hitchcock, 1997). (ii) La Psicología, la epistemología histórica y la enseñanza de las Matemáticas, (Radford, 1997). (iii) Epistemología, Historia y enseñanza de las Matemáticas, (Bkouche, 1997). (iv) Historia, epistemología y metodología en la investigación didáctica, (Waldegg, 1997). (v) Historia de las Matemáticas, Educación Matemática y práctica escolar, (Furinghetti, 1997). (vi) Algunas ideas para el uso de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas, (Katz, 1997).

Los seis documentos se pueden clasificar en los siguientes grupos:

- Intervención de la Historia como elemento de motivación hacia las matemáticas: (Furinghetti, 1997).
- Reflexión sobre el papel de la Historia de las Matemáticas en la concepción sobre las matemáticas: (Hitchcock, 1997), (Furinghetti, 1997) y (Katz, 1997).
- Reflexiones sobre el conocimiento de los profesores sobre la intervención de la Historia de las Matemáticas: (Bkouche, 1997).
- Reflexiones sobre la Historia en la investigación didáctica: (Radford, 1997) y (Waldegg, 1997).

2.1.1.4 *Mathematics in school* 26 (3), 1997

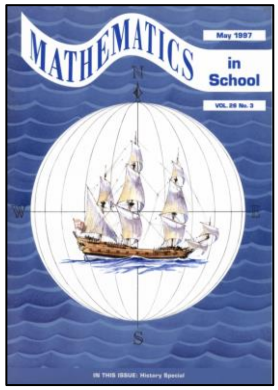

Imagen 8 Carátula de la revista *Mathematics in school* 26 (3), 1997

Esta revista, dirigida en esencia a los profesores de Matemáticas de todos los grados, en ejercicio o en formación, presenta una serie de artículos de Historia de las Matemáticas en los que se aborda: los vínculos de desarrollo o decadencia de las Matemáticas en relación con a los periodos de avance o declive de las civilizaciones donde tiene lugar la actividad matemática (Sawyer, 1997); la discusión acerca de la naturaleza y carácter de la Matemática griega y la de otras civilizaciones antiguas (Joseph, 1997); el uso, en la Europa Medieval, de un instrumento para hacer cálculos numéricos, semejante al ábaco (Oliver, 1997); el carácter masculino de las Matemáticas y el papel que las mujeres matemáticas han jugado en el desarrollo de las Matemáticas (Downes, 1997); y, las historias de algunas mujeres matemáticas que han dejado huella en el campo de las Matemáticas (Rothman, 1997). En relación con la enseñanza de las Matemáticas, esta revista contiene: un artículo que anuncia las problemáticas que abordará el estudio ICMI, en relación al papel de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas (Fauvel & van Maanen, 1997b); un estudio de un tratado de trigonometría del siglo XIX que conlleva al uso de logaritmos para hacer cálculos y que ilustra la manera como los libros modernos han evolucionado para hacer más accesibles las ideas matemáticas a un mayor número de estudiantes (French, 1997); y, la descripción de una estrategia de clase en torno a la presentación breve de matemáticos famosos, como oportunidad para indagar y aprender (Taverner, 1997).

2.1.1.5 *Mathematics in school* 27 (4), 1998

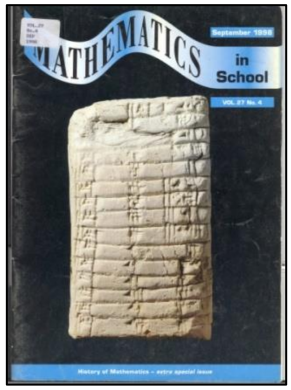

Imagen 9 Carátula de la revista *Mathematics in School* 27 (4), 1998

La revista inglesa de la *Mathematical Association* dedica un nuevo ejemplar enteramente a la Historia de las Matemáticas y a su intervención en la enseñanza de las Matemáticas. Una mirada a los catorce artículos de esta revista, permite identificar al menos cinco documentos de Historia de las Matemáticas (R. P. Burn, 1998a, 1998b; Eagle, 1998; Van Brummelen, 1998; Weeks, 1998) y uno que presenta referencias bibliográficas sobre esta (Barrow-Green, 1998); los ocho restantes (Ernest, 1998; Fauvel, 1998; Furinghetti & Somaglia, 1998; Maher, 1998; Ponza, 1998; Rice, 1998; Robson, 1998; van Maanen, 1998), se refieren a la intervención de la Historia como elemento de motivación hacia las Matemáticas, la intervención de la Historia ligada al pensamiento y comprensión matemática de los estudiantes o al papel de la Historia de las Matemáticas en la concepción sobre las Matemáticas.

2.1.1.6 *Mathematics teacher* 93 (8), 2000

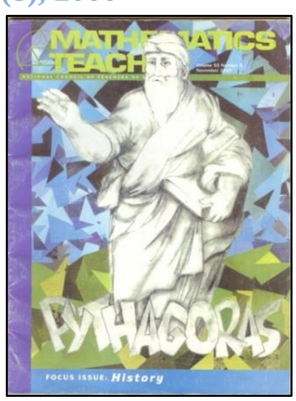

Imagen 10 Carátula de la revista *Mathematics teacher* 93 (8), 2000

Esta revista norteamericana dedicó una edición especial a la Historia de las Matemáticas y a la manera de presentarla en las clases de Matemáticas. Su cerca de una decena y media de artículos presentan experiencias y sugerencias de intervención de la Historia de las Matemáticas en las clases de Matemáticas (Barry, 2000; Camp, 2000; Horn, Zamierowski, & Barger, 2000; Lightner, 2000; Rubenstein & Schwartz, 2000; Shirley, 2000; Shotsberger, 2000; Simonson, 2000a; Wilson & Chauvot, 2000); de igual manera exponen algunos elementos de génesis y evolución de conceptos puestos en juego en el ámbito escolar (Davitt, 2000; D. W. Smith, 2000). Asimismo hay al menos un artículo que discute la intervención de la Historia de las Matemáticas en las clases de Matemáticas (Marshall & Rich, 2000). Llama la atención la inclusión de dos artículos que podrían ser catalogados como de historia de la educación en Matemáticas (Gray, 2000; McComas, 2000) y la reseña de varios libros de Historia de las Matemáticas (Allen, 2000; Bonsangue, 2000; Foley, 2000; Katz, 2000a; Lasher, 2000; Ross, 2000).

2.1.1.7 UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 26, 2001

Imagen 11 Carátula de la revista UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 26, 2001

Los artículos de este número monográfico dedicado a la Historia de las Matemáticas contienen diversos enfoques que son complejamente discutidos en la introducción editorial del mismo (Velázquez, 2001). Así, en los artículos centrales, se presenta una discusión de la introducción de la Historia de las Matemáticas en el aula y se ilustra con hechos y temas históricos clásicos tal intervención (Santiago Fernández Fernández, 2001) o con la incorporación de un juego ancestral (Rupérez Padrón & García Déniz, 2001), se aboga y propone la necesidad de considerar “otras” historias (es decir, historias personales, colectivas o no hegemónicas) para favorecer el ámbito cultural de las Matemáticas y de la educación en estas (A. J. Bishop, 2001; Nomdedeu, 2001), y se presenta una mirada multifacética a la Historia de las Matemáticas del siglo XX (Martiñón Cejas, 2001), que deja entrever una manera más amplia de entenderla.

2.1.1.8 *Mathematics in school* 32 (1), 2003

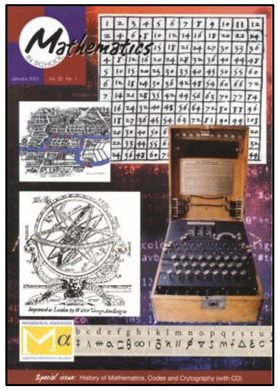

Imagen 12 Carátula de la revista *Mathematics in school* 32 (1), 2003

Como se señala en la editorial de este número de la revista inglesa, la colección de artículos de esta edición ofrece la oportunidad de comprender el uso de la Historia en las clases de Matemáticas, entendiéndola como un ámbito que permite tanto incorporar elementos aspectos culturales en las clases, como recordar que las Matemáticas son creadas por seres humanos, a menudo motivados por resolver problemas del mundo real. Bajo esta óptica se presentan algunas estrategias para usar la Historia de las Matemáticas en el aula (Chassapis & Kotsakosta, 2003; Kool, 2003; Ransom, 2003; Singh, 2003; Van Brummelen, 2003); adicionalmente se incluyen algunos artículos que contienen elementos sobre la historia de algunos temas matemáticos (D. Brown, 2003; B. Burn, 2003; Oliver, 2003a, 2003b; Weeks, 2003a, 2003b). Vale la pena resaltar la presencia de un documento (Furinghetti & Paola, 2003) que describe un CD-ROM, diseñado para profesores, que contiene materiales históricos y educativos adecuados para el diseño de una secuencia de instrucción, que se base en la Historia de las Matemáticas.

2.1.1.9 *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 3 (1-2), 2004

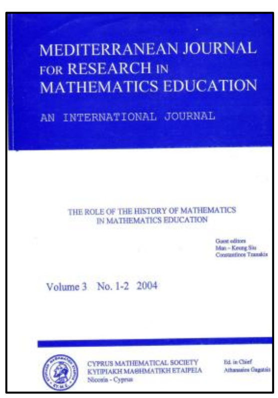

Imagen 13 Carátula de la revista *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 3 (1-2), 2004

Como se menciona en el editorial de esta revista (Siu & Tzanakis, 2004), el contenido de este número especial reedita varias de las ponencias presentadas en el grupo de estudio temático (TSG17) titulado "El papel de la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática", en el marco de la décima versión del ICME (*10th International Congress on Mathematics Education*). En el mismo editorial se propone una clasificación de los documentos en cuatro grupos, relacionados con: (i) Asuntos epistemológicos relevantes a la relación entre Matemáticas, Historia y Educación Matemática (Bagni, 2004; Furinghetti, 2004; Zormbala & Tzanakis, 2004). (ii) La educación del profesor de Matemáticas en Historia de las Matemáticas (y su relación con otras disciplinas) y en la familiarización con materiales de inspiración histórica para ser empleado en el aula (Barabash & Guberman-Glebov, 2004; Waldegg, 2004). (iii) La construcción de material didáctico para ser usado en las clases o por profesores de Matemáticas (Helfgott, 2004; Taimina, 2004; Tattersall & McMurran, 2004). (iv) Experiencias y fundamentos sobre el uso de la Historia de las Matemáticas en el aula de clase (Charette, 2004; Fung, 2004).

2.1.1.10 *Educational Studies in Mathematics* 66 (2), 2007

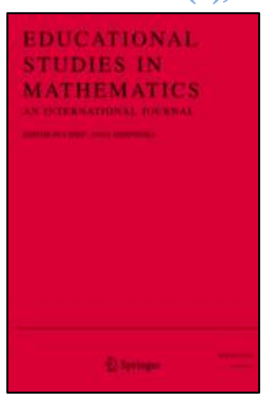

Imagen 14 Carátula de la revista *Educational Studies in Mathematics* 66 (2) 2007

Esta revista, compuesta por una introducción (Radford, Furinghetti, & Katz, 2007) que discute aspectos centrales de la relación HM–EM y nueve artículos, está dedicada por entero a tal relación y exhibe una mirada muy actualizada de esta. Dicha mirada si bien contempla asuntos tratados antes (*v.g.*, el paralelismo entre la evolución histórica de conceptos matemáticos y el proceso de su enseñanza y aprendizaje (Thomaidis & Tzanakis, 2007), la importancia de la Historia de las Matemáticas en una enseñanza no convencional o tradicional (Furinghetti, 2007)), los aborda de manera crítica y profunda; igualmente, incluye en su marco de reflexión otros asuntos relacionados con: la Historia de las Matemáticas como medio para la formación de competencias profesionales y creencias para el ejercicio docente (Arcavi & Isoda, 2007; Furinghetti, 2007; Høyrup, 2007); las características del conocimiento matemático y del conocimiento histórico de las

Matemáticas y aquello que la forma de conocer para cada uno puede implicar para la educación en Matemáticas (Fried, 2007); las diferencias entre el conocimiento histórico y filosófico de las Matemáticas y sus implicaciones para los análisis de herramientas y contextos educativos (Otte, 2007); la historia de algunos temas matemáticos y su relación con las matemáticas escolares (Barbin, 2007; Katz & Barton, 2007; Radford & Puig, 2007).

2.1.1.11 Épsilon. Revista de Educación Matemática 28 (1), 2011

Imagen 15 Carátula de la revista Épsilon 28 (1), 2011

Esta edición de la revista española de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", se presenta como un monográfico a través del cual investigadores y profesores presentan diversos tratamientos y propuestas para trabajar la Historia de las Matemáticas en sí misma y en relación con la Educación Matemática. Como lo señala su editor (el colombiano Alexander Maz Machado), la revista incluye artículos de contenidos teóricos, metodológicos, educativos y divulgativos.

Se incluyen así, dos artículos que exhibe unas herramientas conceptuales y metodológicas para contextualizar la investigación en HM–EM (Gómez, 2011; Picado & Rico, 2011), un artículo sobre la historia de la formación de profesores en Aritmética y Álgebra en un momento de la historia española (Sierra Vázquez & López Esteban, 2011), tres artículos de Historia de las Matemáticas (uno sobre el Teorema de Rolle (C.-O. Suárez Alemán, 2011), el otro sobre los conceptos de máximo y mínimo (González Astudillo, 2011) y el último sobre problemas asociados a los primeros desarrollos del Cálculo integral (Aranda Ballesteros & Gómez Lara, 2011)), un artículo que expone consideraciones sobre una visión anacrónica de la regla de la cadena (al considerarla ligada a la composición de funciones) y sus implicaciones didácticas (Campistrous, López Fernández, & Rizo Cabrera, 2011), un artículo de sociología de las Matemáticas (Peralta, 2011), y tres documentos de experiencias e iniciativas para la implementación en el aula desde/de una perspectiva histórica (de la Fuente Martínez, 2011; Quirós Bajo, 2011; Salinas-Herrera, Adamuz-Povedano, & Jiménez-Fanjul, 2011).

2.1.1.12 *ZDM* 44 (4) 2012

Imagen 16 Carátula genérica de la revista *ZDM*

La edición de este número especial, dedicado a la historia de la enseñanza de las Matemáticas, estuvo a cargo de Gert Schubring, Fulvia Furinghetti y Man Keung Siu, quienes en su editorial (Schubring, Furinghetti, & Siu, 2012) reseñan que los artículos de este número permiten identificar problemas abiertos en la historia de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, que son representativos de todo el campo, e invitan a académicos competentes para que lleven a cabo la investigación necesaria respecto de estos; asimismo, señalan que los artículos se centran en los procesos de modernización en la enseñanza de las Matemáticas en los períodos de cambios políticos y socio-culturales en algunos países.

En este sentido se describen los cambios educativos en China (Chan & Siu, 2012) y Japón (Ueno, 2012) generados por el interés de incluir en el Siglo XIX las matemáticas occidentales como parte de su educación; también se describen estos cambios durante los siglos XVIII y XIX en los tres países (Turquía, Egipto y Túnez) que formaban parte del Imperio Otomano (Abdeljaouad, 2012) y se enfatiza en que durante mucho tiempo, la condición bélica que se vivía entonces generó condicionamientos para la enseñanza de las Matemáticas, centrándola en su empleo en las artes de la guerra, hecho al que tuvo que enfrentarse la introducción de las Matemáticas occidentales.

La modernización de la enseñanza de las Matemáticas en algunos países europeos también fue objeto de estudio (Francia, Alemania, Italia y Rusia). Así, para el caso francés, se revisa el hecho de que en el Siglo XIX la enseñanza se organizó de acuerdo con la clase social de la que procedían los alumnos, definiendo una “dualidad educativa” que caracterizó la educación primaria para las clases trabajadoras y la educación secundaria para las clases acomodadas; a partir de ello se estudia la educación de los profesores de primaria, formados en las *Écoles Normales Primaires* en la década de 1830 (d'Enfert, 2012). El caso alemán refiere la coexistencia en el Siglo XIX de dos concepciones y realidades de la enseñanza de las Matemáticas (el neo-humanista, con una concepción moderna de la educación en general y con las Matemáticas como uno de los pilares fundamentales del plan de estudios, y los "viejos"-humanistas, con un dominio de las humanidades clásicas) y las tensiones por su mutua adaptabilidad (Schubring, 2012a). El artículo referido al caso italiano (Furinghetti & Giacardi, 2012) describe la evolución de la profesión de profesor de Matemáticas en Italia durante la transición del país de un grupo de pequeños estados a una sola nación unificada y enfatiza en los currículos de formación en el período comprendido entre 1810 (cuando la *Scuola Normale Superiore* de Pisa fue creada) y 1920 (cuando las *Scuole di Magisterio* fueron suprimidas). El caso soviético reporta cómo en la época post-revolucionaria el nuevo gobierno del país se esforzó por aplicar planes y enfoques audaces y radicales en la educación matemática y cómo en la década de 1930 estas reformas erradicadas (Karp, 2012).

Suramérica está representada por la descripción de las grandes líneas del desarrollo de la educación matemática en Brasil desde 1500, haciendo hincapié en el desarrollo de la educación matemática secundaria (Carvalho & Dassie, 2012).

El número especial de la revista también incluye un artículo (Kilpatrick, 2012) que centra la atención en el movimiento mundial de las matemáticas modernas, a mediados del Siglo XX, destacando que aunque fue considerado fallido, este cambió no solo la matemática escolar, sino también la forma en que las personas y los países ven las matemáticas escolares.

2.1.1.13 *Science & Education* 23 (1), 2014

Imagen 17 Carátula de la revista *Science & Education* 23 (1), 2014

Esta revista publica un número especial, compuesto por trece artículos, dedicados a la Historia, Filosofía y Educación Matemática. Los editores de este número (Katz, Jankvist, Fried, & Rowlands, 2014) reseñan, como un aspecto a destacar de esta publicación, el lugar que han querido asignarle a la Filosofía de las Matemáticas, bajo la consideración de su importancia para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, al aportar, entre otros, elementos a la comprensión de la naturaleza de las Matemáticas.

Los editores reseñan, además, que han organizado los artículos en cuatro secciones. En la primera se discuten algunos elementos teóricos sobre el uso de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza; ubican allí tres artículos, dos de los cuales aluden al uso de fuentes originales (Barnett, Lodder, & Pengelley, 2014; Kjeldsen & Petersen, 2014) y el tercero (Mosvold, Jakobsen, & Jankvist, 2014) al papel de la Historia de las Matemáticas en la formación del conocimiento disciplinar y del didáctico del contenido del profesor. La segunda parte se ocupa de usos específicos de la Historia de las Matemáticas en el aula; así se reseñan tres experiencias relacionadas con el cálculo del número pi (Papadopoulos, 2014), las secciones cónicas (Panagiotou, 2014) y la adopción de una estrategia pedagógica histórica (Taani, 2014). Dos de los tres artículos de la tercera parte se refieren a estudios sobre las creencias o concepciones de los profesores respecto de la Historia de las Matemáticas (Alpaslan, Işıksal, & Haser, 2014; Povey, 2014), en tanto que el tercero (Fenaroli, Furinghetti, & Somaglia, 2014) reporta una experiencia de formación de profesores relativa al concepto de derivada desde una perspectiva histórica. La sección final se ocupa de la relación entre la Filosofía de las Matemáticas y la enseñanza de las Matemáticas (Cable, 2014; Jankvist & Iversen, 2014), así como con un aspecto interesante de la sociología de las Matemáticas (Fiss, 2014).

2.1.1.14 *PRIMUS* 24 (8), 2014

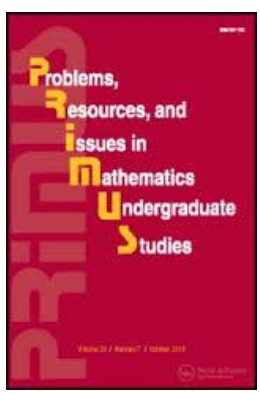

Imagen 14 Carátula genérica de la revista *PRIMUS*

Este monográfico de una de las revistas dedicadas a la Educación Matemática en/para la Educación Superior contiene una introducción y ocho artículos. Precisamente en la introducción Clark & Thoo (2014) señalan que este número se centra en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas de pregrado utilizando la Historia de las Matemáticas como un vehículo. Reseñan que los primeros cuatro artículos (INCLUIR REFERENCIAS) discuten la inclusión de algún aspecto de la Historia de las Matemáticas en los cursos universitarios de Matemáticas y que los últimos cuatro (INCLUIR REFERENCIAS) describen experiencias, de los autores de los mismos, con el diseño y uso de fuentes primarias con estudiantes universitarios de Matemáticas. Agregan que los ocho artículos se distribuyen entre el siguiente subconjunto de los temas principales del Grupo Internacional de Estudio sobre las relaciones entre la Historia y Pedagogía de las Matemáticas (HPM): (i) Los resultados, desde el punto cognitivo y afectivo, de experimentos reales en el aula de implementación de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas, a nivel de pregrado y en la formación de profesores de Matemáticas. (ii) Los resultados de la enseñanza de cursos de Historia de las Matemáticas para estudios especializados en Matemáticas, Educación Matemática o Filosofía. (iii) Modalidades de integración en el pregrado de fuentes primarias y sus efectos educativos, preferiblemente con conclusiones basadas en experimentos de aula.

2.1.2 Revistas especializadas en la relación Historia de las Matemáticas – Educación Matemática

La indagación bibliográfica permitió identificar dos revistas especializadas en la relación HM–EM, a saber:

- *Convergence: Where Mathematics, History and Teaching Interact* 1, 2004 a 10, 2013.
- *The International Journal for the History of Mathematics Education* 1 (1), 2006 a 8 (2) 2013.

2.1.2.1 *Convergence: Where Mathematics, History and Teaching Interact* 1, 2004 a 10, 2013

Esta revista *on line*[34], producida por *The Mathematical Association of America*, se centra en la Historia de las Matemáticas y su uso en la enseñanza y se dirige fundamentalmente a profesores de Matemáticas de la secundaria y de los primeros años de universidad. Aborda temas relacionados con el Álgebra, la combinatoria, la Geometría sintética y

[34] A la fecha se ubica en la página http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence

analítica, Trigonometría, Probabilidad y Estadística, funciones elementales, Cálculo, ecuaciones diferenciales y Álgebra lineal.

Dentro de los recursos que publica y ofrece: artículos informativos, herramientas como tesoros matemáticos, imágenes de objetos y textos matemáticos, retratos para usar en la clase, traducciones de fuentes originales, actividades de aula, proyectos y módulos. Además, publica reseñas de libros nuevos y antiguos, problemas históricos, lista diaria de eventos matemáticos históricos, citas y un calendario.

A la fecha en su página se referencian seiscientos cuarenta y cinco artículos publicados en sus diez volúmenes. Estos están clasificados por tres categorías (y en su búsqueda se pueden filtrar por estas), a saber: Tema o materia (*v.g.*, Álgebra y teoría de números, Análisis, Matemáticas aplicadas, Cálculo, Diferencial y ecuaciones diferenciales, Matemática discreta, Geometría y Topología, Historia de las Matemáticas, Lógica y fundamentos, Educación Matemática, Tecnología matemática, Historia matemática, Números y cálculos, Estadística y probabilidad), Tipo (*v.g.*, Conjunto de datos, Evento, Material de instrucción, Material de referencia, Comunidad, Audiovisual) y Formato (hardware, sistema operativo o software matemático).

2.1.2.2 *The International Journal for the History of Mathematics Education* 1 (1), 2006 a 8 (2) 2013

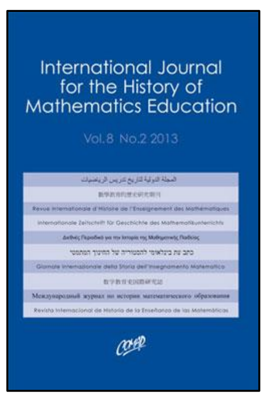

Imagen 18 Carátula del más reciente número de *JHME*

Como se declara en la página web de la revista[35], esta surge para responder a una necesidad expresada en el Congreso Internacional de Educación Matemática (realizado en Copenhague en 2004) y complementar aquello que sobre la historia de la enseñanza de las Matemáticas se publica en revistas de Educación Matemática y de Historia de las

[35] http://www.comap.com/historyjournal/

Matemáticas. En esta dirección se publican dos números anuales, que contienen artículos de investigación, notas y reseñas de libros; hasta la fecha, en sus quince números se han publicado cincuenta y siete artículos, veinticinco notas y quince reseñas.

Su objetivo es proveer elementos de recapitulación de la historia de la enseñanza de las Matemáticas, con el fin de revelar puntos de vista de momentos anteriores (que van desde la antigüedad hasta finales del Siglo XX) y desentrañar posibles falacias de sucesos pasados. Igualmente pretende que en sus publicaciones se supere el carácter inconexo de las historias nacionales, culturales y sociales y para contribuir a establecer temas y características del desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas en muchas culturas comunes, diferenciando entre lo que constituye especificidades o particularidades nacionales y lo que puede ser indicativo de tendencias globales.

Las temáticas se enfocan principalmente en la historia del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas a nivel escolar y en la Educación Superior, y en la historia de la formación de profesores; así, se incluyen, entre otros, artículos sobre los procesos de modernización de las prácticas de enseñanza, las tendencias en el uso de libros de texto, las políticas de formación de profesores de Matemáticas, el funcionamiento de las asociaciones o grupos de profesores de Matemáticas.

2.1.3 Inventarios bibliográficos

La indagación bibliográfica realizada nos condujo también a identificar cuatro inventarios bibliográficos sobre la relación en cuestión. El primero de ellos, desde el punto de vista cronológico, corresponde al editorial de una revista de Educación Matemática. El otro lo encontramos en la página Web de la *British Society for the History of Mathematics* [BSHM], y contiene los resúmenes de cerca de un centenar y medio de referencias relativas a la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. El tercero (Fauvel, et al., 2000), mucho más difundido y con un carácter un poco más internacional, corresponde al capítulo 11 del estudio internacional del ICMI (Fauvel & van Maanen, 2000). El último, corresponde a la tercera parte del editorial del número monográfico de la revista *Science & Education* (Katz, et al., 2014).

2.1.3.1 Editorial de *For the learning of mathematics* 11 (2), 1991

En el editorial, John Fauvel reseña treinta y seis artículos que, en el lapso de 1980 a 1991, la revista ha publicado, a través de los cuales se ha dado la discusión sobre el uso de la Historia de las Matemáticas en el aprendizaje de las Matemáticas o, de manera más general, sobre la relación HM–EM. Los artículos son referenciados en cuatro categorías, que él mismo califica como difusas, a saber: “discusión históricamente informada de educación matemática, discusión de usos de la historia *en* la educación matemática, estudios de caso en ese uso y artículos sobre la historia *de* la educación matemática" (Fauvel, 1991a).

2.1.3.2 Resúmenes de la *British Society for the History of Mathematics*

En la página Web de la Sociedad Británica de Historia de las Matemáticas (http://www.dcs.warwick.ac.uk/bshm/) está reseñado[36] un documento que contiene ciento cuarenta y cuatro referencias relacionadas con Historia de las Matemáticas en Educación. Estas referencias recapituladas hasta el año 2000, aluden a artículos de revistas, capítulos de libros (o libros) y conferencias en eventos académicos. En la Tabla 4 registramos las revistas, los libros y las memorias de los eventos considerados en tal listado, así como el número de referencias para cada uno.

Tipo de publicación	Nombre	Número de referencias
Revistas	*American mathematical monthly* 10 (1), 1994	1
	Annals of the history of computing 19 (1), 1997	1
	Arithmetic teacher 35 (4), 1987	1
	College mathematics journal 29, 1998	1
	Educational studies in mathematics 24, 1993; 29, 1995	2
	Edumath 6, 1998	1
	For the learning of mathematics 1 (1), 1980; 2 (1), 1981; 2 (2), 1981; 2 (3), 1982; 3 (1), 1982; 3 (2), 1982; 4 (3), 1984; 5 (1), 1985; 5 (3), 1985; 6 (1), 1986; 6 (3), 1986; 8 (1), 1988; 8 (3), 1988; 9 (1), 1989; 10 (3), 1990; 11 (1), 1991; 11 (2), 1991; 12 (1), 1992; 13 (2), 1993; 13 (3), 1993; 14 (2), 1994; 14 (3), 1994; 15 (2), 1995; 15 (3), 1995; 17 (1), 1997; 17 (2), 1997	48
	Humanistic mathematics network journal 19, 1999	1
	International journal of mathematics education in science and technology 9, 1978; 26, 1995; 30, 1999	3
	Journal for research in mathematics education 8, 1977	1
	Mathematics in school 23 (3), 1994; 26 (3), 1997; 27 (4), 1998	21
	Mathematics Teaching 153, 1995; 158, 1997	2
	Nonlinear analysis, theory, methods and applications 30, 1997	1

[36] El documento durante una época fue accesible a través del enlace http://www.dcs.warwick.ac.uk/bshm/education/ineduc.html, pero al parecer está desactivado; actualmente figura el enlace http://www.dcs.warwick.ac.uk/bshm/abs.html, que parece tener la misma condición que el anterior.

	PRIMUS 6, 1996	1
	Science and education 6, 1997; 7, 1998; 8, 1999	9
	Science education 81, 1997	1
	The Mathematical Gazette 74 (467), 1990; 76, (475), 1992; 80 (489), 1996	13
	UME trends 6 (4), 1994	1
	ZDM 98 (1), 1998	1
	Zetetiké 5, 1997	1
Libros	*History in the mathematics classroom: the IREM Papers*, 1990	1
	Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique, 1995	5
	Teaching mathematics: the relationship between knowledge, curriculum and practice, 1996	4
	Vita mathematica: historical research and integration with teaching, 1996	5
	Arithmetic and algebra education, 1996	1
	CBMS Issues in mathematics education 6. Research in Collegiate Mathematics Education II, 1996	1
	Approaches to algebra: perspectives for research and teaching, 1996	1
	Italian research in mathematics education 1988-1995, 1996	1
	Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research, 1997	1
	Using history to teach mathematics: an international perspective, 2000	3
Memorias	*Proceedings of HPM Meeting, Blumenau, Brazil*, 1994	5
	Proceedings of the first European Summer University on the history and epistemology in mathematics education, 1995	1
	Proceedings of HPM Meeting, Braga, Portugal, 1996	4

Tabla 4 Distribución de documentos referenciados en el inventario de la BSHM

2.1.3.3 Capítulo 11 del estudio ICMI

Este documento (Fauvel, et al., 2000) reporta un inventario de un poco más de doscientas ochenta referencias bibliográficas relativas a la relación HM–EM publicadas en ocho idiomas (Chino [48], Danés [23], Holandés [17], Inglés [111], Francés [13], Alemán [36], Griego [22] e Italiano [14]); asimismo, reseña ocho números especiales o monográficos de algunas revistas y trece libros. Con ello se pretende tanto aportar una base referencial para futuros trabajos de investigación y de innovación en torno a la relación HM–EM, como ilustrar la amplitud y profundidad de las discusiones y trabajos realizados en diferentes países en torno a esta.

2.1.3.4 Editorial de *Science & Education* 23 (1) 2014

La tercera parte del editorial (Katz, et al., 2014) reporta una lista de treinta y dos lecturas importantes seleccionadas en el campo de la relación HM–EM. Esta reseña catorce libros, ocho capítulos de *handbooks*, y diez artículos citados con frecuencia. Los editores señalan que esta lista se basa en su conocimiento de la literatura especializada y que la lista contiene referencias tanto nuevas, como "clásicas", todas ellas sugeridas como lecturas fundamentales para los neófitos en el campo de la relación HM–EM.

2.1.4 Artículos

Además de los artículos de los monográficos de las revistas y a los incluidos en los catálogos reseñados antes, existe un número notable de artículos que versan sobre la relación HM–EM. A continuación presentamos la información bibliográfica de algunos de ellos, organizados por la revista que los contiene. Aclaramos que para la selección y orden de las revistas acá reportadas, hemos atendido los resultados de un estudio que, basado en el juicio de expertos, identificó y jerarquizó las diecisiete revistas más importantes del campo de la Educación Matemática (Toerner & Arzarello, 2012)[37]. Adicionalmente, en los apartados 2.1.4.16 a 2.1.4.26, hemos incluido información de otras revistas, organizadas alfabéticamente, que publican en Español y no fueron consideradas en el estudio citado, pero pertinentes para nuestro contexto y propósito.

2.1.4.1 *Educational Studies in Mathematics*

En esta revista identificamos un total de veintiséis artículos que abordan aspectos de la relación HM–EM (ver Tabla 5). Diez de estos artículos han sido ya reseñados como parte del monográfico reportado en 2.1.1.10, dos en el inventario reseñado en 2.1.3.2 , dos en el inventario aludido en 2.1.3.3 y cuatro en el inventario del editorial citado en 2.1.3.4.

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Siu, M.-K. (1993). Proof and pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on JIU ZHANG SUAN SHU. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 345-357.	2.1.3.2 2.1.3.3
Swetz, F. (1995). To know and to teach: Mathematical pedagogy from a historical context. *Educational Studies in Mathematics, 29*(1), 73-88.	2.1.3.2 2.1.3.3
Fauvel, J., & van Maanen, J. (1997). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics: Discussion Document for an ICMI Study (1997–2000). *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 255-259.	
Gulikers, I., & Blom, K. (2001). 'A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 223-258.	2.1.3.4

[37] Aclaramos que de las diecisiete revista en cuestión hemos excluido dos (*Journal für Mathematik-Didaktik* y *Nordisk matematikkdidaktikk*) por nuestras limitaciones con el idioma en que están escritas.

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Streefland, L. (2003). Learning from history for teaching in the future. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 37-62.	
Bakker, A., & Gravemeijer, K. (2006). An Historical Phenomenology of Mean and Median. *Educational Studies in Mathematics, 62*(2), 149-168.	
Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 83-106.	
Radford, L., Furinghetti, F., & Katz, V. J. (2007). Introduction The topos of meaning or the encounter between past and present. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 107-110.	2.1.1.10 2.1.3.4
Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 111-129.	2.1.1.10
Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 131-143.	2.1.1.10
Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and Meaning as Sensuous, Visual, Historical forms of Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 145-164.	2.1.1.10
Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical 'parallelism' revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 165-183.	2.1.1.10
Katz, V. J., & Barton, B. (2007). Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 185-201.	2.1.1.10
Fried, M. (2007). Didactics and History of Mathematics: Knowledge and Self-Knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 203-223.	2.1.1.10
Barbin, E. (2007). On the argument of simplicity in Elements and schoolbooks of Geometry. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 225-242.	2.1.1.10
Otte, M. (2007). Mathematical history, philosophy and education. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 243-255.	2.1.1.10
Høyrup, J. (2007). The roles of Mesopotamian bronze age mathematics tool for state formation and administration – carrier of teachers' professional intellectual autonomy. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 257-271.	2.1.1.10
Larsen, S., & Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 205-216.	
Charalambous, C., Panaoura, A., & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics, 71*(2), 161-180.	
Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261.	2.1.3.4
Jankvist, U. T. (2010). An empirical study of using history as a 'goal'. *Educational Studies in Mathematics, 74*(1), 53-74.	
Schubring, G. (2011). Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning-epistemology, history, and semiotics interacting. *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 79-104. doi: 10.1007/s10649-011-9301-x	
Kjeldsen, T., & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 327-349. doi: 10.1007/s10649-011-9352-z	2.1.3.4

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Clark, K. (2012). History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics, 81*(1), 67-84. doi: 10.1007/s10649-011-9361-y	
Otte, M., Campos, T. M., & Abido, A. (2013). Plato, Pascal, and the dynamics of personal knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 397-415. doi: 10.1007/s10649-012-9435-5	
Park, J., Güçler, B., & McCrory, R. (2013). Teaching prospective teachers about fractions: historical and pedagogical perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 455-479. doi: 10.1007/s10649-012-9440-8	

Tabla 5 Artículos de HM–EM en *ESM*

2.1.4.2 *Journal for Research in Mathematics Education*

Ubicamos cuatro artículos referidos a la relación HM–EM (ver Tabla 6); uno de ellos se encuentra en dos de los inventarios reseñados.

Referencia bibliográfica	Reseñado en
McBride, C. C., & Rollins, J. H. (1977). The Effects of History of Mathematics on Attitudes toward Mathematics of College Algebra Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 8*(1), 57-61.	2.1.3.2 2.1.3.3
Ely, R. (2010). Nonstandard Student Conceptions About Infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 117-146. doi: 10.2307/20720128	
Jankvist, U. T. (2011). Anchoring Students' Metaperspective Discussions of History in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 346-385. doi: 10.5951/jresematheduc.42.4.0346	
Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2014). Obstacles and Affordances for Integer Reasoning: An Analysis of Children's Thinking and the History of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(1), 19-61. doi: 10.5951/jresematheduc.45.1.0019	

Tabla 6 Artículos de HM–EM en *JRME*

2.1.4.3 *For the Learning of Mathematics*

Al menos cincuenta y nueve artículos se han publicado en esta revista canadiense; de estos treinta y seis fueron reportados en el editorial reseñado en el apartado 2.1.3.1, cuarenta y tres en inventario del apartado 2.1.3.2, treinta y cuatro en el del 2.1.3.3 y dos en el editorial del apartado 2.1.3.4. Así mismo nueve han sido reseñados en el monográfico presentado en el apartado 2.1.1.1 y cuatro en el monográfico del apartado 2.1.1.3.

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Tahta, D. (1980). About Geometry. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 1*(1), 2-9.	2.1.3.1 2.1.3.2
Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 1*(1), 16-20.	2.1.3.1

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Agassi, J. (1980). On mathematics education: the Lakatosian revolution. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 1*(1), 27-31.	2.1.3.1
Freudenthal, H. (1981). Should a Mathematics Teacher Know Something about the History of Mathematics? *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 2*(1) , 30-33.	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Wolfson, P. (1981). Philosophy enters the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 2*(1), 22-26.	2.1.3.2
Dhombres, J. (1981). Pédagogie et utilisation de l'histoire: des tensions contradictoires. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 2*(2), 10-15.	2.1.3.1 2.1.3.2
Morley, A. (1982). Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 2*(3), 46	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Davis, P. J. (1982). Toward a philosophy of computation. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 3*(1), 2-5.	2.1.3.1 2.1.3.2
Pimm, D. (1982). Why the history and philosophy of mathematics should not be rated X. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 3*(1), 12-15.	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1982). Maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 3*(1), 30-37.	2.1.3.1 2.1.3.3 2.1.3.4
Stowasser, R. (1982). A textbook chapter from an idea of Pascal. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 3*(2), 25-30.	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Howson, G. (1984). The questions remain the same: only the solution change. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 4*(2), 14-17.	2.1.3.1
Bos, H. J. M. (1984). Mathematics and its social context; a dialogue in the staff room, with historical episodes. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 4*(3), 2-9.	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Stowasser, R., & Trygve, B. (1984). An idea from Jakob Bernoulli for the teaching of algebra: a challenge for the interested pupil. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 4*(3), 30-39.	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 5*(1), 44-48.	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Kroll, D. (1985). Evidence from 'The Mathematics Teacher' (1908-1920) on Women and Mathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 5*(2), 7-10.	2.1.3.1
Blake, R., & Verhille, C. (1985). The Story of 0. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 5*(3), 35-47.	2.1.3.1 2.1.3.2
Tahta, D. (1986). In Calypso's Arms. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 6*(1), 17-23.	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Kleiner, I. (1986). Famous Problems in Mathematics: An Outline of a Course. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 6*(1), 31-38.	2.1.3.1

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Katz, V. J. (1986). Using History in Teaching Mathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 6*(3), 13-19.	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1987). History of Mathematics for teachers: the case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 7*(2), 18-23.	2.1.3.1 2.1.3.3
Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 7*(3), 41-51.	2.1.3.1
Fauvel, J. (1988). Cartesian and Euclidean Rhetoric. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 8*(1), 25-29.	2.1.3.1 2.1.3.2
Steiner, H.-G. (1988). Two Kinds of 'Elements'; and the Dialectic between Synthetic-deductive and Analytic-genetic Approaches in Mathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 8*(3), 7-15.	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Fauvel, J. (1989). Platonic Rhetoric in Distance Learning: How Robert Record Taught the Home Learner. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 9*(1), 2-6.	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (1989). The Didactical De Morgan: a Selection of Augustus De Morgan's Thoughts on Teaching and Learning Mathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 9*(1), 34-39.	2.1.3.1
Shenitzer, A. (1990). A mathematics lesson. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 10*(3), 38-39.	2.1.3.2
Graf, K.-D., & Hodgson, B. R. (1990). Popularizing Geometrical Concepts: The Case of the Kaleidoscope. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 10*(3), 42-50.	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative Numbers: Obstacles in Their Evolution from Intuitive to Intellectual Constructs. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(1), 26-32.	2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Fauvel, J. (1991). Using History in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 3-6.	2.1.1.1 2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3 2.1.3.4
Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Barbin, E., Arcavi, A., Brown, G., & Fowler, D. (1991). The Experience of History in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 7-16.	2.1.1.1 2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Gardner, J. H. (1991). How Fast Does the Wind Travel?: History in the Primary Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 17-20.	2.1.1.1 2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Ofir, R. (1991). Historical Happenings in the Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 21-23.	2.1.1.1 2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Führer, L. (1991). Historical stories in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 24-31.	2.1.1.1 2.1.3.1 2.1.3.2

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Zaslavsky, C. (1991). World Cultures in the Mathematics Class. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 32-36.	2.1.1.1 2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Thomaidis, Y. (1991). Historical Digressions in Greek Geometry Lessons. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 37-43.	2.1.1.1 2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
van Maanen, J. (1991). L'Hopital's Weight Problem. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 44-47.	2.1.1.1 2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Rogers, L. (1991). History of Mathematics: Resources for Teachers. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 48-52.	2.1.1.1 2.1.3.1 2.1.3.2 2.1.3.3
Hitchcock, G. (1992). The 'Grand Entertainment': Dramatising the Birth and Development of Mathematical Concepts. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 12*(1), 21-27.	2.1.3.2 2.1.3.3
Furinghetti, F. (1993). Images of Mathematics outside the Community of Mathematicians: Evidence and Explanations. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 13*(2), 33-38.	2.1.3.2
Bero, P. (1993). Calculations in the style of Kepler. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 13*(3), 27-20.	2.1.3.2
Katz, V. J. (1994). Ethnomathematics in the Classroom. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 14*(2), 26-30.	2.1.3.2 2.1.3.3
Zaslavsky, C. (1994). 'Africa Counts' and Ethnomathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 14*(2), 3-8.	2.1.3.2
Menghini, M. (1994). Form in Algebra: Reflecting, with Peacock, on Upper Secondary School Teaching. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 14*(3), 9-14.	2.1.3.2 2.1.3.3
Fernandez, E. (1994). A Kinder, Gentler Socrates: Conveying New Images of Mathematics Dialogue. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 14*(3), 43-47.	2.1.3.2 2.1.3.3
Bruckheimer, M., Ron, O., & Abraham, A. (1995). The Case for and against 'Casting Out Nines'. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 15*(2), 23-28.	2.1.3.2
Radford, L. (1995). Before the Other Unknowns Were Invented: Didactic Inquiries on the Methods and Problems of Mediaeval Italian Algebra. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 15*(3), 28-38.	2.1.3.2 2.1.3.3
Hitchcock, G. (1997). Teaching the Negatives, 1870-1970: A Medley of Models. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(1), 17-25, 42.	2.1.1.3 2.1.3.2 2.1.3.3
Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(1), 26-33.	2.1.1.3 2.1.3.2 2.1.3.3
Bkouche, R. (1997). Epistémologie, histoire et enseignement de mathématiques. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(1), 34-42.	2.1.1.3 2.1.3.2 2.1.3.3

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Waldegg, G. (1997). Histoire, épistémologie et méthodologie dans la recherche en didactique. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(1), 43-46.	2.1.1.3 2.1.3.2 2.1.3.3
Furinghetti, F. (1997). History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different Domains. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(1), 55-61.	2.1.1.3 2.1.3.2 2.1.3.3
Katz, V. J. (1997). Some Ideas on the Use of History in the Teaching of Mathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(1), 62-63.	2.1.1.3
D'Ambrosio, U. (1997). Where Does Ethnomathematics Stand Nowadays? *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(2), 13-17.	2.1.3.2 2.1.3.3
van Maanen, J. (1997). New Maths May Profit from Old Methods. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(2), 39-46.	2.1.3.2 2.1.3.3
Bartolini-Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (1999). Semiotic Mediation: From History to the Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 19*(2), 27-35.	2.1.3.3
Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the Close Historical Development of Mathematics and Physics in Mathematics Education: Some Methodological and Epistemological Remarks. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 20*(1), 44-55.	
Winicki-Landman, G. (2001). History in "Mathematics Education": As I Read It. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 21*(3), 22-24.	
Fried, M. N. (2009). Similarity and Equality in Greek Mathematics: Semiotics, History of Mathematics and Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 29*(1), 2-7.	
Jankvist, U. T. (2009). History of Modern Applied Mathematics in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 29*(1), 8-13.	
Ernest, P. (2012). What is our first Philosophy in Mathematics Education? *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 32*(3), 8-14.	

Tabla 7 Artículos de HM–EM en *FLM*

2.1.4.4 *The Journal of Mathematical Behavior*

En esta revista identificamos tres artículos, uno de ellos referenciado en uno de los inventarios (ver Tabla 8).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39.	2.1.3.4
Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 113-120.	
Katz, V. J. (1997). Algebra and its teaching: An historical survey. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(1), 25-38.	

Tabla 8 Artículos de HM–EM en *JMB*

2.1.4.5 *Journal of Mathematics Teacher Education*

Como lo mencionamos en el apartado 1.3.2.2, en esta revista especializada en el campo de la Educación del profesor de Matemáticas, identificamos siete artículos que aluden a la relación HM–EM (ver Tabla 9).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Furinghetti, F. (1998). Mathematics teacher education in Italy: A glorious past, an uncertain present, a promising future. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(3), 341-348.	
Even, R. (1999). The Development of Teacher Leaders and Inservice Teacher Educators. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(1), 3-24.	
Davis, B. (1999). Basic irony: Examining the foundations of school mathematics with preservice teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(1), 25-48.	
Henry, M. (2000). Evolution and Prospects of Preservice Secondary Mathematics Teacher Education in France. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(3), 271-279.	
Potari, D. (2001). Primary Mathematics Teacher Education in Greece: Reality and Vision. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(1), 81-89.	
da Ponte, J. P., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (2002). Development of pre-service mathematics teachers' professional knowledge and identity in working with information and communication technology. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(2), 93-115.	
Sterenberg, G. (2008). Investigating teachers' images of mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(2), 89-105.	

Tabla 9 Artículos de HM–EM en *JMTE*

2.1.4.6 *Mathematical Thinking and Learning*

De los cerca de doscientos cincuenta artículos publicados en sus quince volúmenes, reconocimos tres que aluden a la relación en cuestión (ver Tabla 10); el tercero es una carta de reacción al primero.

Referencia bibliográfica	Reseñado en
McGinn, M. K., & Boote, D. N. (2003). A First-Person Perspective on Problem Solving in a History of Mathematics Course. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 71-107.	
Keiser, J. M. (2004). Struggles With Developing the Concept of Angle: Comparing Sixth-Grade Students' Discourse to the History of the Angle Concept. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(3), 285-306.	
Sriraman, B. (2005). Letter To The Editor. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(4), 345-348.	

Tabla 10 Artículos de HM–EM en *MT&L*

2.1.4.7 *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*

Adicional a los diez artículos del número especial dedicado a la historia de la educación en Matemáticas, identificamos diez artículos más referidos a la relación HM–EM, dos de los cuales están reseñados en los inventarios citados (ver Tabla 11).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Schubring, G. (1988). Historische Begriffsentwicklung und Lernprozess aus der Sicht neuerer mathematikdidaktischer Konzeptionen (Fehler, "Obstacles", Transposition). *ZDM, 20*(4), 138-148.	2.1.3.3
Fauvel, J., & van Maanen, J. (1997). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics. *ZDM, 29*(4), 138-140.	
Grattan-Guinness, I. (1998). Some neglected niches in the understanding and teaching of numbers and number systems. *ZDM, 30*(1), 12-18.	2.1.3.2 2.1.3.3
Sriraman, B. (2009). Interdisciplinarity in mathematics education: psychology, philosophy, aesthetics, modelling and curriculum. *ZDM, 41*(1-2), 1-3.	
Sriraman, B. (2009). Mathematical paradoxes as pathways into beliefs and polymathy: an experimental inquiry. ZDM, 41(1-2), 29-38.	
Sriraman, B. (2009). A historic overview of the interplay of theology and philosophy in the arts, mathematics and sciences. *ZDM, 41*(1-2), 75-86.	
Kjeldsen, T., & Blomhøj, M. (2009). Integrating history and philosophy in mathematics education at university level through problem-oriented project work. *ZDM, 41*(1-2), 87-103.	
Maschietto, M., & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM, 42*(1), 33-47. doi: 10.1007/s11858-009-0215-3	
Valente, W. R. (2010). Trends of the history of mathematics education in Brazil. *ZDM, 42*(3-4), 315-323. doi: 10.1007/s11858-010-0239-8	
Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Sriraman, B. (2010). A brief history of mathematics education in Turkey: K-12 mathematics curricula. *ZDM, 42*(5), 429-441. doi: 10.1007/s11858-010-0250-0	
Schubring, G., Furinghetti, F., & Siu, M. (2012). Introduction: the history of mathematics teaching. Indicators for modernization processes in societies. *ZDM, 44*(4), 457-459. doi: 10.1007/s11858-012-0445-7	2.1.1.12
Chan, Y.-C., & Siu, M.-K. (2012). Facing the change and meeting the challenge: mathematics curriculum of Tongwen Guan in China in the second half of the nineteenth century. *ZDM, 44*(4), 461-472. doi: 10.1007/s11858-012-0427-9	2.1.1.12
Ueno, K. (2012). Mathematics teaching before and after the Meiji Restoration. *ZDM, 44*(4), 473-481. doi: 10.1007/s11858-012-0443-9	2.1.1.12
Abdeljaouad, M. (2012). Teaching European mathematics in the Ottoman Empire during the eighteenth and nineteenth centuries: between admiration and rejection. *ZDM, 44*(4), 483-498. doi: 10.1007/s11858-012-0381-6	2.1.1.12
Carvalho, J., & Dassie, B. (2012). The history of mathematics education in Brazil. *ZDM, 44*(4), 499-511. doi: 10.1007/s11858-012-0439-5	2.1.1.12
d'Enfert, R. (2012). Mathematics teaching in French écoles normales primaires, 1830–1848: social and cultural challenges to the training of primary school teachers. *ZDM, 44*(4), 513-524. doi: 10.1007/s11858-012-0416-z	2.1.1.12
Schubring, G. (2012). Antagonisms between German states regarding the status of mathematics teaching during the 19th century: processes of reconciling them. *ZDM, 44*(4), 525-535. doi: 10.1007/s11858-012-0407-0	2.1.1.12
Furinghetti, F., & Giacardi, L. (2012). Secondary school mathematics teachers and their training in pre- and post-unity Italy (1810–1920). *ZDM, 44*(4), 537-550. doi: 10.1007/s11858-012-0396-z	2.1.1.12
Karp, A. (2012). Soviet mathematics education between 1918 and 1931: a time of radical reforms. *ZDM, 44*(4), 551-561. doi: 10.1007/s11858-012-0430-1	2.1.1.12

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM, 44*(4), 563-571. doi: 10.1007/s11858-012-0393-2	2.1.1.12

Tabla 11 Artículos de HM–EM en *ZDM*

2.1.4.8 *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*

De los más de cuatro mil artículos publicados de 1970 a la fecha, identificamos treinta y un artículos que se refieren a la relación HM–EM, cuatro de ellos reseñados en los inventarios citados antes (ver Tabla 12).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Grattan-Guinness, I. (1973). Not from Nowhere History and Philosophy behind Mathematical Education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 4*(4), 421 - 453.	
Seltman, M., & Seltman, P. E. J. (1978). Comments on history and mathematics regarded as combined educational tools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 9*(1), 15-29. doi: 10.1080/0020739780090103	
Fraser, B. J., & Koop, A. J. (1978). Teachers' Opinions About Some Teaching Material Involving History of Mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 9*(2), 147-151.	
Grattan-Guinness, I. (1978). On the relevance of the history of mathematics to mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 9*(3), 275 - 285.	
Siu, F.-K., & Siu, M.-K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 10*(4), 561 - 567.	
D'ambrosio, U. (1980). Mathematics and society: some historical considerations and pedagogical implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 11*(4), 479 - 488.	
Malik, M. A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 11*(4), 489 - 492.	
Byers, V. (1982). Why study the history of mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 13*(1), 59 - 66.	
Hickman, F., & Kapadia, R. (1983). A History of Mathematics course for teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(6), 753 - 761.	
Goldberg, D. J. (1984). An international studies approach to the history of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 15*(2), 197 - 202.	
Swetz, F. J. (1989). An historical example of mathematical modelling: the trajectory of a cannonball. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 20*(5), 731 - 741.	
Johnson, P. E. (1990). Enhancing learning by using writing in history of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 21*(2), 259 - 263.	

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Haggarty, R. (1991). The place of the history of mathematics in the undergraduate curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 22*(1), 65 - 68.	
Avital, S., & Kleiner, I. (1992). Themes in the evolution of number systems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23*(3), 445 - 461.	
Aghadiuno, M. C. K. (1992). Mathematics: history, philosophy and applications to science. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23*(5), 683 - 690.	
Burn, R. P. (1993). Individual development and historical development: a study of calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24*(3), 429-433. doi: 10.1080/0020739930240313	2.1.3.3
Rozsa, P. (1994). 200 years of teaching mathematics at the Technical University of Budapest. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 25*(6), 805.	
Tzanakis, C. (1995). Rotations, complex numbers and quaternions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 26*(1), 45-60. doi: 10.1080/0020739950260106	2.1.3.2
Moreno-Armella, L. E. (1996). Mathematics: A historical and didactic perspective. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 27*(5), 633.	
Tzanakis, C. (1999). Unfolding interrelations between mathematics and physics, in a presentation motivated by history: two examples. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(1), 103-118. doi: 10.1080/002073999288148	2.1.3.2 2.1.3.3
Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 43-51. doi: 10.1080/002073900287372	2.1.3.4
Gellert, U. (2001). Mathematics and life: lessons from history. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(3), 365-374.	
Rubin, R. L. (2001). Theory and method in history of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(5), 653-659.	
Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(4), 479.	
Meavilla, V., & Flores, A. (2007). History of mathematics and problem solving: a teaching suggestion. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(2), 253-259.	
Harding, A., & Engelbrecht, J. (2007). Sibling curves and complex roots 1: looking back. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(7), 963-973.	
Harding, A., & Engelbrecht, J. (2007). Sibling curves and complex roots 2: looking ahead. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(7), 975-985.	
Blanco, M. n., & Ginovart, M. (2010). How to introduce historically the normal distribution in engineering education: a classroom experiment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(1), 19-30.	
Sauerheber, R. D. (2012). Teaching the Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(1), 85-100. doi: 10.1080/0020739x.2011.573916	

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Gazit, A. (2012). What do mathematics teachers and teacher trainees know about the history of mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(4), 501-512. doi: 10.1080/0020739x.2012.742151	
Gagatsis, A., & Panaoura, A. (2013). A multidimensional approach to explore the understanding of the notion of absolute value. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(2), 159-173. doi: 10.1080/0020739x.2013.790510	

Tabla 12 Artículos de HM–EM en *IJMEST*

2.1.4.9 *International Journal of Science and Mathematics Education*

De los quinientos artículos publicados desde el 2003 a la fecha, identificamos cuatro que aluden a ámbitos de la relación HM–EM (ver Tabla 13).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Vallejo-Ruiz, M., Fernández-Cano, A., Torralbo, M., Maz, A., & Rico, L. (2008). History of Spanish Mathematics Education Focusing on PhD Theses. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*(2), 313-327.	
Liu, P.-H. (2009). History as a platform for developing college students' epistemological beliefs of mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(3), 473-499.	
Ng Wee, L. (2010). Effects of an Ancient Chinese Mathematics Enrichment Programme on Secondary School Students' Achievement in Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*(1), 25-50. doi: 10.1007/s10763-006-9057-4	
Papadopoulos, I. (2010). "Reinventing" Techniques for the Estimation of the Area of Irregular Plane Figures: From the Eighteenth Century to the Modern Classroom. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*(5), 869-890.	

Tabla 13 Artículos de HM–EM en *IJSME*

2.1.4.10 *Mathematics Education Research Journal*

Poco más de quinientos artículos se han publicado en esta revista desde la aparición de su primer número en 1989; de estos hemos reconocido tres que abordan aspectos de la relación HM–EM (ver Tabla 14).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Grasset, N. (1991). Why Girls Don't Count. *Mathematics Education Research Journal, 3*(2), 1-13.	
Nataraj, M. S., & Thomas, M. O. J. (2009). Developing Understanding of Number System Structure from the History of Mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 96-115.	
Ely, R., & Adams, A. E. (2012). Unknown, placeholder, or variable: what is x? *Mathematics Education Research Journal, 24*(1), 19-38. doi: 10.1007/s13394-011-0029-9	

Tabla 14 Artículos de HM–EM en *MERJ*

2.1.4.11 *Recherches en Didactique des Mathématiques*

En esta importante revista francesa identificamos cuatro artículos (ver Tabla 15), uno de ellos reseñado en uno de los inventarios.

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-346.	2.1.3.3
Schubring, G. (1984). Essais sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques particulièrement en France et en Prusse. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 5*(3), 343 385.	
Steibring, H. (1986). L'indépendance stochastique. Un exemple de renversement du contenu intuitif d'un concept et de sa définition mathématique formelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(3), 5-49.	
Chaachoua, H. (1999). Ecologie des problèmes de construction dans l'espace. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(3), 323-356.	

Tabla 15 Artículos de HM–EM en *RDM*

2.1.4.12 *Research in Mathematics Education*

En esta revista, que es la oficial de la *British Society for Research into Learning Mathematics* y que ha publicado cerca de trescientos treinta artículos, ubicamos dos documentos referidos a la relación HM–EM, uno de ellos un reporte de un grupo de trabajo en el marco de un evento europeo (ver Tabla 16).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Rogers, L. (2000). The biogenetic law and its influence on Theories of Learning Mathematics. *Research in Mathematics Education, 2*(1), 225-240.	
Jankvist, U. T., Lawrence, S., van Maanen, J., & Tzanakis, C. (2012). CERME7 Working Group 12: History in mathematics education. *Research in Mathematics Education, 14*(2), 205-206. doi: 10.1080/14794802.2012.694292	

Tabla 16 Artículos de HM–EM en *RME*

2.1.4.13 *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*

De los casi cuatrocientos cincuenta documentos publicados por esta revista desde 2001, identificamos cinco que abordan asuntos de la relación en cuestión (ver Tabla 17).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
de Villlers, M. (2004). The Role and Function of Quasi-empirical Methods in Mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 4*(3), 397-419.	
Bagni, G. T. (2005). The Historical Roots of the Limit Notion: Cognitive Development and the Development of Representation Registers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 5*(4), 453-468.	
Djebbar, A. (2007). Les mathématiques dans les systèmes éducatifs du Maghreb à la lumière des dernières réformes. (French). *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 7*(1), 41-52.	

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Bagni, G. T. (2008). A Theorem and Its Different Proofs: History, Mathematics Education, and the Semiotic-Cultural Perspective. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8*(3), 217-232.	
Karp, A. (2011). Toward a History of Teaching the Mathematically Gifted: Three Possible Directions for Research. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11*(1), 8-18.	

Tabla 17 Artículos de HM–EM en *JSMTE*

2.1.4.14 *Technology, Knowledge and Learning* (anteriormente: *International Journal of Computers for Mathematical Learning*)

Uno de los cerca de doscientos cincuenta artículos publicados por esta revista desde 1996 aborda un aspecto de la relación HM–EM (ver Tabla 18).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Kidron, I. (2003). Polynomial Approximation of Functions: Historical Perspective and New Tools. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 8*(3), 299-331.	

Tabla 18 Artículos de HM–EM en *TKL (IJCML).*

2.1.4.15 *The Mathematics Enthusiast* (anteriormente: *The Montana Mathematics Enthusiast*)

En los diez volúmenes de esta revista publicados entre 2004 y 2013 (y entre los cerca de doscientos setenta artículos), identificamos siete artículos que versan sobre la relación HM–EM (ver Tabla 19).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Ballou, K. (2005). Cardano's Solution to the Cubic : A Mathematical Soap Opera. *The Montana Mathematics Enthusiast, 2*(1), 65-71.	
DeGrandpre, C. (2005). Commentary on Ballou's paper: Galois – The Myths and the Man *The Montana Mathematics Enthusiast, 2*(1), 72-76.	
Furinghetti, F. (2006). Not out of the blue: Historical roots of mathematics education in Italy. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 99-103.	
Fried, M. N. (2008). History of Mathematics in Mathematics Education: a Saussurean Perspective. *The Montana Mathematics Enthusiast, 5*(2-3), 185-198.	
Mayrargue, A. (2008). How can science history contribute to the development of new proposals in the teaching of the notion of derivatives? *The Montana Mathematics Enthusiast, 5*(2-3), 223-229.	
Haverhals, N., & Roscoe, M. (2010). The history of mathematics as a pedagogical tool: Teaching the integral of the secant via Mercator's projection *The Montana Mathematics Enthusiast, 7*(2-3), 339-368.	
Ely, R. (2012). Loss of Dimension in the History of Calculus and in Student Reasoning. *The Montana Mathematics Enthusiast, 9*(3), 303-326.	

Tabla 19 Artículos de HM–EM en *TMME*

2.1.4.16 Educación Matemática

La revista mexicana en cuestión ha publicado una docena de artículos acerca de temáticas de la relación HM–EM (ver Tabla 20).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. T. & López Esteban, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática, 15*(1) 21-49.	
Camacho Ríos, A. (2004). Los Elementos de análisis trascendente de Francisco Díaz Covarrubias. *Educación Matemática, 16*(2) 49-76.	
Miralles de I. Llobet, J. & Deulofeu Piquet, J. (2005). Historia y enseñanza de la matemática. Aproximaciones de las raíces cuadradas. *Educación Matemática, 17*(1) 87-106.	
González J., R. M., Espino F., G. A. & González C., S. (2006). La enseñanza de las matemáticas en las escuelas primarias de México (Distrito Federal) durante el Porfiriato: programas de estudio, docentes y prácticas escolares. *Educación Matemática, 18*(3) 39-63.	
Prabhu, V. & Czarnocha, B. (2008). Los indivisibles en el cálculo contemporáneo. *Educación Matemática, 20*(1) 53-88.	
Ramírez, M. & Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación Matemática, 21*(1) 63-90.	
Gallardo Cabello, A. & Basurto Hidalgo, E. (2009). Formas semánticas equivalentes en problemas del pasado y el presente. *Educación Matemática, 21*(3) 67-94.	
Emmanuele, D., González, M. I., Introcaso, B. & Braccialarghe, D. (2010). Análisis de libros de cálculo en carreras de ingeniería. Su relación con los cambios sociopolíticos en Argentina. *Educación Matemática, 22*(2) 35-63.	
Sepúlveda López, A. & García García, L. (2011). El uso de software dinámico en el estudio de problemas geométricos de variación. *Educación Matemática, 23*(2) 111-127.	
Peralta, J. (2011). Modelos matemáticos del sistema de afinación pitagórico y algunos de sus derivados: propuesta para el aula. *Educación Matemática, 23*(3) 67-90.	
Camacho Ríos, A., Sánchez Luján, B. I., Blanco Vega, R. & Cuevas Acosta, J. H. (2011). Geometrización de una porción del espacio real. *Educación Matemática, 23*(3) 123-145.	
Reina, L., Wilhelmi, M. R. & Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. *Educación Matemática, 24*(3) 67-97.	

Tabla 20 Artículos de HM–EM en EM

2.1.4.17 Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas

En esta revista española hemos identificado nueve artículos que aluden a la relación HM–EM (ver Tabla 21).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Monros, M. A. & Ten Ros, A. E. (1984). Historia y enseñanza de la Astronomía, los primitivos instrumentos y su utilización pedagógica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 2*(1) 49-56.	

Referencia bibliográfica	Reseñado en
D'Amore, B. (1990). Motivaciones epistemológicas sobre las que se basan las elecciones didácticas llevadas a cabo en las actividades educativas en Italia, desde pre-escolar hasta el bienio superior. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 8*(1) 52-58.	
González Urbaneja, P. M. (1991). Historia de la matemática, integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 9*(3) 281-290.	
Núñez Espallargas, J. M. & Servat Susagne, J. (1993). Los algoritmos para el cálculo de la raíz cuadrada y sus antecedentes en textos escolares antiguos. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 11*(1) 69-78.	
Cerizola, N., Guyot, V. & Giordano, M. (1993). Matemática e historia, una articulación para la enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 11*(Nº Extra 1) 329-330.	
Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. T., López Esteban, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y cursos de orientación universitaria (COU) 1940-1995. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 17*(3) 463-478.	
González Astudillo, M. T. & Sierra Vázquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 22*(3) 389-408.	
Richard, Ph. R. (2010). Textos clásicos y geometría dinámica estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 28*(1) 95-112.	
Sierra Vázquez, M. & López Esteban, C. (2012). La descentralización del currículo de matemáticas en la educación obligatoria en España durante la década 1990-2000. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 30*(2) 219-239.	

Tabla 21 Artículos de HM–EM en EC

2.1.4.18 Épsilon. Revista de Educación Matemática. SAEM THALES

En esta revista española, publicada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática, además de los once documentos del monográfico reseñado en el apartado 2.1.1.11, cuenta con ocho artículos que atienden la relación HM–EM (ver Tabla 22).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Iglesias Cerezal, M. (1995). Diez años en la historia de la enseñanza de las matemáticas. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 15*(1-2), 19-28	
Suárez Alemán, C. O. (2003). Aplicaciones de la historia de las matemáticas. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 20*(2), 259-285.	
Guevara Casanova, I., Massa Esteve, M. R., & Romero Vallhonesta, F. (2007). Enseñar matemáticas a través de su historia. Algunos conceptos trigonométricos. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 23*(1-2), 97-107.	
Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 9-22.	2.1.1.11

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Sierra Vázquez, M., & López Esteban, C. (2011). Margarita Comas (1892-1973) y su aportación a la Educación Matemática. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 23-37.	2.1.1.11
Suárez Alemán, C.-O. (2011). Orígenes y Evolución del Teorema de Rolle. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 39-50.	2.1.1.11
Campistrous, L. A., López Fernández, J. M., & Rizo Cabrera, C. (2011). Historia y didáctica: el caso del escrito de *L'Hôpital Analyse des Infiniment Petits pour L'intelligence Des lignes Courbes*. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 51-64.	2.1.1.11
Peralta, J. (2011). La creación de la Real Sociedad Matemática Española: una mirada a nuestra matemática de aquella época. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 65-81.	2.1.1.11
González Astudillo, M. T. (2011). Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de L'Hôpital. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 83-97.	2.1.1.11
Picado, M., & Rico, L. (2011). La selección de textos en una investigación histórica en Educación Matemática. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 99-112.	2.1.1.11
Salinas-Herrera, J., Adamuz-Povedano, N., & Jiménez-Fanjul, N. (2011). Una experiencia de aula utilizando la historia de las matemáticas. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 113-126.	2.1.1.11
Quirós Bajo, E. (2011). Thales de Mileto y la medición de las pirámides de Egipto. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 127-131.	2.1.1.11
de la Fuente Martínez, C. (2011). Historia de las matemáticas e investigaciones matemáticas en secundaria. Algunos fundamentos y ejemplos para la clase. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 133-151.	2.1.1.11
Aranda Ballesteros, F. D., & Gómez Lara, M. (2011). Algunos hechos históricos en la resolución de problemas, sobre el origen del cálculo integral. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 155-164.	2.1.1.11
García Navarro, J. M. (2011). La matemática moderna en la España de principios del siglo XX. Contexto histórico. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(2), 39-51.	
Núñez Valdés, J., & Rodríguez Arévalo, M. L. (2012). Una propuesta para utilizar la Historia de las Matemáticas en las clases de primaria y secundaria. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 29*(1), 65-73.	
Meavilla Seguí, V., & Oller Marcén, A. M. (2013). «Comprar un caballo»: soluciones históricas a un tipo de problemas famosos. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 30*(1), 105-126.	
Meavilla Seguí, V. (2013). Recreaciones matemáticas en la Aritmética (1512) de fray Juan de Ortega. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 30*(2).	
Navarro, M., & Puig, L. (2013). Aspectos de la presentación del sistema de coordenadas cartesianas en la *Introductio in Analysin Infinitorum* de Euler y en libros de texto de Lacroix. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 30*(2).	

Tabla 22 Artículos de HM–EM en Épsilon

2.1.4.19 Números. Revista en Didáctica de las Matemáticas

En esta revista, editada por la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemática, identificamos al menos once artículos que aluden a la relación en cuestión (ver Tabla 23).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Ávila Plasencia, D. (1982). La Historia de las Matemáticas, un recurso didáctico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 2*, 67-72.	
Sierra Vázquez, M. (2000). El papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 43-44*, 93-96.	
Guzmán Yáñez, É. d. l. N. (2002). Una propuesta de evaluación: matematizando con historietas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 52*, 41-50.	
Aparicio Pedreño, J. J. (2004). Ecuaciones lineales. Didáctica y perspectiva histórica. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 57*, 3-18.	
Barreto García, J. C. (2008). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 69*.	
Barreto García, J. C. (2009). Otras deducciones o extensiones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 70*, 35-51.	
Gayte Delgado, I., & Núñez Valdés, J. (2011). Matemáticos y Matemáticas solidarios *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 76*, 105–118	
Salinas Herrera, J. (2011). Propuesta para fortalecer una educación con valores en ciencias. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 78*, 17-32.	
Estepa Castro, A., Gea Serrano, M. M., Cañadas de la Fuente, G. R., & Contreras García, J. M. (2012). Algunas notas históricas sobre la correlación y regresión y su uso en el aula. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 81*, 5-14.	
Meavilla Seguí, V., & Oller Marcén, A. M. (2013). Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 82*, 89-100.	
Estepa Castro, A., & del Pino Ruiz, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 83*, 43-63.	

Tabla 23 Artículos de HM–EM en Números

2.1.4.20 PNA - Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática

En esta revista, publicada desde 2006, identificamos cuatro artículos de investigación relacionados con ámbitos de la relación HM–EM (ver Tabla 24).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Maz, A., & Rico, L. (2007). Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX. *PNA, 1*(3), 113-123.	
Ortíz, A. (2009). Lógica y pensamiento aritmético. *PNA, 3*(2), 51-72.	
Gómez, B., & Contreras, M. (2009). Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. *PNA, 3*(4), 169-183.	
Picado, M. & Rico, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de Matemáticas. *PNA, 6*(1), 11-27.	

Tabla 24 Artículos de HM–EM en PNA

2.1.4.21 Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología

En esta revista latinoamericana, identificamos una decena de artículos referidos a la relación en cuestión, varios de los cuales se refieren a la historia de la educación en

Matemáticas (ver Tabla 25). So pena de ser calificados de chovinistas, debemos reseñar una interesante participación de investigadores colombianos en estos artículos; varios de estos investigadores están ligados al *Grupo de Historia de las Matemáticas* de la Universidad del Valle.

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Arboleda, L. C. (1984). Historia y enseñanza de las matemáticas. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 1*(2), 167-194.	
Albis González, V. S. (1984). Un programa de investigación en la historia de la matemática de un país latinoamericano. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 1*(3), 391-400.	
Alves, J. (1991). O movimiento pela ciencia pura e a Academia Brasileira de Ciencias. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 8*(1), 111-122.	
Testa, P. (1991). Antecedentes y origen de la Escuela de Estadística y Ciencias actuariales de Universidad Central de Venezuela. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 8*(2), 201-213.	
Arboleda, L. C., & Anacona, M. P. (1994). Las geometrías no euclidianas en Colombia. La apuesta euclidiana del profesor Julio Garavito (18651920). *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 11*(1), 7-24	
Arboleda, L. C., & Castrillón, G. (2012). La historia y la educación matemática en el "horizonte" conceptual de la pedagogía. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 14*(1), 13-32.	
González, F. E. (2012). Fuentes para una Reconstrucción Histórica de la Educación Matemática en Venezuela. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 14*(1), 33-54.	
Gerdes, P. (2012). Incorporar ideias matemáticas provenientes da África na educação matemática no Brasil? *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 14*(1), 93-10	
Sánchez B., C. H., & Albis González, V. S. (2012). Historia de la enseñanza de las matemáticas en Colombia. De Mutis al siglo XXI. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 14*(1), 109-157.	
Arbeláez, G. I., & Recalde, L. C. (2012). El desarrollo del análisis matemático en Colombia (1850-1950). *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 14*(3), 363-394.	

Tabla 25 Artículos de HM–EM en QUIPU

2.1.4.22 RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

En los dieciséis volúmenes publicados identificamos cerca de una veintena de artículos que se ubican en la relación HM–EM (ver Tabla 26)

Referencia bibliográfica	Reseñado en
López, V. A. (1998). Historia de los inicios de la enseñanza del cálculo infinitesimal en México: 1785-1867. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(2), 29-50.	

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de “compañías”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2*(2-3), 19-29.	
Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 45-61.	
Garciadiego, A. (2002). El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometría plana: simplificar no siempre simplifica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 5*(3), 251-270.	
Bergé, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisada a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(3), 163-197	
Bagni, G. T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. (Spanish). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(1), 5-23.	
Fernández González, M., & Rondero Guerrero, C. (2004). El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(2), 145-156.	
Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 195-218.	
Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. (Spanish). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 247-263.	
Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(2), 227-251.	
Valdivé, C., & Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 413-450.	
Schubring, G. (2008). Gauss e a tábua dos logaritmos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 383-412.	
Crespo, C. C., Farfán, R. M., & Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(1), 29-66.	
Jankvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using History in Mathematics Education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(1), 67-101.	
Salinas, P., & Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(3), 355-382	
Magalhaes, M. L. (2011). O ensino de aritmética na escola nova: contribuições de dois escritos autobiográficos para a história da educação matemática (Minas Gerais, Brasil, primeiras décadas do século XX). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 311-334.	
Ruiz de Gauna Gorostiza, J., Dávila Balsera, P., Etxeberria Murgiondo, J., & Sarasua Fernández, J. (2013). Los libros de texto de Matemáticas del bachillerato en el periodo 1970 - 2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(2), 245-276. doi: 10.12802/relime.13.1624	

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Oller Marcén, A. M., & Gairín Sallán, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(3), 317-338. doi: 10.12802/relime.13.1632	
de Souza, L. A., & Garnica, A. V. M. (2013). As matemáticas modernas: um ensaio sobre os modos de produção de significado ao(s) movimento(s) no ensino primário brasileiro. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(3), 369-393. doi: 10.12802/relime.13.1634	

Tabla 26 Artículos de HM–EM en RELIME

2.1.4.23 Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática

En los diez volúmenes de esta revista colombiana, y entre un poco más de un centenar de artículos publicados entre 1995 y 2005, encontramos tres artículos que se refieren a ámbitos de la relación HM–EM (ver Tabla 27).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Andrade, C. (1998). Dificultades en el aprendizaje de la noción de variación. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 3*(3), 241-253.	
Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 8*(1), 30-46.	
Núñez, J. M. (2003). El tablero medieval de cálculo y las operaciones con números romanos: estudio histórico y pedagógico. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 8*(2), 183-207.	

Tabla 27 Artículos de HM–EM en la Revista EMA

2.1.4.24 Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Cuarenta y cinco artículos que abordan la relación HM–EM hemos identificado en esta revista española (ver Tabla 28); en estos no incluimos un sinnúmero de artículos de Historia de las Matemáticas que también contiene la revista.

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Boero, P. (1989). Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 2*, 17-28.	
Martínez Pérez, M. (1989). La curiosa historia de… Un excelente consejo pedagógico. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 3*, 34.	
Montanuy Fillat, M., Nuñez Espallargas, J. M., & Servat Susagne, J. (1989). La influencia de la Revolución Francesa en la enseñanza elemental de la matemática. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 4*, 21-26.	
Carlavilla Fernández, J. L., & Fernández García, G. (1989). Didáctica e historia de las matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 4*, 65-80.	
Fernández Gago, J., Gutiérrez Bueno, J., Hinojosa Onieva, F., Jiménez Vásquez, D., & Muñoz Velasco, E. J. (1994). Elementos de Euclides: una aplicación de la historia al aula, enfocada desde la resolución de problema. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 14-15*, 36-39.	

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Arenzana Hernández, V., & Trigo Aranda, V. (1994). Investigación dirigida: Medición del radio de la Tierra. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 14-15*, 44-48.	
Maza Gómez, C. (1994). Historia de las matemáticas y su enseñanza: un análisis. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 17*, 17-26.	
Aznar Sánchez, M. E., López Hernández, Á., Martínez Azor, P. A., Parra Ruiz, G., & Sastre García, A. (1994). Historia de las matemáticas en el aula: experiencia desde un seminario permanente. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 17*, 34-36.	
Fernández Gago, J., & Muñoz Velasco, E. J. (1994). Una introducción a √2 como número que representa ciertas distancias. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 18*, 28-30.	
Gavilán Bouzas, P. (1996). Historia del álgebra en la educación secundaria: resolución de problemas "históricos". *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 22*, 83-90.	
Español González, L. (1997). Julio Rey Pastor y la enseñanza de las matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 24*, 27-38.	
Escudero Baylín, M. (1997). Fermat y Arquímedes en la clase de integrales. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 24*, 77-79.	
Figueiras Ocaña, L., Molero Aparicio, M., Salvador Alcaide, A., & Zuati Soravilla, N. (1997). Dificultades y logros de una mujer matemática: Mary Somerville. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 25*, 45-52.	
del Río Sánchez, J. (1997). Historia de la Matemática: implicaciones didácticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 26*, 33-38**.**	
Maza Gómez, C. (1998). Aproximaciones históricas al área del círculo. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 27*, 49-56.	
Ruiz Garzón, G. (1999). La paradoja de San Petersburgo: una reivindicación didáctica. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 32*, 5-9.	
García Cruz, J. A. (2000). Historia de un problema: el reparto de la apuesta. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 33*, 25-36.	
Usón Villalba, C., & Ramírez Martínez, Á. (2000). ¿Ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación? *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 33*, 115-118.	
Bruno Castañeda, A., & Martiñón Cejas, A. (2000). Contenidos matemáticos en la segunda enseñanza española del siglo XX. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 34*, 27-43.	
Meavilla Seguí, V. (2000). Historia de las matemáticas: métodos no algebraicos para la resolución de problemas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 34*, 81-85.	
Ramírez Martínez, Á., & Usón Villalba, C. (2000). Unos siglos que cambiaron el mundo (I). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 34*, 109-112.	
Ramírez Martínez, Á., & Usón Villalba, C. (2000). Unos siglos que cambiaron el mundo (y II). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 35*, 109-112.	
Ibañes Jalón, M. J., & Ortega del Rincón, T. (2002). La demostración en el currículo: una perspectiva histórica. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 39*, 53-61.	
Lupiáñez Gómez, J. L. (2002). Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 40*, 59-63.	

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Ramírez Martínez, Á., & Usón Villalba, C. (2003). Hacer de las Matemáticas un lenguaje verdaderamente universal. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 42*, 115-119.	
Ramírez Martínez, Á., & Usón Villalba, C. (2003). En el entorno del teorema de Kou-ku (I). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 44*, 83-86.	
González Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 45*, 17-28.	
Ramírez Martínez, Á., & Usón Villalba, C. (2004). En el entorno del teorema de Kou-ku (II). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 45*, 87-91.	
Ramírez Martínez, Á., & Usón Villalba, C. (2004). En el entorno del teorema Kou-Ku (III). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 46*, 87-93.	
Ramírez Martínez, Á., & Usón Villalba, C. (2004). En el entorno del teorema Kou-Ku (y IV). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 47*, 63-66.	
Usón Villalba, C., & Ramírez Martínez, Á. (2005). En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La autoría (I). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 48*, 57-63.	
Usón Villalba, C., & Ramírez Martínez, Á. (2005). En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La transcendencia (II). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 49*, 55-62.	
Sorando Muzás, J. M. (2005). Matemáticas e Historia. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 49*, 125-137.	
Fedriani Martel, E. M., & Hinojosa Ramos, M. A. (2005). Resumen histórico de la docencia de las matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 50*, 31-36.	
Usón Villalba, C., & Ramírez Martínez, Á. (2005). En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La semilla que germinó en el desierto (III). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 50*, 73-78.	
Usón Villalba, C., & Ramírez Martínez, Á. (2006). En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Un universo nacido de la nada (IV). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 51*, 53-60.	
Usón Villalba, C., & Ramírez Martínez, Á. (2006). En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Símbolo del anonimato científico (V). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 52*, 65-72.	
Usón Villalba, C., & Ramírez Martínez, Á. (2006). En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La ambición de trascender las propias limitaciones (VI). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 53*, 53-60.	
Usón Villalba, C., & Ramírez Martínez, Á. (2007). En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. El Método, contra el Método (y VII). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 54*, 57-66.	
Gutiérrez, S. (2007). En un aula cualquiera de un IES cualquiera: el día a día. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 55*, 69-74.	
Orts Muñoz, A. (2007). Resolución de problemas mediante la regla de falsa posición: un estudio histórico. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 56*, 55-61.	
Redondo Buitrago, A. (2008). Los números mórficos en secundaria. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 59*, 7-16.	
Martínez de la Rosa, F. (2009). La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 61,* 7-15.	

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Tébar Cuesta, F. (2010). Evolución de las matemáticas acompañando a la educación secundaria. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 63*, 29-33.	

Tabla 28 Artículos de HM–EM en SUMA

2.1.4.25 UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática

En la revista digital UNIÓN, órgano de difusión de la Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM), identificamos más de tres decenas de artículos, varios de ellos relacionados con la historia de la educación en Matemáticas (ver Tabla 29).

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Valente, W. R. (2005). Euclides Roxo e a História da Educação Matemática no Brasil. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 1*, 89-94	
Leme da Silva, M. C. (2005). A Geometria escolar ontem e hoje: algumas reflexões sobre livros didáticos de Matemática. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 3*, 73-85.	
Moscoso Canabal, J. A. (2005). En torno a la institucionalización del saber matemático en el aula: el caso de la reforma curricular mexicana de 1993 *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 4*, 5-16.	
Zuin, E. d. S. L. (2005). O início da escolarização do sistema francês de pesos e medidas em Portugal. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 4*, 109-125.	
Meavilla Seguí, V. (2006). La cartilla aritmética antifascista (1937), un manual de educación matemática y propaganda política *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 5*, 9-21.	
Matos, J. M. (2006). A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista Labor. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 5*, 91-110.	
González Astudillo, M. T. (2006). La matemática moderna en España. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 6*, 63-71.	
Valente, W. R. (2006). A aritmética na escola de primeiras letras: os livros de aprender a contar no Brasil do século XIX. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 7*, 71-81.	
Levy , L. F., & do Espírito Santo, A. O. (2006). Filosofia e modelagem matemática. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 8*, 11-21.	
Arboleda, L. C. (2006). Los tratados franceses en la enseñanza del análisis en Colombia (1851-1951). *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 8*, 101-107.	
dos Santos, I. B. (2007). Edward Lee Thorndike e uma conformação do professor de matemática norte-americano das primeiras décadas do século XX. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 10*, 155-165.	
Carolino Pires, C. M. (2007). Implementação de inovações curriculares em matemática e embates com concepções, crenças e saberes de professores: breve retrospectiva histórica de um problema a ser enfrentado. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 12*, 5-26.	
Ortiz Fernández, A. (2008). Matemática en los antiguos Egipto y Babilonia. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 13*, 5-18.	

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Silva Duarte, A. R. (2008). Omar Catunda e os debates sobre o ensino secundário de matemática na década de 1940. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 13*, 101-114.	
Medina, D. (2008). O movimento da matemática moderna nas séries iniciais e o primeiro livro didático. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 14*, 91-106.	
García Cruz, J. A. (2008). Génesis histórica y enseñanza de las matemáticas *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 15*, 61-67.	
Araújo de Oliveira, M. C. (2008). O ensino de Matemática veiculado em livros didáticos publicados no Brasil: conjuntos numéricos e operações na coleção moderna de Osvaldo Sangiorgi. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 15*, 125-137	
Sastre, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*, 141-155.	
Barreto García, J. C. (2009). Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas como recurso didáctico en la extensión geométrica del Teorema de Pitágoras. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 17*, 31-51.	
da Costa, A. B. (2010). A construção do conceito de sequências na perspectiva lógico-histórica. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 21*, 133-157.	
Beyer Kessler, W. O. (2010). Senderos, caminos y encrucijadas de las matemáticas y la educación matemática en Venezuela *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 23*, 15-44.	
Gonzato, M., & Godino, J. D. (2010). Aspectos históricos, sociales y educativos de la orientación espacial. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 23*, 45-58.	
Tavares, M., & Correia Ferreira, M. C. (2010). O ensino da matemática no estado novo – segundo ciclo lineal. Incursões pela imprensa da época (1947-1968). *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 23*, 145-165.	
Mendes, I. A. (2012). Pesquisa em história da Matemática na Pós-graduação Brasileira e suas dimensões epistemológica, sociológica e pedagógica. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 30*, 187-197.	
Belisario, A., & González, F. E. (2012). Historia de la Matemática, Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 31*, 161-182.	
Vrancken, S., & Engler, A. (2013). Estudio de la derivada desde la variación y el cambio. Análisis histórico-epistemológico *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33*, 53-70.	
Picado, M., & Rico, L. (2013). Tratamiento del Sistema Métrico Decimal en textos de matemáticas de Cuba, Filipinas y Puerto Rico en la segunda mitad del siglo XIX. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 34*, 69-83.	
Cortés Zavala, J. C., Núñez Palenius, G. E., & Morales Ontiveros, C. (2013). Actividades de aprendizaje usando elipsógrafos para apoyar el proceso de demostración en geometría analítica. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 35*, 115-134.	
Pinto, E., & González, F. (2013). Las Ecuaciones Lineales en los Libros de Texto de Matemática para Educación Básica en Venezuela: 1987-2007 *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 35*, 177-201.	

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Costa, V. A., & Arlego, M. (2013). El rol de la historia de las ciencias en la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de Ingeniería *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 36*, 21-36.	
Zapata Grajales, F. N. (2013). Los números que los pitagóricos ocultaron. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 36*, 109-121.	

Tabla 29 Artículos de HM–EM en UNIÓN

2.1.4.26 Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas

En los sesenta y cuatro números de esta revista, publicada por la editorial Graó desde 1994, identificamos ocho artículos relacionados con la HM–EM (ver Tabla 30), algunos de ellos pertenecientes a un monográfico reseñado en el apartado 2.1.1.7.

Referencia bibliográfica	Reseñado en
Constantino de la Fuente Martínez, R. M. P. (1996). Resolución de problemas, historia y epistemología de las matemáticas; hacia su integración en el currículum. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8*, 19-28.	
Velázquez, F. (2001). Introducción. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 26*, 5-8.	2.1.1.7
Fernández Fernández, S. (2001). La historia de las matemáticas en el aula. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 26*, 9-27.	2.1.1.7
Nomdedeu, X. (2001). Matemáticas cotidianas a través de historias cotidianas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 26*, 29-35.	2.1.1.7
Rupérez Padrón, J. A., & García Déniz, M. (2001). El Juego de la oca. Historia de un juego y sus posibilidades didácticas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 26*, 37-48.	2.1.1.7
Martiñón Cejas, A. (2001). Abstracción máxima y aplicaciones universales: las matemáticas del siglo XX. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 26*, 50-60.	2.1.1.7
Bishop, A. J. (2001). Lo que una perspectiva cultural nos cuenta sobre la historia de las matemáticas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 26*, 61-72.	2.1.1.7
Pérez, U., Álvarez, M., & Porta Martínez, P. (2008). Historia y enseñanza de la geometría: cuadrando el círculo en el aula. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 49*, 111-117.	

Tabla 30 Artículos de HM–EM en UNO

2.1.5 Libros

Hemos identificado una decena y media de libros que abordan la relación HM-EM. A continuación presentaremos una breve reseña del contenido de algunos de ellos.

2.1.5.1 *Historical Topics for the Mathematics Classroom* (NCTM, 1969)

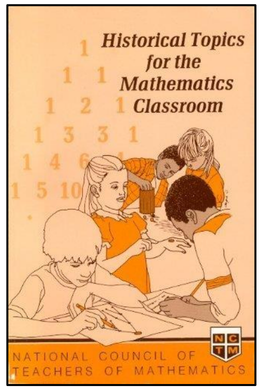

Imagen 19 Carátula del libro *Historical Topics for the Mathematics Classroom*

Durante parte de la década del sesenta funcionó un comité de académicos encargado de realizar un libro sobre el uso de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas. Su trabajo estuvo guiado por varios principios, entre los cuales se señalaba que el estudio del libro no debería requerir un curso previo de la HM, debería incluir no solo materiales históricos sino también indicaciones de cómo estos deberían ser usados en clase, los temas tratados deberían ser de interés para diferentes grados escolares y su contenido debería dirigirse para profesores y estudiantes. Bajo esta óptica el libro se organizó en capítulos que implican un formato que contempla una perspectiva general de los temas históricos tratados (*v.g.*, números y numerales, cálculos, Geometría, Álgebra, Trigonometría, Cálculo y Matemáticas modernas) y unas cápsulas temáticas (o tratados breves de temas puntuales) que procuran el acceso a hechos pertinentes relacionados con teoremas, conceptos y desarrollos matemáticos importantes; el primer capítulo propone una postura sobre "por qué" y "cómo" usar la Historia de las Matemáticas en el aula.

Es pertinente mencionar que ubicamos una serie de libros (Baumgart, 1994; Boyer, 1993; Eves, 1994; Gundlach, 1994), que constituyen traducciones al portugués de algunos de los capítulos del libro, pero ninguno de ellos corresponde al primer capítulo, considerado fundamental en la publicación original.

2.1.5.2 *Learn from the Masters!* (Swetz, Fauvel, Bekken, Johansson, & Katz, 1995)

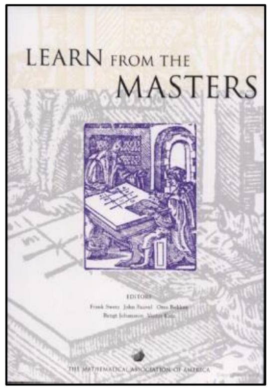

Imagen 20 Carátula del libro *Learn from the Masters!*

The Mathematical Association of America publica este libro, dirigido a profesores quienes quieren conocer cómo emplear la Historia de las Matemáticas como herramienta pedagógica que participe en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, está dividido en dos partes; la primera dirige su atención al papel de la Historia de las Matemáticas en la escuela, en tanto que la segunda examina este papel en la Educación Superior. En cada una de las partes, esencialmente se presentan ideas y experiencias de profesores de Matemáticas e investigadores a través de las cuales se ilustran posibles usos de la Historia de las Matemáticas en campos como la Aritmética, el Cálculo, la Trigonometría, la modelación matemática, el Álgebra lineal, el Análisis vectorial o la Mecánica Celeste; también contiene discusiones acerca de la importancia del conocimiento histórico para favorecer el conocimiento del profesor y de las particularidades de un curso de temas de Matemáticas para profesores, basado en una perspectiva histórica.

2.1.5.3 *Vita Mathematica. Historical research and integration with teaching.* (Calinger, 1996)

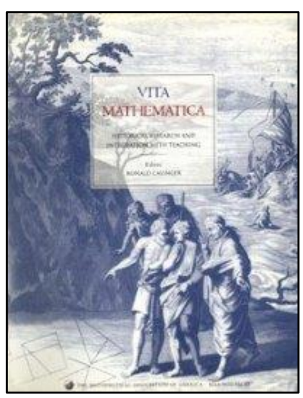

Imagen 21 Carátula del libro *Vita Mathematica. Historical research and integration with teaching*

Este libro, publicado por *The Mathematical Association of America*, está dirigido a profesores de Matemáticas, matemáticos, historiadores de las Matemáticas y de las Ciencias, interesados en sus campos y en la integración de la Historia de las Matemáticas a la pedagogía matemática. Con base en ello se estructura en tres partes dos de las cuales tienen dos secciones. La primera parte contiene tres artículos a través de los cuales se discute: las ideas sobre la Historia de las Matemáticas, el papel de los problemas en la historia y la enseñanza de las Matemáticas y la dramatización del ambiente de aceptación de ideas matemáticas novedosas. La segunda parte está compuesta por documentos de Historia de las Matemáticas, divididos en dos secciones cronológicamente definidas; la primera refiere textos de la antigüedad a la Revolución científica y la segunda de esta al presente. La tercera parte, dedicada a la integración de la Historia con la enseñanza de las Matemáticas, presenta en su primera sección varios documentos que discuten e ilustran esta integración, en tanto que en su segunda sección se recogen documentos sobre los orígenes y la enseñanza del Cálculo.

2.1.5.4 *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (Katz, 2000b)

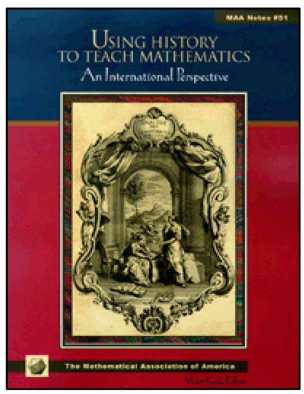

Imagen 22 Carátula del libro *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*

Este libro, editado por Victor J. Katz y publicado en Inglés por *The Mathematical Association of America*, recoge documentos de varios y reconocidos académicos que tratan la relación HM–EM, documentos que fueron presentados en dos eventos académicos internacionales en el año 1996. Su contenido se estructura en cinco partes. La primera parte contiene tres artículos que en términos generales tratan el uso de la Historia en la enseñanza. En la segunda parte cuatro autores discuten, en sendos documentos, las maneras en que las ideas históricas pueden influir la pedagogía en los salones. La tercera parte contiene cinco artículos que abordan el uso de la Historia en la enseñanza de temas específicos. En la cuarta parte, se muestran trabajos que permiten reconocer la manera exitosa en que la Historia de las Matemáticas ha sido usada en la formación de profesores. La quinta y última parte se dedica a artículos sobre la Historia de las Matemáticas que contienen varias sugerencias de cómo esta historia es aplicable a la enseñanza de las Matemáticas.

2.1.5.5 Historia de las Matemáticas en la enseñanza secundaria (Montesinos Sirera, 2000)

Imagen 23 Carátula del libro Historia de las Matemáticas en la enseñanza secundaria

Como parte de la colección “Educación Matemática en Secundaria”, dirigida por Miguel de Guzmán y Luis Rico, la Editorial Síntesis S.A. publica este libro que contiene diez capítulos organizados en tres secciones que atienden a sendas épocas cronológicamente organizadas, a saber: La Matemática Griega, De Galileo a Newton y La Matemática reciente. Su contenido involucra conferencias presentadas en el Seminario Oratava de Historia de la Ciencia[38] (convertido en una de las actividades de la Fundación Canaria Oratava de Historia de la Ciencia). En cierto sentido, es un libro de Historia de las Matemáticas dirigido a los profesores de Matemáticas que tienen un interés por identificar en ella un recurso para su trabajo docente.

[38] En http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/fundoro/web_fcohc/003_actividades/semoro.html se encuentran los archivos digitales de las Actas de este seminario.

2.1.5.6 *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (Fauvel & van Maanen, 2000)

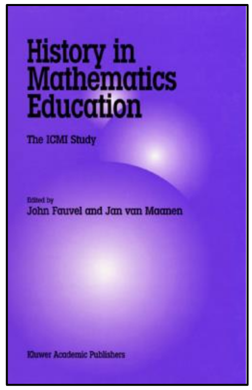

Imagen 24 Carátula del libro *History in Mathematics Education*

En tanto resultado de un selecto equipo de trabajo, este libro —editado por J. Fauvel y J. van Maanen, y publicado por *Kluwer Academic Publisher*— es quizá uno de los documentos más completos que hemos podido identificar, quizá por el hecho de ser un resultado de uno de los estudios ICMI (Comisión Internacional de Instrucción de las Matemáticas) y por contener contribuciones de especialistas en el tema. En él se expresa cómo el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas se pueden mejorar a través de la integración de la Historia de Matemáticas en diferentes aspectos de la educación en matemáticas: lecciones, tareas, textos, conferencias, proyectos, evaluación, y planes de estudios.

Desde otra perspectiva, el libro atiende asuntos que incluyen la integración de la Historia en el aula, su valor en la formación de profesores, el apoyo histórico a temas específicos y a estudiantes con exigencias educativas especiales, el uso de textos originales escritos por grandes matemáticos del pasado, los trasfondos epistemológicos de la selección histórica, y medios de comunicación no estándar y otros recursos, desde el drama hasta la Internet. Adicionalmente, como lo mencionamos antes, incluye un listado de cerca de trecientas referencias de referencias bibliográficas sobre la temática. Su estructura, definida a través de once capítulos, permite la identificación de una perspectiva de análisis de la relación HM–EM; estos son (en Español), a saber: 1. El contexto político. 2. Asuntos filosóficos, multiculturales e interdisciplinarios. 3. Integración de la Historia: perspectivas de investigación. 4. La Historia de las Matemáticas para la formación de profesores. 5. La formación histórica y la comprensión matemática de los estudiantes. 6. La Historia como soporte de diversos requerimientos educativos – oportunidades de cambio. 7. Integrando la Historia de las Matemáticas en el aula: un estudio analítico. 8. El soporte histórico para algunos temas particulares. 9. El uso de fuentes originales en la clase de matemáticas. 10. Medios no estándar y otros recursos. 11. Bibliografía para un trabajo ulterior en el área.

2.1.5.7 *Math through the Ages. A Gentle History for Teacher and Others* (Berlinghoff & Gouvêa, 2004)

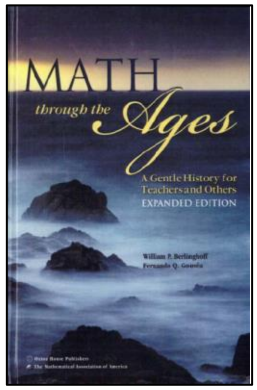

Imagen 25 Carátula del libro *Math through the Ages. A Gentle History for Teacher and Others*

Atendiendo al supuesto de que los profesores de Matemáticas no cuentan con suficiente tiempo para hacer una indagación en materiales de Historia de las Matemáticas y a que la información que estos contienen normalmente es abundante, desconectada y no siempre fidedigna, los autores elaboran este libro sobre ideas comunes de las Matemáticas básicas, que juzgan de interés para los profesores y otros profesionales. En esta dirección, además de un panorama sobre la Historia de las Matemáticas presentado en aproximadamente sesenta páginas, incluyen veinticinco ensayos breves (*sketches*) a través de los cuales tratan históricamente varios temas básicos de Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría y Probabilidad. Como parte complementaria de cada ensayo, en la versión expandida los autores incluyen una sección de preguntas y una de proyectos; las primeras son sencillas y eventualmente requieren un poco de indagación, en tanto que los proyectos son más exigentes y de mayor alcance.

2.1.5.8 *Hands on History. A Resource for Teaching Mathematics* (Shell-Gellasch, 2006)

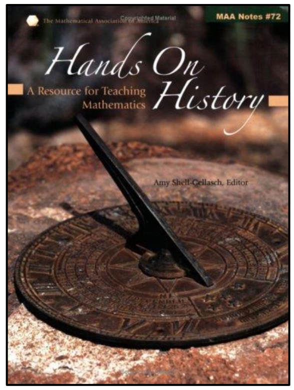

Imagen 26 Carátula del libro *Hands on History. A Resource for Teaching Mathematics*

Este libro, publicado por *The Mathematical Association of America*, recoge trabajos de varios autores en torno a lo que la editora del mismo llama “la cultura material de las Matemáticas” o “la manifestación física de las Matemáticas” (es decir, los artefactos, modelos o herramientas que han acompañado la actividad matemática en la historia). Algunos de los autores participaron de un encuentro de matemáticas intitulado *The history of Mathematics Technologies: Exploring the Material Culture of Mathematics* o de un curso corto, en el marco del mismo, desarrollado por la editora en tal evento. Los dieciséis documentos que conforman los capítulos del libro, procuran poner en contacto al lector, y específicamente a los profesores de Matemáticas, con recursos físicos que, llevados al aula a través de proyectos, le permitan a los estudiantes “tocar” los artefactos, en tanto legados históricos de las Matemáticas y, de esta forma, vivir físicamente las Matemáticas a través de artefactos que fueron empleados en las distintas actividades matemáticas. En este sentido, el libro incluye trabajos con artefactos como los huesos de Napier, las torres de Hanoi, transportadores, juegos con baldosas para descubrir el teorema de Pitágoras, modelos de secciones cónicas con cuerdas, curvígrafos, planímetros, herramientas para construir curvas mecánicas, instrumentos de topografía, relojes de sol y de péndulo, cuadrados y cubos reales para ilustrar las operaciones algebraicas análogas, y un modelo para la construcción y uso de un braquistócrono. De esta manera, se expresa el interés y trabajo de los autores por usar la Historia de las Matemáticas para facilitar el aprendizaje activo en el aula.

2.1.5.9 *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigueurs, erreurs, raisonnements* (Barbin & Bénard, 2007)

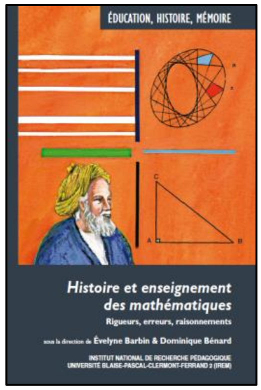

Imagen 27 Carátula del libro *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigueurs, erreurs, raisonnements*

Este libro, desarrollado después del Decimosexto Coloquio de la Comisión inter-IREM, denominado *Épistémologie et historie des mathématiques* y celebrado en Clermont-Ferrand en el 2006, recoge ponencias de varios autores, agrupadas en cuatro temáticas, a saber: los rigores (con cuatro capítulos), las experiencias y demostraciones geométricas (compuesta de tres capítulos), la multiplicidad de puntos de vista (tratado a través de tres capítulos) y, los razonamientos entre Geometría y Álgebra (abordado por dos capítulos). La elección de las temáticas del libro obedece no solo a que las cuestiones de rigor y validación de razonamientos han sido temas de debate y controversia entre los matemáticos y entre los filósofos de las Matemáticas, sino que, desde una perspectiva histórica, se reconoce que estas ideas han cambiado a través del tiempo y tienen, entonces, una historicidad; algo similar reconocen ocurre con la idea de error. En este sentido, los autores sugieren hablar en plural, y referirse a los rigores, los errores y los razonamientos en la historia. Pero lo anterior sugiere solo la mitad del título de la obra; la otra parte está referida a que esta visión histórica plantea muchas preguntas sobre el aprendizaje matemático; por ejemplo, vale la pena preguntarse por: lo riguroso y lo obvio, en la universidad o la escuela secundaria; el qué, por qué y cuándo se decide demostrar; el nivel de rigor y abstracción deseable en la escuela; la distinción entre el error y la falta de motivación en el aprendizaje de las Matemáticas; etc., cuestiones, todas estas de interés para los profesionales que asumen la enseñanza de las Matemáticas no solo como un quehacer sino como un objeto de estudio.

2.1.5.10 *Philosophical Dimensions in Mathematics Education* (François & Van Bendegem, 2007)

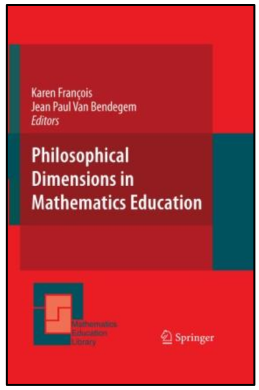

Imagen 28 Carátula del libro *Philosophical Dimensions in Mathematics Education*

El libro corresponde al volumen 42 de la serie *Mathematics Education Library*, administrada editorialmente por Alan Bishop. A través de cerca de una decena de documentos, los autores de los mismos abordan la discusión generada por una serie de preguntas enunciadas por los editores en el preludio del mismo. Estas aluden a: ¿cuál es el conjunto de valores filosóficos presentes de manera implícita en los actuales currículos de matemáticas?, ¿cuál es la perspectiva sobre la educación matemática que se promueve desde las actuales perspectivas filosóficas?, ¿qué filosofías son compatibles con qué tipos de educación?, ¿cómo pueden tales filosofías ser incluidas en el currículo y qué implica tal implementación? o ¿si todo lo anterior puede ser contestado adecuadamente, cómo después se puede evaluar? Los editores ubican estas preguntas en un movimiento que va desde una filosofía implícita *de* las Matemáticas hacia una filosofía explícita *en* Matemáticas.

En esta dirección se ubican entre otros documentos que: versan sobre la presencia implícita o explícita de la filosofía en el currículo; incluyen propuestas, ideas y sugerencias sobre cómo dirigir los procesos de educación matemática en otras direcciones (las cuales atienden a la incorporación directa de la filosofía en el currículo o, de manera indirecta, en la formación de profesores o a través de la Historia de las Matemáticas); proponen y discuten la solución de problemas como estrategia curricular que implica la discusión sobre los asuntos semánticos en las Matemáticas; discuten las implicaciones educativas de posturas filosóficas sobre las Matemáticas y su actividad; o, que indagan por las implicaciones educativas de considerar unas Matemáticas no hegemónicas, desde la perspectiva de la etnomatemática.

2.1.5.11 *Mathematical Time Capsules. Historical Modules for the Mathematics Classroom* (Jardine & Shell-Gellasch, 2011)

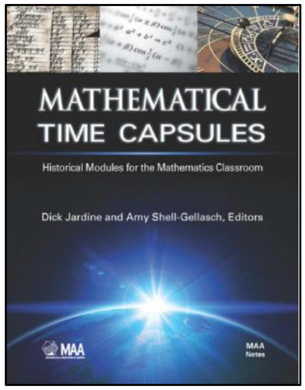

Imagen 29 Carátula del libro *Mathematical Time Capsules. Historical Modules for the Mathematics Classroom*

Una vez más *The Mathematics Association of America* publica un libro en el que se compilan documentos presentados previamente en un evento académico, en este caso en una actividad denominada *Using History of Mathematics in Your Mathematics Courses*, realizada en el marco del *Joint Mathematics Meeting*, llevado a cabo en enero de 2006. El texto ofrece así, treinta y cinco módulos históricos (o cápsulas del tiempo) para su uso en las aulas; dichas cápsulas proponen actividades de la Historia de las Matemáticas que pretenden mejorar el aprendizaje de temas de Matemáticas, típicos en secundaria y en pregrado. Los estilos de enseñanza o de aprendizaje promovido por las cápsulas son muy variados y pueden centrar la actividad en un intervalo en cuyos extremos está el profesor o el estudiante, respectivamente; igualmente variados son los enfoques de integración de la Historia implicados en las cápsulas. Adicionalmente, el conocimiento de estas cápsulas se reconoce como una estrategia para aportar al conocimiento histórico de las Matemáticas de los profesores quienes pueden así prepararse para los exámenes de certificación docente.

De acuerdo con los editores, el contenido del libro se organiza en tres secciones (no identificables de manera explícita). La primera sesión corresponde a cápsulas que tienen como objeto temas matemáticos que normalmente se tratan en los cursos impartidos en la escuela secundaria o en los primeros años de universidad (por ejemplo, cursos de Álgebra, Geometría, Matemáticas para maestros de primaria, Trigonometría, o Precálculo). Los temas de cursos tradicionalmente tomados inicialmente en la formación matemática profesional o en carreras afines (como Cálculo, Ecuaciones diferenciales, Teoría de números, Álgebra abstracta, y Análisis) son abordados en la tercera parte. La segunda parte se ocupa del tratamiento de algunas ideas que se pueden aplicar a una amplia variedad de cursos de pregrado o la secundaria; las cápsulas de esta parte son de carácter pedagógico general, no de Matemáticas, y podrían ser adaptados para su uso en cualquier curso.

2.1.5.12 *História na educação matemática - Propostas e desafios* (Miguel & Miorim, 2011)

Imagen 30 Carátula del libro *História na educação matemática - Propostas e desafíos*

En este libro, cuya primera edición data del año 2004, constituye el décimo volumen de la "Colección Tendencias en Educación Matemática", la cual se dirige a profesores de Matemáticas e investigadores. Acá los autores, a lo largo de una introducción y tres capítulos (titulados respectivamente: Historia en las matemáticas escolares; Ampliando y profundizando el debate relativo a la participación de la Historia en la educación matemática escolar: práctica de investigación académica y perspectivas teóricas; e, Historia, cultura matemática y Educación Matemática en la institución escolar: reflexiones y desafíos), discuten los vínculos que se intentan promover entre una producción socio-histórica del conocimiento matemático del pasado y la producción o apropiación personal de tal conocimiento en el presente, o entre una cultura matemática y las formas de apropiación de esa cultura a través de las prácticas pedagógicas y las prácticas de investigación en Educación Matemática. Para ello distinguen entre Historia de las Matemáticas, Historia de la Educación Matemática y la Historia en la Educación Matemática.

En este último campo, objeto de estudio del libro, incluyen todos los estudios que asumen como objeto de investigación problemas relativos a las intersecciones efectivas de la Historia en: la formación de profesores, la formación matemática de los estudiantes de cualquier nivel educativo, los libros de texto de Matemáticas para cualquier nivel educativo, las propuestas curriculares de enseñanza de las Matemáticas; en la investigación en Educación Matemática, etc. Por ello, los ámbitos de interlocución del libro contemplan académicos de varias disciplinas y diversas maneras de participación en torno a la educación en Matemáticas y a las Matemáticas mismas.

2.1.5.13 *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (Katz & Tzanakis, 2011)

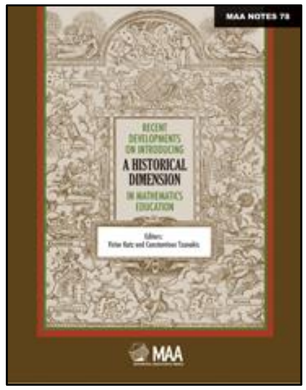

Imagen 31 Carátula del libro *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*

Este libro, publicado por *The Mathematical Association of America*, está dedicado en su totalidad a publicar estudios sobre la relación HM-EM, la mayoría de los cuales fueron presentados previamente en eventos internacionales, los cuales fueron sometidos a evaluación por parte de expertos de la comunidad internacional. El contenido del libro está organizado en cuatro partes que condensan respectivamente documentos en torno a: planteamientos teóricos sobre la integración de la Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas (siete documentos), experiencias e investigaciones sobre el uso de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de diversos temas matemáticos en diferentes niveles educativos (diez artículos), usos de la Historia de las Matemáticas en programas de educación de futuros profesores y profesores en ejercicio (cuatro textos) y, la Historia de las Matemáticas (tres documentos, dos de los cuales exponen la Historia desde un enfoque sociológico).

Los documentos de la primera parte se refieren, entre otros asuntos, al trabajo con fuentes originales y la opción dialógica de los mismos, las condiciones de producción de nuevas ideas matemáticas, los métodos históricos de solución de ecuaciones, la naturaleza del Álgebra, puntos de vista sobre la función y su impacto en la educación y el efecto del ambiente cultural de las ideas matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de estas.

Las experiencias e investigaciones de la segunda parte aluden a: la integración de la Física y las Matemáticas, la introducción de nuevas temáticas desde la perspectiva de su trasfondo histórico, el uso de imágenes de documentos antiguos en la enseñanza de las Matemáticas, el empleo de pesos y medidas históricas en el aula, los pensamientos o creencias sobre la Historia de las Matemáticas, el efecto de la historia de la función en la comprensión de la misma, el impacto del estudio de la idea de movimiento en la historia sobre la comprensión de integral definida y el teorema fundamental del Cálculo, la Física y las ecuaciones diferenciales, el desarrollo histórico de las ideas de varianza y desviación estándar y su relación con las dificultades de los estudiantes en torno a la idea de varianza, y el uso de fuentes originales en el estudio de la matemática discreta.

Los cuatro documentos de la tercera parte discuten, respectivamente: el uso de la Historia en un programa de formación de profesores de primaria, un curso de Historia de las Matemáticas diseñado para mostrarles a los futuros profesores cómo pueden emplear la Historia en la enseñanza, cómo cambios curriculares conminan a la introducción de material histórico en el aula, y la manera como efectivamente algunos profesores usan la Historia.

La última parte presenta dos artículos que destacan, respectivamente, elementos acerca la evolución de la comunidad matemática norteamericana y la comunidad brasilera, desde los tiempos coloniales; otro documento refiere aspectos de la historia de la trigonometría y su relación con la astronomía.

2.1.5.14 *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education* (Sriraman, 2012)

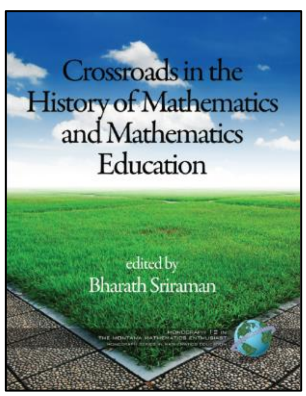

Imagen 32 Carátula del libro *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education*

Este libro, publicado como el monográfico número 12 de *The Montana Mathematics Enthusiast* y editado por Bharath Sriraman, contiene algunos documentos que son reimpresiones de documentos publicados en la revista *Mathematics Enthusiast*. Su intención es proveer al lector de un material que lo invite a mirar dentro de la Historia de las Matemáticas, aspectos que pueden contribuir a mejorar la comprensión de temas matemáticos.

El documento se divide en tres secciones. La primera presenta siete artículos sobre Historia y Didáctica de las Matemáticas que proporcionan recursos históricos para ser usados en la enseñanza del Cálculo y el Análisis. En la segunda sección se encuentran cuatro documentos para el trabajo con la historia y didáctica de la Geometría y la Teoría de números. En la tercera sección, se ubican cuatro documentos que buscan discutir y justificar el papel de la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática.

2.1.5.15 *Handbook on the History of Mathematics Education (Karp & Schubring, 2014)*

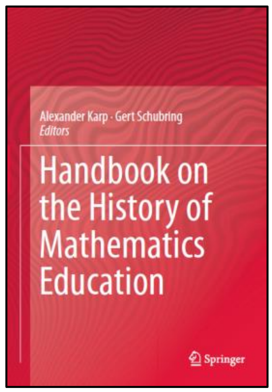

Imagen 33 Carátula del libro *Handbook on the History of Mathematics Education*

Según los editores, este libro, recientemente editado y difundido, procura presentar la historia de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en diferentes épocas, civilizaciones, culturas y países. En tanto *Handbook*, su contenido refleja el estado actual de la investigación en el campo de la Historia de la Educación Matemática [HEM] (que a su vez es la condición que hace posible su concepción y publicación) y favorece la identificación de desarrollos futuros del mismo.

El contenido se organiza en seis partes. La primera de ellas, escrita en sendos capítulos por los editores, se ocupa de la historia y la metodología del campo [HEM]. La segunda, tercera y cuarta se ocupan de la Educación Matemática en diferentes épocas (antigüedad y Edad Media; periodo premoderno; y periodo moderno, respectivamente) y en diferentes regiones, culturas o países (sociedades orientales, sociedades islámicas, Europa, Asia oriental, América, Italia, Francia, Alemania, Reino Unido, España, Portugal, Rusia, Estados Unidos, Canadá, Latinoamérica, Asia, África, Túnez). La quinta parte aborda la historia de la enseñanza de algunas disciplinas matemáticas (Aritmética, Álgebra, Geometría, Cálculo) o de asuntos específicos (matemáticas vocacionales y prácticas de enseñanza). La última de las partes incluye tres capítulos sobre la historia de la cooperación internacional en Educación Matemática, la historia de las herramientas y las tecnologías en la Educación Matemática y la historia de la educación de los profesores de Matemáticas.

2.1.6 Conferencias o eventos específicos

De manera casi simultánea a la indagación bibliográfica advertimos que la relación HM–EM, es no solo uno de los objeto de estudio de varios eventos académicos en Educación Matemática, sino que constituye el objeto de estudio de eventos académicos específicos. En este sentido reconocimos la existencia de:

- Seis versiones de la *European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* realizadas en 1993 (Monpellier, Francia), 1996 (Braga, Portugal), 1999 (Louvain-la-Neuve & Leuven, Bélgica), 2004 (Uppsala, Suecia), 2007 (Praga, República Checa) y 2010 (Viena, Austria).
- Ocho encuentros satélite del ICME (*HPM Satellite Meeting of ICME*)
- Cinco versiones de las Escuelas de Historia y Educación Matemática (ENHEM), realizadas en Colombia en los años 2006, 2008, 2010, 2013 y 2015.

2.1.6.1 Las *European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* [ESU]

La historia de las ESU tiene sus inicios en las reuniones sobre Historia y Epistemología en la Educación Matemática organizadas y realizadas por la comunidad francesa en la década del ochenta. En 1993 se organiza la primera ESU y desde entonces, con una frecuencia de tres años (para casi todas sus versiones), se han realizado las diferentes versiones. Las segunda y cuarta ESU se organizaron conjuntamente con los Encuentros Satélites en los ICME 8 y 10, respectivamente. Desde 2010 se prevé realizarla cada cuatro años y así está previsto que la 7ª ESU se lleve a cabo en Dinamarca en julio de 2014.

Las ESU constituyen la principal actividad internacional del grupo *International Study Group on the Relations Between HISTORY and PEDAGOGY of MATHEMATICS An Affiliate of International Commission on Mathematical Instruction* [HPM][39] y tiene entre sus

[39] Como se reseña en su página web (http://www.mathunion.org/icmi/about-icmi/affiliate-organizations/study-groups/hpm/) este grupo está afiliado a la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) desde 1976. Su interés temático reside en la combinación de la Historia de las Matemáticas con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, y en este sentido HPM constituye una manera de mantener el vínculo entre el pasado y el futuro de las

propósitos constituir un foro donde investigadores y profesores expongan y discutan sus elaboraciones (*v.g.*, métodos de enseñanza, ideas, experiencias de enseñanza, materiales, talleres, etc.), logradas desde/en enfoques históricos, epistemológicos o culturales sobre las Matemáticas.

De cada una de las versiones de la ESU se editan sus memorias (Barbin, Stehlikova, & Tzanakis, 2008; Furinghetti, Kaijer, & Vretblad, 2004; Kronfellner, Tzanakis, & Barbin, 2011; Lagarto, Viera, & Veloso, 1996; Lalande, Jaboeuf, & Nouazé, 1995; Radelet-de-Grave & Brichard, 2001).

Los temas tratados en la primera ESU fueron: La construcción histórica del conocimiento matemático, la introducción de una perspectiva histórica en la enseñanza de las Matemáticas, la relación entre Educación Matemática y cultura, la Epistemología y su relación con la Didáctica y la Pedagogía, la Historia de las Matemáticas en la formación inicial y continuada de profesores, las Matemáticas mediterráneas y la Etnomatemática.

Las culturas matemáticas en todo el mundo, las Matemáticas como una ciencia, y las relaciones entre las Matemáticas, las artes y las técnicas, constituyeron los temas principales de la segunda versión de la ESU. Los temas particulares del mismo fueron: La historia de la Educación Matemática, los obstáculos epistemológicos, las perspectivas sobre las Matemáticas, las Matemáticas para todos, y la demostración matemática en la Historia.

Si bien la tercera ESU no tenía un listado de temas principales definidos a priori, se trabajó en torno a: la construcción histórica de conocimiento matemático, la relación entre Matemáticas y ciencia en la historia (y su relación con la educación), las relaciones entre Matemáticas y música, la historia de la Educación en Matemáticas, las Matemáticas en los países bajos, la geometría del Siglo XIX y su influencia en la educación.

Los temas objeto de estudio de la cuarta versión de las ESU fueron: La historia de las Matemáticas; la integración de la Historia de las Matemáticas a la enseñanza de las Matemáticas; el papel de la Historia de las Matemáticas en la formación de profesores; lo común en la Historia de las Matemáticas, la ciencia y la tecnología; las Matemáticas y las diferentes culturas; y, la Filosofía de las Matemáticas.

Matemáticas. Por lo tanto, el grupo tiene como objetivo destacar la concepción de las Matemáticas como una ciencia viva, una ciencia con una larga historia, un presente vivo y un futuro aún imprevisto.

La quinta ESU abordó seis temas, a saber: La Historia y la Epistemología como herramientas para la aproximación interdisciplinaria en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y las ciencias; la introducción de una dimensión histórica en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; la Historia y la Epistemología en la Educación Matemática de los profesores; cultura y Matemáticas; la historia de la Educación Matemática en Europa; y, las Matemáticas en el centro de Europa.

En la más reciente versión de este evento se trataron los siguientes temas: Marcos teóricos o conceptuales para la incorporación de la Historia en la Educación Matemática; la implementación de la Historia y la Epistemología en la Educación Matemática (experimentos en el aula y materiales de enseñanza, considerados desde el punto de vista cognitivo o afectivo; reseñas de planes de estudio y libros de texto); las fuentes originales en el aula y sus efectos educativos; la Historia y Epistemología como herramientas para un enfoque interdisciplinario en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas y las ciencias; las culturas y las Matemáticas, y los temas de la Historia de la Educación Matemática.

2.1.6.2 Los *HPM Satellite Meeting of ICME*

Al revisar varias memorias de *The International Congress on Mathematical Education* [ICME] identificamos que quizá la primera vez que la relación HM–EM se menciona explícitamente en el evento es en su segunda versión, llevada a cabo en Exeter en 1972; en efecto, en el Apéndice de sus memorias (Howson, 1973, p. 301) se reseña que uno de los grupos de trabajo, liderado por P. S. Jones y L. F. Rogers, aborda el estudio de las "Relaciones entre la Historia y la Pedagogía de las Matemáticas" (este nombre se aplica al grupo de trabajo).

Luego, en las memorias de la cuarta versión, desarrollada en Berkeley en 1980, se identifican dos subtemas, desplegados a través de cuatro ponencias cada uno, que aluden a esta relación, titulados respectivamente: "*How can you use history of mathematics in teaching mathematics in primary and secondary schools*?" (Zweng, Green, Kilpatrick, Pollak, & Suydam, 1983, pp. 396-404) y "*The Relevance of Philosophy and History of Science and Mathematics for Mathematical Education*" (Zweng, et al., 1983, pp. 444-452).

Las memorias de la quinta versión reseñan sesiones y trabajos presentados en un área temática titulada precisamente "*Relationship between the history and pedagogy of mathematics*" (Carss, 1986, pp. 256-260).

Asimismo las memorias del Sexto ICME reseñan, en una sección especial (D'Ambrosio & Lázsló, 1988), las actividades del HPM; esta sección específicamente refiere un simposio sobre las geometrías no euclidianas y su inclusión en los sistemas escolares y otro sobre la evolución de los algoritmos empleados en las escuelas, un panel sobre la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas y una sesión de comunicaciones cortas.

Igualmente en las memorias de la octava versión del ICME se reseña, en una página (Charbonneau & Fernández, 1998), los dos asuntos (Historia de las Matemáticas en el salón e Historia de las Matemáticas en la investigación) abordados en el Grupo temático 16, titulado en Español, “Historia y Enseñanza de las Matemáticas”.

En las memorias de la novena versión del ICME se reseña: (i) la actividad del *WGA 13: History and Culture in Mathematics Education* (van Maanen et al., 2004), organizada en cinco temas, a saber: Aspectos del trabajo multidisciplinario, Efectividad de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas, Teoría de la Probabilidad y la Estadística, La danza y la poesía de las Matemáticas y la Cultura. (ii) La presentación de un reporte del estudio ICMI (van Maanen, 2004b) desarrollado en el periodo 1996-2000, que abordó la relación HM–EM. (iii) Una breve presentación del lugar de la Historia de las Matemáticas en el ICME 9 (van Maanen, 2004a).

Las memorias del ICME 10 contienen los reportes de dos grupos temáticos de estudio, denominados *TSG 17: The role of the history of mathematics in Mathematics Education* (Siu & Tzanakis, 2008) y *TSG 29: The history of the teaching and the learning of mathematics* (Schubring & Sekiguchi, 2008). En el primero se reporta que las cuatro sesiones del grupo se centraron en la integración de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas y procuraron clarificar el significado de una “dimensión histórica en la educación matemática” y profundizar en la comprensión de sus diferentes aspectos; como se mencionó antes, los documentos presentados en este grupo fueron reeditados en un monográfico de una revista reseñada en este documento en el apartado 2.1.1.9. En el segundo grupo temático de estudio, bajo el enfoque temático propio del grupo, se discuten formas institucionalizadas de enseñanza y aprendizaje, de tal suerte que en su primera sesión se aborda la transición y modernización de los currículos matemáticos, en su segunda sesión las prácticas de enseñanza, los libros de texto y la educación del profesor y, en su tercera sesión las funciones culturales, sociales y políticas de la instrucción matemática; estas temáticas se sintetizan en la cuarta y última sesión.

En los archivos de los *Pre-proceedings* de la más reciente versión del ICME, es decir la número 12, llevada a cabo en Corea, se reconoce la participación de dos grupos temáticos de estudio (TSG20: *The role of history of mathematics in mathematics education* y TSG35: *The history of the teaching and learning of mathematics*) en cada uno de los cuales se presentaron diez ponencias y de un grupo de discusión (DG-5: *Uses of history of mathematics in school (Pupils aged 6 - 13)*).

Al margen de lo anteriormente mencionado sobre las memorias del ICME, debemos destacar que es precisamente en la quinta versión del ICME que se instaura por primera vez un "Encuentro Satélite" en el que se aborda la discusión sobre la relación HM–EM. En una de las páginas web del grupo HPM[40] se reporta la siguiente información (traducida acá al Español y ubicada en la Tabla 31), respecto de los *ICME Satellite Meetings of HPM*.

Año	Versión del ICMI	Lugar de realización del ICMI	Lugar de realización Encuentro satélite	Publicación
1984	5	Adelaida, Australia	Adelaida, Australia	
1988	6	Budapest, Hungría	Florencia, Italia	
1992	7	Quebec, Canadá	Toronto, Canadá	(Calinger, 1996)[41]
1996	8	Sevilla, España	Braga, Portugal[42]	(Lagarto, et al., 1996) (Katz, 2000b)[43]
2000	9	Tokio-Makuhari, Japón	Taipéi, Taiwán	(Horng & Lin, 2000)
2004	10	Copenhague, Dinamarca	Uppsala, Suecia[44]	(Furinghetti, et al., 2004)
2008	11	Monterrey, México	Ciudad de México, México	(Cantoral, Fasanelli, Garciadiego, Stein, & Tzanakis, 2008)[45]
2012	12	Seúl, Corea	Daejeon, Corea	

Tabla 31 Información sobre los *ICME Satellite Meetings of HPM*

2.1.6.3 Las Escuelas de Historia y Educación Matemática [ENHEM]

Como iniciativa del Grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle, además de las dos versiones de la "Escuela Latinoamericana de Historia y Epistemología de las Matemáticas" (llevadas a cabo en 2002 y 2004), se ha promovido bajo el liderazgo de este grupo y con la colaboración de otras instituciones, cuatro versiones de la "Escuela de Historia y Educación Matemática" (ENHEM). Todas ellas han sido propuestas como espacios académicos de discusión y difusión de problemáticas de orden histórico y filosófico transversales a los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las

[40] http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/about%20HPM.htm

[41] Reseñado en el apartado 2.1.5.3 de este documento.

[42] Se realizó conjuntamente con la *2nd European Summer University in History and Epistemology in Mathematics Education*.

[43] Reseñado en el apartado 2.1.5.4 de este documento.

[44] Se realizó conjuntamente con la *4th European Summer University in History and Epistemology in Mathematics Education*.

[45] La revista Educación Matemática publicó una reseña del evento (Buendía, 2008).

Matemáticas, así como espacios interdisciplinarios donde se convoca a historiadores, filósofos, matemáticos y educadores matemáticos a compartir experiencias y proyectos investigativos en este campo.

La primera de las Escuelas se realizó en 2006, en conjunción con un proyecto de investigación, titulado *La constitución histórica de los números reales en la perspectiva de formación de docente*, a través del cual se elaboró y validó una propuesta histórico-filosófica sobre la constitución de los números reales como objeto matemático. La Segunda ENHEM, llevada a cabo en 2008, se presentó como una segunda fase de tal proceso de indagación y divulgación, enfocado a las dificultades epistemológicas y didácticas que comporta el concepto de número real en su enseñanza y aprendizaje. La Tercera ENHEM, realizada en 2010, tuvo como tema central la "Axiomática y estructuralismo en Matemáticas" y se enfatizó en los procesos de axiomatización y estructuración de los números reales; esta versión se realizó en el marco del proyecto "Hacia una nueva cultura educativa en el municipio de Santiago de Cali. Nuevas relaciones Escuela-comunidad ciudad. Fortalecimiento de las competencias docentes y estudiantiles". La Cuarta ENHEM se realizó en 2013; abordó como temática central "las axiomáticas, las estructuras y la actividad matemática" y para esta versión se definieron seis temas específicos, a saber: El desarrollo histórico de la noción de estructura, la evolución de las propuestas axiomáticas, la evolución de la noción de categoría, la actividad matemática en la educación en Matemáticas, la Historia de las Matemáticas en la formación de docentes, y la Historia de las Matemáticas y Educación Matemática. La Quinta ENHEM …

2.2 Algunas reflexiones y conclusiones sobre la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática"

Luego de haber presentado el catálogo bibliográfico anterior (constituido por trece monográficos de revistas, dos revistas especializadas, cuatro inventarios bibliográficos, varios cientos de artículos, quince libros, y dos eventos académicos internacionales y uno nacional) nos queda suficientemente claro que a pesar de que este es incompleto (y de seguro lo será cualquier otro que se configure), su amplitud desborda cualquier posibilidad de estudio detallado en el marco de una tesis doctoral. Al respecto vale la pena mencionar que hoy tenemos plena conciencia de que en una primera aproximación a la relación HM–EM (Guacaneme, 2006), a través de la identificación de algunos documentos que versan sobre esta, simplemente habíamos visto la punta del iceberg bibliográfico, que hoy se nos muestra de un tamaño monumental, imposible de recapitular en su total dimensión. Especulamos que tal dimensión no está en la retina de muchos académicos interesados en la relación HM–EM y que visualizarla ayudará a la investigación y a la innovación en torno a tal relación, razón por la cual nos hemos tomado el tiempo necesario y el espacio suficiente en este capítulo para presentar una aproximación a tal panorama y apreciar una expresión de la actividad académica sobre esta relación.

La mirada panorámica lograda a través del catálogo en mención y el estudio de varios de los documentos allí reportados, nos permite reconocer que es totalmente ingenuo pensar que en el marco de esta tesis doctoral –y de cualquier otra del mismo tipo– se pueda explicitar el estado del arte de la relación HM–EM. Un propósito de esta magnitud amerita el trabajo mancomunado de una comunidad, como la que se congregó entre 1996 y 2000, por iniciativa de la ICMI, en torno al estudio cuyo informe (Fauvel & van Maanen, 2000) constituye un punto de referencia *sine qua non* para la investigación en HM–EM, desde el inicio de este siglo. No obstante la anterior condición, nos atrevemos a señalar algunos aspectos generales de la relación HM–EM, tales como: la existencia de cuatro ámbitos de interpretación de la relación HM–EM, la Didáctica de la Historia de las Matemáticas como escenario para el estudio de la relación HM–EM, y la exigua atención que ha merecido el vínculo de la Filosofía de las Matemáticas con la relación en cuestión.

2.2.1 La existencia de cuatro ámbitos de interpretación de la relación Historia de las Matemáticas – Educación Matemática

Desde nuestra perspectiva la expresión "Educación Matemática", involucrada en la relación HM–EM, tiene al menos dos maneras de comprensión por parte de la comunidad académica. Una que le identifica con expresiones como "enseñanza de las Matemáticas", "educación en Matemáticas" o "educación matemática"[46]; otra, que refiere al campo de investigación, nombrado en esta y otras latitudes como "Didáctica de las Matemáticas" o "Matemática Educativa".

Ahora bien, en la literatura mencionada en la primera parte de este capítulo (2.1) reconocemos una inclinación bastante generalizada a considerar la EM como educación en Matemáticas o enseñanza de las Matemáticas. Así, advertimos un énfasis en pensar y aludir a la relación HM–EM como la *intervención* de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas —e incluso en su aprendizaje—. Un enfoque de tal intervención se ha nombrado y conceptualizado a través de diferentes términos; así se

[46] Nótese que en esta última hemos empleado las iniciales en minúscula para distinguirla del campo de investigación "Educación Matemática".

advierte un amplio empleo del término *uso* (v.g., Chechile, 2006; Deakin, 2001; Dimitric, 2001; Fauvel, 1991b; Helfgott, 1995; Katz, 1986, 1993; Katz, 1997, 2000b; Lit, Siu, & Wong, 2001; Rickey, 1995; Siu, 2000; Swetz, 1989, 1995b; Wilson & Chauvot, 2000), del término *integración* (v.g., Barbin et al., 2000; G. Brown, 1991; Calinger, 1996; Charette, 2004; Kellogg, 2005; Kjeldsen & Blomhøj, 2009; Tzanakis et al., 2000) y se habla de la manera como la HM *permea* a la EM (v.g., Grugnetti, 2000; Kronfellner, 1996; Toumasis, 1995), también se reconoce una tendencia a aludir a la relación en términos de *introducir una dimensión histórica* en la educación matemática (Katz & Tzanakis, 2011). En la parte superior de la Imagen 34 esquematizamos estas intervenciones.

Imagen 34 Dos ámbitos de intervención de HM en EM

Desde nuestra perspectiva, la diversidad de términos efectivamente refleja diversidad de posturas o tendencias sobre la intervención de la HM en la educación en Matemáticas. Así, por ejemplo, incluir anécdotas o referencias históricas a obras matemáticas o matemáticos, se puede ver como una manera de "uso" de la HM; también connota un significado similar el proponer problemas históricos en las clases de Matemáticas, o enseñar o estudiar una manera histórica de abordarlos. En este sentido, escribir numerales con la numeración egipcia o romana, referir la ecuación que constituye el epitafio de Diofanto, representar el duelo en el que Galois pierde la vida, proponer el problema de transitar los puentes de Königsberg, entre otros, constituyen ejemplos de esta perspectiva de uso. En general esta tendencia se caracteriza porque la Historia de las Matemáticas es llevada al aula como parte de una lección matemática o como la lección misma. Los términos "aperitivo" y "postre", empleados en la editorial de la revista reseñada en 2.1.1.9 (Siu & Tzanakis, 2004), nos parecen muy llamativos y sugestivos del uso reseñado acá.

La tendencia a emplear la palabra “integración” es referida por Furinghetti (1997) como una manera de aludir no solo al uso de la Historia de las Matemáticas, sino a una enseñanza efectiva de las Matemáticas y de la Historia de las Matemáticas a través de esta, así como al análisis eficiente de los procesos cognitivos del aprendizaje y la comprensión, mediado por la Historia. En un sentido parcialmente semejante, Heiede (1992) esboza aguerridos argumentos a favor de una enseñanza de las Matemáticas que incluya su historia, no como algo adicional, ornamental o supletorio, sino como parte consustancial de las Matemáticas. La expresión “plato fuerte” empleada por Siu & Tzanakis (2004), nos parece que compagina bien con la idea de integración.

Se señala que la Historia de las Matemáticas “permea” la educación en Matemáticas cuando se emplea información histórica (*v.g.*, la evolución de objetos matemáticos) como criterio orientador en la estructuración de una propuesta curricular, de un curso o de una secuencia didáctica en el aula (v.g., Farmaki & Paschos, 2007; Katz & Barton, 2007; Kronfellner, 1996; Lingard, 2000; Otero, 1999; Tillema, 2005). Reconocemos en la expresión “introducir una dimensión histórica”, una interpretación muy cercana a permear la educación en Matemáticas con la Historia.

Ahora bien, como para algunas gentes y comunidades la EM también hace referencia a un campo de investigación, se podría pensar en la relación HM–EM como la intervención de la Historia de las Matemáticas en la investigación en el campo de la Educación Matemática; sin embargo esto no es lo que reporta la literatura consultada. No obstante este vacío, reconocemos que aquí también se identifican diversas expresiones de intervención, como por ejemplo: el uso de la Historia de las Matemáticas en la identificación de variables fundamentales y determinación de protocolos de investigación (*v.g.*, en el diseño de situaciones didácticas o en los análisis preliminares de la Ingeniería didáctica), el recurso a la Historia de las Matemáticas como elemento fundamental en la descripción de elementos de transposición didáctica de algunas temáticas de las Matemáticas (ello, en tanto que se asume que el conocimiento sabio se ubica a lo largo del tiempo histórico y no solo en una fase de objetivación del mismo), el lugar de los estudios histórico-epistemológicos del enfoque socioepistemológico, original expresión latina (o debiera decir, mexicana) de la Matemática Educativa, el papel de la fenomenología histórica en la identificación de la fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (propuesta por Freudenthal hace más de cuatro décadas), o la determinación de la filogénesis de los objetos matemáticos y su correspondencia con la ontogénesis. En la parte inferior de la Imagen 34 hemos esquematizado lo acá expresado.

Además de los dos ámbitos aludidos, reconocemos en la literatura consultada dos ámbitos más. Un tercer ámbito, si bien ligado al de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas, pero diferente de aquel, se refiere a la intervención de la Historia de las Matemáticas en la formación o educación de los profesores de Matemáticas. Igualmente, aquí se identifican varias modalidades de intervención, esquematizadas en la parte superior de la Imagen 35, a saber: la HM como elemento vinculado a la enseñanza de las Matemáticas que debe aprender el futuro profesor, la HM como discurso meta-matemático y la HM como elemento objeto de conocimiento en sí mismo. En tanto que este ámbito es el objeto del siguiente capítulo, no profundizamos acá en este.

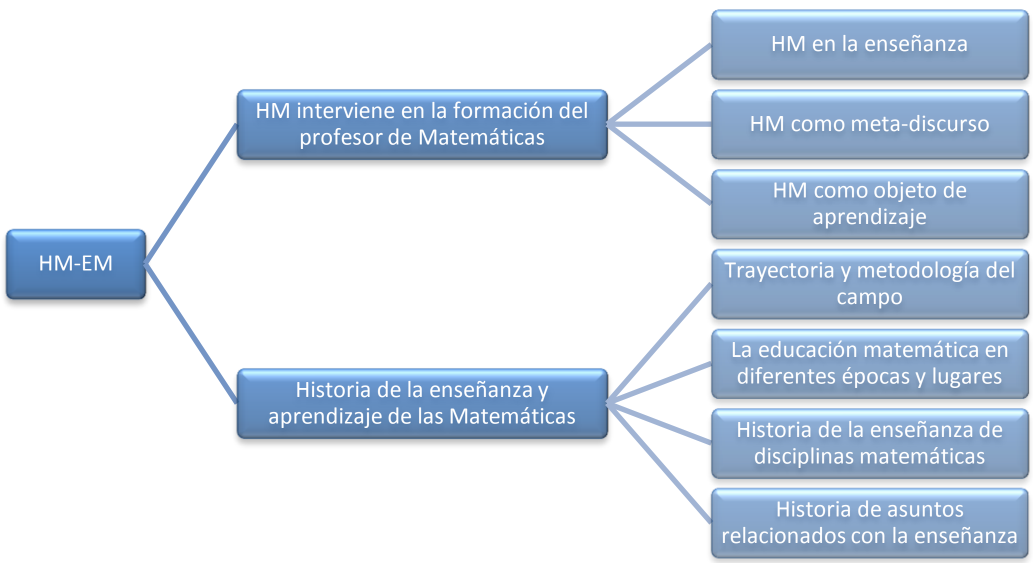

Imagen 35 Dos ámbitos más de intervención de la HM en EM

Un cuarto ámbito de expresión de la relación HM–EM lo constituyen los documentos y las referencias a la historia de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, ámbito conocido con la expresión “Historia de la Educación Matemática”, pero que desde nuestra perspectiva se debería nombrar mejor como “Historia de la educación matemática” o “Historia de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas”, pues con la expresión usual se debería hacer referencia a la historia del campo de investigación conocido como Educación Matemática.

En este ámbito sobresale la revista *The International Journal for the History of Mathematics Education* (reseñada en 2.1.2.2) y el libro *Handbook on the History of Mathematics Education* (reportado en 2.1.5.15). Precisamente la organización de este último permitiría reconocer algunos objetos que trataría la Historia de la educación matemática, a saber: su trayectoria y su metodología como campo de investigación, la educación en Matemáticas en diferentes épocas y lugares, la historia de la enseñanza de algunas disciplinas y la historia de asuntos relacionados con la enseñanza de las Matemáticas (*v.g.*, la historia de la educación de profesores de Matemáticas, la historia del papel de las tecnologías y recursos en la enseñanza). Esto ha sido esquematizado en la parte inferior de la Imagen 35.

En suma, reconocemos cuatro ámbitos de interpretación de la relación HM–EM, a saber: la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas, la Historia de las Matemáticas en las investigaciones del campo de la Educación Matemática, la Historia de las Matemáticas en la educación del profesor de Matemáticas y la Historia de la enseñanza de las Matemáticas.

De manera natural, cada uno de estos ámbitos de interpretación presenta objetivos diferentes. Así, por ejemplo para la primera interpretación, existen varios grupos de objetivos que se persiguen al introducir la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas: objetivos concernientes con la intención de mejorar la motivación de los aprendices hacia el estudio de las Matemáticas, objetivos relacionados con la transformación de la visión sobre las Matemáticas (su naturaleza, su carácter humano y cultural, su utilidad, sus objetos y métodos, su evolución, sus formas de organización y validación) y objetivos que aluden a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. En el estudio ICMI se propusieron grupos semejantes para el caso de los "Por qué" (Tzanakis, et al., 2000), los cuáles fueron discutidos y reformulados posteriormente por (Jankvist, 2009a). Adicionalmente a estos, para el caso del tercer ámbito de interpretación reseñado, se tiene un grupo de objetivos que aluden a proveer al profesor de recursos y un trasfondo favorable para el desempeño docente; este asunto será abordado con amplitud en el capítulo siguiente. Con respecto al segundo ámbito de interpretación reseñado, los objetivos se refieren a la posibilidad de contar con información sobre la evolución de los objetos matemáticos o sobre la actividad y prácticas matemáticas. Entre tanto, la posibilidad de contar con información sobre estos últimos aspectos, pero en la actividad de enseñanza de las Matemáticas, es el objetivo central asociado al cuarto ámbito de interpretación.

2.2.2 La Didáctica de la Historia de las Matemáticas como escenario para el estudio de la relación Historia de las Matemáticas – Educación Matemática

En varios de los ámbitos anteriores, y tanto en los títulos como el contenido de la gran mayoría de los documentos, siempre se refiere la relación HM–EM como “la intervención de la HM en la EM” (que representamos con: HM→EM); en efecto, en la literatura estudiada no es evidente siquiera si el otro sentido existe (*i.e.*, HM←EM). Así, la relación HM–EM se ve exclusivamente unidireccional. En otras palabras, no reconocemos en la literatura estudiada expresión alguna que enuncie la manera en que la Educación Matemática (o la educación matemática) se usa —o podría ser usada— en la Historia de las Matemáticas, influye —o podría llegar a influir— la actividad de los historiadores de las Matemáticas o permea —o podría llegar a permear— sus productos. Es decir, no hemos encontrado si quiera un artículo —y sí que nos hubiera gustado— que planteara explícitamente la pregunta ¿cuál es el papel de la EM en la HM? o ¿cómo intervienen las necesidades de la EM en la actividad investigativa y comunicativa de los historiadores de las Matemáticas?

En este orden de ideas, consideramos que el carácter unidireccional de la relación HM–EM asigna un carácter de utensilio o ingrediente a la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas, en la investigación en Educación Matemática o en la formación del conocimiento del profesor de Matemáticas. Asimismo, creemos que ello no parece favorecer la dinámica interdisciplinaria que desde hace un tiempo se reconoce como deseable para el campo de la Educación Matemática.

Por otra parte, asumiendo la metáfora gastronómica planteada en un editorial referenciado antes (Siu & Tzanakis, 2004), tenemos la idea —ingenua o intuitiva— que los historiadores de las Matemáticas han puesto unos ingredientes a la disposición de quienes los deseen preparar o consumir, sin considerar si con ellos se van a preparar aperitivos, platos fuertes o postres, e incluso sin cuestionar su valor nutritivo para los comensales (estudiantes de Matemáticas, Matemáticos, profesores de Matemáticas o investigadores del campo de la Educación Matemática). Lo anterior no desconoce el hecho que los resultados de la investigación histórica si bien tiene una expresión particular en los artículos de las revistas y en libros especializados en Historia de las Matemáticas, también tienen una expresión divulgativa, en el sentido de que algunos documentos pretenden hacer accesible el conocimiento histórico al público general.

Precisamente esto último nos conmina a pensar en procesos de transposición del conocimiento histórico sabio y en la posibilidad de existencia de la "Didáctica de la Historia de las Matemáticas" [DHM], es decir, —citando a Brousseau a propósito de su definición de la palabra "didáctica"— en la existencia de:

> … una ciencia de la comunicación de los conocimientos y de sus transformaciones; una epistemología experimental que intenta teorizar la producción y la circulación de los saberes un poco como la economía estudia la producción y la distribución de los bienes materiales. (Brousseau, 1990, p. 260)

Tal DHM se ocuparía, entre otros asuntos, de estudiar los procesos de transformación de los resultados de la investigación histórica para que a través de su divulgación se logre impactar la enseñanza de las Matemáticas, la formación de profesores de Matemáticas o la investigación en Educación Matemática.

En esta misma DHM, encontrarían un lugar propicio de discusión posturas como la que asume Michael Fried (2001) cuando discute la necesidad de adoptar un enfoque "distorsionado" (*"Whiggish"*) de la Historia de las Matemáticas cuando esta se incorpora a la enseñanza, o la posición crítica de Fowler (1991), en la que enfatiza la idea de que los profesores de Matemáticas deben ser conscientes de los peligros de la pseudo-historia, o su reconocimiento de que una historia simplificada puede llegar a conducir a una enseñanza de las Matemáticas más adecuada. Justamente en posturas como estas, advertimos un ápice de intervención de la educación en Matemáticas en la Historia de las Matemáticas, ápice esperanzador en la idea de movilizar a los historiadores a que participen también de las problemáticas educativas que aborda la Educación Matemática.

Por lo anterior, nos atrevemos a proponer que la relación HM–EM, en sus dos sentidos (*i.e.*, HM→EM y HM←EM) y en sus cuatro ámbitos (referidos en 2.2.1), tendría como escenario natural y propio a la DHM.

En efecto, la DHM podría estudiar tanto las intervenciones que la Historia de las Matemáticas hace en la enseñanza de las Matemáticas, en la educación del profesor de Matemáticas y en la Educación Matemática, como las intervenciones que estos tres ámbitos pueden llegar a hacer en la investigación histórica y en la divulgación de sus resultados para lograr un mejor aprovechamiento de los mismos.

Ahora bien, ¿y qué decir de cómo la DHM puede atender la cuestión sobre la Historia de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas? Intentemos abordar esta cuestión, para lo cual debemos inicialmente incorporar un modelo a través del cual ampliamos la visión sobre lo que llamaremos la "historia de las matemáticas", con iniciales en minúscula.

Hace un par de décadas Vasco (1994) propuso un modelo analítico para la Educación Matemática, que denominó "El octógono de la educación matemática" (ver Imagen 36); en este ubica en el centro del octógono a las Matemáticas y en uno de los lados a la historia de las matemáticas. Las matemáticas son entendidas como una trenza diacrónica que relaciona "las matemáticas realmente existentes en la cultura, la pedagogía de las matemáticas o matemáticas escolares, y las matemáticas de investigación" (p. 62).

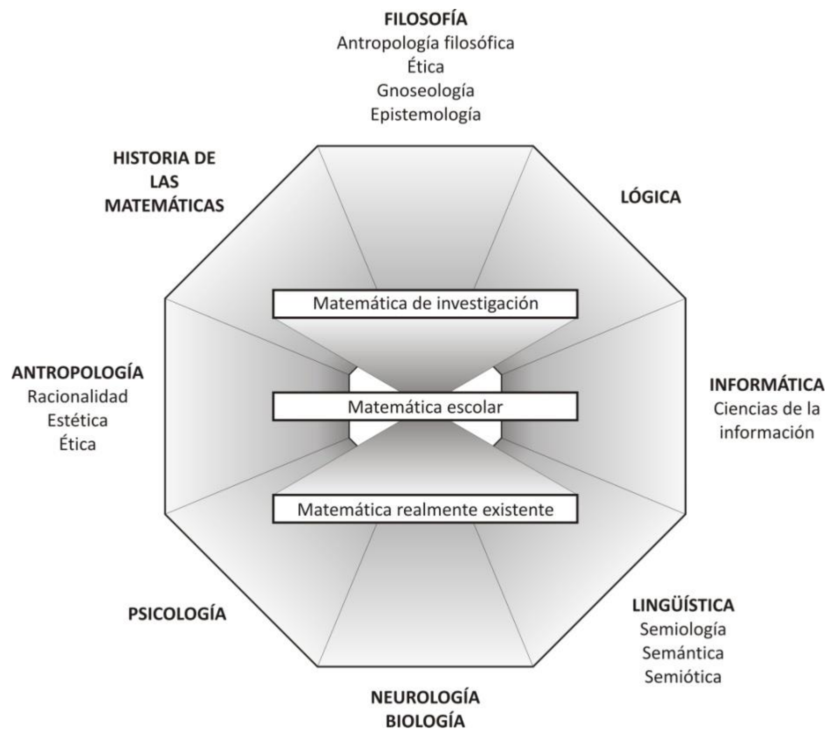

Imagen 36 Octógono de la educación matemática

A partir de postular diferentes expresiones de las matemáticas, reconocemos varias modalidades de historia de tales matemáticas. Así, la historia de la matemática de investigación, en general, referiría a la historia de la actividad de los matemáticos y a la discusión sobre sus resultados o productos; esta Historia de las Matemáticas (como preferimos nombrarla, con mayúsculas iniciales) es la reconocida de manera universal. La historia de la matemática realmente existente o historia de la matemática cotidiana se relaciona con la Etnomatemática, aunque no es totalmente comprendida por esta ni aquella la agota. La historia de la matemática escolar, o historia de la educación en matemáticas o del currículo matemático, se corresponde con el cuarto ámbito aludido en el apartado 2.2.1 y es precisamente para la cual estamos procurando la discusión en este punto. La Tabla 32 muestra una síntesis de lo anteriormente descrito.

matemáticas	historia de las matemáticas
matemática de investigación	Historia de las Matemáticas
matemática escolar	historia de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
matemática realmente existente	historia de las matemáticas cotidianas (cercana a la Etnomatemática)

Tabla 32 Correspondencia entre expresiones de las matemáticas y sus modalidades de historia

Bajo el reconocimiento entonces de la historia de la matemática escolar como una modalidad de historia de las matemáticas, pero diferente a la Historia de las Matemáticas, la DHM podría ocuparse, por ejemplo, de la intervención que esta historia tiene –o podría llegar a tener– en la enseñanza de las Matemáticas, en la formación de profesores de Matemáticas o en el campo de investigación en Educación Matemática. En el primer caso, la DHM podría estudiar fenómenos como la permanencia en la enseñanza de las Matemáticas de tradiciones curriculares y su resistencia al cambio, a pesar de disposiciones reglamentarias que favorecen el mismo. En el segundo caso, la DHM podría, entre otros asuntos, procurar precisar si el conocimiento curricular del profesor de Matemáticas tendría como fuente y referente el conocimiento de la historia del currículo de las Matemáticas y si se limitaría a este, o si el conocimiento curricular del profesor únicamente aludiría al conocimiento de una historia coetánea del currículo, es decir del estado del currículo vigente en una sociedad o región determinada. La DHM estudiaría la manera en que la historia de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas se incorpora a la investigación en Educación Matemática, por ejemplo al discutir si en el análisis preliminar, asociado como parte de la ingeniería didáctica, se incluye una mirada analítica a la evolución curricular del objeto de estudio y cómo esta determina al diseño de las situaciones didácticas, o si en un estudio de significados institucionales de un objeto, en el enfoque Ontosemiótico, tiene algún papel la historia curricular del mismo.

2.2.3 La exigua atención al vínculo de la relación Historia de las Matemáticas – Educación Matemática con la Filosofía de las Matemáticas

Los vínculos entre la Filosofía de las Matemáticas y la Historia de las Matemáticas han merecido muchas páginas de discusión y han dado lugar a varias célebres citas (*v.g.*, la cita lakatosiana: “La filosofía de la ciencia sin la historia de la ciencia es vacía; la historia de la ciencia sin la filosofía de la ciencia es ciega”); esto contrasta —y en cierto sentido es contradictorio— con la poca referencia que la literatura consultada reporta frente a los vínculos de la Filosofía de las Matemáticas con la relación HM–EM.

En efecto, solo hemos ubicado unos pocos documentos que abordan tal interacción, dentro de los que sobresale un planteamiento a través del cual se sostiene que "La concepción del uso de la historia en la educación varía en función de la filosofía que se posea" (Ruiz Zúñiga, 1997, p. 1). Por otra parte, como se reseñó en 2.1.5.10, se ha editado y publicado un libro (François & Van Bendegem, 2007) que claramente es una invitación a reconocer la necesidad de explicitar el papel de la Filosofía en la educación en matemáticas, o en otras palabras, explicitar la dimensión filosófica que guía las acciones educativas en Matemáticas o que son promovidas por estas; de este libro dos capítulos (Chassapis, 2007; Heeffer, 2007) describen y analizan experiencias concretas en dónde se evidencian los innegables e importantes vínculos entre la Filosofía y la relación HM–EM. Adicionalmente, es imperativo mencionar un reciente artículo (Jankvist & Iversen, 2014) en el que se discuten los "por qué" y los "cómo" de la Filosofía de las Matemáticas en la educación en matemáticas, reseñando dos por qué (filosofía como medio y como fin) y tres cómo (enfoques iluminadores, enfoques modulares y enfoques con la filosofía de base).

3 Estudio de la relación Historia de las Matemáticas – conocimiento del profesor de Matemáticas

La aproximación reseñada en el capítulo anterior permite advertir un interesante y comparativamente poco explorado ámbito de estudio en torno al papel del conocimiento histórico en el conocimiento del profesor de Matemáticas. Precisamente, es desde este ámbito que en el presente capítulo presentamos un marco de referencia, construido como desarrollo de la tesis misma, en torno a las preguntas relacionadas con: las características de la HM que se vincula a los procesos educativos de los profesores de Matemáticas, los argumentos que se esgrimen a favor de la integración de la HM en tales procesos, las intenciones que se persiguen con dicha integración, y las estrategias metodológicas que se han diseñado e implementado para que los profesores de Matemáticas se apropien y usen los discursos históricos.

Para lograr una aproximación a la relación "Historia de las Matemáticas – Conocimiento del profesor de matemáticas" [HM–CPM], hemos (i) seleccionado los artículos y capítulos que versan explícitamente sobre la relación HM–CPM y recapitulado las ideas centrales de cada uno de estos, con base en lo cual hemos (ii) analizado y clasificado el contenido de tales documentos y así, elaborado una aproximación al estado del arte de tal temática, y finalmente hemos (iii) planteado algunas discusiones sobre tal estado del arte. Estos tres elementos constituyen la arquitectura[47] de este apartado.

[47] Una organización semejante constituyó la estructura de la conferencia titulada "Una aproximación a la relación Historia de las matemáticas – Conocimiento del profesor de matemáticas", presentada en el marco del *Tercer Encuentro de Programas de formación inicial de profesores de matemáticas*, llevado a cabo en Bogotá, del 24 a 25 de abril de 2008.

3.1 La literatura sobre la relación "Historia de las Matemáticas - Conocimiento del profesor de Matemáticas"

A diferencia del orden de presentación de la literatura reseñada en el capítulo anterior (específicamente en el apartado 2.1), pero sí atendiendo a lo reportado en aquel, en este capítulo organizamos la literatura que se refiere a la relación HM–CPM considerando la fuente de los documentos y la cronología de los mismos; así, reportaremos inicialmente los artículos de las revistas y luego los capítulos.

Antes de entrar en la descripción, debemos advertir al lector que no ha sido una tarea sencilla determinar cuáles de los documentos que tratan la relación HM–EM son los que versan sobre la relación HM–CPM, pues, de una parte, incluso algunos que en su título o su resumen no se refieren explícitamente a ello, sí contienen información sobre esta relación[48]; de otra parte, no ha sido fácil distinguir entre documentos que se refieren a la HM *en* el aula y aquellos que refieren a la HM *para* el aula (o más precisamente para la educación del profesor).

Además, aclaramos que si bien en la sección de referencias bibliográficas naturalmente hemos respetado el idioma original de los documentos, en el cuerpo de los textos siguientes hemos realizado y trascrito traducciones de los títulos o de algunos de los contenidos. También hemos incluido unas tablas a través de las cuales reportamos un compendio de aspectos que hemos querido enfatizar de los documentos referidos; al respecto, advertimos que las frases incluidas en las tablas, a pesar de tener sentido en sí mismas, no logran sintetizar suficientemente el contenido de las ideas expuestas por los autores en sus artículos y constituyen más bien un recurso mnemotécnico, que emplearemos posteriormente.

Ahora sí, veamos los artículos y capítulos que versan sobre la relación HM–CPM.

3.1.1 Artículos

En este apartado incluimos los artículos que refieren la relación HM–CPM, identificados en 2.1.4 Artículos, 2.1.1 Monográficos de revistas y 2.1.3 Inventarios bibliográficos.

Consideramos necesario precisar que inicialmente, bajo los numerales 3.1.1.1 a 3.1.1.13 hemos relacionado los artículos que contienen alusiones o tratamientos de la relación HM–CPM de cada una de las revistas reportadas en 2.1.4. Esto ha llevado también a

[48] El caso contrario es menos escaso.

identificar algunas de las revistas reportadas en 2.1.4 en las que no reconocemos artículo alguno que aborde la relación en cuestión; este es el caso de: *Journal for Research in Mathematics Education*, *Journal of Mathematics Teacher Education*, *Mathematical Thinking and Learning*, *International Journal of Science and Mathematics Education*, *Mathematics Education Research Journal*, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *Research in Mathematics Education*, *Technology, Knowledge and Learning* (anteriormente: *International Journal of Computers for Mathematical Learning*), *The Mathematics Enthusiast* (anteriormente: *The Montana Mathematics Enthusiast*), Educación Matemática, PNA - Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, y UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática[49].

En los numerales 3.1.1.14 a 3.1.1.18 hemos relacionado los artículos de los monográficos reportados en 2.1.1. Aclaramos que los artículos de algunos monográficos han sido considerados cuando hemos aludido y estudiado la revista en específico; este es el caso de: *Educational Studies in Mathematics* 66(2)2007, *For the learning of mathematics* 11(2)1991 y 17(1)1997, y UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas 26,2001. Precisamos que acá no hemos incluido información de los monográficos (citados en 2.1.1) en donde no identificamos artículos que refieran a la relación HM–CPM, a saber: *Mathematics teacher* 93(8)2000, Épsilon 28(1)2011 y ZDM 44(4)2012.

Los documentos relacionados bajo los numerales 3.1.1.19 y 3.1.1.20 corresponden a aquellos artículos, que naturalmente no pertenecen a las revistas hasta ese punto citadas, relacionados en los catálogos o inventarios bibliográficos presentados en 2.1.3. Los artículos pertinentes relacionados en el inventario del editorial de *For the learning of mathematics* 11(2)1991 ya se trataron antes. De los 116 artículos reportados en los resúmenes de la *British Society for the History of Mathematics*, no incluimos artículo alguno pues o bien ya se han reseñado o no abordan la relación HM–CPM.

Finalmente aclaramos que no incluimos artículo alguno de las revistas reportadas en 2.1.2 Revistas especializadas en la relación HM–EM, por cuanto en la revista *Convergence: Where Mathematics, History and Teaching Interact* no hemos ubicado algún artículo que se refiera a la relación HM–CPM, ello en tanto que, como lo mencionamos en 2.1.2.1, esta

[49] Si bien ninguno de los artículos de esta revista, reportados en 2.1.4.25, trata la relación HM–CPM, el artículo de Belisario & González (2012) bajo la sección titulada "Historia de la Matemática (HM) – Educación Matemática (EM)] ↔ HMEM" sí reseña algunas ideas sobre la relación HM–CPM planteadas por otros autores, pero no advertimos una explicitación de su postura al respecto.

se centra en la HM y su uso en la enseñanza; además, si bien en *The International Journal for the History of Mathematics Education* identificamos cuatro artículos que versan sobre la historia *de* la formación de profesores, ninguno de estos alude a la relación objeto de estudio de este capítulo, es decir HM–CPM.

3.1.1.1 *Educational Studies in Mathematics*

Nueve, de los veintiséis artículos que abordan aspectos de la relación HM–EM (reseñados en 2.1.4.1), tratan la relación HM–CPM.

1. **Saber y enseñar: Pedagogía matemática desde un contexto histórico**[50], (Swetz, 1995a). El autor señala que si bien los textos históricos dicen mucho acerca de cómo se concibieron y desarrollaron los conceptos y técnicas matemáticas, dicen también mucho más. Por lo general, su contenido encarna una pedagogía, formas y métodos concretos de organización utilizados para la enseñanza de las Matemáticas. En este artículo se aíslan y examinan varias técnicas pedagógicas específicas, a saber: el uso de un discurso instructivo, una secuencia lógica de problemas y ejercicios matemáticos y el empleo de ayudas visuales, evidentes en las obras históricas. Se concluye que gran parte de la actual pedagogía matemática se desarrolló a partir de antecedentes históricos distantes.

2. **El papel de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas**[51], (Fauvel & van Maanen, 1997c). En este anuncio se invita a la comunidad a participar del estudio ICMI sobre la Historia y educación matemática. De las doce preguntas, una se refiere a la relación HM–CPM en los siguientes términos: ¿Cuáles son las funciones particulares de un curso (o componente) de HM para los profesores? Como desarrollo de esta cuestión se señala que la HM puede desempeñar un papel especialmente importante en la formación de los futuros profesores y de los profesores en ejercicio. Existen varias razones para la inclusión de un componente histórico en este tipo de formación, a saber: promover entusiasmo por las Matemáticas; habilitar a los profesores para que vean los alumnos de manera diferente; ver las Matemáticas de manera diferente; y, desarrollar habilidades de lectura, uso de bibliografía y escritura expositiva, que pueden estar siendo descuidadas en los cursos de Matemáticas.

[50] *To know and to teach: Mathematical pedagogy from a historical context.*

[51] *The role of the History of Mathematics in the teaching and learning of mathematics: Discussion document for an ICMI Study (1997–2000).*

3. **'Un ángulo histórico', un estudio de literatura reciente sobre el uso y valor de la Historia en la educación geométrica**[52], (Gulikers & Blom, 2001). Los autores, en la segunda parte del documento organizan las diferentes y abundantes posturas respecto del porqué incluir la HM en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, en tres grupos de argumentos (conceptuales, multiculturales y motivacionales) y los dividen en aquellos relevantes para los profesores y para los estudiantes. Como parte de los argumentos conceptuales se reseña la discusión entre filogénesis y ontogénesis adaptada al caso pedagógico, así como la influencia de la HM en las actitudes y el repertorio didáctico de los profesores. Como argumentos multiculturales se mencionan el desarrollo de un enfoque multicultural en el aula y la oportunidad de interrelación de las Matemáticas con otras disciplinas e incluso de interrelación de dominios matemáticos. Promover unas matemáticas más dinámicas y vívidas en el aula, así como ser fuente de recursos materiales útiles para el aula, son los dos argumentos motivacionales expuestos. En la tercera parte del documento, los autores discuten la cuestión metodológica relacionada con el cómo se introduce la HM en las clases de Matemáticas, pero no hay referencia explícita a los procesos de educación del profesor de Matemáticas.

4. **Aprender a escuchar: desde las fuentes históricas hasta la práctica en el salón de clase**[53], (Arcavi & Isoda, 2007). Inicialmente los autores enfatizan en que *escuchar* a los estudiantes de maneras productivas parece estar en el corazón de las prácticas de enseñanza alineadas con los principios básicos de la mirada constructivista mundial; en este sentido precisan que *escuchar* a los estudiantes es "prestar cuidadosa atención para oír lo que los estudiantes dicen (y ver lo que ellos hacen), tratando de comprenderlo y de entender sus posibles fuentes y consecuencias" (p. 112), que la tarea de escuchar no es simple y constituye un aspecto fundamental del proceso de instrucción, y que genera dividendos de aprendizaje supremamente valiosos para el profesor. Posteriormente, discuten los desafíos implicados en la realización de la tarea de escuchar entre los que señalan la necesidad de: (i) llevar a cabo un proceso inverso al de compactar o empaquetar (e incluso olvidar) el proceso de aprendizaje, (ii) lograr una descentración (es decir, una capacidad para adoptar la perspectiva del otro), para desde allí lograr una comprensión de lo que dice y hace, (iii) precisar que es posible escuchar sin que ello conlleve una connotación evaluativa, en donde lo que es escuchado se contrasta con un

[52] *'A historical angle', A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education.*
[53] *Learning to listen: from historical sources to classroom practice*.

trasfondo de respuestas correctas deseables, (iv) adquirir conciencia de que existen prejuicios inevitables referidos a la imposibilidad de escuchar objetivamente, es decir sin incluir en ello factores personales, y (v) atender a que no siempre la comprensión de lo que se oye está en sincronía con el acto de oír. Entonces, reconocen la necesidad de preguntarse acerca de cómo lograr generar en los profesores la habilidad de escuchar. Más allá de contestar esta pregunta, los autores proponen una manera de apoyar la "descentración"; la propuesta está basada en la lectura y la comprensión de textos históricos como un modo de ejercitar la adopción de la 'perspectiva del otro', esto en tanto que se asume que: (i) para comprender las ideas detrás de una fuente histórica se requiere adoptar una especie de descentración similar a la que se exige para escuchar a los estudiantes, (ii) tal descentración puede ser aprendida, y (iii) es necesario y posible diseñar los ambientes de aprendizaje para soportar este aprendizaje. No se trata así de buscar en la fuente histórica unas matemáticas similares o paralelas a la que podría reconocerse en lo que se escuche de los estudiantes. Luego de hacer una detallada descripción de los talleres propuestos a los profesores (los cuales aluden a la lectura de textos del Papiro de Rhind, la lectura de un extracto de una Aritmética de un matemático francés, la interpretación de respuestas de algunos estudiantes, y la reflexión sobre lo aprendido en el taller), los autores cierran el artículo con la descripción de algunos aprendizajes logrados a través de la experiencia. A este respecto aluden a resultados positivos sobre: la factibilidad del enfoque utilizado, el uso del conocimiento del contenido histórico no solo como herramienta para la enseñanza de un tema matemático sino para la comprensión del pensamiento de otros, la evolución en la capacidad de preguntar, el reconocimiento de lo aparentemente inevitable de los prejuicios, la existencia promisoria de un vínculo entre la interpretación de textos y la interpretación de la producción de los estudiantes, la pertinencia de la estrategia aún con profesores en ejercicio, el reconocimiento de que en la interpretación no siempre es posible abstraerse de las herramientas propias y asumir el lugar del otro.

5. **La educación de los profesores a través de la Historia de las Matemáticas**[54], (Furinghetti, 2007). En este artículo la autora italiana considera el problema de diseñar estrategias para los programas de formación de profesores que puedan promover un estilo consciente de enseñanza. Entre los varios elementos a ser considerados enfoca la necesidad de orientar la creencia de los futuros profesores

[54] *Teacher education through the history of mathematics.*

de que ellos deben reproducir el estilo de enseñanza de las Matemáticas que vivieron sus días de escuela. Hacia este objetivo, argumenta que los futuros profesores necesitan un contexto que les permita mirar los temas que ellos enseñarán de una manera diferente; este contexto puede ser proporcionado por la HM, ya que a través de esta se puede vivenciar la construcción de objetos matemáticos. Por otra parte, señala que las conclusiones (favorables o neutras) de los estudios sobre el papel de la HM en la educación de los profesores, no se deben a la presencia de esta, sino a la manera de tratarla. Al respecto de la intervención de la Historia en los procesos educativos manifiesta que: (i) existen diversos argumentos para dicha integración (*v.g.*, lograr comprender los hechos matemáticos, promover comprensión cultural, percibir las Matemáticas como una actividad intelectual y no solo como un cuerpo de conocimientos, y propender por la humanización de las Matemáticas), (ii) la integración de la HM conlleva reorientar la perspectiva de lo que se mira y lo que se observa de las Matemáticas, y (iii) hay una relación estrecha entre las raíces de los conceptos identificadas por la Historia y las raíces cognitivas de los conceptos. Con este trasfondo, Furinghetti pasa a presentar la experiencia de formación desarrollada, no sin advertir que en el programa en cuestión la HM se introdujo como un mediador del conocimiento para enseñar: se pretendía generar una reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos. La experiencia se desarrolló con graduados en Matemáticas quienes tienen ya creencias acerca de las Matemáticas y su enseñanza, y tienen dificultades para considerar maneras de enseñanza alternas a las experimentadas y para reconocer utilidad y aplicabilidad de las teorías educativas; se trataba de que los estudiantes realizaran una secuencia de enseñanza del Álgebra para estudiantes de grados noveno y décimo. Para ello se realizó: (i) el análisis de los programas nacionales de Matemáticas, (ii) la exploración de la HM para analizar los conceptos y procesos que se pueden encontrar en la enseñanza del Álgebra, (iii) el diseño de la secuencia de enseñanza, y (iv) la discusión entre grupos y confrontación de las secuencias producidas. La autora reporta que la Historia afectó las producciones de los estudiantes de dos modos: *evolutivo* (se refiere a comprender el proceso de evolución de las ecuaciones de segundo grado, de su representación gráfica y de las propiedades algebraicas) y *situado* (alude a comprender el razonamiento de los matemáticos en el paso de la Aritmética al Álgebra).

6. **Los papeles de las Matemáticas de Mesopotamia de la Edad de Bronce como herramienta en la formación y administración del Estado – portadora de**

autonomía intelectual profesional de los profesores[55], (Høyrup, 2007). El artículo describe los papeles sociales y culturales de las Matemáticas de Mesopotamia y la interacción de estos papeles con modelos de pensamiento matemático; esta descripción cobija el período que va desde la primera formación de un estado genuino, un poco después de mediados del cuarto milenio a.C., hasta el final de la época de la antigua Babilonia, 1600 a.C. La imagen presentada es una densa reconstrucción histórica de la actividad matemática ligada al conteo y a la metrología; tal descripción de muchos aspectos interconectados de las Matemáticas de Mesopotamia claramente no tiene alguna implicación sobre cómo se debería enseñar las Matemáticas. Sin embargo, las referencias a la enseñanza de las Matemáticas en aquella época, y al papel y carácter del profesor de Matemáticas o del matemático, se proponen como inspiración sobre cómo los educadores de las Matemáticas, y los didactas, pueden llegar a pensar las Matemáticas y, en consecuencia su enseñanza.

7. **Usar la Historia de las Matemáticas para inducir cambios en las creencias y actitudes de los futuros profesores: claves para evaluar un programa de educación de profesores**[56], (Charalambous, Panaoura, & Philippou, 2009). Se reporta un estudio a través del cual se evalúa un programa de formación inicial de profesores de Matemáticas basado en la HM, el cual pretende mejorar las creencias epistemológicas, las creencias sobre la eficacia y las actitudes hacia las Matemáticas de los futuros profesores. El estudio se concentró en dos cursos de contenido matemático que, desde el punto de vista temático, abordaron en diez unidades: las matemáticas pre-helénicas, la demostración, los tres problemas griegos clásicos, la fundamentación de la geometría euclidiana, los trabajos de renombrados matemáticos, el concepto de límite y los orígenes del Cálculo, la liberación de la Geometría, la liberación del Álgebra, los conjuntos y las relaciones binarias, y el álgebra de Boole y las compuertas lógicas. Se discute la eficacia del programa considerado y se esbozan algunas implicaciones para el diseño de programas de formación del profesorado basados en la HM. En la segunda parte del documento se reseña que la introducción de componentes históricos en estos programas tiene por objeto ayudar a que los futuros profesores: se den cuenta de los procesos y luchas a través de los cuales se desarrollaron las Matemáticas, mejoren su comprensión de

[55] *The roles of Mesopotamian bronze age mathematics tool for state formation and administration – carrier of teachers' professional intellectual autonomy.*

[56] *Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program.*

los contenidos que se espera que enseñen, se doten de métodos y técnicas para la incorporación de materiales históricos en su propia enseñanza y adquieran perspectivas sobre la evolución de los planes de estudios de Matemáticas.

8. **Una categorización de los 'porqués' y los 'cómo' de usar la Historia en la educación matemática**[57], (Jankvist, 2009a). Este es un artículo teórico que propone una manera de organizar y estructurar la discusión sobre los porqués y los cómo usar la HM en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas[58], así como las interrelaciones entre los argumentos para usar la Historia y los enfoques para hacerlo. Para ello se proponen dos conjuntos de categorías en las cuales ubicar los argumentos para usar la Historia (los "porqués") y los diferentes enfoques para hacerlo (los "cómo"). Los argumentos para usar la Historia se dividen en dos categorías; Historia como una herramienta e Historia como una meta. Las maneras de usar la Historia se ubican en tres categorías de enfoques: la iluminación, los módulos y la historia-base. Esta categorización, junto con una discusión sobre la motivación de usar la Historia, ya sea estando en relación con los asuntos propios (asuntos internos) o con los asuntos de la meta-perspectiva (meta-asuntos), proporciona un medio de ordenar la discusión de los "porqués" y los "cómo".

9. **Historia de las Matemáticas: Iluminando la comprensión de los conceptos matemáticos escolares a los futuros profesores de Matemáticas**[59], (Clark, 2012). Pocos estudios se han desarrollado en torno a cómo el estudio de la HM contribuye al conocimiento matemático para la enseñanza de una persona. En este artículo, se presentan los resultados de investigaciones, llevadas a cabo en cuatro semestres, en las que se ha intentado caracterizar lo que los futuros profesores de Matemáticas logran comprender acerca de los temas que van a enseñar y cómo esa enseñanza podría incluir un componente histórico. En particular, se centra la atención en cómo el estudio y aplicación de la historia de la resolución de ecuaciones cuadráticas ilumina aquello que los futuros profesores de Matemáticas saben (o no saben) sobre este tema algebraico esencial en la escuela secundaria. Además, se discuten cómo los resultados señalan consideraciones importantes para los programas de formación de profesores de Matemáticas con respecto a la conexión del

[57] *A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education.*

[58] Si bien el título y el resumen del artículo precisan la relación con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, consideramos necesario incluirlo acá, en tanto contiene respuestas implícitas relativas a la relación HM–CPM.

[59] *History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers.*

conocimiento matemático y pedagógico de los futuros profesores, y su capacidad de vincular las perspectivas históricas para mejorar su propia comprensión de la solución de ecuaciones cuadráticas y la de sus futuros alumnos.

La Tabla 33 recapitula algunas ideas esbozadas en los nueve artículos reseñados antes.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Swetz, 1995a)	Para qué	Reconocer el vínculo entre la pedagogía de las Matemáticas y las obras matemáticas históricas y advertir que estas últimas son fuente de la primera.
(Fauvel & van Maanen, 1997c)	Para qué	Promover entusiasmo por las Matemáticas. Ver a los alumnos de manera diferente. Ver las Matemáticas de manera diferente Desarrollar habilidades de lectura, uso de bibliografía y escritura expositiva.
(Gulikers & Blom, 2001)	Por qué	Ofrece un marco de referencia para la discusión entre filogénesis y ontogénesis adaptada al caso pedagógico. Ofrece la oportunidad de desarrollar un enfoque multicultural en el aula y de interrelación de las Matemáticas con otras disciplinas e incluso de interrelación de dominios matemáticos.
(Gulikers & Blom, 2001)	Para qué	Influir en las actitudes y el repertorio didáctico de los profesores. Promover unas matemáticas más dinámicas y vívidas en el aula, así como ser fuente de recursos materiales útiles para el aula.
(Arcavi & Isoda, 2007)	Para qué	Aprender a escuchar al otro como una estrategia para comprender su pensamiento matemático. Articular la interpretación de textos históricos a la interpretación de la producción de los estudiantes. Reconocer que en la interpretación no siempre es posible abstraerse de las herramientas propias y asumir el lugar del otro.
(Arcavi & Isoda, 2007)	Cómo	La lectura de textos históricos originales, la interpretación de respuestas de los estudiantes y la reflexión sobre lo aprendido.
(Furinghetti, 2007)	Para qué	Vivenciar la construcción histórica de objetos matemáticos como manera alterna a la usual contrucción en la enseñanza. Promover un estilo consciente de enseñanza de las Matemáticas. Generar reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos.
(Furinghetti, 2007)	Cómo	A través de la exploración de la HM para analizar los conceptos y procesos que se pueden encontrar en la enseñanza del Álgebra y, luego, el diseño de la secuencia de enseñanza y la discusión de la misma.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Høyrup, 2007)	Para qué	Disponer de una fuente de referencia para llegar a pensar las Matemáticas, el papel del profesor y, en consecuencia su enseñanza.
(Charalambous, et al., 2009)	Para qué	Evidenciar los procesos y luchas a través de los cuales se desarrollaron las Matemáticas. Mejorar la comprensión de los contenidos de enseñanza. Dotar de métodos y técnicas para la incorporación de materiales históricos en la enseñanza. Adquirir perspectivas sobre la evolución de los planes de estudios de Matemáticas.
(Jankvist, 2009a)	Por qué	La Historia, como herramienta, es un factor de motivación pues ayuda a mantener el interés en las Matemáticas, le da un carácter más humano a las Matemáticas, o permite reconocer que los matemáticos también tuvieron dificultades en lo que le genera dificultad a los estudiantes. La Historia, como herramienta, puede jugar un papel de herramienta cognitiva al promover puntos de vista o modos de presentación diferentes, o al permitir identificar y encarar los obstáculos epistemológicos. La Historia, como herramienta, permite reconocer la relación entre ontogénesis y filogénesis. La Historia, como meta, permite reconocer que las Matemáticas existen en el tiempo y el espacio, evolucionan a través de la acción de los seres humanos e influidas por las diferentes culturas, y obedecen a fuerzas internas y externas.
(Clark, 2012)	Para qué	Aportar al conocimiento matemático para la enseñanza en aquello que va más allá del conocimiento de conceptos y procedimientos y en cómo tal conocimiento se emplea en la práctica docente. Ampliar el conocimiento del profesor sobre aquello que enseña, a aspectos matemáticos, históricos y culturales. Hacer conciencia en los profesores de los procesos de construcción de ideas matemáticas en el tiempo como una manera de concentrar y fortalecer el conocimiento del vínculo entre las matemáticas universitarias y escolares, esencial para la enseñanza. Poner de relieve el conocimiento previo de los futuros profesores (y, a menudo vacíos o comprensiones incompletas) e impulsar consideraciones sobre las dificultades de sus futuros alumnos).

Documento	Pregunta	Respuesta
(Clark, 2012)	Cómo	Trabajo con las ideas matemáticas que evolucionaron a través del tiempo. Estudio y discusión de las influencias históricas y culturales, y los porqués de las Matemáticas que se fueron desarrollando. Desarrollo de los conocimientos pedagógicos necesarios para integrar una perspectiva histórica en la enseñanza de las Matemáticas escolares. Asignación de lecturas previas (extractos históricos y biográficos) en torno a las ideas matemáticas escolares, para situar adecuadamente el tema y las fuentes primarias para desarrollar un concepto matemático clave. Durante las sesiones de clase, examinar en detalle del concepto matemático en la fuente primaria. Tareas para vincular lo estudiado con las matemáticas y considerar sus implicaciones pedagógicas.

Tabla 33 Ideas de HM–CPM tratadas en *ESM*.

3.1.1.2 *For the learning of mathematics*

En los apartados 2.1.1.1, 2.1.1.3, 2.1.3.1 y 2.1.4.3 se reseñaron artículos de esta revista; de estos los siguientes dieciséis abordan la relación HM–CPM.

10. **¿Un profesor de Matemáticas debería conocer algo acerca de la Historia de las Matemáticas?**[60], (Freudenthal, 1981). Luego de cuestionar la afirmación relativa a que el conocimiento de la historia de una temática ayuda a la comprensión de la misma, de debatir profundamente sobre la naturaleza de la Historia, y de cuestionar si las condiciones de los programas de formación de profesores de los diferentes niveles educativos ofrecen la posibilidad de existencia de un discurso sobre la Historia, Freudenthal concluye que el conocimiento del profesor sobre la Historia debería ser conocimiento integrado, familiar al profesor y una cornucopia disponible para la instrucción: no un conocimiento oculto en cajones para ser abiertos en momentos preestablecidos. Señala que para los estudiantes y los profesores, la HM debería preocuparse por los procesos más que por los productos de la creatividad matemática. También refiere que el estudio de la Historia no necesariamente debe incorporar cursos sobre la misma y sugiere el estudio de las fuentes.

11. **¿Debería un profesor de Matemáticas conocer algo de la Historia de las Matemáticas?**[61], (Morley, 1982). La respuesta del artículo, a la misma pregunta

[60] *Should a Mathematics Teacher Know Something about the History of Mathematics?*
[61] *Should a Mathematics Teacher Know Something about the History of Mathematics?*

planteada previamente por Freudenthal (1981), es un sí rotundo. En favor de ello se exponen dos intenciones que se persiguen con la formación en HM: (i) lograr que los futuros profesores reflexionen sobre la naturaleza de las temáticas que trabajarán en sus clases, y (ii) comprender algunas cuestiones sobre el currículo en Matemáticas, por ejemplo la relación entre los enfoques temáticos y la ubicación y desarrollo de estos en la HM.

12. **Tal vez un profesor de Matemáticas pueda beneficiarse del estudio de la Historia de las Matemáticas**[62], (Arcavi, Bruckheimer, & Ben-Zvi, 1982). Se discuten algunas de las afirmaciones enunciadas por Freudenthal (1981), particularmente aquella que pone en duda que el conocimiento de la historia de una temática ayuda a la comprensión de tal temática. Para ello se propone que la influencia de la HM depende de variables que la trascienden (tales como el público objetivo, su trasfondo matemático, las fuentes, el enfoque, o los temas) y se presenta información y reflexiones sobre un breve curso con profesores, centrado en el estudio de aspectos históricos sobre los números negativos y desarrollado fundamentalmente a través de talleres. Asimismo se exponen algunos resultados de cuestionarios aplicados a los participantes del curso y se reportan réditos formativos a favor de la comprensión de los números negativos, de la visión sobre la actividad matemática y aspectos didácticos de tales números.

13. **Las Matemáticas y su contexto social: un diálogo en la sala de profesores con episodios históricos**[63], (Bos, 1984). El autor reporta en este artículo el texto de una conferencia realizada en un evento que abordó el “Uso de temas históricos en la enseñanza de las Matemáticas”. En este se discute sobre el uso de las Matemáticas en la sociedad y sobre los influjos sociales sobre las Matemáticas; para ello, el autor presenta opiniones y argumentos sobre tales asuntos, respaldados en episodios reportados por la HM. Se asume así, que la HM puede informar, a los alumnos y profesores, sobre el contexto social de las Matemáticas y ayudar así a tomar posición en los debates sobre tales relaciones.

14. **Historia de las Matemáticas para profesores: el caso de los números irracionales**[64], (Arcavi, Bruckheimer, & Ben-Zvi, 1987). Se reporta información relativa a un curso

[62] *Maybe a Mathematics Teacher Can Profit from the Study of the History of Mathematics.*
[63] *Mathematics and its social context: a dialogue in the staff room, with historical episodes.*
[64] *History of Mathematics for Teachers: The Case of Irrational Numbers.*

sobre la historia de los números irracionales[65] desarrollado con profesores en formación y profesores en ejercicio, bajo un enfoque semejante al reportado por los mismos autores para el caso de los números negativos (Arcavi, et al., 1982); se reseña que este enfoque tiene cuatro rasgos característicos, a saber:

> a) Relevancia. Los temas cuya historia se estudia son aquellos que están directamente conectados con el currículo que el profesor enseña o enseñará. Además el tratamiento de los temas se diseña teniendo en cuenta las necesidades específicas de los maestros. b) Fuentes primarias. Los materiales utilizados son, principalmente, fuentes primarias y documentos históricos. c) Aprendizaje activo. El material se prepara en forma de talleres. Los participantes leen las fuentes y trabajan por sí mismos (o en pequeños grupos) con un poco de orientación, a través de preguntas, ejercicios y problemas, especialmente preparados para cada fuente histórica. d) Historia conceptual. La historia se refiere a cómo se desarrolló un concepto, los diferentes enfoques de los matemáticos en el pasado, sus dificultades, su creatividad matemática, e incluso, su etapa de formalización. Incidentalmente se incluye una pequeña dosis de hechos, fechas, biografías y anécdotas. (Arcavi, et al., 1987, p. 18)

15. **El uso de la Historia en la Educación Matemática[66]**, (Fauvel, 1991b). Si bien la temática central del artículo no es la relación HM–CPM (como sí la discusión crítica sobre la no integración de la HM en la enseñanza de las Matemáticas) encontramos en este fragmentos que la aluden. Mencionemos, por ejemplo, un texto[67] del Ministerio de Educación del Reino Unido del año 1958, cuyo contenido y sentido el autor cita y extraña en el Currículo Nacional Inglés de finales del siglo XX. Otro es una indicación directa del autor a través de la cual sostiene que el uso de la HM por parte de los profesores puede ser difícil por adolecer de conocimiento sobre la misma y de formación sobre el uso de esta con los alumnos; en esta dirección se plantea la necesidad de trascender las afirmaciones acerca de las bondades del uso de la HM en las clases y evidenciar y estudiar cómo se podría incorporar en algunas

[65] Desde nuestra óptica, el curso alude también al problema de la inconmensurabilidad de parejas de cantidades de magnitudes homogéneas y, en cierto sentido, “mezcla” el concepto de irracionalidad de un número con el de inconmensurabilidad de dos cantidades magnitudes.

[66] *Using History in Mathematics Education.*

[67] “El profesor que sabe poco de Historia de las Matemáticas es apto para enseñar técnicas de forma aislada, sin relación, ya sea a los problemas e ideas que las generaron o a los nuevos acontecimientos que surgieron de ellas. [...] El conocimiento de los argumentos y las disensiones entre los grandes matemáticos podría inducir un sano escepticismo y discusión en el aula y conducir a una comprensión más profunda de los principios. [...] Uno de los activos más valiosos que el profesor puede adquirir a partir del conocimiento de la historia de su tema es una apreciación de la influencia de las tradiciones actuales, [...] Es importante transmitir a los alumnos los conocimientos que gran parte de lo que se enseña hoy en día como un producto terminado fue el resultado de siglos de andar a tientas o de controversia espíritu. [...] Las Matemáticas pueden ser enseñadas correctamente solo en un contexto de su propia historia.” (Fauvel, 1991b, p. 3).

actividades de la clase, cómo podría hacer más fácil la enseñanza de algunos temas específicos, o cómo el trabajo extra que puede ser necesario en un principio tiene a largo plazo efectos en la consecución de los objetivos del currículo matemático.

16. **La experiencia de la Historia en la educación en Matemáticas**[68], (Russ, et al., 1991). En este documento se presentan las respuestas de seis profesores a la pregunta sobre qué importancia ha tenido la Historia de Matemáticas en sus actividades de enseñanza de las Matemáticas. Una de las respuestas alude a **Dos beneficios de usar la Historia**[69], (Arcavi, 1991); específicamente este autor reporta la posibilidad que la Historia brinda al profesor de "desempacar", "deshacer" o "destapar" el conocimiento y las ideas matemáticas o de revelar asuntos ocultos de ideas matemáticas conocidas, así como de sensibilizarlo y disponerlo en torno a las posibles dificultades de comprensión de sus estudiantes, escuchándolos desde el contexto desde donde ellos realizan la actividad matemática. Otra respuesta alude a **La lectura de textos originales: cómo y por qué introducir una perspectiva histórica**[70], (Barbin, 1991). Acá la autora francesa expone, como idea central, que la HM permite a los profesores encarar la naturaleza de la actividad matemática en sus distintas facetas (analizar el papel de los problemas, de las demostraciones, de las conjeturas, de la evidencia, del error en la construcción de conocimiento matemático), así como acceder a conceptos epistemológicos y filosóficos que permean los textos matemáticos; de esta manera el profesor puede cambiar su imagen de las Matemáticas y llegar a verlas no como un lenguaje ni como un espectáculo, sino como una actividad humana. Una respuesta adicional permite reconocer **Los peligros y dificultades del uso de la Historia**[71], (Fowler, 1991). El autor enfatiza la idea de que los profesores deben ser conscientes de que la complejidad intrínseca de la HM está presente en el estudio o uso de esta y que es probable que para evitarla y realizar una enseñanza más simple y hasta adecuada, haya necesidad de construir en/para las aulas una pseudo-historia o historia simplificada.

17. **Relatos históricos en la clase de Matemáticas**[72], (Führer, 1991). Si bien el autor presenta la incorporación de tres relatos retomados de la HM en la clase de

[68] *The Experience of History in Mathematics Education.*
[69] *Two Benefits of Using History.*
[70] *The Reading of Original Texts: How and Why to Introduce a Historical Perspective.*
[71] *Perils and Pitfalls of History.*
[72] *Historical Stories in the Mathematics Classroom.*

Matemáticas (la historia de cómo Eratóstenes midió la circunferencia de la tierra para discutir el concepto de unidad de medida; las ideas de Arquímedes, Vieta y Descartes para introducir aproximaciones del número π; y el descubrimiento de la fórmula de Cardano como un ejemplo de investigación matemática) y defiende los relatos históricos como una manera de introducir una perspectiva histórica en las clases, su documento contiene suficientes reflexiones que pretenden defender la idea de que si bien:

> […] un conocimiento de la Historia de las Matemáticas puede ayudar al profesor a diseñar actividades matemáticas adecuadas en el aula, este proporciona más significativamente un cambio de tono para el marco en el que todo el proceso de la educación en Matemáticas se lleva a cabo. (Führer, 1991, p. 31).

18. **Historia de las Matemáticas: Recursos para profesores**[73], (Rogers, 1991). Como lo señala el autor, el propósito del artículo es sugerir algunos de los materiales de HM más fácilmente accesibles y útiles a los profesores (de habla inglesa); pero se identifican también algunas orientaciones para el estudio de la Historia, enunciadas al estilo de riesgos historiográficos (*v.g.*, la reivindicación de la prioridad es usualmente insignificante, no se pueden juzgar los eventos del pasado con estándares modernos, las especulaciones no son hechos). Con respecto a los materiales se reseñan fuentes para visiones generales (enciclopedias y diccionarios, tablas y carteles cronológicos), fuentes de trabajos más detallados (*v.g.*, bibliografías, colecciones de trabajos originales, historias generales de las Matemáticas), trabajos sobre las Matemáticas en contextos más amplios (*v.g.*, evolución de ideas matemáticas e historia cultural, cursos libres de HM) y recursos para uso en el aula (*v.g.*, historia sobre temas especializados, temas y tratamientos históricos de las matemáticas escolares).

19. **Un amable y gentil Sócrates: transmitir nuevas imágenes del diálogo en Matemáticas**[74], (Fernandez, 1994). El artículo presenta un análisis detallado del diálogo platónico (tomado del *Menón*) entre Sócrates y el esclavo sobre la duplicación del cuadrado, con el fin de desvelar algunas de las imágenes negativas promovidas por Sócrates (*v.g.*, mostrar cómo el razonamiento de Sócrates pudo haber inducido confusión innecesaria en el esclavo, evidenciar las Matemáticas como un asunto de cálculos correctos o incorrectos, diálogo dominado por el profesor) y de reforzar la idea que este diálogo debe ser contextualizado en el

[73] *History of Mathematics: Resources for Teachers.*
[74] *A Kinder, Gentler Socrates: Conveying New Images of Mathematics Dialogue.*

diálogo más amplio del que se extrae. Adicionalmente incluye algunas sugerencias para estudiar este diálogo en los programas de formación de profesores que permita trasmitir una imagen de la enseñanza de las Matemáticas que se base en promover un deseo de aprender más agradable y menos confuso.

20. **Antes que las otras incógnitas fueran inventadas: Indagación didáctica sobre los métodos y problemas del Álgebra italiana medieval**[75], (Radford, 1995). El artículo, el cual se enmarca en un programa de investigación que pretende contribuir a la comprensión del desarrollo del pensamiento algebraico, centra su atención en la especificidad del pensamiento algebraico en una incógnita, para lo cual se realiza un análisis didáctico-histórico-epistemológico de una fase del Álgebra en la que se trabaja con una incógnita y, por tanto se estudia el Álgebra italiana medieval (específicamente: su ambiente social e intelectual, los problemas y métodos de la época –incluidos los que operan sobre lo desconocido, los problemas cuasi-ecuación y los problemas de dar-y-recibir– y los alcances de los métodos algebraicos), para comprender los elementos cognitivos subyacentes en la actividad algebraica. Al final del mismo, se refieren algunas implicaciones para la enseñanza, precisando que los resultados del estudio ofrecen nuevas perspectivas sobre la enseñanza al comprender de mejor manera la naturaleza del conocimiento matemático; específicamente se refiere el nexo histórico entre el Álgebra y los números negativos y las posibilidades de integrar el concepto de número negativo en una secuencia de enseñanza algebraica, o a la comprensión del lenguaje algebraico como un desarrollo a partir de un enfoque de herramienta de solución de problemas a un objeto matemático, como una alternativa posible para el aula.

21. **La enseñanza de los números negativos, 1870-1970: un popurrí de modelos**[76]**,** (Hitchcock, 1997). En este artículo el autor configura una secuencia de escenas históricas relacionadas con los números negativos, protagonizadas en el lapso considerado por seis famosos profesores de Matemáticas (C. Smith, A. N. Whitehead, E. Landau, T. Apostol, profesor genérico norteamericano y profesor genérico inglés); la secuencia contiene un prólogo y un epílogo, retomados de los matemáticos Augusto de Morgan y Félix Klein, reconocidos además por su preocupación y compromiso por la educación en Matemáticas en todos los niveles educativos. El documento finaliza con una docena de ejercicios y preguntas que

[75] *Before the other unknowns were invented: Didactic inquiries on the methods and problems of mediaeval Italian Algebra.*

[76] *Teaching the Negatives, 1870-1970: A Medley of Models.*

constituyen tareas, de diferente profundidad y dificultad, dirigidas a los profesores de Matemáticas (en formación y ejercicio), para procurar la reflexión sobre/a partir de las escenas; estas pretenden trascender el objeto matemático en cuestión (los números negativos) e incluso la enseñanza de los sistemas numéricos y el Álgebra.

22. **Sobre la Psicología, la Epistemología histórica y la enseñanza de las Matemáticas: hacia una historia socio-cultural de las Matemáticas**[77], (Radford, 1997). Se plantea que la HM se puede usar de manera no ingenua (como se hace cuando se usa anecdóticamente), como fuente de problemas o como un laboratorio epistemológico para explorar el desarrollo del conocimiento matemático. Esto requiere de análisis crítico sobre cómo los desarrollos conceptuales e históricos están vinculados (en particular, de la noción de obstáculo epistemológico) a través de explorar cómo el conocimiento está arraigado en su contexto sociocultural.

23. **Epistemología, Historia y enseñanza de las Matemáticas**[78], (Bkouche, 1997). Si bien el título del artículo no refiere precisamente al conocimiento del profesor de Matemáticas, en el contenido del artículo sí hemos reconocido algunos aspectos que aluden de manera importante a este en relación con la intervención de la HM. Bkouche discute la corriente que denomina "un enfoque histórico en la enseñanza de las Matemáticas" pues considera que si bien este movimiento permitió a los profesores aproximarse a la manera en que las Matemáticas se construyeron y desarrollaron, también los llevó a buscar tanto en la Historia como en la Epistemología de las Matemáticas las condiciones para una enseñanza efectiva. Con respecto a la intervención de la Historia y la Epistemología de las Matemáticas en la enseñanza, aboga entonces por ubicar adecuadamente la reflexión de orden epistemológico en el marco del oficio de profesor, es decir, intentar cercar los lugares donde el profesor encuentra, en el marco de la práctica del oficio, problemas de orden epistemológico. A este respecto, anticipa dos de tales lugares: El ideal de sencillez o simplicidad (entendido como un objetivo y una construcción que posiciona la ciencia como lugar de inteligibilidad) y la cuestión de la demostración. Ubicar la problemática de esta manera indudablemente lo conduce a la pregunta sobre el lugar de la Epistemología y de la HM en la formación de los maestros y, a partir de esta, a la distinción entre la *reflexión epistemológica* (en tanto *constituyente* de un pensamiento) y la *Epistemología* (como *discurso constituido*). En

[77] *On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics.*

[78] *Epistémologie, Histoire et Enseignement des Mathématiques*.

este orden de ideas señala que la reflexión epistemológica se vuelve consistente solo si se apoya en el discurso constituido por la Epistemología, de lo cual se sigue el lugar de la Epistemología y la Historia de las ciencias en la formación de maestros. Bkouche pasa entonces a distinguir tres aspectos de la Epistemología: la *epistemología de los fundamentos*, la *epistemología del funcionamiento* y la *epistemología de las problemáticas*, así como tres concepciones de la Historia de las ciencias: l*a historia del origen de las nociones*, la *historia de sus descubrimientos* y la *historia de la analogía entre la filogénesis y la psicogénesis*. Luego de plantear críticas sobre algunas de estas opciones, argumenta a favor de una epistemología de las problemáticas y una historia de sus descubrimientos, en favor del conocimiento del profesor.

24. **Las Matemáticas actuales pueden beneficiarse de métodos antiguos[79]**, (van Maanen, 1997). En este artículo van Maanen muestra varios ejemplos a través de los cuáles ilustra situaciones de aula en las que los estudiantes son enfrentados al estudio de métodos o estrategias históricos de solución de problemas matemáticos y a la connatural contrastación con métodos usados comúnmente en la escuela; en cada caso reseña el valor agregado de la incorporación del componente histórico. Uno de tales ejemplos se da en el marco de un curso de Historia de Matemáticas para profesores en ejercicio. En este se reporta que los profesores debían leer un texto original matemático, presentarlo a sus colegas y escribir al respecto; el texto reportado refiere a un trabajo sobre geometría práctica escrito por Frans van Schooten en 1623, en el que se describe la solución al problema de establecer las medidas de los lados y ángulos de un triángulo de área 1000 y semejante a uno de medidas 13, 14 y 15. Se compara entonces la solución actual, la cual implica el uso de la ley del coseno, con dos métodos estándares del pasado: el uso de la fórmula de Herón y el método expuesto por van Schooten. Los profesores manifiestan que fue difícil leer el manuscrito, comprender lo que expone van Schooten y establecer por qué funciona; igualmente, manifiestan haber ganado conciencia factual (y no solamente retórica) de que los métodos y estándares son cambiantes y de que efectivamente existen diferentes maneras de abordar un problema matemático, procurando con ello una experiencia que favorece la competencia de disponer de una mente abierta hacia las Matemáticas.

[79] *New Maths may Profit from Old Methods.*

25. **Integrar el cercano desarrollo histórico de las Matemáticas y la Física en la educación en Matemáticas: Algunas observaciones metodológicas y epistemológicas**[80], (Tzanakis & Thomaidis, 2000). El artículo se escribe con la intención de contribuir a clarificar las maneras en que el estudio del desarrollo histórico de las Matemáticas puede abrir nuevas posibilidades de comprensión de la manera como se crean las Matemáticas y a contribuir a sugerir maneras alternas de presentar las Matemáticas y variar las condiciones para que puedan ser comprendidas; en este sentido, aunque los autores no lo declaran explícitamente, entendemos que su contenido refiere al conocimiento del profesor de Matemáticas. Inicialmente, y luego de describir tres formas usuales de razonamiento que orienta el hacer Matemáticas (*v.g.*, el razonamiento deductivo, el razonamiento inductivo y el razonamiento por analogía), los autores concluyen la necesidad de hacer explícito en la enseñanza las "motivaciones, preguntas, problemas y procesos de descubrimiento que llevaron a nuevas consecuencias, así como la atmósfera cultural más general que puede haber influido su aparición" (Tzanakis & Thomaidis, 2000, p. 46). Por otra parte, cuando discuten las maneras en que la HM se puede integrar a la enseñanza de las Matemáticas, resaltan que el estudio de fuentes originales dan oportunidad al profesor de: apreciar los marcos conceptuales y las preguntas/problemas asociados que llevaron a un desarrollo de un aspecto o dominio matemático, reconocer que la evolución se da no solo en el contenido sino también en la forma (*i.e.*, notaciones, terminología, métodos, formas de expresión y representación), y lograr al menos comprensión parcial de las dificultades enfrentadas por los matemáticos en relación con asuntos específicos. Igualmente, resaltan que la Historia le permite al profesor: sugerir maneras posibles de enseñar un asunto, reconocer obstáculos que se presentaron históricamente y que pueden reaparecer en el proceso de enseñanza, reconstruir ejemplos que permitan entender la motivación de un desarrollo matemático, revelar interrelaciones entre dominios matemáticos y extra-matemáticos, integrar la solución de problemas y ejercicios a la comprensión de un asunto matemático, comparar formas modernas de las Matemáticas con sus formas del pasado.

La Tabla 34 reseña de manera sintética algunas de las ideas de los dieciséis artículos referidos antes.

[80] *Integrating the Close Historial Development of Mathematics and Physics in Mathematics Education: Some Methodological and Epistemological Remarks.*

Documento	Pregunta	Respuesta
(Freudenthal, 1981)	Qué	Historia de los procesos más que de los productos de la creatividad humana. Fuentes originales. Conocimiento integrado y familiar al profesor.
(Freudenthal, 1981)	Para qué	No necesariamente para aportar a la comprensión de una temática. Disponer de una cornucopia disponible para la instrucción, pero no para momentos preestablecidos.
(Freudenthal, 1981)	Cómo	No necesariamente a través de cursos de HM.
(Morley, 1982)	Para qué	Lograr que los futuros profesores reflexionen sobre la naturaleza de las temáticas que trabajarán en sus clases. Comprender algunas cuestiones sobre el currículo en Matemáticas.
(Arcavi, et al., 1982)	Para qué	Para favorecer la comprensión de temáticas matemáticas y de la actividad matemática en torno a estas.
(Arcavi, et al., 1982)	Qué	Depende de variables que trascienden la Historia misma (tales como el público objetivo, su trasfondo matemático, las fuentes, el enfoque, o los temas).
(Bos, 1984)	Para qué	Informar sobre el contexto social de las Matemáticas y ayudar así a tomar posición en los debates sobre las relaciones entre Matemáticas y Sociedad.
(Arcavi, et al., 1987)	Qué	Historia de temas directamente conectados con el currículo. Fuentes primarias. Historia conceptual que exhibe desarrollo de los conceptos, los enfoques matemáticos, las dificultades y los procesos creativos y de formalización.
(Arcavi, et al., 1987)	Cómo	A través de talleres de lectura y trabajo sobre las fuentes, lo cual implica resolver preguntas, desarrollar ejercicios y resolver problemas.
(Fauvel, 1991b)	Para qué	Favorecer el conocimiento del profesor y sus acciones educativas en el aula
(Fauvel, 1991b)	Qué	Conocimiento sobre evidencias de uso de la HM en el aula y sus beneficios efectivos.
(Russ, et al., 1991) (Arcavi, 1991)	Para qué	Revelar asuntos ocultos de ideas matemáticas. Sensibilizar y disponer a las dificultades de comprensión de los estudiantes.
(Russ, et al., 1991) (Barbin, 1991)	Para qué	Encarar la naturaleza de la actividad matemática en sus distintas facetas. Acceder a conceptos epistemológicos y filosóficos que permean los textos matemáticos. Humanizar las Matemáticas.
(Russ, et al., 1991) (Fowler, 1991)	Qué	Historia que permita construir una pseudo-historia o historia simplificada en/para las aulas.
(Führer, 1991)	Qué	Relatos históricos.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Führer, 1991)	Para qué	Proporcionar insumos para el diseño de tareas matemáticas para el aula. Ofrecer un contexto y tono diferente para los procesos en los que la educación en Matemáticas se desarrolla.
(Rogers, 1991)	Qué	Fuentes para visiones generales, fuentes de trabajos más detallados, trabajos sobre las Matemáticas en contextos más amplios y recursos para uso en el aula.
(Fernandez, 1994)	Para qué	Ilustrar maneras adecuadas e inadecuadas de enseñar las Matemáticas.
(Radford, 1995)	Qué	Resultados de la investigación didáctico-historiográfica que se centra en la investigación sobre las raíces sociales de la actividad matemática y sobre la dimensión tríadica funcional de conceptos, problemas y procedimientos de solución de problemas.
(Radford, 1995)	Para qué	Entender las dificultades cognitivas experimentadas por los estudiantes e interpretar los errores y conceptualizaciones incorrectas que surgen cuando aprenden temas matemáticos específicos. Iluminar las decisiones relativas al conocimiento a ser enseñado y proporcionar nuevas maneras de organización y articulación temática.
(Hitchcock, 1997)	Para qué	Procurar ambientes de reflexión sobre los objetos matemáticos y sobre su enseñanza.
(Hitchcock, 1997)	Cómo	Dramatización y diálogos de la HM.
(Radford, 1997)	Por qué	Es una fuente de problemas. Constituye un laboratorio epistemológico para explorar el desarrollo del conocimiento matemático.
(Bkouche, 1997)	Qué	Una epistemología de las problemáticas y una historia de sus descubrimientos.
(Bkouche, 1997)	Para qué	Constituir un discurso epistemológico que apoye la reflexión epistemológica. Responder a problemas de orden epistemológico que surgen en el quehacer docente.
(van Maanen, 1997)	Qué	Fuentes originales contrastadas con visiones actuales.
(van Maanen, 1997)	Para qué	Ganar conciencia sobre el carácter dinámico de las Matemáticas y, en consecuencia, abrir la mente hacia ellas. Favorecer las competencias de lectura, escritura y exposición de ideas matemáticas.
(van Maanen, 1997)	Cómo	Estudiar la fuente original, escribir sobre la misma y presentarla a los demás.
(Tzanakis & Thomaidis, 2000)	Qué	Historia de las motivaciones, preguntas, problemas y procesos de descubrimiento. Atmósfera cultural puede haber influido la aparición de nuevo conocimiento.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Tzanakis & Thomaidis, 2000)	Para qué	Abrir nuevas posibilidades de comprensión de la manera como se crean las Matemáticas. Contribuir a sugerir maneras alternas de presentar las Matemáticas y variar las condiciones para que puedan ser comprendidas.

Tabla 34 Ideas de HM–CPM tratadas en *FLM*

3.1.1.3 *The Journal of Mathematical Behavior*

Solo uno de los tres artículos reseñados en 2.1.4.4 hace una alusión directa a la relación HM–CPM.

26. **El desarrollo del Álgebra: Confrontando las perspectivas históricas y psicológicas**[81], (Sfard, 1995). Luego de hacer una descripción panorámica del desarrollo histórico del Álgebra, dirigiendo especial atención a los puntos de inflexión del pensamiento algebraico, y de haberla contrastado con ejemplos de estudios empíricos sobre las maneras en que los estudiantes aprenden Álgebra o desarrollan su pensamiento algebraico, la autora concluye que para los profesores el conocimiento de la HM no es opcional sino indispensable, pues a través de este se puede lograr ser consciente de las dificultades profundamente ocultas (*v.g.*, los obstáculos ontológicos), relativas al aprendizaje de nuevos conceptos. Asimismo señala que la Historia reporta que la reificación requerida para la profunda comprensión de un concepto, no se puede esperar antes de que se logre cierta familiaridad con procesos secundarios, pero que sin tal reificación esos procesos no pueden ser verdaderamente significativos; a partir de esta condición dialéctica, concluye la necesidad de una actitud paciente y persistente (del alumno y el profesor) para superar los escollos ontológicos (*i.e.*, se aboga por el uso disciplinado de las técnicas, por parte del estudiante, incluso si se tienen dudas de su significado y por el dominio de la impaciencia, por parte del profesor, ante las deficiencias de comprensión del estudiante).

La Tabla 35 sintetiza algunas de las ideas presentadas en el artículo.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Sfard, 1995)	Qué	Historia del pensamiento matemático.
(Sfard, 1995)	Por qué	El conocimiento de la HM es imprescindible para el profesor.
(Sfard, 1995)	Para qué	Ser consciente de las dificultades profundamente ocultas (*v.g.*, los obstáculos ontológicos), relativas al aprendizaje de nuevos conceptos

Tabla 35 Ideas de HM–CPM tratadas en *JMB*

[81] *The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives.*

3.1.1.4 *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*

De los veinte artículos identificados en el apartado 2.1.4.7, dos contienen alusiones a la relación HM–CPM. Antes de reseñarlos, es conveniente precisar que si bien el monográfico de esta revista (Volumen 44 Número 4 de 2012) contiene varios artículos sobre historia de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, algunos de los cuales pueden considerarse de historia *de* la formación de profesores, no contiene artículo alguno que aborde la relación HM–CPM.

27. **El papel de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Documento de discusión para un Estudio ICMI (1997-2000)[82]**, (Fauvel & van Maanen, 1997a). En este documento los autores informan e invitan a participar del estudio presentando, además de aspectos operativos del estudio, doce preguntas de investigación. Una de tales preguntas refiere precisamente a la relación HM–CPM, a saber: ¿Cuáles son las funciones particulares de un curso o componente de HM para los docentes?; al respecto señalan:

> La Historia de las Matemáticas puede jugar un papel especialmente importante en la formación de los futuros docentes, y también en la formación de los maestros en ejercicio. Existe una serie de razones para incluir un componente histórico en este tipo de formación, que incluye: promover entusiasmo por las Matemáticas, ver a los alumnos de manera diferente, ver las Matemáticas de manera distinta, y desarrollar habilidades de lectura, uso de literatura especializada y escritura expositiva lo cual puede ser descuidado en los cursos de Matemáticas. Un asunto relacionado es qué tipo de Historia de las Matemáticas es apropiado en la formación del profesorado y por qué: por ejemplo, podría ser que la historia de los fundamentos de las Matemáticas y las ideas de rigor y prueba sean especialmente importantes para los futuros profesores de educación secundaria y superior. (Fauvel & van Maanen, 1997a, p. 138).

28. **Las paradojas matemáticas como vías de acceso a las creencias y polimatía: una investigación experimental[83]**, (Sriraman, 2009). En este trabajo se aborda el papel de las paradojas matemáticas (particularmente la paradoja de Russell, o más precisamente de su versión lingüística conocida como la paradoja del barbero[84]) en el fomento de la polimatía, el cambio de creencias, el descubrimiento de estructuras y la apertura de nuevas vías para la pedagogía interdisciplinaria, de los futuros

[82] *The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics.*

[83] *Mathematical paradoxes as pathways into beliefs and polymathy: an experimental inquiry.*

[84] El barbero del pueblo afeita a todos aquellos hombres, y solo a aquellos hombres, que no se afeitan a sí mismos. Asumiendo que el barbero es un hombre que se afeita, ¿quién afeita el barbero?

maestros de primaria. El artículo presenta beneficios y peligros del uso de las paradojas en la formación de profesores.

La Tabla 36 sintetiza algunas de las ideas presentadas en los artículos.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Fauvel & van Maanen, 1997a)	Qué	La historia de los fundamentos de las Matemáticas y las ideas de rigor y prueba.
(Fauvel & van Maanen, 1997a)	Para qué	Promover entusiasmo por las Matemáticas. Ver a los alumnos de manera diferente. Ver las Matemáticas de manera distinta. Desarrollar habilidades de lectura, uso de literatura especializada y escritura expositiva.
(Sriraman, 2009)	Qué	Paradojas.
(Sriraman, 2009)	Para qué	Promover la polimatía o el pensamiento interdisciplinar. Cambiar las creencias sobre las matemáticas.

Tabla 36 Ideas de HM–CPM tratadas en *ZDM*

3.1.1.5 *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*

De los treinta y un artículos que se refieren a la relación HM–EM, reportados en 2.1.4.8 los siguientes cinco refieren a la relación HM–CPM.

29. **Sobre la relevancia de la Historia de las Matemáticas para la educación matemática**[85], (Grattan-Guinness, 1978) En la primera parte del artículo el autor Inglés presenta aspectos de un curso de Historia de Matemáticas para profesores dirigido por él mismo en una universidad australiana; este abordó el desarrollo del Cálculo desde el inicio del siglo XVII, su establecimiento como una disciplina matemática central durante el siglo XVIII y su absorción dentro del Análisis Matemático en los primeros años del siglo XIX, hasta la introducción de la Lógica Matemática y la Teoría de Conjuntos al inicio del siglo XX. En la segunda parte presenta varias tesis a través de las cuales expone su postura sobre por qué (o para qué) los profesores deberían estudiar fragmentos de la HM y cómo podrían bajar tales contenidos a los estudiantes. La primera de las tesis parte de que la comprensión de las Matemáticas, trasciende el conocimiento de las Matemáticas (e incluye sus motivaciones, maneras de creación y formas lógicas y métodos de prueba subyacentes, entre otros elementos) y sostiene que la HM ofrece una visión sobre tales elementos. La segunda tesis apoya la idea que el orden histórico generalmente ofrece una tendencia contraria al orden de las presentaciones

[85] *On the relevance of the history of mathematics to mathematical education.*

formales y que el conocimiento de la primera ofrece estrategias alternas a la educación en Matemáticas. La tercera tesis, planteada de manera un tanto abstrusa, parece referir a la posibilidad de alimentar, desde la HM, la consciencia sobre la racionalidad de las propuestas educativas y su relación con la racionalidad de los desarrollos matemáticos. La última tesis refiere a la necesidad de identificar y desarrollar un enfoque intermedio entre una aproximación histórica y una aproximación formal de las Matemáticas que, por ejemplo, reivindique el papel de la intuición geométrica como parte de la creación matemática que debe ser superada en miras de una presentación más rigurosa de las Matemáticas.

30. **¿Por qué estudiar la Historia de las Matemáticas?**[86], (Byers, 1982). Este trabajo parte de la necesidad de repensar la función de la Historia en la educación en Matemáticas. En este sentido, examina y discute críticamente el “principio genético”, el uso motivacional[87] como formas en que la HM puede ser de utilidad para los maestros, encontrando que la mayoría de estas tienen limitado valor para el contexto escolar. Además, se reseñan cuatro dificultades que el profesor encuentra al procurar emplear la HM (dispersión del conocimiento histórico, ardua reconstrucción de procesos de pensamiento, escases de modelos de enseñanza y formación matemática ahistórica). Se declara entonces que, para la educación, la razón principal que justifica el estudio de la HM es arrojar algo de luz sobre la naturaleza de la disciplina, por ejemplo sobre su unidad o las revoluciones que la modifican. Se afirma, además, que esta juega un papel clave para establecer la distinción y la interacción entre contenido y forma de las Matemáticas.

31. **Un curso de Historia de las Matemáticas para profesores**[88], (Hickman & Kapadia, 1983). El artículo describe un curso de HM diseñado y dirigido a profesores de Matemáticas, inscrito como curso opcional en un programa inglés de Maestría en Educación Matemática. La racionalidad del curso alude, inicialmente, a las posibilidades y beneficios que la HM ofrece en relación con la determinación del currículo matemático (al brindar un contexto desde el cual valorar la importancia y pertinencia de las ideas matemáticas) y con la posibilidad de idear cuidadosamente la presentación de tales ideas desde el conocimiento de su historia. Para establecer las temáticas del curso se identificaron y caracterizaron dos enfoques, a saber: (i) el

[86] *Why study the history of mathematics?*

[87] Se precisa que este término puede referir a la acción de generar interés por el estudio de las Matemáticas o a la identificación de los motivos o racionalidad de un problema, una propiedad o una demostración matemática.

[88] *A History of Mathematics course for teachers.*

curso organizado cronológicamente, es decir la versión convencional de un curso de HM; (ii) el estudio de algunas ideas matemáticas principales a través de un enfoque evolutivo, seguido del estudio en profundidad de una de estas o de uno de los matemáticos que intervienen en el desarrollo de una importante rama de las Matemáticas. A partir de una valoración de las ventajas y desventajas de estos enfoques se establecieron tres temáticas generales: una de ellas refiere a la relación entre Matemáticas y Sociedad (se incluye el papel de las Matemáticas en las civilizaciones de Egipto, Babilonia y Grecia, en el Oscurantismo y el Renacimiento, en las revoluciones científica e industrial y en el siglo XX); la segunda estudia las revoluciones en Matemáticas (se refiere a la naturaleza del universo de Platón a Newton, el desarrollo conceptual del Cálculo, las geometrías no euclidianas y el álgebra no aritmética y los conceptos relativistas); y la última estudia la vida y obra de un matemático específico, o a lo más dos, enfatizando en el proceso de descubrimiento. Desde el punto de vista metodológico las dos primeras temáticas se desarrollaron a través de conferencias y sesiones de discusión, mientras que la tercera involucró el desarrollo de proyectos por parte de los estudiantes y un seminario.

32. **La Historia de las Matemáticas como un enlace de acoplamiento entre la enseñanza secundaria y universitaria**[89], (Furinghetti, 2000). Este documento expone argumentos a favor de la idea de que el uso de la HM en cursos de Matemáticas en la Educación Superior puede ser un elemento eficiente para proporcionar a los estudiantes (especialmente a los futuros profesores) de flexibilidad, apertura mental y motivación hacia las Matemáticas y su enseñanza. Inicialmente en el documento se reseña la situación de formación de profesores de Matemáticas y se identifican dos asuntos problemáticos: la constitución de concepciones o creencias no muy favorables sobre las Matemáticas y –empleando el planteamiento de Felix Klein– la *doble discontinuidad* curricular entre el currículo en Matemáticas de la Educación Básica y Media y el currículo en Matemáticas para la formación de profesores; se reporta que a la atención de ambos asuntos contribuye la formación histórica en Matemáticas, sobre todo en relación con la génesis de los resultados más que en los resultados matemáticos mismos, con los procesos de construcción de ideas matemáticas y con los métodos matemáticos (potencialmente trasferibles a otros dominios de conocimiento u otras disciplinas). Adicionalmente, se presenta un ejemplo, referido a la idea de definición matemática, a través del cual se ilustra

[89] *The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching.*

cómo la HM puede ser una fuente de reflexiones histórico-epistémicas; el ejemplo permite advertir que los futuros profesores lograron identificar que una definición tiene al menos tres aspectos (*v.g.*, lógico, epistemológico y didáctico), que advirtieron el vínculo entre definición y demostración o que reconocen aspectos específicos de la actividad matemática de definir.

33. **¿Qué conocen los profesores y los formadores de profesores sobre la Historia de las Matemáticas?**[90], (Gazit, 2013). Se presentan los resultados de un estudio que examinó el conocimiento de los profesores de matemáticas y de los formadores de profesores, sobre algunos conceptos, temas y personajes de la HM. Para ello se empleó un instrumento de diez preguntas de selección múltiple. Ocho de las preguntas aluden a conceptos de diferentes ramas de las Matemáticas ligados a matemáticos célebres (Pitágoras, Descartes, Euclides, Fermat, Fibonacci, Arquímedes y Al-Khuarizmi); dos preguntas indagaban sobre culturas que contribuyeron de manera importante al desarrollo de conceptos matemáticos (las culturas india y árabe antiguas y el método de conteo, y la cultura antigua egipcia y las fracciones unitarias). Los resultados indican una falta de conocimientos sobre la mayoría de los temas examinados y como consecuencia se establece la necesidad de fortalecer el conocimiento de la HM en la formación de futuros profesores y de los profesores en ejercicio.

La Tabla 37 sintetiza algunas de las ideas presentadas en los artículos.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Grattan-Guinness, 1978)	Qué	Estudio de una rama de las Matemáticas en un periodo de tiempo definido y no una mirada superficial a todo el espectro de la HM.
(Grattan-Guinness, 1978)	Qué	Estudio de los aspectos de fundamentación más que en aspectos técnicos.
(Grattan-Guinness, 1978)	Para qué	Disponer de marcos de referencia que sirvan de base en la estructuración de un curso de Matemáticas. Lograr comprensión de las Matemáticas que además del conocimiento de las mismas, incluya sus motivaciones, formas de creación, lógica y procesos demostrativos, etc. Disponer de presentaciones no formales de los conocimientos matemáticos y emplearlos como derroteros en la educación en Matemáticas.
(Grattan-Guinness, 1978)	Cómo	A través de conferencias, seguidas de la presentación de algunas lecturas clásicas y de un lapso de discusión.

[90] *What do mathematics teachers and teacher trainees know about the history of mathematics?*

Documento	Pregunta	Respuesta
(Byers, 1982)	Para qué	Conocer la naturaleza de las Matemáticas. Establecer la distinción y la interacción entre contenido y forma de las Matemáticas.
(Hickman & Kapadia, 1983)	Para qué	Valorar la importancia y pertinencia de las ideas matemáticas que configuren, o puedan configurar, el currículo de matemáticas. Disponer de una visión desde la cual idear presentaciones de las ideas matemáticas.
(Hickman & Kapadia, 1983)	Qué	Historia evolutiva de la relación entre Matemáticas y Sociedad, y de las revoluciones en Matemáticas. Historia de la vida y obra de algún matemático enfatizando en los procesos de descubrimiento.
(Hickman & Kapadia, 1983)	Cómo	Conferencias y sesiones de discusión. Elaboración de un proyecto y discusión de los resultados del mismo en un seminario.
(Furinghetti, 2000)	Para qué	Proporcionar flexibilidad, apertura mental y motivación en relación con las creencias sobre las Matemáticas y su enseñanza.
(Furinghetti, 2000)	Por qué	La HM es fuente de reflexiones histórico-epistémicas sobre el conocimiento matemático.
(Furinghetti, 2000)	Qué	La génesis de los resultados más que en los resultados matemáticos mismos, los procesos de construcción de ideas matemáticas y los métodos matemáticos.
(Gazit, 2013)	Para qué	Incluir información histórica durante la enseñanza de las Matemáticas. Disponer de un conocimiento de parte de la cultura de la humanidad, entendido como un activo de cualquier graduado del sistema académico.

Tabla 37 Ideas de HM–CPM tratadas en *IJMEST*

3.1.1.6 *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*

Uno de los cinco artículos referidos en 2.1.4.13 aborda, al menos de manera colateral, asuntos de la relación HM–CPM.

34. **Un teorema y sus diferentes pruebas: Historia, Educación Matemática y la perspectiva semiótica-cultural**[91], (Bagni, 2008). En el marco de la discusión de la importancia de la integración de la HM en la educación en Matemáticas, este artículo presenta algunos enfoques teóricos y enfatiza la importancia de la contextualización socio-cultural del conocimiento matemático y de su desarrollo, como un elemento cognitivo y epistemológico esencial en la comprensión de las formas de pensar matemáticamente. Para ello, a modo de ejemplo, se expone una comparación de algunas de las estrategias utilizadas por los matemáticos en

[91] *A Theorem and Its Different Proofs: History, Mathematics Education, and the Semiotic-Cultural Perspective.*

diferentes períodos con el fin de demostrar que los números primos son infinitos. Con el fin de destacar el uso de la Historia en la educación como una verdadera herramienta para el profesor, se propone un esquema de oportunidades educativas y de problemáticas consustanciales. Así, se reseñan tres problemas: uno relativo al desarrollo del conocimiento científico, el otro en relación con la transposición didáctica, y, el tercero relacionado con el papel de la Historia en la comprensión del desarrollo del conocimiento. Se postula entonces que para que el profesor pueda atender las exigencias que implica encarar estos problemas se requiere de un buen nivel de competencia epistemológica como parte de su formación; en este sentido se defiende la necesidad de asumir posturas epistemológicas orientadas históricamente o, preferiblemente, posturas epistemológicas históricas-culturales.

La Tabla 38 expone la síntesis de las respuestas, algunas implícitas en el documento en cuestión, a las preguntas orientadoras.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Bagni, 2008)	Qué	Historia del desarrollo del conocimiento matemático con énfasis en el contexto socio-cultural.
(Bagni, 2008)	Para qué	Dotar al profesor de una herramienta conceptual sobre el conocimiento y pensamiento matemático, para tomar decisiones educativas. Promover un posicionamiento epistemológico sobre las Matemáticas y el desarrollo del conocimiento matemático.

Tabla 38 Ideas de HM–CPM tratadas en *CJSMTE*

3.1.1.7 Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas

De los nueve artículos identificados en 2.1.4.17 dos aluden, en una de sus partes, a la relación HM–CPM.

35. **Historia de la matemática, integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza**, (González Urbaneja, 1991). Este artículo reclama una función didáctica para la HM, justificando el hecho de que una comprensión completa y profunda de los conceptos fundamentales de cualquier ciencia requiere del conocimiento de su historia. Afirma que el énfasis en la naturaleza lógica-deductiva de las Matemáticas presentes, ha dado lugar a un dogmatismo excesivo en su enseñanza, junto a una imposición de la exactitud y el rigor como los fundamentales –y casi exclusivos– valores de las Matemáticas, influyendo así en la respuesta negativa de los estudiantes. Se postula que estas deficiencias se pueden corregir por medio de la enseñanza de la HM, con el fin de enriquecer culturalmente las enseñanzas. Se sugiere que la Historia sea integrada de

manera interdisciplinaria en el currículo, y se le considere una fuente de inspiración, de autoformación permanente, y de orientación de toda actividad educativa. Precisamente estas últimas expresiones constituyen el título de la cuarta parte del artículo, en la cual se desglosan aspectos referidos a la importancia de la HM de cara al profesor de Matemáticas. A este respecto se refiere que la HM: da una visión panorámica de los problemas así como una visión profunda de los mismos, permite reconocer los procesos de elaboración científica, ofrece un marco para subvertir creencias erróneas sobre las Matemáticas, exhibe la fuerza creativa interna de las Matemáticas, ofrece una visión sobre las exigencias previas a la obtención de un resultado matemático, y ofrece un panorama de vínculo entre las Matemáticas y la Cultura.

36. **Matemática e Historia: una articulación para la enseñanza**, (Guyot, Cerizola, & Giordano, 1993). El resumen de la comunicación, presentada en el IV Congreso internacional sobre investigación en Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas, establece que la HM ofrece un panorama sobre la creación y producción del conocimiento matemático, no recogido en la versión de este en tanto resultado. Se plantea que la enseñanza, pretendiendo ser científica, descontextualiza los contenidos y procedimientos matemáticos de las situaciones históricas y de su racionalidad. Se reconoce, entonces, que la HM plantea una nueva relación con el conocimiento matemático en tanto ella es incorporada significativamente al proceso de producción de conocimientos y de su enseñanza. Esto trae como consecuencia la incorporación de aspectos contextuales, la revelación y valoración del acto creador y la revitalización del papel de la intuición y la deducción.

La Tabla 39 recapitula las ideas pertinentes planteadas en el artículo y la comunicación.

Documento	Pregunta	Respuesta
(González Urbaneja, 1991)	Para qué	Influir positivamente en las motivaciones para, y en la manera de, enseñar Matemáticas.

Documento	Pregunta	Respuesta
(González Urbaneja, 1991)	Por qué	Da una visión panorámica de los problemas y de la importancia de los temas matemáticos. Ofrece una visión profunda de los problemas, lo que contribuye a la comprensión y consideración de los contenidos matemáticos impartidos. Apoya la propuesta de un aprendizaje activo a través de la cual se recreen, a través de una actividad investigadora, los procesos de elaboración científica. Permite subvertir creencias (*v.g.*, identificar a la Matemática Moderna como una profunda revolución frente a las matemáticas tradicionales, asumir las Matemáticas como lenguaje más que como ciencia, o reconocer en el rigor –como valor supremo de las Matemáticas– la única vía para acceder a resultados matemáticos). Exhibe la fuerza creativa interna de las Matemáticas. Ofrece una visión sobre los ingentes esfuerzos que exige un resultado matemático. Ofrece un panorama de vínculo entre las Matemáticas y las demás ciencias y, en general, con la Cultura.
(Guyot, et al., 1993)	Por qué	Ofrece un panorama sobre la creación y producción del conocimiento matemático. Plantea una nueva relación con el conocimiento matemático.
(Guyot, et al., 1993)	Para qué	Incorporar aspectos contextuales, revelar y valorar el acto creador y la revitalizar el papel de la intuición y la deducción.

Tabla 39 Ideas de HM–CPM tratadas en EC

3.1.1.8 Épsilon. Revista de Educación Matemática. SAEM THALES

De los diecinueve artículos reportados en el apartado 2.1.1.11 uno refiere a la relación HM–CPM. Sin embargo se debe precisar que otro de los artículos (Sierra Vázquez & López Esteban, 2011) también parece hacerlo, pero recordemos que este es un artículo sobre la historia *de* la formación de profesores y no de Historia *en* la formación de profesores.

37. **Aplicaciones de la historia de las matemáticas**, (C. O. Suárez Alemán, 2003). En la introducción del artículo se plantea que el conocimiento de la génesis y evolución de los conceptos facilita la comprensión de los mismos y aclara el sentido para el que fueron desarrollados, es decir ayuda a comprender la ciencia; la HM permite entonces ser consciente de las dificultades de la mente humana para resolver las situaciones y problemas que ha afrontado, asunto fundamental para el profesor. Como consecuencia de ello, algunos profesores adoptan una enseñanza orientada por el método genético. La parte central del artículo expone algunos aspectos históricos de la resolución de ecuaciones (la *regula falsi*, tratamientos históricos de

las ecuaciones de segundo grado y de ecuaciones cúbicas), y reseña algunas experiencias de aula que evidencian que integrar la historia permite una asimilación mejor del conocimiento matemático y una idea de matemáticas no cerrada, más humana y más cercana a los alumnos.

La Tabla 40 sintetiza algunas ideas presentadas en el artículo.

Documento	Pregunta	Respuesta
(C. O. Suárez Alemán, 2003)	Por qué	Permite conocer la génesis y evolución de los conceptos, lo cual facilita la comprensión de los mismos y aclara el sentido para el que fueron desarrollados.
(C. O. Suárez Alemán, 2003)	Para qué	Adoptar una enseñanza orientada por el método genético. Permitir una asimilación mejor del conocimiento matemático y una idea de matemáticas no cerrada, más humana y más cercana a los alumnos.

Tabla 40 Ideas de HM–CPM tratadas en Épsilon

3.1.1.9 Números. Revista en Didáctica de las Matemáticas

De los once artículos reseñados en 2.1.1.19 tres aluden a la relación en cuestión.

38. **El papel de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza**, (Sierra Vázquez, 2000). Se reconoce inicialmente que el asunto referido en el título ha tenido particular atención en las últimas cuatro décadas del siglo XX. Luego se presentan tres ideas centrales acerca del papel de la HM en la enseñanza, a saber: (i) la HM permite reconocer el surgimiento y la evolución de conceptos, procedimientos, procesos y teorías matemáticas; (ii) la HM muestra que las Matemáticas son una actividad humana incardinada en su contexto y el análisis histórico epistemológico ofrece información acerca del desarrollo del conocimiento matemático en una cultura y sobre los caminos en los que surge y cambia el conocimiento; y, (iii) la HM constituye un laboratorio epistemológico/curricular en el cual explorar el desarrollo del conocimiento matemático. Finalmente se concluye que la HM le puede ayudar al profesor a tomar postura contra el formalismo y contra el aislamiento del conocimiento matemático, a la vez que le ofrece medios para apropiarse mejor de tal conocimiento. Asimismo, le ayuda a: presentar mejor los temas; reconocer obstáculos, dificultades, errores y creencias; y lograr una visión de la actividad matemática como actividad humana realizada en un contexto socio-cultural de cada época.

39. **Algunas notas históricas sobre la correlación y regresión y su uso en el aula**, (Estepa Castro, Gea Serrano, Cañadas de la Fuente, & Contreras García, 2012).

Inicialmente se reconoce la HM como fuente de situaciones reales que dieron origen a objetos matemáticos y como medio para identificar algunas dificultades en su desarrollo. Así, se analizan algunos hechos que dieron lugar a la creación de las nociones de correlación y regresión y se hace una reflexión sobre los posibles usos de la HM en la enseñanza. Adhiriéndose al planteamiento de Brousseau, respecto de la necesidad de que el profesor realice una actividad inversa a la del productor del saber (es decir que debe producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos), se reconoce que dicha actividad puede ser favorecida si se conoce la génesis y evolución de los conocimientos, es decir, si se dispone de un conocimiento histórico.

40. **Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos**, (Meavilla Seguí & Oller Marcén, 2013). Bajo las premisas que la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas requiere del apoyo de materiales didácticos manipulativos, interpretaciones o visualizaciones diversas de un mismo objeto matemático, etc. y que la HM provee ejemplos de estos y estas, se presentan algunos ejemplos extraídos de textos matemáticos antiguos, a saber: una representación geométrica para la suma de los términos de una progresión geométrica, y otra para la suma de dos raíces cuadradas, el uso de recipientes para evidenciar la desigualdad isoperimétrica, y la representación física de una recta ortogonal a un plano. Adicionalmente se reseña que la formación de los profesores de Matemáticas debería incorporar un trabajo con estos (y otros semejantes) tanto en el aprendizaje de su manejo, como en la justificación de su funcionamiento, la generalización de su funcionamiento y la creación de otros.

La Tabla 41 expone de manerá sintética algunas ideas de los textos en cuestión.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Sierra Vázquez, 2000)	Por qué	Permite reconocer el surgimiento y la evolución de conceptos, procedimientos, procesos y teorías matemáticas. Muestra que las Matemáticas son una actividad humana incardinada en su contexto. Constituye un laboratorio epistemológico/curricular en el cual explorar el desarrollo del conocimiento matemático.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Sierra Vázquez, 2000)	Para qué	Tomar postura contra el formalismo y contra el aislamiento del conocimiento matemático. Apropiar mejor el conocimiento matemático. Presentar mejor los temas. Reconocer obstáculos, dificultades, errores y creencias. Lograr una visión de la actividad matemática como actividad humana contextualizada.
(Estepa Castro, et al., 2012)	Para qué	Favorecer la actividad docente de producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos.
(Meavilla Seguí & Oller Marcén, 2013)	Qué	Materiales manipulativos, interpretaciones y visualizaciones de objetos y propiedades matemáticas, extraídos de textos antiguos.

Tabla 41 Ideas de HM–CPM tratadas en Números

3.1.1.10 Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología

Uno de los documentos reseñados en 2.1.4.21 presenta ideas sobre la relación HM–CPM.

41. **Historia y enseñanza de las matemáticas**, (Arboleda, 1984). El documento se plantea como una contribución a la discusión del problema de determinar las condiciones requeridas para apropiar el valor pedagógico intrínseco de la HM a favor del mejoramiento de la enseñanza de las Matemáticas. Para ello, en la primera parte, se reivindica el papel de la HM como medio para revelar la actividad matemática, los procesos de creación de las ideas matemáticas y tomar conciencia del funcionamiento de la investigación en Matemáticas. En la segunda parte se establece una clara diferencia entre el objeto y la naturaleza de las prácticas de la HM (revelar la actividad matemática) y la enseñanza dogmática de las matemáticas (trasmitir saberes y técnicas matemáticas); ante ello se hace emerger una concepción diferente de enseñanza de las Matemáticas cuyo objetivo no es presentar los saberes como realidades abstractas que satisfacen necesidades de un campo teórico, sino inducir al estudiante un “estado de ánimo” propicio a la re-producción de las condiciones indispensables para la re-creación de los saberes matemáticos que respondan sus inquietudes. Bajo este enfoque de la enseñanza de las Matemáticas se reconoce un lugar importante para la HM, que trasciende el carácter instrumentalista que bajo otros enfoques se le puede adjudicar, por ejemplo, al adicionar referencias históricas a los contenidos de enseñanza o al enseñar los contenidos siguiendo el orden genealógico de la formación de las teorías. En la tercera parte se exponen algunas alternativas de participación de la HM en la enseñanza, centrando la atención en las particularidades de los cursos de Historia que se promuevan para orientar una enseñanza no dogmática; en este

sentido se exige que estos no sean simples agregados en los planes de estudio y que estén al servicio de una enseñanza tal. Respecto a sobre qué y cómo desarrollar la formación histórica se presentan y caracterizan algunas experiencias de formación que ofrecen un ámbito para proponer la necesidad de incorporar: (i) un curso de cultura general en ciencias a través del cual se avive en los estudiantes una reflexión personal sobre la evolución de las matemáticas y su relación con las sociedades y las culturas, (ii) un curso complementario que favorezca la reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas y la historia, a través del estudio de: los procesos cognitivos, la evolución histórica de la escuela y la enseñanza, problemas que enfrenta la enseñanza de las Matemáticas, la relación enseñanza e HM, y (iii) un curso de HM donde se estudien problemas relativos a la evolución y fundamentación de algunas de las teorías matemáticas elementales (*v.g.*, Historia de los fundamentos del Análisis en el siglo XIX). Este curso se desarrolló a través de: conferencias del profesor; discusiones sobre la naturaleza y el estatuto de las ideas matemáticas en diferentes momentos, el lugar del entorno (social, económico y político) en el desarrollo de las Matemáticas, el papel de las instituciones académicas, la difusión de las ideas matemáticas; sistematización de lecturas en relación con temas propuestos por el profesor. También se reseña la necesidad de integrar cursos de HM en la formación posgraduada. La necesidad de recursos bibliográficos especializados y de capital humano altamente capacitado se presenta como uno de los principales retos que impone la propuesta hecha. Finalmente se reporta información sobre el Seminario de Historia de las Ciencias llevado a cabo en la Universidad del Valle (Cali, Colombia) en tanto una estrategia de promoción del estudio de tal disciplina.

La Tabla 42 exhibe una síntesis de las ideas del artículo.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Arboleda, 1984)	Por qué	La HM es el medio para revelar la actividad matemática, los procesos de creación de las ideas matemáticas y tomar conciencia del funcionamiento de la investigación en Matemáticas.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Arboleda, 1984)	Qué	Cultura general en ciencias que avive reflexiones sobre la evolución de las matemáticas y su relación con las sociedades y las culturas. Reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas y la historia, a través del estudio de: los procesos cognitivos, la evolución histórica de la escuela y la enseñanza, problemas que enfrenta la enseñanza de las Matemáticas, la relación enseñanza e HM. Problemas relativos a la evolución y fundamentación de algunas de las teorías matemáticas elementales. Reflexión sobre la naturaleza y el estatuto de las ideas matemáticas en diferentes momentos, el lugar del entorno en el desarrollo de las Matemáticas, el papel de las instituciones académicas, y la difusión de las ideas matemáticas.
(Arboleda, 1984)	Para qué	Disponer de conocimiento para orientar una enseñanza no dogmática.
(Arboleda, 1984)	Cómo	Cursos de HM que no sean simples agregados en los planes de estudio y que estén al servicio de una enseñanza no dogmática. Conferencias, discusiones y sistematización de lecturas.

Tabla 42 Ideas de HM–CPM tratadas en Quipu

3.1.1.11 Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática

Uno de los tres artículos reseñados en 2.1.4.23 refiere aspectos de la relación HM–CPM.

42. **La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática**, (Anacona, 2003). El artículo señala algunos aportes de la HM a la reflexión educativa. Inicialmente, luego de presentar un perspectiva histórica intermedia entre las posturas internalistas y externalistas, se exponen tres posibles líneas de investigación histórica, a saber: Historia y Epistemología de las Matemáticas, Historia y enseñanza de las Matemáticas e Historia social de las Matemáticas. Al abordar la discusión sobre la intervención de la reflexión histórica en el ámbito educativo se precisa que la HM permite caracterizar a las Matemáticas como una construcción humana ligada al ámbito social y cultural que las produce, y se reconoce que desde tal caracterización se promueve una actitud diferente frente al conocimiento matemático, a su enseñanza y aprendizaje. Con esta precisión de base se consideran fundamentalmente dos dimensiones educativas de intervención; una ubicada en la formación de profesores y otra ligada a procesos de aprendizaje. En cuanto a la formación de profesores se sostiene que la HM: constituye un elemento central en la elaboración de un currículo, en tanto exhibe la génesis de conceptos y procedimientos; es un indicador de dificultades para la comprensión, al considerar la

complejidad epistemológica de los objetos matemáticos; ofrece un ámbito para la elaboración de actividades didácticas de carácter histórico, es decir actividades en las que, por ejemplo, se incorporan textos históricos, se estudia un concepto en distintos momentos históricos o se ilustra un método de resolución acorde a una época en particular; permite al profesor ganar conciencia sobre su postura frente a la naturaleza de las Matemáticas y sobre las consecuencias de esta en la enseñanza; y, aporta a la comprensión del pasado de la educación en Matemáticas, como instrumento de reconocimiento de la identidad cultural/educativa y como eslabón en la construcción de propuestas educativas futuras. En relación con el aprendizaje se afirma que la HM: permite reconocer las relaciones entre Matemáticas y experiencia, brindado así al aprendiz una relación diferente con el conocimiento matemático; ofrece un rico manantial de problemas que pueden ser objeto de un tratamiento lúdico en actividades que se le propongan al estudiante y que le permitan un acercamiento diferente al usual; constituye un vehículo para concebir el conocimiento matemático en sus facetas no necesariamente algorítmicas; configura un camino no convencional y sugestivo de aprendizaje y reflexión sobre la naturaleza y dinámica de las Matemáticas; y ofrece la posibilidad de mostrar los nexos entre las Matemáticas como construcción histórica y otras producciones culturales de la humanidad.

La Tabla 43 sintetiza algunas de las ideas del artículo.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Anacona, 2003)	Por qué	Constituye un elemento central en la elaboración de un currículo. Es un indicador de dificultades para la comprensión. Ofrece un ámbito para la elaboración de actividades didácticas de carácter histórico. Permite ganar conciencia sobre la naturaleza de las Matemáticas y sus consecuencias en la enseñanza. Aporta al reconocimiento de la identidad cultural/educativa. Permite reconocer las relaciones entre Matemáticas y experiencia. Ofrece un rico manantial de problemas que pueden ser objeto de un tratamiento lúdico. Constituye un vehículo para concebir el conocimiento matemático en sus facetas no algorítmicas. Configura un camino de aprendizaje y reflexión sobre la naturaleza y dinámica de las Matemáticas. Ofrece la posibilidad de mostrar los nexos entre las Matemáticas y otras producciones culturales de la humanidad.

Tabla 43 Ideas de HM–CPM tratadas en EMA

3.1.1.12 Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Tres de los cuarenta y cinco artículos identificados en 2.1.4.24 refieren a la relación HM–CPM.

43. **Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años**, (Boero, 1989). El artículo discute el uso de la HM en el diseño y desarrollo de currículos de Matemáticas para la escuela, en relación con experiencias llevadas a cabo en Italia desde 1975; se exponen así algunos problemas teóricos y operativos de dicho uso. Se señala que varios tipos de historia (*v.g.*, internalista o externalista) pueden ser usadas y que por tanto se requieren y admiten diferentes tipos de fuente de esta, a la vez que se propugna por un uso de la Historia de la Protomatemática, tratada en algunos pocos documentos, para las Matemáticas de la escuela obligatoria. Se argumenta a favor del uso de la HM como fuente de ideas de cara a la "recontextualización" de los conceptos matemáticos como "instrumentos" de conocimiento de ciertos aspectos de la realidad. En esta dirección se asume inicialmente que aquello que sirvió de contexto a la humanidad para trabajar algunas temáticas y conceptos matemáticos y extramatemáticos, puede servir de contexto en la escuela para trabajar estos con los alumnos (*v.g.*, el trabajo con el dominio del tiempo como contexto de surgimiento del trabajo con números y operaciones), pero se advierte que no todos los conceptos matemáticos pueden ser trabajados así. Se reseñan entonces algunos asuntos problemáticos en tal uso de la HM, a saber: la eficacia y límites de la recontextualización de los conceptos matemáticos en temas extramatemáticos sugeridos por la historia, el conflicto entre lo real "natural" y lo real "artificial" en el proceso de recontextualización del saber matemático, la explicitación y profundización de los conceptos matemáticos construidos por medio de la recontextualización "histórica" de los mismos, o la determinación de la lógica de organización de las secuencias o itinerarios didácticos. También se argumenta a favor de la HM como una oportunidad de trabajar sobre los conceptos matemáticos como "objetos" de estudio; al respecto se plantean al menos dos problemas: la exactitud histórica y la eficacia simbólica de diferentes simbolismos. Asimismo se plantea la HM como opción para abrir un discurso matemático, particularmente indicando la relación entre los problemas y el razonamiento matemático, o las variables o contextos no matemáticos en el desarrollo de la argumentación matemática. Finalmente se expone, con base en lo anterior, que la HM ofrece a los profesores ideas para su actividad didáctica,

contextos para promover la construcción de conceptos y habilidades matemáticas, o referencia para anticipar dificultades de los estudiantes; esto, sin embargo, exige que el profesor tenga profundos conocimientos históricos y sepa cómo servirse de ellos. En este sentido se reclama el aprendizaje de Historia de las Protomatemáticas y el estudio de la relación entre la Historia y la Didáctica.

44. **Historia de la Matemática: Implicaciones didácticas**, (del Río Sánchez, 1997). A partir de descripciones de fragmentos de la HM se precisan y justifican algunos principios que el profesor de Matemáticas deberá atender, junto con otros provenientes de otras disciplinas y de la reflexión sobre la práctica docente, para la enseñanza de las Matemáticas. Un primer principio ubica la resolución de problemas, de orígenes muy diversos, como fuente de actividad matemática, de lo cual se sigue que el aprendizaje de las matemáticas debería partir con un problema sentido como tal por el aprendiz, de tal suerte que se genere una tensión epistemológica y un deseo de aprender; esto implica considerar procesos de reformulación de tales problemas o la identificación de otros similares más cercanos a los estudiantes. Un segundo principio refiere a que en el proceso constructivo de las Matemáticas intervienen técnicas o estrategias para hacer matemáticas; de estas se destacan la generalización, el estudio de las posibilidades y la búsqueda de regularidades, la elección de un simbolismo apropiado y la representación y construcción de modelos, la deducción lógica y la modificación de condiciones de un problema. De esto se sigue la necesidad que el profesor permita a sus estudiantes el uso de razonamientos inductivos y, luego, el uso de razonamientos deductivos; asimismo se sigue la necesidad de que el profesor incorpore las técnicas o estrategias como un contenido de aprendizaje, a través de permitir a los estudiantes hacer matemáticas mediante la incorporación de estas técnicas. Un tercer principio refiere que la importancia de un concepto, un teorema o un procedimiento es contextual, es decir relativo al estado de la ciencia, de lo cual se sigue que en la enseñanza se debe tener en cuenta el carácter evolutivo de los conocimientos, su estado actual y los recursos tecnológicos disponibles. Un cuarto y último principio aboga por la humanización de las Matemáticas a través del conocimiento de la vida y el contexto social y cultural de sus autores, en particular de las actitudes científicas que les permitieron hacer matemáticas, como un aspecto a emular por parte de los estudiantes.

45. **La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza**, (González Urbaneja, 2004). El artículo

inicia con una recapitulación de justificaciones sobre el estudio de la HM en tanto que esta muestra una visión de las Matemáticas y de sus objetos que supera ampliamente la que se obtiene de su versión teórica (*i.e.*, de su presentación hipotético-deductiva) y, en tal sentido, ofrece un panorama adecuado para orientar su enseñanza. En seguida, bajo el título "La Historia de las Matemáticas como recurso didáctico. El método genético", se argumenta a favor de una aproximación genética en el aprendizaje basada en una aproximación genética en la historia, advirtiendo los cuidados y particularidades de involucrar en la enseñanza este enfoque de la HM. La tercera parte del artículo, titulada "La Historia de las Matemáticas como fuente de vocación, motivación, orientación, inspiración y autoformación del profesor de Matemáticas", esgrime varios argumentos a favor de las ideas contenidas en el mismo título; así, se arguye que la HM favorece la comprensión profunda de los problemas matemáticos, exhibe la fuerza creativa de las Matemáticas, revela los ingentes esfuerzos y dificultades de generaciones de matemáticos en torno a un objeto, ofrece estímulos para mantener la autoformación, brinda miradas a la dispersión y unidad de las Matemáticas, subvierte la creencia en el rigor como supremo valor de las Matemáticas, reconvierte a las Matemáticas en disciplina cultural, y suministra problemas potencialmente lúdicos tratados como Matemática Recreativa. Bajo el título "La Historia de la Matemática como instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza", el autor ilustra la manera en que la HM pone de manifiesto la dimensión cultural de las Matemáticas y su impacto en la historia del pensamiento, exhibiendo algunas relaciones e influencias recíprocas de las Matemáticas con ciertas disciplinas humanísticas (Filosofía; Artes; Religión, Teología y Mística; Educación, Política y Sociedad, Literatura y Poesía).

La Tabla 44 sintetiza algunas de las ideas de los artículos de la revista SUMA.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Boero, 1989)	Qué	Varios tipos de HM. Historia de la Protomatemática. Estudio de la relación entre Historia y Didáctica.
(Boero, 1989)	Por qué	Fuente de ideas para la recontextualización de conceptos matemáticos como instrumentos de conocimiento de aspectos de la realidad. Oportunidad de trabajar los conceptos matemáticos como objetos de estudio. Opción para abrir un discurso matemático.

Documento	Pregunta	Respuesta
(del Río Sánchez, 1997)	Por qué	Ofrece principios que orientan la acción docente y condicionan la acción del discente (*v.g.*, la resolución de problemas como fuente de actividad matemática, el trabajo en y sobre estrategias para hacer matemáticas, la importancia relativa de los objetos matemáticos en relación con el contexto de desarrollo de las matemáticas, el carácter humano en la actividad matemática).
(González Urbaneja, 2004)	Por qué	Muestra una visión de las Matemáticas y de sus objetos que supera la que se obtiene de su versión teórica y ofrece un panorama adecuado para orientar su enseñanza. Ofrece a través de una aproximación genética opciones de aproximaciones del aprendizaje. Constituye fuente de vocación, motivación, orientación, inspiración y autoformación del profesor de Matemáticas. Constituye un instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza.

Tabla 44 Ideas de HM–CPM tratadas en SUMA

3.1.1.13 UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas

De los ocho artículos identificados en 2.1.4.26 uno expresa planteamientos sobre la relación HM–CPM.

46. **La historia de las matemáticas en el aula**, (Santiago Fernández Fernández, 2001). En este artículo, Santiago Fernández inicialmente reporta la interrelación entre HM y enseñanza de las Matemáticas en el contexto español y en el contexto internacional; en este marco y refiriéndose al valor de la Historia a favor del conocimiento de los profesores señala que esta "le ayuda [al profesor] a comprender mejor la evolución de los diversos conceptos y procedimientos matemáticos" (p. 10). Asimismo reporta varios asuntos y maneras a través de los cuales los docentes podrían realizar el estudio de la HM, a saber: cronología de nombres, citas, fechas y aspectos más importantes; la evolución del pensamiento y el quehacer matemático; los creadores y creadoras de las Matemáticas; la evolución y desenlace de determinados problemas matemáticos; ciertas partes de las Matemáticas (Aritmética, Álgebra, Análisis, Geometría, Estadística, Probabilidad, etc.); o, un personaje, una determinada cultura o un periodo de tiempo más o menos largo. Al final del artículo se presentan varias situaciones históricas para ser usadas en el aula.

La Tabla 45 sintetiza algunas de las ideas de los artículos de la revista UNO.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Santiago Fernández Fernández, 2001)	Para qué	Comprender la evolución de los diversos conceptos y procedimientos matemáticos.
(Santiago Fernández Fernández, 2001)	Qué	Cronología de nombres, citas, fechas y aspectos más importantes. La evolución del pensamiento y el quehacer matemático. Los creadores de las Matemáticas. La evolución y desenlace de determinados problemas matemáticos Ciertas subdisciplinas de las Matemáticas. Un personaje, una determinada cultura o un periodo de tiempo más o menos largo.

Tabla 45 Ideas de HM–CPM tratadas en UNO

3.1.1.14 *The Mathematical Gazette* 76, (475), 1992

Dos de los veinte artículos del monográfico de esta revista tratan temáticas referidas a la relación HM–CPM.

47. **Relatos históricos en la clase de Matemáticas**[92], (Führer, 1992)[93]. Se cuestiona la conveniencia de incorporar la Historia en la enseñanza de las Matemáticas y al respecto señala que es poco usual encontrar en la literatura especializada estrategias pedagógicas que respondan a la pregunta sobre cómo llevar a la práctica esta intención. Respecto del conocimiento de los profesores, Führer señala que la mayoría de los profesores de Matemáticas usan su conocimiento con algunos rasgos de la Matemática del pasado para contar relatos que no se ajustan a los estándares de la ciencia histórica; en este mismo sentido, advierte que los profesores reconocen la precariedad de su conocimiento histórico a la vez que reclaman ayuda para cambiar esta situación. Precisamente, el bajo nivel de conocimiento histórico de los profesores de Matemáticas es considerado por el autor como uno de los tres obstáculos para la aceptación de una aproximación histórica en las clases de Matemáticas. En aras de encarar tal dificultad, cuestiona una aproximación erudita que constriña a los profesores a los estándares de la ciencia histórica y presenta como opción la exposición y estudio de "buenas historias" matemáticas que a modo de ventana permitan ver el significado y valor de las Matemáticas como un todo. Para ilustrar esto, Führer presenta dos historias —la medición de la circunferencia terrestre por Eratóstenes y varias aproximaciones a la idea y valor de π– y muestra cómo los relatos históricos se pueden potenciar en el aula para efectos de

[92] *Historical Stories in the Mathematics Classroom.*

[93] Este artículo es una versión simplificada de otro artículo ya reseñado en este mismo capítulo (Führer, 1991).

trascender el relato mismo. Al final del artículo, el autor propone que es necesario abordar el problema de la formación histórica de los profesores no solo para una minoría de ellos y que la defensa de la intervención de la Historia en la enseñanza debe ir más allá de los argumentos superficiales, tales como “la historia es motivante”, “los textos históricos muestran nuevas aproximaciones a los temas del currículo” o “después de forcejear con este texto, la mayoría de los estudiantes se mostraron entusiasmados con el razonamiento histórico”.

48. **¿Por qué enseñar Historia de las Matemáticas?**[94], (Heiede, 1992). La respuesta a la pregunta que sirve de título al artículo tiene una formulación simple: porque la historia de un asunto es parte del asunto. En el artículo, Heiede hace declaraciones hacia los profesores de Matemáticas tan contundentes y polémicas como: “Si ustedes no son conscientes que las Matemáticas tienen una historia, entonces no han enseñado Matemáticas, ya que han estado privados de una parte imprescindible de ella. […], pero ustedes no son profesores de Matemáticas si no enseñan también la Historia de las Matemáticas cuando enseñan Matemáticas”. (p. 152). Así mismo sostiene que “[…] obviamente no estoy de acuerdo con las personas que desean enseñar Historia de las Matemáticas para hacer las Matemáticas más amenas, o más fáciles, o más humanas […] De nuevo: si ustedes enseñan Historia de las Matemáticas como parte de las Matemáticas, todas estas cosas se seguirán.” (p. 153). A partir de ello, aboga por una formación en HM para los futuros profesores, pero también para los profesores en ejercicio, lograda a través de su formación matemática o bien en cursos especializados de HM.

La Tabla 46 recapitula las ideas centrales de los dos artículos reseñados.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Führer, 1992)	Qué	Relatos históricos o “buenas historias” matemáticas.
(Führer, 1992)	Para qué	Cambiar la imagen del proceso educativo. Ir más allá de argumentos superficiales sobre las intenciones de la HM en el aula.
(Heiede, 1992)	Para qué	Dotar a las Matemáticas de una parte imprescindible: su historia. Cuestionar argumentos superficiales sobre las intenciones de la HM en el aprendizaje de las Matemáticas.
(Heiede, 1992)	Por qué	Porque la historia de un asunto es parte del asunto
(Heiede, 1992)	Cómo	A través de la formación matemática. Mediante cursos especializados de HM.

[94] *Why Teach History of Mathematics?*

Tabla 46 Ideas de HM–CPM tratadas en el monográfico de *The Mathematical Gazette*

3.1.1.15 *Mathematics in school* 26 (3), 1997; 27 (4), 1998 y 32 (1), 2003

Dos de los artículos de los tres monográficos de esta revista abordan la relación objeto de estudio de este capítulo.

49. **Historia en la Educación Matemática. El estudio ICMI**[95], (Fauvel & van Maanen, 1997b). En este breve documento se anuncian las problemáticas que abordará el estudio ICMI en relación al papel de la HM en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La tercera de las doce preguntas que la décima versión del estudio considera desarrollar antes de concluir el milenio, alude directamente a la formación de profesores; en esta se cuestiona sobre cuáles son las funciones particulares de un curso de HM o cuáles son sus componentes para los docentes. Al respecto de esta se reseña que la HM puede jugar un papel especialmente importante en la formación de los futuros profesores así como en la de los profesores en ejercicio. Igualmente se señala que existen diferentes motivos para la inclusión de un componente histórico en tal formación, tales como promover entusiasmo por las Matemáticas, permitir a los aprendices ver a los alumnos de manera diferente, ver las Matemáticas de manera diferente y desarrollar habilidades de lectura, de empleo de la biblioteca y de escritura (las cuales no siempre son atendidas en los cursos de Matemáticas). Finalmente se reporta que un asunto relacionado con lo anterior es precisamente la pregunta acerca de qué clase de HM es la apropiada para la formación del profesor y por qué.

50. **La Historia como cruce de las necesidades matemáticas culturales y educativas en el aula**[96], (Furinghetti & Paola, 2003). Los autores italianos describen un material (en CD-ROM) elaborado para profesores, que contiene materiales históricos y educativos adecuados para el diseño de una secuencia de instrucción, que se base en la HM, específicamente en la historia de la probabilidad; dentro de los materiales históricos incluidos en el CD-ROM, que podría estudiar un profesor, refieren algunas fuentes primarias que reportan el tratamiento del problema de repartición de una apuesta cuando el juego haya sido interrumpido antes de finalizar, así como escritos de historiadores sobre la historia de la probabilidad. También incluyen la descripción del uso de tal material por parte de un profesor y detalles sobre la implementación en el aula de la secuencia diseñada; a este respecto reseñan que el profesor emplea

[95] *The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics: Discussion Document for an ICMI Study (1997-2000).*

[96] *History as a Crossroads of Mathematical Culture and Educational Needs in the Classroom.*

algunas soluciones surgidas en la historia para confrontar las respuestas de los estudiantes y usa una cierta secuencialidad histórica como derrotero del camino tomado por los estudiantes. Señalan que "la filosofía subyacente al proyecto del CD-ROM puede ser un modelo para la formación de los profesores en el uso de la Historia de las Matemáticas" (p. 41). Como rasgos de tal filosofía identificamos que los autores: (i) expresan la necesidad de que el profesor cuente con recursos bibliográficos suficientes para estudiar los aspectos históricos y educativos correspondientes, y, (ii) ponen de relieve el reconocimiento de la necesidad de un amplio rango de competencias que viabilicen el trabajo del profesor de diseño de material para el aula y de su implementación; según los autores, estas competencias no atienden a un único campo (*i.e.*, Matemáticas, Educación Matemática, Historia, Educación y Comunicación) y su entrelazamiento es tan estricto que dejar de lado uno de ellos cambia la secuencia de instrucción cuando se implementa en el aula. La **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** muestra un esquema a través del ual se expresan los campos de conocimiento vinculados al diseño de una secuencia que involucre la HM.

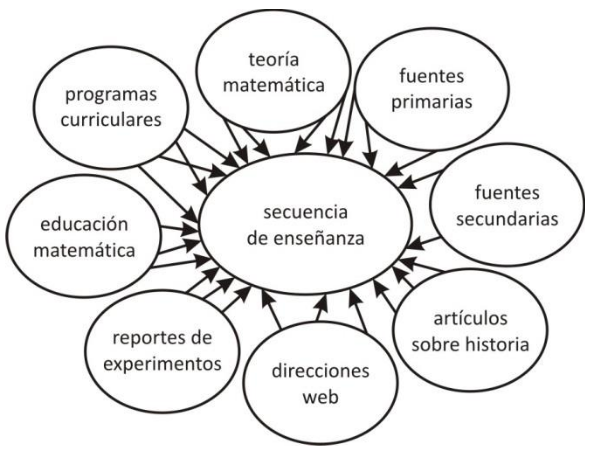

Imagen 2 Campos de conocimiento vinculados al diseño de una secuencia que involucre la HM. Facsímil tomado de (Furinghetti & Paola, 2003, p. 40)

La Tabla 47 recoge algunas ideas de los artículos reseñados inmediatamente antes.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Fauvel & van Maanen, 1997b)	Para qué	Promover entusiasmo por las Matemáticas. Ver a los alumnos de manera diferente. Ver las Matemáticas de manera diferente. Desarrollar habilidades de lectura y de escritura.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Furinghetti & Paola, 2003)	Para qué	Disponer de conocimiento sobre uno de los campos de conocimiento vinculados al diseño de una secuencia que involucre la HM.
(Furinghetti & Paola, 2003)	Qué	Fuentes primarias. Documentos de HM.
(Furinghetti & Paola, 2003)	Cómo	Promoviendo el diseño de secuencias didácticas orientadas o mediadas por la HM.

Tabla 47 Ideas de HM–CPM tratadas en los monográficos de *Mathematics in School*

3.1.1.16 *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 3 (1-2), 2004

Como mencionamos en 2.1.1.9 la revista contiene dos artículos (Barabash & Guberman-Glebov, 2004; Waldegg, 2004) relacionados con la educación del profesor de Matemáticas en HM (y su relación con otras disciplinas) y en la familiarización con materiales de inspiración histórica para ser empleados en el aula.

51. **Proyecto de aprendizaje y enseñanza en Historia de las Matemáticas para futuros profesores: enriquecimiento educativo y multicultural de su currículo académico**[97], (Barabash & Guberman-Glebov, 2004). Se describe un fragmento de una propuesta de formación de profesores, llevada a cabo en Israel, a través de un seminario de HM de un año de duración, y un proyecto de graduación, relacionado con aquel, en el que se elabora un módulo de enseñanza fundamentado en la historia estudiada. Como parte de los resultados formativos de la propuesta, se reseña, entre otros aspectos: la superación de numerosos prejuicios relacionados con las Matemáticas, el reconocimiento de la contribución de miembros de su propia cultura a las Matemáticas, la identificación de vínculos de las Matemáticas con otros campos del conocimiento y con los fenómenos sociales y culturales, y el [auto]reconocimiento de la capacidad de los futuros profesores de abordar de manera exitosa el estudio de aspectos históricos complejos.

52. **Resolución de problemas, aprendizaje colaborativo e Historia de las Matemáticas. Experiencias en la formación de profesores en ejercicio**[98], (Waldegg, 2004). Se presenta información sobre un curso de doce sesiones de cuatro horas cada una, a través de las cuales se plantearon situaciones problemáticas cuyas soluciones contienen elementos teóricos familiares a los profesores, pero cuyas soluciones no se ajustan a los ejercicios de aplicación rutinarios. Con estas se procuraba colocar al profesor en una situación semejante a la que viven sus estudiantes al estudiar

[97] *Learning-and-teaching project in the history of mathematics for pre-service teachers: Educational and multicultural enrichment of their academic curriculum*.

[98] *Problem solving, collaborative learning and history of mathematics: Experiences in training in-service teachers.*

Matemáticas, a través de enfrentarlo a solucionar problemas históricos (que connotan notación, algoritmos y ambientes no convencionales) para provocar un ejercicio metacognitivo sobre las operaciones que los profesores realizan con los objetos matemáticos e identificar creencias sobre el aprendizaje de las Matemáticas y contrastarlas con sus experiencias de aprendizaje.

En la Tabla 48 incluimos de manera sintética algunas de las ideas de los dos artículos reseñados antes.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Barabash & Guberman-Glebov, 2004)	Cómo	A través de un curso de HM que asume como objeto de estudio a matemáticos y sus obras y, luego, a través de un trabajo de graduación que procura el diseño de tareas para el aula en relación con la HM estudiada.
(Barabash & Guberman-Glebov, 2004)	Para qué	La superación de numerosos prejuicios relacionados con las Matemáticas. El reconocimiento de la contribución de miembros de su propia cultura a las Matemáticas. La identificación de vínculos de las Matemáticas con otros campos del conocimiento y con los fenómenos sociales y culturales. El [auto]reconocimiento de la capacidad de abordar de manera exitosa el estudio de aspectos históricos complejos.
(Waldegg, 2004)	Qué	Situaciones problemáticas cuyas soluciones contienen elementos teóricos familiares a los profesores, pero no de sus ejercicios de aplicación rutinarios.
(Waldegg, 2004)	Para qué	Provocar un ejercicio metacognitivo sobre las operaciones que los profesores realizan con los objetos matemáticos. Identificar creencias sobre el aprendizaje de las Matemáticas y contrastarlas con sus experiencias de aprendizaje.
(Waldegg, 2004)	Cómo	Colocar al profesor en una situación semejante a la que viven sus estudiantes al estudiar Matemáticas, a través de enfrentarlo a solucionar problemas históricos que connotan notación, algoritmos y ambientes no convencionales.

Tabla 48 Ideas de HM–CPM tratadas en el monográfico de *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*

3.1.1.17 *Science & Education* 23 (1), 2014

A pesar de la clasificación propuesta por los editores de este número de la revista, en la cual se ubican solo tres documentos tratando asuntos de la educación del profesor (Alpaslan, et al., 2014; Fenaroli, et al., 2014; Povey, 2014), nosotros reconocemos dos más que abordan esta temática (Mosvold, et al., 2014; Taani, 2014). Veamos entonces alguna información sobre estos cinco artículos.

53. **Conocimiento de los futuros profesores de Matemáticas sobre la Historia de las Matemáticas y sus actitudes y creencias hacia el uso de la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática**[99], (Alpaslan, et al., 2014). Se presenta un estudio sobre los objetos a los que se refiere el título (conocimientos, actitudes y creencias), en función del tiempo de permanencia en el programa de formación del profesorado y del género. La muestra, a quien se le aplicó dos cuestionarios, incluyó más de un millar y medio de estudiantes para profesores de Matemáticas de nueve universidades en Turquía. Los resultados indican que los maestros en formación tienen un conocimiento moderado de la HM y actitudes y creencias positivas hacia el uso de esta. Sus puntuaciones en relación con el conocimiento aumentan a medida que tienen más tiempo en el programa de formación; las puntuaciones de los hombres son más altas que las de las mujeres en los primeros dos años. También las actitudes hacia el uso de la HM en la enseñanza mejoran con el tiempo en el programa de formación; las mujeres evidencian mejores actitudes que los hombres. Los resultados indican que el conocimiento de la HM está relacionado con los cursos tomados, pero como las puntuaciones sobre el conocimiento son moderadas, se sugiere una revisión de estos cursos. Además se sugiere hacer hincapié en la importancia de preparar a los futuros profesores en la implementación de la HM en la enseñanza, como estrategia alternativa.

54. **Repensando los conceptos matemáticos con los lentes de la Historia de las Matemáticas: un experimento con futuros profesores de secundaria**[100], (Fenaroli, et al., 2014). En este artículo se presentan las principales líneas (propósitos, estrategias, contenidos y productos) de un curso sobre la HM, dirigido a profesores de Matemáticas de secundaria matriculados en un postgrado de formación docente de dos años. Para el curso se asume un marco teórico que relaciona al menos tres dominios: el conocimiento matemático para la enseñanza y las creencias de los profesores, el papel de la HM en la enseñanza y la aproximación significativa a los conceptos matemáticos (específicamente a la derivada y a sus definiciones). La estrategia empleada en el curso contó con varios pasos a través de los cuales se

[99] *Pre-service Mathematics Teachers' Knowledge of History of Mathematics and Their Attitudes and Beliefs Towards Using History of Mathematics in Mathematics Education.*

[100] *Rethinking Mathematical Concepts with the Lens of the History of Mathematics: An Experiment with Prospective Secondary Teachers.*

procuró: centrarse en algunos conceptos importantes que se enseñan en la secundaria, requerir a los futuros profesores reflexionar sobre las dificultades relacionadas con estos conceptos, estudiar fuentes originales para mejorar la reflexión de los alumnos a través de desafiar algunas creencias existentes sobre estos conceptos, y esbozar una secuencia de enseñanza para la presentación de los conceptos en el aula. Entre los resultados sobresalientes del estudio se reporta el empleo de aproximaciones geométricas o algebraicas (que no recurren a la noción de límite) en algunas de las secuencias diseñadas, la reflexión sobre objetos matemáticos que se enseñan en la escuela y la identificación de distintos sentidos y significados para estos, y la integración de la HM en la cultura matemática de los futuros profesores.

55. **'Caminando en un paisaje exterior y desconocido': El estudio de la Historia de las Matemáticas en la educación inicial docente**[101], (Povey, 2014). En este artículo se defiende el papel de la HM en la formación de los docentes de Matemáticas. Para ello, primero se sostiene que no todo está bien con las Matemáticas que se imparten en el Reino Unido y que el compromiso de los docentes con –y la profundidad de– su objeto de conocimiento matemático necesita mejorarse. Se argumenta que el estudio de la HM establece una relación productiva con tal conocimiento y profundiza la comprensión matemática. Se señala que la investigación reseña que las matemáticas enseñadas tienen un escaso uso y se perciben como un sujeto frío y atenuado, no relacionado con la gente o la cultura; ante esto, se alude que tomar conciencia de su historia permite su apertura y su humanización. Se argumenta además que el estado general de enseñanza de las Matemáticas, así como las desigualdades que esta produce, demanda profesores con pensamiento crítico, que pueden ver más allá de lo que da por sentado. Se señala entonces que el estudio de la HM requiere el desarrollo de tales habilidades críticas y puede desarrollar una disposición hacia la investigación; también se alude a que el estudio de la Historia proporciona placer. Estas afirmaciones se apoyan en datos obtenidos en entrevistas con profesores que durante muchos años han trabajado en la enseñanza de la HM.

56. **Cómo el conocimiento matemático para la enseñanza puede beneficiarse del estudio de la Historia de las Matemáticas**[102], (Mosvold, et al., 2014). El objetivo de este artículo es teorizar la afirmación tradicional que reseña que los profesores de

[101] *'Walking in a Foreign and Unknown Landscape': Studying the History of Mathematics in Initial Teacher Education.*
[102] *How Mathematical Knowledge for Teaching May Profit from the Study of History of Mathematics*.

Matemáticas pueden beneficiarse de estudiar la HM. Para ello se asume como marco teórico aquel que se refiere al conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y se muestra cómo los diferentes dominios de MKT (conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del horizonte del contenido, conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza, y conocimiento del contenido y el currículo) pueden beneficiarse de la HM. Con ello más que validar el modelo MKT, se está presentando un nuevo modelo sobre el conocimiento del profesor de Matemáticas.

57. **Caminos múltiples hacia la matemática práctica en *Claves para la Aritmética* de al-Kashi**[103], (Taani, 2014). En este trabajo, se discute una de las características más distintivas de la pedagogía de Jamshid al-Kashi de su libro *Clave para la Aritmética*, perteneciente a la tradición de las matemáticas árabes del Siglo XV. Esta característica refiere a los múltiples caminos para encontrar un resultado deseado. En el artículo, luego de examinar aspectos sobre la vida de al-Kashi y sus contribuciones a las Matemáticas y a la Astronomía, se estudia la versatilidad del enfoque de múltiples caminos en el libro citado, a través de cuatro ejemplos (múltiples definiciones, múltiples algoritmos, múltiples fórmulas y múltiples métodos para resolver problemas). Posteriormente se discuten algunos de los beneficios que se pueden obtener mediante la aplicación de enfoque de caminos múltiples de al-Kashi en los planes de estudio modernos; igualmente, se analizan ejemplos del empleo de este enfoque en dos módulos de enseñanza (en Pre-cálculo y un curso de Matemáticas) para futuros profesores de Matemáticas. Este trabajo constituye entonces un intento de ayudar a los educadores matemáticos a explorar más beneficios de la lectura de las fuentes originales.

En la Tabla 49 se sintetizan y recogen algunas de las ideas de los artículos reseñados antes. Hay que precisar que para el primer artículo las respuestas se infieren del contenido de los cuestionarios que se relacionan en el mismo.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Alpaslan, et al., 2014)	Qué	Matemáticas en civilizaciones antiguas. Materiales históricos de enseñanza (tales como tangramas). Evolución histórica de conceptos matemáticos.

[103] *Multiple Paths to Mathematics Practice in Al-Kashi's Key to Arithmetic.*

Documento	Pregunta	Respuesta
(Alpaslan, et al., 2014)	Para qué	Enriquecer el repertorio de conocimientos de los profesores. Disponer de elementos de motivación para promover el aprendizaje de las Matemáticas. Modificar las ideas y creencias sobre las Matemáticas.
(Fenaroli, et al., 2014)	Qué	Fuentes originales. Conceptos importantes que se enseñan en la escuela.
(Fenaroli, et al., 2014)	Para qué	Identificar distintos sentidos y significados para los conceptos matemáticos. Reflexionar sobre las dificultades relacionadas con los conceptos matemáticos. Desafiar algunas creencias existentes sobre los conceptos. Disponer de recursos para diseñar secuencias no convencionales de enseñanza. Integrar la HM en la cultura matemática de los profesores.
(Povey, 2014)	Para qué	Profundizar en la comprensión matemática. Ampliar y humanizar las Matemáticas. Desarrollar pensamiento crítico. Proveer motivación y diversión.
(Mosvold, et al., 2014)	Para qué	Beneficiar los diferentes dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del horizonte del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento del contenido y el currículo).
(Taani, 2014)	Qué	Fuentes originales
(Taani, 2014)	Para qué	Identificar estrategias alternativas de hacer y comunicar las Matemáticas.

Tabla 49 Ideas de HM–CPM tratadas en el monográfico de *Science & Education*

3.1.1.18 *PRIMUS* 24(8), 2014

Dos de los artículos de este monográfico presentan experiencias de formación en HM en las que participan profesores o futuros profesores de Matemáticas.

58. **Proyectos colectivos de investigación en clase de Historia de las Matemáticas**[104], (Despeaux, 2014). La autora presenta una estrategia de proyecto colectivo de indagación que diseñó y empleó en el desarrollo de un curso de HM, en el que la mayoría de los estudiantes eran futuros profesores de Matemáticas. Para los estudiantes el proyecto implicó explorar las versiones digitales de almanaques británicos del siglo XVIII que contenían secciones de preguntas y respuestas de

[104] *Collective Research Projects in the History of Mathematics Classroom*.

Matemáticas, analizar los problemas matemáticos seleccionados a partir de almanaques y sus respuestas, realizar una prosopografía de las personas que contribuían en los almanaques, y finalmente estudiar algunas fuentes secundarias que versaban sobre los almanaques estudiados. Además, el proyecto contempló la presentación de los resultados a sus compañeros de clase y la escritura de un reporte o artículo de la indagación. Este proyecto exigió y permitió a los estudiantes interesarse por –y valorar– el estudio de las fuentes primarias, reconocer algunas dificultades al intentar reconstruir aspectos históricos, explicar las matemáticas en contextos no coetáneos, reconocer que la actividad matemática no es exclusividad de "grandes hombres" y trabajar como un equipo.

59. **Historia de las Matemáticas: Tres actividades para usar con estudiantes de pregrado y profesores en servicio**[105], (Loats, White, & Rubino, 2014) Los autores brindan información sobre –y analizan– tres actividades vinculadas a un curso de HM que se desarrolla, bien sea como un curso regular para estudiantes universitarios o como un curso de desarrollo profesional para profesores de matemáticas de la secundaria. En este sentido, para cada actividad presentan sus objetivos, su aplicación, sus resultados, y hacen observaciones y sugerencias de posibles modificaciones. Reseñan que las actividades involucran a los estudiantes como participantes activos en su propio aprendizaje y procuran complementar el tradicional contenido de las matemáticas de este tipo de cursos. La primera actividad consiste, inicialmente, en la escritura de un relato sobre un acontecimiento acaecido durante la sesión de clase y del cual los estudiantes han sido testigos y, posteriormente, de la elaboración por grupos de un relato preciso (a partir de los escritos anteriores, degradados o mutilados intencionalmente) y de su presentación a través de sendos pósteres que son expuestos y consultados por todos los estudiantes; así, se desarrolla una actividad que centra su atención en la precisión de la información histórica y promueve un cierto escepticismo sobre la objetividad histórica, a la vez que una conciencia sobre las dificultades de contar con relatos fieles al hecho histórico y sobre la necesidad de contar con diferentes fuentes. La segunda actividad incorpora el estudio de aspectos biográficos de los principales matemáticos, pero más allá de conocer datos sobre estos, está diseñada y desarrollada para para aumentar la conciencia de los estudiantes de los matemáticos como personas y el sentido de que la matemática es un esfuerzo cultural y humana. En este sentido, desde el punto de vista metodológico cada

[105] *History of Mathematics: Three Activities to Use with Undergraduate Students and In-service Teachers*.

estudiante selecciona un matemático, para conocerlo y representarlo, y establece relaciones con los elegidos por algunos de sus compañeros; luego, bajo la coordinación del profesor, se desarrollan sesiones de paneles en donde se confrontan las vidas y obras de algunos de los matemáticos seleccionados y representados. La tercera actividad procura promover la competencia de los estudiantes para formular y responder preguntas sobre la HM. Así, los estudiantes formulan preguntas, el profesor las organiza y las presenta a los estudiantes quienes seleccionan algunas para responderlas; estudian entonces diversos materiales y fuentes (cuestionándose por la fiabilidad y disponibilidad de estos), y estructuran pósteres o páginas web a través de las cuales responden las preguntas seleccionadas, los cuales son leídos o consultados por los demás compañeros.

La Tabla 50 sintetiza algunas ideas planteadas en los dos artículos.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Despeaux, 2014)	Qué	Almanaques donde aparecen problemas matemáticos.
(Despeaux, 2014)	Cómo	Explorando almanaques británicos del siglo XVIII. Analizando los problemas matemáticos contenidos en los almanaques y sus respuestas. Realizando prosopografías de las personas que contribuían en los almanaques. Estudiando algunas fuentes secundarias que versan sobre los almanaques estudiados. Presentando resultados de la indagación.
(Despeaux, 2014)	Para qué	Ganar interés por las fuentes primarias. Reconocer dificultades para la reconstrucción histórica. Explicar las matemáticas en contextos no coetáneos. Reconocer que la actividad matemática no es exclusiva de “grandes hombres”.
(Loats, et al., 2014)	Qué	La precisión del relato histórico. Estudio de aspectos biográficos de algunos matemáticos. Preguntas de HM suscitadas por –y de interés de– los futuros profesores.
(Loats, et al., 2014)	Cómo	Escribiendo, de manera individual y colectiva, un relato sobre un acontecimiento y analizando su certeza. Reconociendo aspectos de la vida y obra de un matemático y representando al mismo en un panel. Formulando preguntas y realizando indagaciones que conduzcan a sus respuestas.
(Loats, et al., 2014)	Para qué	Valorar la precisión de la información histórica. Aumentar la conciencia en relación con los matemáticos como personas y la matemática como esfuerzo cultural y humano. Promover la competencia de proponer y responder preguntas sobre la HM.

Tabla 50 Ideas de HM–CPM tratadas en *PRIMUS*

3.1.1.19 Artículos reseñados en el Capítulo 11 del estudio ICMI

Recordemos que este capítulo (Fauvel, et al., 2000) contiene referencias en varios idiomas (Chino, Danés, Holandés, Inglés, Francés, Alemán, Griego e Italiano) o proveniente de varias regiones. Nuestras restricciones para la lectura en otros idiomas y la imposibilidad de conseguir algunos de los documentos, hicieron que no pudiéramos aprovechar la totalidad de las referencias allí citadas. Así, por ejemplo, fue imposible interpretar las cuarenta y ocho referencias en Chino; tampoco pudimos leer dos artículos en Alemán que abordan la relación HM–CPM (Jahnke, 1996; Scriba, 1983).

Por otra parte, advertimos que los documentos reportados en el capítulo en cuestión bajo el subtítulo "11.4 Danés" no incluyen alguna referencia a artículos, pues solo reporta referencias de libros y una revista (pero no sus artículos).

De la literatura escrita en Holandés identificamos un artículo (Huisjes & Langeland, 1992) que, según la descripción en Inglés reportada en el inventario bibliográfico en cuestión, se refiere a los resultados de un cuestionario diligenciado por seiscientos profesores de Matemáticas acerca de su conocimiento sobre la HM y su interés por su uso en el aula. Sin embargo, el artículo referenciado se titula **¿Qué hicieron los egipcios hace 4.000 años con una ecuación diferencial?**[106] y en su contenido no reconocimos intuitivamente que trate sobre el cuestionario. Realizamos una búsqueda en la página de la revista *Nieuwe Wiskrant* (http://www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/) del Instituto Freudenthal, pero no logramos ubicar el artículo que contiene el cuestionario.

En la literatura reportada en Inglés identificamos varios de los artículos ya reseñados antes en este capítulo; de los demás solo reconocimos una referencia que alude a la relación HM–CPM, a saber:

60. **Un curso de Álgebra Abstracta centrado históricamente**[107], (Kleiner, 1998). En este artículo se describe un curso de Álgebra Abstracta que, dirigido a profesores de Matemáticas en ejercicio, se desarrolló en el marco de un postgrado. El autor comenta que la HM, jugó un papel importante pues le permitió responder a la pregunta sobre cuáles son las ideas centrales del Álgebra Abstracta y cuáles de estas serían relevantes para los profesores, de tal suerte que debieran acceder a ellas; al

[106] *Wat deed een Egyptenaar 4000 jaar geleden met een differentiaalvergelijking?*
[107] *A historically focused course in abstract algebra*.

respecto se reporta que la Historia señaló entonces las fuentes del Álgebra Abstracta y por tanto sus ideas centrales, proporcionó motivación y le dio vida a los temas. El curso se centró en mostrar que el Álgebra Abstracta se originó en, y arrojó luz a, la solución de problemas concretos, incluso a otros problemas de los cuales no deviene. Si bien algunos de los problemas tratados son atípicos en un curso de Álgebra Abstracta, son pedagógicamente iluminadores y potentes en ideas algebraicas; además configuran la transición entre el álgebra clásica al álgebra moderna. Por otra parte se reseña que el orden temático usual de un curso (grupos, anillos y campos) fue trasgredido por los problemas tratados y se planteó un nuevo orden más efectivo (anillos, campos y grupos), dejando para lo último tal noción poco natural para los estudiantes. Las fuentes secundarias constituyeron en esencia el material histórico empleado y se procuró la lectura comprensiva de algunas de ellas, así como la escritura de ensayos. Además de la usual pregunta sobre el *cómo* de las ideas matemáticas, se abordaron las cuestiones sobre el *porqué* y el *para qué* de las mismas.

En la literatura francesa referenciada no identificamos artículo alguno referido a la relación HM–CPM.

Como lo comentamos antes, identificamos dos artículos en las referencias en Alemán, pero infortunadamente no logramos conseguirlos para haber procurado su traducción y lectura. Por considerarlos de potencial interés, a nota a pie de página presentamos una traducción de los títulos y de los resúmenes reportados para el artículo de Jahnke (1996)[108] y de Scriba (1983)[109].

La revisión de la literatura griega nos conduce a reconocer, pero no conseguir, un artículo que refiere directamente la importancia de la HM en la formación de profesores (Poulos, 1986); en este caso también debimos conformarnos con la traducción de su título y

[108] **Historia de las matemáticas para los maestros: razones y ejemplos**. La idea de que la Historia de las Matemáticas debe desempeñar un papel en la enseñanza no es nueva, ni tampoco generalizada. Para lograr una posición más importante, la Historia de las Matemáticas debe ser incorporada en la formación docente. Se discuten entonces ejemplos de un curso de Historia, en relación con Newton y Cantor. Es esencial tener un punto de vista hermenéutico, es decir, tratar de entrar en el entendimiento de las personas que vivieron en otra época y cultura.

[109] **El papel de la Historia de las Matemáticas en la educación de los estudiantes y profesores**. En la primera parte se defienden tres axiomas: las Matemáticas sin historia son imposibles; las Matemáticas deben enseñarse dentro de un marco científico, cultural y social; las Matemáticas como un fenómeno cultural no se pueden entender sin consideraciones históricas. En la segunda parte se expone un resumen de los programas de Historia de las Matemáticas de universidades e institutos de formación docente de varios países. Estos cursos sirven como ejemplos de cómo la Historia de las Matemáticas se puede integrar en la formación de matemáticos y profesores.

resumen[110] y no referirlo dentro del listado de artículos estudiados. Para la literatura italiana tuvimos la misma situación; del resumen del artículo en cuestión (Speranza, 1996)[111] se infiere que contiene ideas que apuntan a la racionalidad de la HM en la formación de profesores de Matemáticas.

La Tabla 51 sintetiza las ideas del único artículo reseñado antes.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Kleiner, 1998)	Para qué	Orientar los cursos de Matemáticas dirigidos a la educación de profesores; particularmente, para identificar sus ideas centrales y sus problemas esenciales. Ampliar el marco de respuestas e incluir no solo aquellas referidas al cómo, sino también al por qué y para qué de las ideas matemáticas.
(Kleiner, 1998)	Cómo	La lectura de fuentes secundarias y la escritura de ensayos a partir de estas.

Tabla 51 Ideas de HM–CPM tratadas en los documentos reportados en el capítulo 11 del estudio ICMI.

3.1.1.20 Artículos reseñados en el editorial de *Science & Education* 23 (1) 2014

Recordemos que una parte del editorial (Katz, et al., 2014) reporta treinta y dos lecturas, diez de ellas artículos. Seis de estos ya han sido reseñados antes en este capítulo; estuvimos a punto de descartar los cuatro restantes pues no refieren a la relación HM–CPM, pero decidimos reseñar uno en donde hay unas alusiones a tal relación (Fried, 2001) y descartar tres (Katz, 1993; Kjeldsen & Blomhøj, 2012; Radford, et al., 2007).

61. **¿Pueden coexistir la Educación Matemática y la Historia de las Matemáticas?[112]**, (Fried, 2001). El autor plantea que el objetivo del artículo es cuestionar el supuesto de que es posible combinar la HM y la educación en Matemáticas. Para ello, inicialmente organiza las justificaciones de incorporar un enfoque histórico en tres grupos, a saber: (1) humanizar las Matemáticas, (2) hacer las Matemáticas más interesantes, más comprensibles y más accesibles, (3) dar una comprensión profunda de conceptos, problemas y solución de problemas. Para esta última establece una diferencia en lo que ella significa para los profesores y para los

[110] **La Historia de las Matemáticas y su importancia para la formación de profesores de Matemáticas de la secundaria**. El autor presenta una variedad de valores cognitivos, científicos, educativos, didácticos, culturales y filosóficos de la Historia de las Matemáticas, que están estrechamente relacionados con la profesión de enseñar Matemáticas.

[111] **¿Por qué la Epistemología y la Historia en la formación del profesorado?** El autor reivindica la importancia de la epistemología y la historia en la educación de los profesores de matemáticas posibles. Esta opinión es apoyada por la convicción de que la reflexión epistemológica, que pretende ser una reflexión sobre la construcción del conocimiento, es parte de la reflexión pedagógica.

[112] *Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist?*

estudiantes. Refiere entonces dos modos en los que la Historia ingresa a las clases de Matemáticas: la estrategia de adición (expresada, por ejemplo, en la inclusión de biografías, anécdotas, problemas aislados) y la estrategia de acomodación (ilustrada mediante el uso de un desarrollo histórico en la explicación de una técnica o una idea o asumiendo el esquema histórico como organizador curricular). Luego reseña el problema del tiempo para desarrollar un programa curricular al emplear la estrategia del adición y cómo este problema no es tan evidente al emplear una estrategia de acomodación; alude también al problema de la relevancia de un enfoque histórico en la educación en Matemáticas, a través de lo cual reseña el dilema de introducir un enfoque tal debido al compromiso de los programas y del profesor con la matemática moderna y las técnicas matemáticas modernas. En este punto señala que, más que un estudio de la HM, lo que se hace es un uso de esta lo cual de manera inherente lleva a una mirada anacrónica o distorsionada de la Historia. De esto sigue que el profesor de Matemáticas se enfrenta a un dilema: permanecer fiel a su compromiso con las matemáticas y técnicas modernas y arriesgarse a distorsionar la historia o trivializarla, o bien, adoptar un enfoque genuinamente histórico para la HM y arriesgarse a invertir tiempo en asuntos irrelevantes a las Matemática que tiene que enseñar. Finalmente, considera dos posibles soluciones para el dilema planteado: la acomodación radical o la separación radical, cada una de las cuales implica condiciones especiales para la educación del profesor de matemáticas. La acomodación radical implica necesariamente una reconsideración y valoración de la humanización de las Matemáticas y, en consecuencia, una aproximación a la HM semejante a la que realiza un historiador interesado en comprender el pensamiento y obra de un matemático; ello lleva a cuestionar si la aproximación se debe hacer a través de fuentes originales o secundarias. La separación radical implica abordar dos vías; en una de ellas se responde al compromiso con las Matemáticas y técnicas modernas, mientras que en la otra se responde a la visión histórica de las Matemáticas en tanto que compromete el estudio de fuentes originales, del autor y su obra, del contexto de surgimiento y de su comparación con las condiciones e interpretaciones actuales. Ello conlleva a que el alumno se mueva en dos ambientes que generan al menos concepciones contrarias de las Matemáticas (absolutas y relativas, respectivamente), favoreciendo la versión absolutista en la que las Matemáticas y una visión distorsionada de la Historia. Ambas soluciones (acomodación radical y separación radical) tienen lugar en programas de formación de profesores de Matemáticas, siendo más usual la separación radical en la cual la formación histórica se adquiere a través de cursos para profesores en ejercicio; la acomodación radical por tanto es menos frecuente.

La Tabla 52 sintetiza las ideas pertinentes del artículo anterior.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Fried, 2001)	Para qué	Humanizar las Matemáticas. Hacer las Matemáticas más interesantes, más comprensibles y más accesibles. Dar una comprensión profunda de conceptos, problemas y solución de problemas.
(Fried, 2001)	Cómo	Separación radical. Acomodación radical.

Tabla 52 Ideas de HM–CPM tratadas en los documentos reportados en el editorial de *Science & Education*

3.1.2 Capítulos

En este apartado retomamos los libros reseñados en 2.1.5 y aquellos libros referidos en los catálogos consultados a los que hemos tenido acceso. En cada uno de estos, hemos identificado los capítulos que versan sobre la relación HM–CPM y los hemos reseñado; también, como lo hicimos para los artículos en el anterior apartado, hemos sintetizado la información de nuestro interés en tablas.

Como es natural, algunos de los libros consultados no contienen capítulos sobre esta relación, o un discurso sobre la misma, aunque sí contienen información histórica dirigida a profesores de Matemáticas o a sus estudiantes; este es el caso de “Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria” (Montesinos Sirera, 2000), *Hands on History. A Resource for Teaching Mathematics* (Shell-Gellasch, 2006), *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigueurs, erreurs, raisonnements* (Barbin & Bénard, 2007), *Mathematical Time Capsules. Historical Modules for the Mathematics Classroom* (Jardine & Shell-Gellasch, 2011), *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education* (Sriraman, 2012) y *Handbook on the History of Mathematics Education* (Karp & Schubring, 2014).

De los capítulos reseñados en el catálogo de la *British Society for the History of Mathematics* algunos refieren a la relación HM–CPM, pero son abordados en algunos de los libros citados bajo los numerales 3.1.2.1 a 3.1.2.9. Por otra parte, de los capítulos referenciados en el Capítulo 11 del estudio ICMI, no identificamos alguno que aborde asuntos concernientes a la relación HM–CPM. Finalmente de los catorce libros referenciados en el editorial de *Science & Education* 23(1)2014 hemos conseguido y estudiado diez (Calinger, 1996; Ernest, 1994; Fauvel & van Maanen, 2000; François & Van

Bendegem, 2007; Jardine & Shell-Gellasch, 2011; Katz, 2000b; Katz & Tzanakis, 2011; Shell-Gellasch, 2006; Sriraman, 2012; Swetz, et al., 1995); a los cuatro restantes no hemos logrado aún tener acceso (Katz & Michalowicz, 2004; Knoebel, Lodder, Laubenbacher, & Pengelley, 2007; Laubenbacher & Pengelley, 1999; Shell-Gellasch & Jardine, 2005). De los ocho capítulos referenciados en tal editorial hemos reseñado uno (Clark, 2014) que como capítulo de un *Handbook* aborda explícitamente la relación HM–CPM.

3.1.2.1 *Historical Topics for the Mathematics Classroom* (NCTM, 1969)

Si bien este libro no cuenta con un capítulo específico que verse sobre la relación en cuestión (aunque en principio teníamos la esperanza que el capítulo titulado *The History of Mathematics as a Teaching Tool* sí lo hiciera), el contenido de buena parte del prefacio contiene información desde la cual se pueden hacer inferencias sobre aspectos de la misma; por esta razón a continuación reseñamos dicha información.

62. **Preface**[113], (Baumgart, Deal, Vogeli, & Hallerberg, 1969). Los miembros del panel editorial inicialmente evocan seis principios que orientaron la preparación del libro:

> 1. La lectura del libro no debería requerir como prerrequisito un curso de Historia de las Matemáticas. 2. El libro debería incluir tanto material histórico útil como algunas indicaciones de cómo podría ser usado por el profesor o el estudiante. 3. Los temas generales deberían incluir asuntos de valor matemático significativo, en la medida de lo posible, para todos los grados escolares. 4. El libro debería proporcionar materiales básicos en forma específica y completa para hacer los temas históricos inmediatamente disponibles para ser usados en el aula. Al mismo tiempo debería alentar al profesor o al estudiante a hacer lecturas ulteriores o estudiar el mismo tema o temas relacionados. 5. Si bien el libro debería estar dirigido al profesor y al estudiante en el aula, su contenido debería también permitir su uso, como una referencia o lectura colateral, en cursos de Historia de las Matemáticas y de enseñanza de las matemáticas. 6. Las dificultades inherentes a la sobre simplificación de los desarrollos históricos deberían evitarse tanto como sea posible; sin embargo no es función del libro debatir distinciones sutiles o precedencias oscuras. El principal objetivo del libro es poner a disposición de las clases de matemáticas, material importante desde la historia y desde el desarrollo de las Matemáticas, con la esperanza de que esto incremente el interés de los estudiantes por las matemáticas y su apreciación de los aspectos culturales de esta disciplina. (pp. x-xi).

Luego, reseñan que el contenido del libro es histórico y matemático; su formato de presentación incluye, para cada tema general (números y numerales, cálculos, Geometría, Álgebra, Trigonometría, Cálculo, Matemáticas modernas) una visión panorámica y algunas cápsulas específicas que tratan algunos teoremas, conceptos

[113] Prefacio.

o desarrollos matemáticos dentro del tema general. Advierten además que el principio enunciado con el numeral 2 no ha podido ser atendido y que dejan al profesor la elección del método de incorporar el discurso histórico a sus clases; agregan que no han incorporado tratamientos biográficos, que han procurado excluir diagramas y atender al simbolismo como parte de la HM y que procuraron excluir aspectos de pseudo-historia rechazados por los académicos.

En la Tabla 53 hemos sintetizado las ideas inferidas del prefacio reseñado.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Baumgart, et al., 1969)	Qué	Historia de asuntos relativos a temas matemáticos escolares de todos los grados. Visión panorámica de temas generales (*v.g.*, Geometría, Álgebra, Cálculo) y desarrollos específicos de temas particulares.
(Baumgart, et al., 1969)	Para qué	Disponer de materiales históricos para ser llevados al aula. Alentar al profesor a profundizar en temas y tratamientos históricos de las Matemáticas.

Tabla 53 Ideas de HM–CPM tratadas en el *Yearbook* del *NCTM*

3.1.2.2 *Learn from the Masters!* (Swetz, et al., 1995)

De los 23 capítulos que conforman el libro identificamos uno que contiene alguna información relevante a la relación HM–CPM.

63. **Un curso de temas matemáticos**[114], (Shenitzer, 1995). El autor exhibe algunas ideas acerca de un curso dirigido a profesores, en donde los temas matemáticos propuestos (*v.g.*, evolución del sistema de números; vectores y espacios vectoriales, cuaterniones y álgebras; el Cálculo y sus usos; las geometrías; el concepto de función; Álgebra y Teoría de números; incertidumbre como progreso: algunos descubrimientos de Gödel; el método de Arquímedes), de importancia matemática y cultural, son tratados desde una perspectiva esencialmente histórica; coherente con lo anterior, al autor señala que este no es un curso de HM. La intención del curso es convencer a los participantes de que las Matemáticas son útiles, que algunos de sus problemas son profundos y que la evolución de algunas de sus ideas constituye un capítulo de la historia intelectual. La estrategia del curso implica que el profesor asuma el papel de alguien quien abre una puerta a las riquezas del mundo de las Matemáticas y anima a los estudiantes a tomar la responsabilidad de su propia

[114] *A Topics Course in Mathematics*.

educación, es decir alguien quien conduce a los estudiantes (profesores) a un ambiente de aprendizaje e independencia intelectual.

En la Tabla 54 se resumen las ideas reseñadas.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Shenitzer, 1995)	Qué	Temas matemáticos de importancia matemática y cultural desde una perspectiva histórica.
(Shenitzer, 1995)	Para qué	Convencer de la utilidad de las Matemáticas, de la profundidad de sus problemas y de la evolución de sus ideas como parte de la historia intelectual. Generar un ambiente de aprendizaje e independencia intelectual.

Tabla 54 Ideas de HM–CPM tratadas en *Learn from the Masters!*

3.1.2.3 *Vita Mathematica. Historical research and integration with teaching* (Calinger, 1996)

De las tres decenas de capítulos, organizados en tres partes (Historiografía y fuentes, Estudios históricos, e Integración de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas: Casos fundamentales y selectos) hemos identificado dos, ubicados naturalmente en la tercera parte, que tratan la relación HM–CPM. Richard Laubenbacher y David Pengelley (1996) reseñan su curso de Historia para profesores basado en fuentes primarias, e Israel Kleiner (1996) presenta un curso de HM en el que emplea citas sobresalientes como punto de partida en su enseñanza. Además identificamos un capítulo (Barbin, 1996), perteneciente a la parte del libro titulada *"Historiography and Sources*", que contiene información pertinente sobre la relación HM–CPM. Antes de reseñar los capítulos citados debemos precisar que el título "*History of Mathematics and the Teacher*" del capítulo escrito por Torkil Heiede (1996) nos llevó a creer que su contenido referiría de manera central aspectos de la relación HM–CPM, pero su lectura nos evidenció que estábamos equivocados; lo anterior no obsta para resaltar la idea con la que el autor finaliza su escrito:

> Así la Historia de las Matemáticas no es solo una caja de pinturas con las cuales uno puede hacer más colorida la pintura de las Matemáticas, para capturar el interés del estudiante en sus diferentes niveles de educación; ella es parte de la pintura misma. Si ella es una parte de tal importancia que dará una mejor comprensión de los que las Matemáticas son, si ella ampliará los horizontes de los aprendices, no solo sus horizontes matemáticos, si ella los hará asombrarse, entonces ella debería incluirse en la enseñanza aún si no siempre estamos seguros de los detalles. También se puede decir, y el maestro debe estar dispuesto a dejar de lado un detalle colorido si resulta no ser tan cierto como solía ser, que incluso la mejor anécdota es un obstáculo para la comprensión si no es cierta.

Si incluimos la Historia de las Matemáticas con este espíritu en nuestra enseñanza, podemos correr algunos riesgos con confianza. (p. 241).

64. **Obras matemáticas maestras: Enseñar con fuentes originales**[115], (Laubenbacher & Pengelley, 1996). Los autores exponen algunas ideas acerca del curso titulado "Grandes teoremas: El arte de las Matemáticas", desarrollado en la Universidad del Estado de Nuevo México y dirigido a estudiantes de ciencias, ingenierías, Educación Matemática y Matemáticas. En este los estudiantes leen obras maestras de Matemáticas, de muy diferentes épocas, sin la intervención de un instructor o un intérprete. Las obras corresponden a trabajos de Arquímedes, Omar Khayyam, Giordano Cardano, Evangelista Torricelli, Blaise Pascal, Jacques Bernoulli, Leonard Euler, Nicolai Lobachevsky, Gotthold Eisenstein, William Rowan Hamilton, Arthur Caley, Richard Dedekind, Georg Cantor y John Conway. Los autores señalan que a través de las experiencias de aprendizaje, los estudiantes: experimentan emociones diferentes a las usuales; enriquecen su comprensión del papel de los entornos culturales y matemáticos en la invención matemática; aprecian aspectos estéticos (*v.g.*, claridad, elegancia, sofisticación) de conceptos, técnicas y notación matemática; evidencian claramente la evolución del rigor y la abstracción matemática; perciben las Matemáticas de una manera radicalmente diferente (que involucra apreciarla como resultado de esfuerzos humanos y reconocer los teoremas como resultados de geniales luchas en el universo matemáticos, más que como simples resultados de deducciones lógicas); formulan juicios de valor sobre la calidad de las Matemáticas, sobre la elegancia o torpeza de una demostración o sobre los fundamentos de una aserción; y advierten que hoy en día –aún– se crean Matemáticas. Las lecturas de las fuentes originales se complementan con la de documentos de HM, las discusiones en clase de las interpretaciones logradas de las fuentes originales y la realización de un proyecto en un tema abordado desde la perspectiva histórica y matemática. De esta manera combinan, lo que los autores llaman, un enfoque de descubrimiento y la escritura extensiva.

65. **Un curso de Historia de las Matemáticas para profesores basado en grandes citas**[116], (Kleiner, 1996). El autor reporta aspectos de una experiencia de formación de docentes de Matemáticas en ejercicio que se da en el marco de un programa de maestría, específicamente en un curso obligatorio de Historia de Matemáticas de este, ofrecido en la Universidad de York. El curso se desarrolla a partir de tres

[115] *Mathematical Masterpieces: Teaching with Original Sources*.
[116] *A History-of-Mathematics Course for Teachers, Based on Great Quotations*.

conjuntos de grandes citas que aluden respectivamente a qué son las Matemáticas, las geometrías no-euclidianas y el infinito matemático. Para el autor las citas tienen algunos rasgos pedagógicos llamativos (*v.g.*, son interesantes, generan curiosidad, develan –o llevan a– aspectos importantes de la empresa matemática), presentan atributos didácticos deseables (*v.g.*, embelesan, exacerban, estimulan, motivan, seducen, recrean) y constituyen ejes alrededor de los cuales se puede estructurar el desarrollo de un concepto, resultado o teoría matemática y estudiarlo históricamente; esto último, es decir el estudio histórico de las ideas matemáticas, configura el núcleo del curso. A través de ello se pretende "ampliar la visión de los estudiantes [profesores] sobre los principales asuntos y campos matemáticos, expandir sus horizontes y profundizar su comprensión de las Matemáticas, enseñarles matemáticas elementales desde puntos de vista sofisticados y ampliar la perspectiva sobre las Matemáticas que enseñan, para que puedan juzgar mejor lo que enfatizan en su enseñanza y por qué lo hacen". (p. 261). Además el autor propone que el estudio de la Historia permite a los profesores incrementar su interés por la disciplina, promover un sentido de su importancia y grandeza, y animarlos a preguntarse sobre el porqué y el cómo de esta, aspectos nodales para una enseñanza efectiva de las Matemáticas. Desde el punto de vista metodológico, el autor expone que las citas pueden conllevar un ambiente paradójico y de incertidumbre, lo cual constituye un acicate para aprender; para su comprensión debe disponerse del conocimiento del contexto histórico de enunciación, lo cual justifica el estudio de algunos momentos históricos fundamentales, luego de lo cual se retorna a la discusión sobre las citas para lograr una comprensión significativa de estas.

66. **El papel de los problemas en la Historia y la enseñanza de las Matemáticas**, (Barbin, 1996). Évelyne Barbin arguyendo que los problemas son la impronta de la verdadera mente científica, argumenta que la HM –particularmente una historia de los problemas– afecta los conceptos epistemológicos sobre las Matemáticas que poseen los profesores; en este sentido, sostiene que la HM le muestra al profesor que los conceptos matemáticos son construidos, modificados y extendidos para resolver problemas, y que la historia de los problemas pone en primer plano los procesos de construcción y reificación del conocimiento que surge de la actividad de resolver problemas. Además, sostiene que esa perspectiva histórica, al exhibir obstáculos al desarrollo de las ideas, puede ayudar a los profesores a comprender mejor los errores de los estudiantes. Esto es ilustrado a través de ejemplos que consideran problemas alrededor del concepto de ángulo y del concepto de curva.

La Tabla 55 recapitula las ideas centrales de los tres capítulos anteriormente reseñados.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Qué	Fuentes originales
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Para qué	Tener experiencias de aprendizaje alternativas a las usuales. Valorar los entornos culturales y matemáticos. Apreciar aspectos estéticos de la creación matemática. Evidenciar la evolución del rigor y la abstracción matemática. Percibir las Matemáticas de manera diferente a la usual. Formular juicios de valor sobre las Matemáticas.
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Cómo	Lectura y estudio de fuentes originales. Discusión de interpretaciones de las fuentes originales. Escritura de resultados de estudios matemáticos e históricos.
(Kleiner, 1996)	Qué	Ideas matemáticas centrales
(Kleiner, 1996)	Para qué	Ampliar la visión sobre los principales asuntos y campos matemáticos. Expandir sus horizontes y profundizar su comprensión de las Matemáticas Ampliar la perspectiva sobre las Matemáticas que enseñan, para que puedan juzgar mejor lo que enfatizan en su enseñanza y por qué lo hacen. Incrementar el interés por la disciplina. Promover un sentido de la importancia y grandeza de las Matemáticas. Favorecer la indagación sobre el porqué y el cómo de las Matemáticas.
(Kleiner, 1996)	Cómo	Partiendo del estudio de citas. Estudiando contextos históricos concisos (y tratamientos de las ideas matemáticas) referidos por las citas. Resignificando las citas y sus potenciales implicaciones.
(Barbin, 1996)	Qué	Historia de los problemas
(Barbin, 1996)	Para qué	Afectar los conceptos epistemológicos sobre las Matemáticas, por ejemplo, advertir que los conceptos matemáticos son construidos, modificados y extendidos para resolver problemas. Comprender mejor los errores de los estudiantes.

Tabla 55 Ideas de HM–CPM tratadas en *Vita Mathematica*

3.1.2.4 *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (Katz, 2000b)

Como lo habíamos señalado antes, la cuarta parte (*The Use of History in Teacher Training*) de este libro, naturalmente contiene artículos que abordan la relación HM–CPM. En su orden son:

67. **Un enfoque histórico para desarrollar la importancia cultural de las Matemáticas entre futuros profesores de primaria**[117], (Isaac, Ram, & Richards, 2000)[118]. Una unidad de Matemáticas, "Los orígenes culturales de las Matemáticas", se introdujo en el primer año de un programa de formación de profesores de primaria, con el propósito de modificar su apreciación del mundo de las Matemáticas. Al enfatizar los factores sociales y culturales que influyeron en el desarrollo histórico de las Matemáticas elementales, se esperaba que los estudiantes desarrollaran una apreciación de la importancia cultural de las Matemáticas. Como curso inicial de dicha unidad se propuso un trabajo en torno a ideas geométricas, para lo cual se planearon actividades centradas en la manera como varias sociedades (de China, India, Egipto y Grecia) trataron conceptos y nociones geométricos en su vida práctica e intelectual. Así, los estudiantes exploraron: (i) la Geometría como una ciencia práctica usada para resolver problemas reales, (ii) la Geometría como un medio constructivo y estético donde los patrones, transformaciones y relaciones geométricas predominan, (iii) los requerimientos rituales para construcciones precisas, (iv) la medición como una introducción a los números, sean o no racionales, y (v) la justificación lógica en Geometría. El curso incluyó la evaluación a través de tres actividades: una exposición oral de un artículo de una revista especializada que versara sobre alguno de los aspectos trabajados, un ensayo en el que se plasmaran sus reflexiones y reacciones al desarrollo de la unidad, y la realización de unos ejercicios basados en un documento curricular oficial para el currículo escolar. Al final del semestre con los estudiantes se indagaron aspectos relativos a los cambios en sus creencias respecto de la naturaleza de las Matemáticas y a sus miradas sobre la importancia de las Matemáticas en la solución

[117] *A Historical Approach to Developing the Cultural Significance of Mathematics among First Year Preservice Primary School Teachers*.

[118] Este artículo parece ser una reedición de otro artículo (Isaac, Ram, & Richards, 1996) con el mismo nombre cuyo resumen, traducido al Español, incluimos en seguida: En la *Northern Territory University*, Australia, se configuró un curso para modificar los sistemas de creencias y las percepciones de los futuros profesores de escuela primaria sobre la naturaleza de las Matemáticas y el objetivo de las Matemáticas en la escuela. El trabajo incluyó la Geometría de China, India, Egipto y Grecia. Los resultados fueron variados; muchos estudiantes estaban poco convencidos y se necesitaba más trabajo.

de problemas cuantitativos en sociedades antiguas; si bien se identificaron algunas respuestas que ofrecen evidencias de la utilidad e impacto del trabajo realizado, los autores concluyeron que la mayoría de los estudiantes deben convencerse aún más de que esta aproximación sí les permite redefinir sus percepciones sobre las Matemáticas, que es útil para su formación profesional y que es coherente con su futuro quehacer docente.

68. **El análisis de la "regla falsa" como un ejemplo de desarrollo profesional de profesores de la escuela elemental**[119], (Winicki, 2000). De manera breve el autor intenta describir una aproximación concreta para introducir la HM en programas de formación de profesores y presenta algunos beneficios de esta introducción para el desarrollo profesional de los profesores en ejercicio. La actividad descrita es uno de los talleres desarrollados en un curso llamado "Algunos capítulos en la Historia de las Matemáticas", el cual a su vez es una parte de un amplio programa de formación de profesores; el tema abordado en esta fue las ecuaciones, específicamente los métodos conocidos como la "regla falsa" o la "regla de la falsa posición", esto a pesar de que los profesores de primaria no deban enseñar estos temas, aunque sí enseñarán razones, proporción y situaciones de proporcionalidad. Las tareas propuestas en el taller implicaron trabajo individual, grupal y colectivo; las hojas de trabajo contenían consignas de lectura de materiales históricos (donde se presentaba un problema y un método de solución), de solución de problemas (que incluían la traducción de un problema en ecuaciones y la aplicación del método presentado), y de cuestionamiento y reflexión (¿El método funciona para todas las ecuaciones dadas?, ¿La respuesta final depende de los valores supuestos?, ¿El método funcionará para cualquier ecuación lineal?, ¿El método funcionará para cualquier ecuación?, ¿Por qué cree que se inventó un método tal?). Precisamente la discusión colectiva sobre las respuestas a estas preguntas suscitó la discusión sobre conceptos matemáticos y, muy probablemente por parte de los participantes, la profundización en su comprensión conceptual más que en sus habilidades operatorias relativas al razonamiento proporcional; además, abrió, de manera no artificial, la puerta para introducir algún contenido histórico relativo a la inclusión del simbolismo en la solución de problemáticas matemáticas esenciales en varias culturas. En adhesión a la anterior discusión, se indagó por la opinión de los participantes sobre los métodos estudiados encontrando que no todos coincidían en una valoración positiva. Al final del taller se dio una discusión en torno a algunos

[119] *The Analysis of Regula Falsi as an Instance for Professional Development of Elementary School Teachers*.

asuntos didácticos surgidos a partir de abordar las concepciones de los participantes acerca de lo que tratan las Matemática, cómo se desarrolla, cómo se aprende y cómo se enseña; en este sentido, el autor afirma que este es un ejemplo de que los problemas históricos pueden llevar a los profesores a discutir no solo asuntos de contenido matemático, sino también asuntos didácticos (*v.g.*, aprendizaje a través de la lectura, aprendizaje a partir de ejemplos, explicación de ideas a través de ejemplos, uso de diferentes representaciones de un mismo concepto, uso de material histórico). Al final del documento, el autor reporta que el taller permitió reconocer el aspecto humanístico de las Matemáticas y revalorar la tarea que en este sentido tienen los profesores de Matemáticas; así mismo, advierte la potencialidad de este tipo de actividades a favor del conocimiento meta-matemático de los profesores.

69. **Las Matemáticas y su Historia: una colaboración educativa**[120], (Bruckheimer & Arcavi, 2000). El artículo presenta una visión panorámica de un *programa* de trabajo en torno al conocimiento, uso e integración de la HM en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; esta descripción se hace en dos partes tituladas "historia para profesores" e "historia para estudiantes". En la primera parte los autores comentan que como punto de partida asumieron la suposición de que los profesores se benefician de estudiar HM, y que luego confirmaron empíricamente algunas aserciones e intuiciones y redefinieron algunos objetivos. Así mismo presentan cuatro características, establecidas *a priori*, sobre el trabajo con los profesores, a saber: (i) Participación activa: si bien la lectura de materiales hace parte de la propuesta, ello no constituye el fin; se procura que esta sea el material crudo para "hacer" y "comunicar" las Matemáticas, (ii) Historia "conceptual: El objeto central de estudio es precisamente la evolución de las ideas y temas matemáticos, de tal suerte que aspectos históricos tales como fechas, biografías, anécdotas, etc. ocupan un papel secundario, (iii), Relevancia: Los temas matemáticos objeto de estudio deberían pertenecer o hacer referencia a los contenidos que los profesores enseñan; así mismo, lo que se estudie debe ser potencialmente aplicable en su quehacer docente, (iv) Fuentes primarias: en los talleres girarían en torno a fuentes primarias y documentos históricos, seleccionados bajo criterios de adecuación (*v.g.*, longitud, complejidad). Con respecto a los talleres, los autores comentan que crearon tres secuencias referidas a los números negativos, los números irracionales y las ecuaciones lineales y cuadráticas; casi todos

[120] *Mathematics and its History: An Educational Partnership*.

los talleres están constituidos por extractos de textos matemáticos seleccionados de fuentes primarias, precedidos por introducciones que configuran la escena y provee información histórica, y seguidos por un conjunto de preguntas que orientan la lectura (preguntas que ayudan con el lenguaje del texto fuente, preguntas para aplicar las Matemáticas del texto a este y a otros, preguntas para comparar el tratamiento matemático del texto con el tratamiento actual). Como parte de la preparación de los talleres, hacen una discusión de las ideas del mismo y de información histórica relacionada, y contestan minuciosamente las preguntas propuestas. El artículo contiene información general sobre la estrategia de implementación de las secuencias de talleres y las diversas poblaciones que han participado de los cursos; al respecto llama la atención que en aquella época estaban adaptando una de las secuencias para ser implementada a través de la Internet. Con respecto a los resultados, los autores reportan una respuesta favorable de los participantes; más allá de esto, explican que han observado que los profesores participantes ven las Matemáticas y la evolución de sus ideas desde los lentes de sus prácticas, más que desde los lentes de la Historia. Asimismo señalan que han encontrado evidencia de que: la HM en efecto constituye una manera de proporcionar una mirada más adecuada de las Matemáticas y de la actividad matemática, se gana una cierta sensibilidad hacia maneras alternas de hacer Matemáticas, y las explicaciones de propiedades matemáticas parecen tener un atractivo didáctico y pueden enriquecer el repertorio de explicaciones de los profesores. Al finalizar la primera parte, los autores aluden, describen y ejemplifican dos maneras de uso de la Historia: como información acerca de rostros y vidas detrás de los nombres de los teoremas y como una fuente de inspiración para desarrollos matemáticos y didácticos. En la segunda parte, los autores presentan sus experiencias de integración de la Historia en las clases de matemáticas. No sintetizamos el contenido de esta pues no se refieren específicamente a la relación HM–CPM.

En este mismo libro, pero en otro de sus otros apartados, hemos ubicado un documento que refiere aspectos de la relación HM–CPM.

70. **La Historia de las Matemáticas y su influencia en los problemas pedagógicos**[121], (Grugnetti, 2000). La autora desarrolla ideas y sobre todo ejemplos de tres métodos de influencia de la HM en los problemas pedagógicos, a saber: al usar problemas

[121] *The History of Mathematics and Its Influence on Pedagogical Problems*.

antiguos los estudiantes pueden comparar sus estrategias con las que se plantearon originalmente; la Historia para construir habilidades y conceptos matemáticos; y, —de nuestro particular interés— un análisis histórico y epistemológico permite a los profesores comprender por qué un cierto concepto es difícil para los estudiantes y puede ayudar en la aproximación y desarrollo didáctico. En el desarrollo de este tercer método, la autora toma como objeto matemático de estudio la función; luego de presentar algunos elementos de la historia y evolución de este concepto, invita a tomar de dicha historia ideas para lograr en la escolaridad diferentes enfoques de este concepto, aludiendo que los diferentes niveles de representación de una función llegan a ser necesarios para su comprensión, y que sus diferentes notaciones son complementarias pero no involucran el mismo grado de dificultad.

La Tabla 56 exhibe de manera sintética las ideas de los documentos reseñados de este libro.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Isaac, et al., 2000)	Qué	Factores sociales y culturales que influyen el desarrollo de las Matemáticas elementales. Momentos epistémicos de la Geometría.
(Isaac, et al., 2000)	Para qué.	Apreciar la importancia cultural de las Matemáticas. Modificar las creencias sobre la naturaleza de las Matemáticas.
(Isaac, et al., 2000)	Por qué	Permite redefinir percepciones sobre las Matemáticas. Es útil para la formación profesional. Es pertinente y coherente con el quehacer docente.
(Winicki, 2000)	Qué	Temas de la HM.
(Winicki, 2000)	Para qué	Promover discusión sobre los objetos matemáticos y lograr comprensión conceptual. Reconocer el aspecto humanístico de las Matemáticas y valorar la tarea que en este sentido tienen los profesores de Matemáticas. Favorecer el conocimiento meta-matemático de los profesores.
(Winicki, 2000)	Por qué	Genera una entrada a la discusión de asuntos didácticos.
(Winicki, 2000)	Cómo	Desarrollando talleres que implican trabajo individual, grupal y colectivo en lecturas de materiales históricos, solución de problemas y cuestiones para promover la reflexión ulterior.
(Bruckheimer & Arcavi, 2000)	Qué	Evolución de las ideas y temas matemáticos relacionados con los contenidos que los profesores enseñan. Fuentes primarias.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Bruckheimer & Arcavi, 2000)	Para qué	Ver las Matemáticas y la evolución de sus ideas desde las prácticas docentes. Proporcionar una visión de las Matemáticas y de la actividad matemática adecuada a la docencia. Ganar sensibilidad hacia maneras alternas de hacer Matemáticas. Enriquecer el marco de explicaciones matemáticas.
(Bruckheimer & Arcavi, 2000)	Cómo	Participación activa en la lectura de materiales históricos y en el desarrollo de talleres en torno a estos para cuestionar el lenguaje, aplicar los contenidos matemáticos y comparar los tratamientos contenidos en tales materiales.
(Grugnetti, 2000)	Para qué	Comprender dificultades que presentan los estudiantes. Ayudar en la aproximación y desarrollo didáctico a través de diferentes enfoques de los conceptos e ideas matemáticas.

Tabla 56 Ideas de HM–CPM tratadas en *Using History to Teach Mathematics*

3.1.2.5 *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (Fauvel & van Maanen, 2000)

71. **La Historia de las Matemáticas para la formación de profesores**[122] (Schubring et al., 2000). En sus cerca de cincuenta páginas se desarrollan cuatro apartados que respectivamente presentan: la ubicación en el tiempo de la preocupación sobre la Historia en la educación y formación de los profesores, una mirada panorámica a la situación de la formación en HM en diferentes países, ejemplos de las prácticas de formación, y algunos asuntos y anotaciones de interés.

    En el primer apartado se reconoce que la problemática implicada en el título del capítulo se planteaba ya al inicio del siglo XX, cuando en diversos congresos se reclamaba la enseñanza de la historia de las ciencias en las universidades; para el caso de las Matemáticas esta moción se interpretó como una recomendación de introducir la HM en la formación de profesores de Matemáticas e incluso en la introducción de elementos de dicha historia en el currículo de las Matemáticas del bachillerato. Un siglo después se reconoce que, si bien en lo fundamental se sigue estando de acuerdo con tal reclamo, ha habido cambios en algunos aspectos relacionados con dicha propuesta. Por ejemplo, se han escuchado voces a favor de distinguir el papel que la Historia tiene en la formación de matemáticos —calificándola incluso de innecesaria— y el que esta puede tener en la formación de profesores de Matemáticas; también, ha habido transformación en los propósitos, la

[122] *History of Mathematics for Trainee Teachers.*

composición y la metodología del componente histórico, así como del tipo de profesores a quien se dirige.

En cuanto a la mirada panorámica de la situación de la formación en HM en diferentes países, presentada en el segundo apartado, los autores inicialmente manifiestan que los cursos que se han generado bajo esta intención responden más a iniciativas personales que a consensos institucionales oficiales. Luego de ello, presentan la situación de varios países, para lo cual definen siete grupos de estos, a saber:

- El primer grupo de países (Marruecos, Brasil y Hong Kong) no tienen una amplia tradición en HM ni una comunidad matemática considerable, pero cuenta con equipos de académicos que, basados en investigación y en cualificación de su formación, han incluido cursos de HM en los programas de formación de profesores. En Marruecos se reconoce la intervención de la Historia en los libros de texto y en el diseño de algunas actividades; también se advierte el ofrecimiento de cursos opcionales para la formación de profesores y la realización de seminarios de investigación. La principal fuente material utilizada proviene de una herencia cultural prevalente: la HM árabe. Por otra parte, la Sociedad Brasileña de Matemáticas ha apoyado las iniciativas personales para dar un estatus oficial a la HM en la formación de profesores; en este sentido, no solo se cuenta con cursos en tales programas sino que se ha constituido una comunidad académica que a través de seminarios y eventos ha asumido este como un objeto de estudio. Este fuerte movimiento ha sido particularmente impulsado por una nueva dimensión de la HM conocida como “etnomatemática”. En Hong Kong la iniciativa ha sido tomada a partir de las investigaciones y enseñanzas de Man-Keung Siu; así, la mayoría de los cursos de formación de profesores incluyen algunos elementos de Historia y existe un interés al respecto entre los profesores. Los cursos, dirigidos a profesores de primaria y secundaria, ofrecen un énfasis en la participación de diferentes culturas en el desarrollo de las Matemáticas y una amplia variedad en intenciones y en intensidad horaria les caracteriza.
- Un segundo grupo (constituido por Italia, Holanda, Francia y Alemania) está definido por tener una amplia tradición investigativa y enseñanza de la HM y por contar con una componente histórica no favorablemente establecida. Para el caso de Italia, la formación de matemáticos y profesores de Matemáticas no presenta diferencias sustanciales a este respecto, pues en ambos casos los

cursos de HM son un componente opcional (y complementario) pero no es objeto de evaluación en un examen académico final (*laurea*). Sin embargo, el conocimiento de los momentos más importantes de la HM sí es objeto de evaluación en los exámenes que un profesor debe presentar para ejercer permanentemente su profesión. En Holanda se enseña HM en cinco de las doce universidades como curso opcional no relacionado específicamente con la formación de profesores, en tanto que en los politécnicos su presencia presenta un amplio espectro que va desde la inclusión de alguna información histórica en cursos de Matemáticas a cursos formales. En Francia la HM había sido un asunto de los filósofos, más que de los matemáticos; en consecuencia esta estuvo casi ausente en la formación de profesores de Matemáticas. Tal situación cambió con la constitución de los *IREM*[123] y la posterior creación de la "Comisión Inter-IREM de Historia y Epistemología de las Matemáticas", pues se propuso formación para los profesores en ejercicio en Historia para procurar la introducción de la misma en las clases de Matemáticas y mejorar la comprensión matemática de los profesores al preocuparse de cuestiones epistemológicas de las Matemáticas. En los *UIFM*[124] la Historia tiene un lugar secundario pues no se identifica como parte del programa curricular oficial, aunque se puedan seleccionar temas históricos para desarrollar la tesis, y si bien el Ministerio de Educación menciona la HM como un tema a ser estudiado, establece que este no será evaluado. En Alemania, particularmente en Alemania Occidental, la transformación de los valores culturales y el consiguiente rechazo al historicismo, condujo a la desaparición de las referencias históricas en los libros de texto de Matemáticas. Esta situación fue cambiando y se inició a incorporar la HM como componente opcional en la formación de los profesores, pero la unificación en la República Democrática Alemana generó una presencia no oficial de la Historia en dichos programas; donde se ofrecen cursos de esta, estos responden a iniciativas personales y no presentan una estructura común.

- El tercer grupo de países (representados por Austria, Polonia y Portugal) con comunidades más pequeñas que las del anterior grupo, presentan una mejor condición frente a la enseñanza de la HM. En Austria, la exigencia de presentar exámenes orales en temas de Historia o de Filosofía de las Matemáticas a los futuros profesores, condiciona el ofrecimiento de cursos de HM en las

[123] Institutos de Investigación en Educación Matemática.
[124] Institutos Universitarios de Formación de Profesores.

instituciones de formación de profesores y la existencia de libros de texto de Historia dirigidos específicamente a los profesores. En Polonia la enseñanza de la HM es usual a través de cursos opcionales u obligatorios y en general comparten una estructura temática que incluye una consideración especial a la HM polaca y a la contribución de la Historia a la enseñanza de las Matemáticas, esto a pesar de que los planes de estudios no están regulados por una instancia oficial. En Portugal, los programas de formación de profesores de secundaria incluyen el estudio de uno o dos cursos de HM en los cuales se da lugar al estudio de la HM portuguesa, con el fin de ampliar la comprensión matemática de los profesores y para desarrollar reflexión metodológica sobre la enseñanza práctica; además, los estudiantes escogen un tema de las Matemáticas de la escuela y en torno a este diseñan unidades didácticas basadas en la exploración de la literatura histórica disponible.

- El cuarto grupo (en el cual figura China, Rusia y la República Democrática Alemana) presenta un surgimiento de valores compartidos socialmente en torno de la HM desde el sector educativo o desde posturas políticas. En China se reconoce que los cambios generados por su independencia, a mediados del siglo XX, incluyó un rescate de la HM china, pues estas habías sido olvidadas; ello condicionó el trabajo investigativo y condujo a la revaloración de la tradición china. En cuanto a la formación de profesores, se incluye un curso opcional de dicha historia en los programas curriculares, pero la ausencia de profesionales que la enseñen hace que en ocasiones no se puedan llevar a cabo tales cursos. En Rusia, a pesar de la ausencia de un currículo prescrito oficialmente, en muchos programas de formación de profesores aún se conservan los cursos de HM, y sus respectivos libros de texto, especialmente diseñados en la desaparecida Unión Soviética como una manera de expresión coherente con la idea de la tesis marxista que sostuvo que el desarrollo de las ideas científicas estaba determinado por las condiciones sociales. En la primera República Democrática Alemana también una declaración de Estado estableció la necesidad de estudiar la HM como componente fundamental de la formación de los futuros docentes de secundaria; ello favoreció la introducción de aspectos históricos en los libros de texto aunque no modificó las prácticas de formación; posteriormente la situación cambió y en casi todos los programas se introdujo un curso de HM y se desarrollaron libros de texto y materiales para estos.

- El quinto grupo (que incluye a países como Letonia, Chipre, Gran Bretaña y Estados Unidos) presenta una situación diferente; en estos casos iniciativas personales o institucionales han llegado a impulsar decisiones a nivel de política estatal. Este es el caso de Letonia en el que se reporta la instauración de un curso de HM en la década de los setenta y la posterior elaboración de un libro de texto para este curso; hoy en día existe el curso como parte de las normas para la formación de docentes en Matemáticas, inmerso en un campo de estudio que aborda el estudio de "asuntos educativos". Algo similar sucede en Chipre, pero en este caso la formación histórica incluye a los futuros profesores de primaria, lo cual implica nuevos retos mediados por la exigua formación matemática de estos estudiantes. El caso de Gran Bretaña presenta algunas diferencias; allí existen comunidades académicas de historiadores y de profesores que promueven acciones a favor de la introducción de la HM en la formación de profesores; esto encuentra un ambiente propicio cuando se considera que la población es cada vez más multiétnica y multicultural y se reconoce que la Historia no solo ayuda a promover una visión más humana de las Matemáticas y a superar la ansiedad que esta última genera, sino que permite comprender la construcción multicultural de una disciplina aparentemente generada por un grupo étnico hegemónico particular (y en cierto sentido superior). Una tendencia similar, que atiende al multiculturalismo, se da en los Estados Unidos. Allí, a pesar de las diferentes condiciones que genera una organización federal se puede apreciar que en la mayoría de los programas de formación certificados se exige estudiar un curso de HM; dicha exigencia se justifica en la comprensión de los orígenes de los conceptos matemáticos, deseablemente promovida por estos cursos.
- El sexto (en el que los autores incluyen a Dinamarca como su representante) incluye países en donde la inclusión de la historia ha estado ligada a los cambios sociales que afectan y condicionan el sistema educativo. Así, Dinamarca es un claro ejemplo de ello, pues la necesidad de mostrar un lado más humano y menos tedioso de las Matemáticas ha implicado la definición de directrices que aluden a una enseñanza de las Matemáticas que atienda a su historia, su estructura interna y su aplicabilidad. Consecuentemente se ha requerido de la inclusión de la componente histórica en los programas de formación de profesores de Matemáticas, lo cual ha sido favorecido por la amplia tradición en HM.

- El séptimo y último grupo (representado por Mozambique) lo configuran los países que luego de haber sido colonias de otros, procuran rescatar sus genuinas culturas luego de un intento de aniquilación por imposición de la cultura del colonizador. En la Mozambique de hoy se reconoce una tendencia en esta dirección y los programas de formación de profesores generados después de la independencia contienen esta intención y en efecto la desarrollan. Así, en la formación de los profesores se incorpora el estudio de las Matemática propias de “su” cultura y se entablan comparaciones y diálogos con las Matemáticas de otras culturas, reconociendo más que la hegemonía y prevalencia de una Matemática, la existencia y coexistencia de una perspectiva multilineal y multicultural.

En el tercer apartado, los autores exhiben ejemplos de la actual práctica de formación de profesores de Matemáticas en algunos de los países mencionados antes. Estos ejemplos se encuadran en uno o varios de los propósitos que se identifican para la inclusión de la HM en la formación de profesores, a saber: la enseñanza directa de la HM, la ampliación de la comprensión de las Matemáticas y su consecuente función metodológica epistemológica, el uso de la Historia en las clases de Matemáticas a través del estudio de métodos y técnicas para incorporar los materiales históricos, y la comprensión de la evolución de la profesión docente (o historia de la enseñanza de las Matemáticas). Para la presentación de los ejemplos, los autores deciden agruparlos de acuerdo al público atendido y así generan un primer grupo para los futuros profesores y otro para los profesores en servicio o activos.[125]

En el grupo de las actuales prácticas en la formación inicial de docentes presentan el caso de: (i) Hong Kong con un trabajo sobre el lugar de la historia en la formación de profesores de Matemáticas para la primaria, (ii) Chipre con un programa para profesores de primaria, (iii) Gran Bretaña con un curso que promueve una nueva dimensión en la educación en Matemáticas de los profesores, (iv) Mozambique con una exposición del programa “Matemáticas en la Historia” como parte fundamental de la formación de profesores de secundaria, (v) Marruecos con la descripción de un curso en donde el énfasis se coloca en el análisis epistemológico, (vi) Francia con un trabajo consolidado en torno a un módulo histórico para la formación de profesores

[125] No haremos una exposición de cada uno de los ejemplos, pues consideramos que ellos ilustran lo señalado en el segundo apartado del capítulo objeto de estudio, que hemos procurado sintetizar de manera completa.

de secundaria, y (vii) Alemania con una muestra de un curso de historia de la enseñanza de las Matemáticas.

Entre tanto, el grupo de las prácticas actuales en la formación continuada de los profesores en ejercicio se expone el caso de: (i) Dinamarca con un breve curso de HM, (ii) Francia con unos ejemplos de uso de la HM para profesores de primaria y secundaria, y (iii) Brasil con el tratamiento histórico del concepto de función en la formación continuada.

En el cuarto y último apartado del capítulo, los autores presentan seis asuntos preocupantes que surgen a partir de las experiencias tratadas en los dos apartados anteriores, a saber: (i) Un obstáculo para el uso efectivo de la HM en las clases de Matemáticas es precisamente el estado del conocimiento histórico de los profesores y de los formadores de profesores. (ii) No es factible para todos, la necesidad de un conocimiento general de trasfondo histórico para ser transmitido dentro del contexto de formación en HM, por lo cual se requeriría cooperación con historiadores de otras disciplinas. (iii) Debido a la estrecha relación de la evolución de las ideas matemáticas con los desarrollos de las concepciones epistemológicas y filosóficas, sería necesaria una colaboración por parte de los filósofos de las ciencias. (iv) Las condiciones del conocimiento multidisciplinar exigido para los profesores de primaria y su estado de conocimiento matemático hace que surjan nuevas dificultades a la inclusión de la Historia en sus programas de formación. (v) El impacto efectivo de la Historia en la formación de los profesores no ha sido suficiente ni adecuadamente estudiado; hacerlo implicaría ejecutar acciones más sistemáticas en los programas de formación y en el desempeño de los profesores. (vi) Para realizar mayores progresos en la integración de la Historia en los programas de formación se requiere que existan más especialistas en HM y el desarrollo de más y mejores materiales para la formación en Historia.

En la Tabla 57 hemos recapitulado de manera sintética las respuestas a las preguntas concernientes a la relación HM–CPM.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Schubring, et al., 2000)	Qué	HM universales. HM desarrolladas por la comunidad académica de un país específico o la contribución de tal comunidad a las Matemáticas universales. La contribución de la Historia a la enseñanza de las Matemáticas.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Schubring, et al., 2000)	Para qué	Reconocer la participación de diferentes culturas en el desarrollo de las Matemáticas. Responder adecuadamente a los exámenes para poder ejercer la docencia. Procurar la introducción de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas. Mejorar la comprensión de las Matemáticas. Responder a las exigencias de unas Matemáticas en las instituciones educativas que atiendan a su historia, su estructura interna y su aplicabilidad. Ganar en autoreconocimiento cultural en tanto aportantes y constructores de Matemáticas. Comprender la evolución de la profesión docente en Matemáticas.
(Schubring, et al., 2000)	Por qué	Hay acuerdos en las comunidades académicas sobre la necesidad de la HM en la formación de docentes de Matemáticas. Existen iniciativas personales o de equipos de profesores, más que institucionales, para promover la formación en el conocimiento histórico. Se configuran "instituciones" para favorecer la formación en aspectos históricos de los profesores de Matemáticas. La presencia de la HM es coherente con tesis filosóficas/políticas (*v.g.*, el marxismo) respecto al lugar de las condiciones sociales en el desarrollo de las ideas. Existe una legislación sobre la formación docente que incluye la formación en asuntos históricos de las Matemáticas.
(Schubring, et al., 2000)	Cómo	A través de cursos opcionales u obligatorios de HM. A través de introducción de elementos de la HM en los cursos de formación de docentes de Matemáticas. Por medio de la incorporación de aspectos históricos en los diseños de unidades didácticas o de enseñanza.

Tabla 57 Ideas de HM–CPM tratadas en *History in Mathematics Education*

3.1.2.6 *Math through the Ages. A Gentle History for Teacher and Others* (Berlinghoff & Gouvêa, 2004)

Recordemos inicialmente que en 2.1.5.7, reseñamos este libro. A dicha reseña podemos agregar lo siguiente.

72. **Matemáticas a través del tiempo. Una historia afable para profesores y otros**[126], (Berlinghoff & Gouvêa, 2004). La estructura del libro exhibe: una breve discusión sobre la Historia en las clases de Matemáticas, un apartado que presenta un

[126] *Math through the Ages. A Gentle History for Teacher and Others*.

panorama de la HM, veinticinco ensayos temáticos breves acompañados de preguntas y propuestas de proyectos, y una sección de fuentes bibliográficas sugeridas como consultas ulteriores. Los ensayos ilustran los orígenes de la idea, proceso o tema, algunas veces conectando aparentemente cosas distintas que comparten raíces históricas comunes. Las preguntas y los proyectos pretenden permitirle al lector: aprender más acerca de las ideas matemáticas en los ensayos, hacer o expresar las Matemáticas de maneras históricas, aprender más acerca de la historia matemática del tema, ver cómo y dónde la historia matemática encaja con perspectivas históricas más amplias.

A partir de la reseña citada y de lo anteriormente citado inferimos las ideas presentadas en la Tabla 58.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Berlinghoff & Gouvêa, 2004)	Qué	Panorama de la HM. Breves ensayos sobre temáticas matemáticas básicas.
(Berlinghoff & Gouvêa, 2004)	Para qué	Lograr una comprensión más profunda y enriquecedora de las ideas, conceptos y técnicas matemáticas.
(Berlinghoff & Gouvêa, 2004)	Cómo	Lecturas de ensayos, seguidas de cuestionamientos y proyectos sobre las mismas. Lecturas y estudio de fuentes sugeridas.

Tabla 58 Ideas de HM–CPM tratadas en *Math through the Ages*

3.1.2.7 *Philosophical Dimensions in Mathematics Education* (François & Van Bendegem, 2007)

En este libro identificamos un capítulo que refiere aspectos de la relación HM–CPM de manera un tanto indirecta, pues refiere a una relación análoga expresada en su título.

73. **Integrar la Filosofía de las Matemáticas en cursos de formación de profesores. Un caso griego como ejemplo**[127], (Chassapis, 2007). El autor parte de considerar a la Filosofía de las Matemáticas, ligada a la Historia y la Sociología de las Matemáticas, como un componente fundamental del conocimiento del profesor de Matemáticas. Esta tesis se sustenta en tres argumentos, a saber: (i) la existencia de una asociación directa de la Filosofía de las Matemática y los rasgos fundamentales de la educación en Matemáticas; (ii) las ideas, puntos de vista, concepciones o creencias del profesor acerca de las Matemáticas, su enseñanza y aprendizaje reflejan implícitamente, o están relacionadas con, una filosofía de las Matemáticas; y (iii) la suposición de que una filosofía de las Matemáticas está directamente asociada con una comprensión

[127] *Integrating the Philosophy of Mathematics in Teacher Training Courses. A Greek Case as an Example.*

profunda de y sobre las Matemáticas como disciplina que se enseña. Luego presenta aspectos de un curso dirigido a profesores de Matemáticas de primaria, que pretende que la Filosofía de las Matemáticas explique el conocimiento matemático, los objetos matemáticos, la aplicación de las Matemáticas y la práctica matemática. Así, los temas de Filosofía se eligen en relación con tres aspectos de las Matemáticas escolares (conceptos, procesos y aplicaciones) y se trabajan a través de preguntas provocadoras que logran implicar a los profesores en las discusiones y a través de las cuales se cuestiona la naturaleza del conocimiento y prácticas matemáticas. Específicamente reporta varias unidades que abordan las siguientes temáticas: conceptos matemáticos y sus características; clases, conjuntos y relaciones en Matemáticas; los conceptos de número; las operaciones numéricas; las expansiones del concepto de número; y sobre métodos y medios para enseñar Matemáticas en primaria. Para ello incluyen, además de plantear preguntas estrictamente filosóficas, el estudio de temas como la axiomatización geométrica de Euclides, las paradojas de Russell y Cantor, la hipótesis del continuo, definiciones de número (de Pitágoras, Cantor, Peano o Frege), los sistemas de numeración como constructos culturales, las paradojas sobre el infinito de Zenón y Cantor, etc. Al final del documento presenta una valoración positiva del curso, en tanto que reconoce que logra transformar las visiones de los profesores sobre las Matemáticas y sobre los objetos de enseñanza, a pesar de reconocer la falta de conocimiento matemático por parte de los profesores.

De las descripciones anteriores se pueden inferir las ideas planteadas en la Tabla 59.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Chassapis, 2007)	Por qué	La HM nutre la discusión filosófica sobre el conocimiento matemático.

Tabla 59 Ideas de HM–CPM tratadas en *Philosophical Dimensions in Mathematics Education*

3.1.2.8 *História na educação matemática - Propostas e desafios* (Miguel & Miorim, 2011)

En los dos primeros capítulos de este libro hay sendas pero breves alusiones a aspectos de la relación en cuestión. Así, en un párrafo del primer capítulo, a propósito de una cita de Morris Kline que cuestiona la mistificación que deviene para las Matemáticas en su presentación lógica y acabada, se señala que “Pensamos que este punto de vista de Kline es muy importante, sobre todo cuando se tiene en perspectiva hacer que la HM participe de forma orgánica en el proceso de formación de profesores de Matemáticas” (p. 53). Al final del segundo capítulo, luego de haber presentado la “Historia en la Educación

Matemática como un campo de investigación y de haber expuesto, ilustrado y criticado las perspectivas teóricas que lo determinan (*v.g.*, evolucionista lineal, estructural-constructivista operatoria, evolutiva discontinua, sociocultural, y juegos de voces y ecos) menciona que:

> Nos gustaría señalar, sin embargo, que una limitación que vemos en todos las perspectivas teóricas discutidas en este capítulo es el hecho de que ninguna de ellas parece ir más allá del ámbito restringido de la Historia de las Matemáticas propiamente dicha a la realización de proyectos, tanto en el campo de investigación en educación matemática, como en el plano de la formación de los maestros y aún más en el campo más específico de la educación matemática escolar. En este sentido, no se ve potencial pedagógico alguno en la historia de la Educación Matemática o, más ampliamente, en los terrenos de la Historia y Filosofía en su sentido más amplio. (p. 149)

En el tercer capítulo sí se encuentra un tratamiento más amplio de la relación HM–CPM, razón por la cual a continuación le reseñamos.

74. **Historia, cultura matemática y Educación Matemática en las instituciones escolares: reflexiones y desafíos**[128], (Miguel & Miorim, 2011). Este capítulo se desarrolla a través de seis apartados, titulados: Introducción; Una concepción de historia pedagógicamente vectorizada; Historia pedagógicamente vectorizada e historia-problema; Historia-problema pedagógicamente vectorizada, poder y prácticas sociales; Comunidades de memorias y prácticas sociales; y, Algunas reflexiones finales.

    En la introducción los autores explicitan que la HM debe constituir un punto de referencia para la problematización pedagógica y la transformación cualitativa de la cultura matemática escolar. Reseñan que los planteamientos que se presentarán tienen como base la experiencia de formación de profesores en asuntos de HM, particularmente a través de varias versiones de unos cursos en los que al estudiar HM si bien lograban despertar el interés y la comprensión de los futuros maestros, no conseguían que ellos reconocieran la relevancia pedagógica de la HM para el ejercicio docente. Ante este hecho, procuran una nueva aproximación que combina la HM con la historia de la Educación Matemática, procurando llevar a una "concepción orgánica de participación de la historia en la producción de saber docente", sustentada en una concepción del modo como una cultura matemática se constituye, establece y transforma como prácticas sociales escolares. Se procura

[128] *História, cultura matemática e Educação Matemática na instituição escolar: reflexões e desafios.*

entonces que tal conceptualización cumpla cuatro funciones, a saber: un papel interdisciplinar (al sacar a las Matemáticas de su aislamiento disciplinar), un papel didáctico-metodológico (al generar apropiación y re-significación de los saberes de la cultura matemática escolar), un papel psicológico motivacional (que estimula la participación activa de los futuros profesores) y un papel político crítico (en tanto incita un debate en torno al papel de la cultura matemática en las relaciones de poder).

En el segundo apartado desarrollan la idea de “historia pedagógicamente vectorizada”. Para ello, inicialmente, exponen su desacuerdo con la existencia de una única HM que se pueda insertar en la enseñanza, y platean que las historias que se integran a la cultura matemática escolar deben estar debidamente constituidas con fines explícitamente pedagógicos y estar orgánicamente articuladas a las demás variables que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje escolar de las Matemáticas. En este sentido proponen que las historias de la cultura matemática deben ser escritas desde el punto de vista del educador matemático y no desde el punto de vista del matemático profesional ni como breves episodios de las Matemáticas; precisan que tales historias (a las que denominan “historias pedagógicamente vectorizadas”) no son ni una historia endulzada o suavizada, ni una historia distorsionada, ni una adaptación o transposición didáctica de la HM. Señalan que las historias pedagógicamente vectorizadas se justifican en tanto que la cultura matemática convencional (disciplinar y escindida) presenta resultados terminales sin referencia a su historia, ignorando así la cultura científica y matemática. En este sentido, procuran una “historia institucional de la cultura matemática” que se constituye a partir de los problemas y preguntas que emergen de –y se relacionan con– las prácticas sociales en las que la cultura matemática se involucra al interior de las instituciones. Así, tales historias no tendrían que preocuparse de la construcción autónoma de las ideas matemáticas sino, más bien, de la construcción condicionada, situada y orientada de las ideas matemáticas y de los problemas pedagógicos referidos a la constitución y transformación de esas ideas al interior de la institución escolar.

Con la idea de que la historia-problema es subyacente a la de historia pedagógicamente vectorizada, abren el tercer apartado. Distinguen aquella de la historia factual (o historia crónica o historia narrativa) que concibe el conocimiento histórico como una simple acumulación de hechos, y que al ser utilizada en el aula, solo aporta información factual a modo de ornamento, es decir, que no participa de forma efectiva de la construcción interna del tema. Proponen que una historia-problema es una historia que parte de los problemas que se manifiestan en las prácticas pedagógicas y que se hace pensando en los estudiantes y en sus profesores. Argumentan que una historia-problema no es una fuente de respuestas que soluciona los conflictos de la práctica pedagógica, sino más bien un ámbito de diálogo entre el pasado y el presente que permite construir una nueva historia; en este sentido no es una historia que se pueda usar, sino un campo de diálogo. Bajo estos perspectiva proponen que el problema de partida (*i.e.*, el que se manifiesta en las prácticas pedagógicas) exija y promueva una historia que: sea contada a partir de las prácticas sociales que participaron en la construcción del problema de investigación; trascienda la historia estrictamente técnica del problema; vaya más allá de las diferentes formas de concebir ese problema por parte de diferentes grupos sociales; sea más que una historia de las necesidades que se configuraron en el ejercicio de diferentes prácticas sociales en distintas épocas y contextos; incorpore las razones de base de los desarrollos relativos al problema; estudie las apropiaciones, re-significaciones, repercusiones y transmisiones del problema en diferentes prácticas sociales de distintas épocas y contextos, particularmente en el ejercicio de la práctica social escolar; e, incluya la referencia a instrumentos de dominación, resistencia y libertad producidos en el ejercicio de esas prácticas sociales.

En el apartado titulado “Historia-problema pedagógicamente vectorizada, poder y prácticas sociales” resaltan que las nociones de “poder” y “práctica social” son fundamentales en la comprensión de la propuesta de una historia de tal naturaleza. Por ello, discuten y controvierten de manera abstrusa las ideas y significados que Foucault les asigna.

En el apartado “Comunidades de memoria y prácticas sociales” luego de discutir las ideas de representación colectiva, mentalidad, representación social, representación hegemónica, tradición, comunidades de memoria y comunidades interpretativas, los autores exponen aspectos del trabajo con los futuros docentes. En este sentido precisan que les proponen a los alumnos, la construcción de una memoria individual del tema escogido (*v.g.*, la Trigonometría, los logaritmos, la Geometría o las funciones, en la cultura brasileña), que luego compartirán con toda la clase. Esta tiene como intención proveer un ámbito de problematización de la historia personal y de la historia escolar individual de los futuros profesores, es decir una problematización que opera sobre un conocimiento matemático subjetivado, que a su vez sirve de base tanto para la constitución de una memoria social del grupo de estudiantes, como para la indagación sobre el tema. En el proceso de compartir las memorias individuales, con base en una problematización colectiva dirigida por el profesor, se construye una primera forma de historia de las matemáticas y de la educación matemática escolar, la cual es a la vez conocimiento subjetivo y objetivo. Los autores señalan que allí se identifica una característica de su concepción orgánica de la participación de la historia en la formación de profesores: los estudiantes no se apropian de una historia preconcebida, sino de una historia personalizada y contada a partir de los recursos del mismo grupo de estudiantes. Reseñan que el paso metodológico siguiente implica que los estudiantes propongan, desde sus intereses y expectativas, preguntas orientadoras de las investigaciones que realizarán sobre las Matemáticas escolares relacionadas con los temas, lo cual les llevará a una problematización multidimensional (simultáneamente, epistemológica, lógica, sociológica, axiológica, política, ética, semántica, etc.) en donde comienzan a intervenir la HM y la historia de la educación en Matemáticas. Los autores refieren que ello les ha permitido constatar una contribución significativa la desestabilización y modificación de representaciones del grupo de estudiantes sobre las Matemáticas y sobre la educación escolar en Matemáticas (*i.e.*, sobre su naturaleza, sus objetos, sus métodos, sus potencialidades y límites, etc.), convirtiéndose en una problematización político-filosófica. Este carácter de problematización se expresa más intensamente cuando los estudiantes son conminados a analizar aspectos de la historia de la educación en Matemáticas en su país y, además de verificar un ámbito de transformaciones, establecen diálogos con quienes han promovido los programas oficiales y los libros de texto, a partir de lo cual confrontan los puntos de vista de diferentes comunidades de memorias ligadas a las prácticas sociales. Los autores presentan entonces una nueva fase en la que los estudiantes discuten en sus grupos un conjunto de actividades, diseñadas por los autores, que procuran enfocarse en los temas de estudio a la luz de la literatura disponible y aportar a las preguntas de investigación, desde la perspectiva de otras comunidades de memoria; ello permite que los estudiantes establezcan relaciones y comparaciones, lo que favorece una visión más amplia, profunda, crítica y multidisciplinar del tema. Un penúltimo momento metodológico, incluye la entrevista a profesores en ejercicio y a alumnos, con lo cual se incorporan nuevas comunidades de memoria a la investigación y diálogo; el último momento, refiere a la elaboración de textos que procuran contemplar la complejidad de los diálogos establecidos con las diferentes comunidades de memoria.

En la última sección del capítulo, titulada “Algunas reflexiones finales”, los autores manifiestan que fue en el trabajo con los futuros profesores que fueron advirtiendo que la noción de problematización multidimensional se ajustaba a la concepción de historia-problema y que aquélla constituía a la vez un organizador curricular. También señalan que bajo esta óptica la frontera entre HM e historia de la educación en Matemáticas se vuelve difusa, en tanto que estas participan del diálogo que se instituye en torno a la problematización pedagógica. Finalmente señalan que bajo el supuesto que los hombres producen la historia, a la vez que son constituidos por ella, los futuros profesores deben establecer diálogos con las comunidades de memoria que les permitan constituirlas y constituirse, para así problematizar una cultura matemática y educativa producida por esas comunidades y por ellos mismos.

La síntesis de las ideas expresadas en el libro se presenta en la Tabla 60.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Miguel & Miorim, 2011)	Para qué	Trascender el interés y la comprensión por asuntos matemáticos e históricos y reconocer la relevancia pedagógica de la HM en el ejercicio docente. Sacar a las Matemáticas de su aislamiento disciplinar. Generar apropiación y re-significación de los saberes de la cultura matemática escolar. Estimula la participación activa de los futuros profesores. Incitar un debate en torno al papel de la cultura matemática en las relaciones de poder.
(Miguel & Miorim, 2011)	Por qué	La HM permite disponer de un punto de referencia para la problematización pedagógica y la transformación cualitativa de la cultura matemática escolar.
(Miguel & Miorim, 2011)	Qué	Articulación entre HM e historia de la educación en Matemáticas. Historias pedagógicamente vectorizadas. Historias de la cultura matemática, escritas desde el punto de vista del educador matemático, y relacionadas con las prácticas sociales (*v.g.*, la escolar). Historia de la construcción condicionada, situada y orientada de ideas matemáticas. Historia-problema que parte de los problemas manifestados en las prácticas pedagógicas.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Miguel & Miorim, 2011)	Cómo	A través de una secuencia de acciones, a saber: • Construcción de memorias individuales y colectivas en relación con temas matemáticos. • Proposición de preguntas de investigación sobre los temas. • Diálogo con las memorias de quienes promueven las transformaciones educativas en Matemáticas. • Diálogo con las comunidades de memorias oficiales. • Diálogo con comunidades de memorias representadas por profesores y estudiantes. • Elaboración de textos que contemple la complejidad de los diálogos con las diferentes comunidades de memoria.

Tabla 60 Ideas de HM–CPM tratadas en *História na educação matemática - Propostas e desafios*

3.1.2.9 *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (Katz & Tzanakis, 2011)

Como lo mencionamos en 2.1.5.13 el libro tiene cuatro capítulos que refieren a la relación en cuestión; tres de ellos aluden específicamente a usos de la HM en programas de educación de futuros profesores y profesores en ejercicio. El cuarto de los capítulos (Smestad, 2011b) presenta un estudio en torno a las concepciones sobre la HM que tienen cuatro profesores de Matemáticas y nos parece que no aporta información significativa a las preguntas con las que estamos abordando la relación HM–CPM.

75. **Historia de las Matemáticas para la educación de profesores de primaria o: ¿puedes hacer *algo* aún si no es mucho?**[129] (Smestad, 2011a). En este documento el autor describe aspectos específicos del contexto noruego de educación de profesores y da algunos ejemplos de diferentes maneras en que trabaja la HM con futuros profesores de matemáticas de primaria y básica. Señala que usualmente hay restricciones de tiempo curricular para el trabajo, que la formación con la que llegan los estudiantes es muy básica y que lo que se hace de Historia debe ser parte de un tratamiento más amplio de las Matemáticas. Como propósitos de aprendizaje relaciona: ver que los problemas que los estudiantes enfrentan a menudo se han presentado en la Historia, obtener un sentido general de que las Matemáticas se han desarrollado y darles una dimensión humana y cultural, reconocer diferentes maneras en que la Historia se puede incluir en la enseñanza, y conocer qué preguntas sobre el origen de algunos términos tienen respuesta; más allá de ello, desea que sus estudiantes saboreen la Historia y deseen aprender aún más. Aclara

[129] *History of Mathematics for Primary School Teacher Education Or: Can You Do Something Even if You Can't Do Much?*

que procura que la Historia que integra sea mucho más que anécdotas y biografías, que intenta que sus estudiantes adviertan que esta agrega valor a la enseñanza de las Matemáticas y que en sus clases copia ideas provenientes de conferencias y artículos. Como parte central del documento presenta estrategias o maneras en que trabaja con la HM, a saber: como parte de una conferencia, con fuentes originales, en la elaboración de proyectos de inclusión de la Historia en tareas escolares, en la realización de tareas desde la Historia y a través de juegos etimológicos. Para ilustrar cómo emplea la Historia en las conferencias, presenta aspectos de una conferencia sobre la historia del dibujo en perspectiva; particularmente muestra el uso que hace de cuatro pinturas que proceden de distintas épocas (4000 años a.C., 1410, 1509 y 1919) que exhiben distintos manejos de la perspectiva. Aclara que a través de ello los estudiantes ven que una parte de las Matemáticas se han desarrollado a lo largo del tiempo ligadas a problemas artísticos y matemáticos, reconocen un vínculo entre Matemáticas y arte y, con ello, advierten que las Matemáticas no son estériles. Como ejemplo del trabajo con fuentes originales menciona cómo enfrenta a los estudiantes a leer la primera parte del "*Liber abaci*" en la cual Fibonacci explica en extenso el uso de los numerales hindú-arábigos; a través de ello los futuros profesores reconocen que algo que es familiar para ellos puede no serlo para sus estudiantes y que hay contribuciones de culturas no europeas a las Matemáticas que se estudian en la escuela. Con relación a los proyectos no da mucha información, aunque señala que su realización es muy exigente y provechosa. Respecto de las tareas desde la Historia señala que todas tienen contenido matemático y brindan a los estudiantes la oportunidad de discutir los problemas en grupo; exhibe tareas de Geometría y abogados medievales, de algoritmos de multiplicación a través del tiempo y de teoría de la probabilidad. Los juegos etimológicos refieren al trabajo con los significados de palabras específicas (*v.g.*, trigonometría, intervalo o asíntota). Concluye que la respuesta a la pregunta del subtítulo del capítulo es un sí y que procura hacer algo, aunque no sea suficiente ni magnífico, a través de la integración de la HM en la formación de docentes.

76. **Reflexiones y revisión: evolución de las concepciones de un curso de uso de la Historia**[130], (Clark, 2011). La autora presenta información de la evolución durante cuatro semestres de un curso titulado "Uso de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas" que, en esencia, procura crear oportunidades para que los futuros profesores de Matemáticas consideren usar la HM en la enseñanza. Dicha evolución

[130] *Reflection and Revision: Evolving Conceptions of a Using History Course*.

es registrada y analizada a través de un proyecto que planteó como preguntas iniciales: ¿en qué manera el estudio de la HM impacta el conocimiento matemático, histórico y pedagógico de los futuros profesores?, ¿qué reportan ellos como aspecto significativo de su aprendizaje de la HM? y ¿qué tipo de experiencias de aprendizaje son más prometedoras para incrementar el conocimiento crítico de los futuros profesores? Informa que los estudiantes al inicio del curso, en varias de sus versiones, manifiestan un desconocimiento, y hasta cierta apatía, en torno a la incorporación de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas, razón por la cual ella diseñó actividades y tareas que esperaba proporcionaran a los futuros profesores de aprendizajes matemáticos que los motivara a planear el uso de la Historia; asimismo reporta que el conocimiento matemático y pedagógico de los estudiantes es muy heterogéneo y en algunos casos escaso. Reporta que son tres los focos del curso: trabajar con ideas matemáticas que evolucionan con el tiempo, estudiar y discutir las influencias históricas y culturales sobre –y debido a– el desarrollo de las Matemáticas, y desarrollar el conocimiento pedagógico necesario para integrar una perspectiva histórica en la enseñanza escolar de las Matemáticas. Desde el punto de vista metodológico el curso implicaba la asignación de unas lecturas previas que procuraban soportar la adquisición de nuevo conocimiento (histórico y biográfico para situar adecuadamente el tema, así como de fuentes originales para iluminar un concepto matemático clave). Durante las sesiones los estudiantes examinaban en detalle el concepto matemáticos desde las fuentes primarias; además en las sesiones desarrollaban tareas que les comprometían con las Matemáticas (desde una orientación histórica) y con la consideración de las implicaciones pedagógicas de sus investigaciones históricas. La autora muestra entonces, con sumo detalle, la evolución del proyecto final del curso, el cual en un primer momento (y durante dos semestres) consistió en el diseño de una unidad didáctica que incluía una amplia variedad de partes y requisitos; ante los resultados no muy satisfactorios de este tipo de proyecto, se decide cambiar al diseño de una lección modelo, tarea que implica no solo menos requisitos sino, fundamentalmente, la posibilidad de profundizar en una temática, lo cual exigió ser más selectivos en las fuentes consultadas, así como, emplear más tiempo en su uso, y así aprender más desde la indagación que realizaban. Asimismo, las lecciones se centraron ya no solo en actividades de inicio o en temas básicos, sino que abordaron asuntos más complejos (*v.g.*, el infinito, las sucesiones, leyes de senos y cosenos, teselaciones). Al final del capítulo se plantean algunas reflexiones y conclusiones; una de ellas reconoce la manera en que los futuros logran re-aprender asuntos matemáticos que serán objetos de su enseñanza y los llegan a comprender de manera más profunda y útil para su ejercicio profesional, otra refiere la necesidad de continuar en la reflexión y evolución del curso.

77. **Cartografía de nuestro herencia para el currículo: Estrategias históricas y pedagógicas para el desarrollo profesional de profesores**[131], (Rogers, 2011). El autor reseña la situación actual del currículo para las Matemáticas escolares en Inglaterra y Gales, el cual se basa en cuatro habilidades funcionales (representar, analizar, interpretar y evaluar, y comunicar y reflexionar) y tiene como uno de sus conceptos claves el reconocer las ricas raíces históricas y culturales de las Matemáticas. En seguida menciona que ello genera un reto para la formación de profesores, por cuanto la mayoría no tiene una formación histórica suficiente o no están dispuestos a aprender asuntos nuevos, y hay carencias en los recursos disponibles para la formación requerida. Una estrategia alterna es examinar las ideas fundamentales existentes y producir materiales enriquezcan las experiencias matemáticas de los estudiantes y profesores. En este sentido se reconoce la existencia de una tradición de producción, estudio y uso de materiales que promueven procesos de aprendizaje enriquecidos y el compromiso con los problemas matemáticos; esta tradición podría ser aprovechada para introducir materiales históricos en el aprendizaje basado en la actividad. Por otra parte, reconociendo y posicionándose en la discusión académica acerca de la naturaleza de la HM y sus implicaciones para la educación en Matemáticas, establece que los educadores matemáticos cuentan con un medio de trasmitir el patrimonio al construir puentes entre el contenido curricular y lo que se sabe de HM. Ello requiere elaborar una cartografía de la herencia, para lo cual se opta por la elaboración de mapas de conceptos (no necesariamente planos ni estáticos) a través de los cuales se elaboran narrativas de –y orientaciones en– el mapa. Para ilustrar ello, el autor presenta información acerca de una propuesta de resignificación del método de completar el cuadrado, basado en trabajos históricos y en la construcción de diagramas de la evolución del problema desde los babilonios hasta el Renacimiento italiano. También presenta un mapa de conceptos en torno a una retícula cuadrada de puntos, entendida como situación canónica, en tanto que a través de ella y en torno a ella se pueden desarrollar un amplio rango de actividades e ideas (*v.g.*, la aritmética pitagórica y sus conexiones con la Geometría, la racionalidad e irracionalidad, el ángulo recto en el semicírculo); igualmente exhibe un mapa en

[131] *Mapping Our Heritage to the Curriculum: Historical and Pedagogical Strategies for the Professional Development of Teachers*.

torno a la raíz cuadrada (tableta YBC 7289) en donde se incluyen referencias y lecturas, así como aspectos del currículo y recursos. En suma, el autor propone que la elaboración de tales mapas de conceptos constituye una estrategia que posibilita poner a estudiantes y profesores en contacto con las raíces culturales e históricas de las Matemáticas".

La Tabla 61 sintetiza las ideas planteadas en los cuatro capítulos.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Smestad, 2011a)	Qué	Algo más que anécdotas y biografías. Historia evolutiva. Fuentes originales. Problemas históricos.
(Smestad, 2011a)	Para qué	Ver que los problemas que los estudiantes enfrentan a menudo se han presentado en la Historia. Obtener un sentido general de que las Matemáticas se han desarrollado y darles una dimensión humana y cultural. Reconocer diferentes maneras en que la Historia se puede incluir en la enseñanza. Conocer qué preguntas sobre el origen de algunos términos tienen respuesta. Saborear la Historia y desear aprender aún más.
(Smestad, 2011a)	Cómo	Incorporando la Historia en conferencias. Leyendo fuentes originales. Realizando proyectos que incluyen la Historia en tareas escolares. Desarrollando tareas de contenido histórico. Indagando la etimología de algunas palabras matemáticas.
(Clark, 2011)	Qué	Ideas matemáticas que evolucionan con el tiempo.
(Clark, 2011)	Para qué	Crear oportunidades para que los futuros profesores de Matemáticas consideren usar la HM en la enseñanza.
(Clark, 2011)	Cómo	Lecturas previas de fuentes originales y de información histórica. Discusión de las fuentes originales. Desarrollo de tareas matemáticas con orientación histórica. Realización de un proyecto de inclusión de la Historia en la enseñanza en una unidad didáctica o en una lección.
(Rogers, 2011)	Qué	La herencia o patrimonio matemático ligado al currículo en Matemáticas.
(Rogers, 2011)	Para qué	Advertir y apropiar la riqueza histórica y cultural de las raíces de las Matemáticas.
(Rogers, 2011)	Cómo	Construcción y lectura de mapas de conceptos, sus narrativas y orientaciones.

Tabla 61 Ideas de HM–CPM tratadas en *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*

3.1.2.10 *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching* (Matthews, 2014)

78. **Historia de las Matemáticas en la Educación del profesor de Matemáticas**, (Clark, 2014). La autora del capítulo divide su exposición en siete secciones. En la primera resume los argumentos que abogan por el uso de la Historia en la educación en matemáticas. En las dos siguientes exhibe el papel que ha jugado la HM en la formación de los profesores en distintos países o regiones. En este sentido expresa que ha habido llamados de académicos y de instituciones que orientan la educación en Matemáticas de las poblaciones y la formación de los profesores de Matemáticas, que promueven la necesidad de un conocimiento histórico como parte del conocimiento del profesor, a favor de una enseñanza de las Matemáticas que muestre aspectos no necesariamente técnicos de estas, que revele su carácter evolutivo, creciente y humano, que favorezca la comprensión y contextualización de los objetos matemáticos y que permita ver su relación dialéctica con otras disciplinas. Estos llamados cobran un sentido más preciso cuando en distintas sociedades se hacen sugerencias (y en algunos casos, exigencias) para que las Matemáticas escolares incluyan aspectos culturales o históricos del desarrollo de las Matemáticas. Algunos de estos llamados se han concretado en parámetros de calidad que se exigen a los programas de formación de profesores de Matemáticas y que se interpretan y valoran, casi siempre a través de la existencia de al menos un curso de HM, pero no en todos los programas este es obligatorio y no existe una uniformidad en los *syllabus* de estos; la variedad de enfoques es lo común.

    En la cuarta sección, luego de reseñar la existencia del grupo HPM, asociado al ICMI, menciona que existen varias y diversas razones para integrar la Historia a la enseñanza de las Matemáticas, pero que en varios de los contextos educativos estas pretensiones ceden ante las exigencias que se hacen a los currículos altamente estandarizados, los cuales son objeto de mediciones para verificar su productividad o eficiencia. No obstante esta condición, existe una comunidad académica que propende por el estudio sistemático de la integración de la Historia a la enseñanza. Dicha comunidad enfrenta el problema de disponer de suficientes investigaciones y experiencias empíricas de dicha integración y de sus efectos, lo cual contrasta con una abundante literatura teórica (y en cierto sentido propagandística) al respecto; una de las razones de esta situación es precisamente las carencias en la formación histórica de los profesores de Matemáticas y de sus formadores.

En la quinta y sexta sección, la autora presenta ejemplos de estudios empíricos conducidos con futuros profesores de Matemáticas de primaria o secundaria, respectivamente. Inicialmente advierte que los estudios para el caso de los profesores de primaria son escasos, que varios tienden a centrarse en asuntos como las creencias y actitudes, y que, quizá debido a la variación entre las ofertas formativas, podría haber mucha variación entre los estudios. A través del primer estudio se cuestiona la efectividad de la aproximación histórica en la modificación de creencias tradicionales acerca del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, en tanto que en el segundo estudio se valora de manera negativa la experiencia de desarrollar dos cursos fundamentados en la Historia, pues o bien se incrementaron las actitudes negativas hacia las Matemáticas o no se lograron establecer las conexiones entre el contenido y las actividades de los cursos, quizá debido a que los futuros profesores no percibieron que hubiese una diferencia sustancial, en términos de experiencias, entre un curso habitual y uno fundamentado en la HM; los autores del segundo estudio recomiendan tener muy presente que los temas abordados históricamente estén mejor correlacionados con los temas que los profesores enseñarán. El tercer estudio exhibe aspectos de la construcción de un cuestionario para evaluar las actitudes y creencias hacia el uso de la HM en la educación en Matemáticas, en tanto que el cuarto refiere a un proyecto de investigación sobre el uso que se daría a la Historia en un curso de formación de profesores. Para el caso de la formación de profesores de secundaria, la autora opta por dividir en dos grupos los estudios: aquéllos en que la HM constituye el relato sobre las Matemáticas y aquellos en que la Historia influye en el conocimiento de los futuros profesores. Entre los resultados de los estudios pertenecientes al primer grupo se destacan: una preferencia al uso de la Historia como relato más que un uso de las estrategias y métodos históricos, problemas históricos o fuentes primarias; el incremento no significativo de las actitudes hacia la incorporación de la HM en la enseñanza y la variedad de maneras que un grupo de futuros profesores expresó para lograr tal incorporación en casos concretos; y la necesidad de estudiar sistemáticamente el diseño de los cursos de HM para profesores. En el segundo grupo se relacionan ejemplos que permiten evidenciar: que ha habido pocos estudios acerca de la formación matemática necesaria para estudiar HM y cómo esta puede servir para reflexionar sobre el conocimiento matemático aprendido; que el estudio de la Historia puede llegar a impactar de diferentes maneras los artefactos producidos por los futuros profesores al construir secuencias didácticas y que dicho estudio requiere estar acompañado de cierta motivación; y que valorar el efectivo cambio que la Historia puede llegar a lograr en la comprensión de una temática matemática, por parte de los futuros profesores, no es un asunto sencillo, y que tal valoración puede constituir un aspecto que influya en la concepción sobre la pertinencia de usar la HM en la enseñanza.

Finalmente, en la séptima sección se presenta información sobre seis estudios realizados a usos de la HM en clase de Matemáticas, promovidos por profesores; al respecto se resalta que las ideas de incorporación de la Historia no provenían de los profesores mismos sino de académicos o formadores de profesores. Se concluye entonces que "aunque el progreso es evidente, las preguntas y retos respecto al papel de la Historia de las Matemáticas en la educación del profesor de matemáticas se mantienen." (p. 788)

La Tabla 62 muestra una síntesis de las ideas, a propósito de las preguntas sobre la relación HM–CPM.

Documento	Pregunta	Respuesta
(Clark, 2014)	Qué	Historia como relato. Historia de métodos, estrategias y problemas. Fuentes primarias.
(Clark, 2014)	Para qué	El profesor puede integrar la HM a la enseñanza. El profesor logre mostrar aspectos culturales e históricos de las Matemáticas.
(Clark, 2014)	Por qué	Ha habido llamados de académicos e instituciones a favor de un conocimiento histórico como parte del conocimiento del profesor.
(Clark, 2014)	Cómo	A través de cursos de HM. A través de fundamentar históricamente cursos de Matemáticas o de métodos de enseñanza.

Tabla 62 Ideas de HM–CPM tratadas en *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*

3.2 Análisis y clasificación del contenido de los documentos

Más allá de disponer, a través del contenido de 3.1, de un número amplio de resúmenes de los artículos y capítulos, queremos reconocer en estos y en las síntesis de las ideas planteadas, la respuesta que cada uno de los autores hubiese dado a una entrevista configurada por las preguntas centrales que le hemos planteado a la relación HM–CPM, a saber: por qué, para qué, qué y cómo de la HM en el CPM. Reconocemos sí, que ellos no necesariamente han escrito los documentos para responder las preguntas; en este sentido, no valoramos negativamente la ausencia de respuesta a alguna de las preguntas y advertimos que hemos procurado aprovechar el contenido de los documentos para explicitar las posturas de los diferentes autores.

Como se puede haber evidenciado de la lectura de los artículos y capítulos reseñados en 3.1, estos documentos presentan posturas muy diversas en torno a la relación HM–CPM; ahora, nuestra tarea, para cada una de las preguntas con la que hemos procurado organizar inicialmente el contenido de los documentos, consiste en analizar y clasificar dicha información a través de la identificación de algunas categorías que se reconocen en los documentos mismos. Para ello nos hemos valido del contenido de las tablas que en 3.1 sintetizan los planteamientos y a partir de ellas hemos establecido grupos de respuestas que conllevan a categorías o tipos de posturas. Veamos entonces los resultados obtenidos en relación con cada pregunta.

3.2.1 ¿Por qué se plantea la apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los profesores (en formación o ejercicio)?[132]

Inicialmente reconocemos que esta pregunta se debería contestar con las razones —y no con las intenciones— de incorporar la HM en la educación de los profesores; consideramos necesario hacer esta precisión pues en varios documentos identificamos una cierta mezcla o confusión entre estos dos asuntos, probablemente debida a la relación que se podría establecer entre las respuestas a las preguntas sobre el *porqué* y el *para qué*, o quizá porque la palabra inglesa *why* —utilizada en expresiones como *Why to use History in Mathematics Education?* o *Why Teach History of Mathematics*?, que aparece como parte fundamental de algunos de los documentos estudiados— puede referirse a ambos interrogantes.

Ahora bien, desde nuestra interpretación y análisis, la pregunta en cuestión la responde el conjunto de documentos consultados (reportados en 3.1) arguyendo cuatro argumentos o razones fundamentales. So pena de no ser exhaustivos, consideramos que la HM se incorpora en la educación de los profesores porque: existen gentes o comunidades que tienen interés en hacerlo, hay una valoración social de la historicidad de las Matemáticas, se reconoce en la HM una cornucopia de visiones, y se asume la HM como una fuente de artefactos potencialmente convertibles en herramientas para la actividad docente. El

[132] El contenido de este y el siguiente título es una reelaboración sustancial de una ponencia en un eventos académico (Guacaneme, 2011). En aquella se reconocieron solo algunos de los porqués discutidos acá, pues para esa oportunidad la literatura consultada había sido menor; además el estilo de presentación de resultados y la discusión de los mismos presenta cambios importantes. No obstante lo anterior, algunos textos se corresponden literalmente.

siguiente diagrama representa el conjunto de respuestas a la pregunta sobre el porqué y cada uno de los subtítulos siguientes refiere las ideas sustraídas de los documentos.

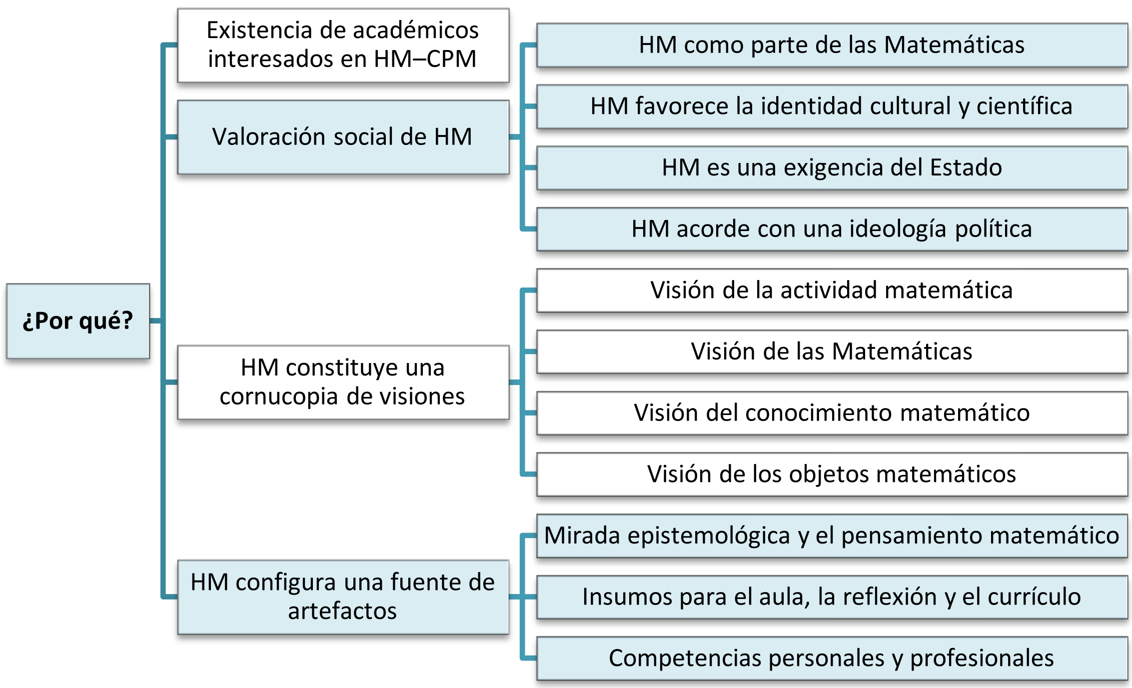

Imagen 3 Respuestas a la pregunta por qué HM en el CPM.

3.2.1.1 Existencia de académicos o comunidades con formación en HM e interés en el CPM

La pregunta en cuestión encuentra en la descripción sobre la situación de la enseñanza de la HM en programas de formación de profesores en varios países, realizada por Schubring y sus colegas (2000), información valiosa no contemplada en otros documentos. De allí, inicialmente, podemos inferir que la existencia de una propuesta educativa de apropiación de la HM por parte de los profesores no depende directamente de la existencia de una amplia tradición en HM ni de la existencia de una comunidad matemática consolidada, reconocida y comparativamente importante; consideramos que ello es así, pues ni historiadores ni matemáticos están conminados a realizar su trabajo persiguiendo objetivos o aplicaciones pedagógicas —que vayan más allá de la simple comunicación de resultados— y menos en el campo de la formación de profesores. No obstante esta respuesta en negativo, se reconoce que una constante que ha favorecido la inclusión de la HM en la educación de los profesores, en principio aparentemente obvia, sí ha sido la existencia de personas o equipos con alguna formación en HM **y**[133] una preocupación por la formación de los profesores de Matemáticas. Es bastante probable que esta condición tenga más efectos prácticos, que la existencia de argumentos académicos para que la HM haga parte de los programas de formación de profesores de Matemáticas; en efecto, sabemos que existen programas que no ofrecen una educación en HM a los futuros profesores, por ausencia de quién oriente esta formación y no por una subvaloración de la HM misma.

Ahora bien, de las posturas de Schubring et al. (2000) y Clark (2014), colegimos que la existencia de los académicos que satisfacen la condición mencionada inmediatamente antes, se puede considerar como una respuesta *de facto* al llamado que han hecho comunidades y académicos a favorecer un componente histórico como parte de la formación de los profesores de Matemáticas.

Copiamos en la Tabla 63 la síntesis de la información que sustenta e ilustra la anterior categoría.

Documento	Respuesta
(Schubring, et al., 2000)	Hay acuerdos en las comunidades académicas sobre la necesidad de la HM en la formación de docentes de Matemáticas.
(Schubring, et al., 2000)	Existen iniciativas personales o de equipos de profesores, más que institucionales, para promover la formación en el conocimiento histórico.
(Schubring, et al., 2000)	Se configuran "instituciones" para favorecer la formación en aspectos históricos de los profesores de Matemáticas.
(Clark, 2014)	Ha habido llamados de académicos e instituciones a favor de un conocimiento histórico como parte del conocimiento del profesor.

Tabla 63 Documentos e ideas que sustentan la primera categoría en relación al por qué

3.2.1.2 Valoración social de la historicidad de las Matemáticas

A partir del mismo documento (Schubring, et al., 2000) reconocemos que la inclusión o exclusión de la HM en la formación de profesores atiende a valoraciones sociales de la historicidad de las Matemáticas. Dichas valoraciones tienen diferentes expresiones.

Una postura extrema con relación a tal valoración, y por ende polémica, es la expuesta por Heiede (1992, 1996) para quien la HM es parte sustancial de las Matemáticas y, por tanto, no puede haber auténtica enseñanza de las Matemáticas sin incluir en esta su historia; muestra de tal postura es la declaración (citada en 3.1.1.14) a partir de la cual aboga por una formación en HM para los profesores, lograda a través de su educación en Matemáticas o bien en cursos especializados.

[133] Resaltamos la conjunción de estas dos condiciones pues ninguna de ellas es en sí misma suficiente.

En una línea argumentativa similar a la de Heiede, pero con un énfasis sociocultural, ubicamos, como una segunda expresión de la valoración, la experiencia de varios países (*v.g.*, Marruecos, Brasil, Polonia, Portugal, China, Mozambique) —reportada por Schubring y sus colegas (2000) en lo que antes (3.1.2.5) ubicamos en el primer, tercero y séptimo grupo de países— que en un intento de reivindicar *su* propia producción y actividad matemática —sin desconocer ni rivalizar con las Matemáticas occidentales ni con su hegemonía— han incorporado en la formación de profesores de Matemáticas el estudio de la historia de "sus" Matemáticas o, si se prefiere, de "su historia" de las Matemáticas. Igualmente, en esta expresión, localizamos los planteamientos de Anacona (2003), al referirse a la Historia social de las ciencias, respecto del lugar de los elementos socioculturales en la HM y su papel en la determinación de una cultura académica propia:

> Desde este tipo de estudios se espera contribuir a una mejor comprensión de las condiciones de nuestra inserción histórica en la modernidad y a una caracterización de una cultura matemática y educativa propia. (Anacona, 2003, p. 35)

Por otra parte, pero desde nuestra óptica también ligado a la valoración social de la historicidad de las Matemáticas, debemos reconocer que la respuesta al por qué se relaciona con las exigencias o políticas del Estado sobre la formación de profesores; estas exigencias se expresan, por ejemplo, en los casos de Austria e Italia —reportados por Schubring y sus colegas (2000)— en la inclusión de un componente histórico o filosófico de las Matemáticas en los exámenes requeridos para poder ejercer la docencia y, por ende, la inclusión de este en la educación de los profesores.

Una cuarta expresión de la valoración de la historicidad de las Matemáticas se reconoce en la descripción que presenta Schubring y sus colegas (2000) del caso chino, ruso y alemán, específicamente cuando aluden a la presencia o ausencia de una ideología política y su consecuente valoración de la Historia y, en consecuencia, de la Historia de las Ciencias y de la HM.

De las cuatro expresiones mencionadas antes, respecto la valoración social de la historicidad de las Matemáticas, las últimas tres contienen una alta carga de especificidad cultural y, por ende, podrían ser poco válidas para todo contexto. Por ejemplo, en países sin una marcada tradición de actividad y productividad matemática, no tendría mayor sentido abogar por una reivindicación de la historia de "sus" Matemáticas; ante la inexistencia de una política específica de evaluación de profesores de Matemáticas, no hay razón para considerar la exigencia de la HM en los exámenes de certificación de idoneidad profesional que se le apliquen a los profesores, independientemente de su área o disciplina de formación; o, en países con ideologías políticas contrarias al marxismo podría existir una oposición a la valoración de la historicidad. La primera de tales expresiones genera enorme discusión en la comunidad de matemáticos, sobre todo en aquellos que valoran las Matemáticas por sus resultados (*v.g.*, teorías, teoremas, demostraciones, aplicaciones), más que por la actividad matemática misma que estos implican y promueven.

La Tabla 64 recapitula la información reseñada antes.

Documento	Respuesta
(Heiede, 1992)	Porque la historia de un asunto es parte del asunto.
(Anacona, 2003)	Aporta al reconocimiento de la identidad cultural/educativa.
(Schubring, et al., 2000)	Existe una legislación sobre la formación docente que incluye la formación en asuntos históricos de las Matemáticas.
(Schubring, et al., 2000)	La presencia de la HM es coherente con tesis filosóficas/políticas (*v.g.*, el marxismo) respecto al lugar de las condiciones sociales en el desarrollo de las ideas.

Tabla 64 Documentos e ideas que soportan la segunda categoría en relación al por qué

3.2.1.3 La Historia de las Matemáticas constituye una cornucopia de visiones

En la mayoría de los documentos que se refieren a la relación "HM–EM" se identifican argumentos, de un orden un tanto diferente a las razones antes expuestas, que también apoyan la respuesta a la pregunta en cuestión; muchos de tales argumentos son expresados respecto del uso de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas y algunos se refieren a programas de formación o niveles de educación diferentes a los de la educación del profesor de Matemáticas. En el espectro documental se encuentran también algunos trabajos (Fried, 2001; Gulikers & Blom, 2001; Jankvist, 2009a; Tzanakis, et al., 2000; Tzanakis & Thomaidis, 2000) que recopilan, categorizan y discuten listas de tales argumentos y que podrían ser reinterpretadas a la luz de la pregunta que estamos contestando. Sin embargo, hemos identificado varios documentos que, en torno a la HM–CPM precisan su racionalidad estableciendo que la HM ofrece visiones sobre la actividad matemática, las Matemáticas, el conocimiento matemático y los objetos Matemáticos. Veamos con mayor detalle los planteamientos para cada una de tales visiones.

Diferentes autores plantan que el estudio de la HM proporciona **visiones de la actividad matemática** que, en general, distan o complementan a aquellas que se consiguen desde el estudio de los resultados matemáticos en sí mismos. En estas posturas, de manera particular, se alude a una perspectiva de la actividad de creación, generalmente oculta en la formulación deductiva de los resultados, y de la actividad de comunicación de los resultados de la actividad matemática. Asimismo se reconoce que la actividad matemática ha estado guiada por muy diversas razones (*v.g.*, utilitarias, internas a las Matemáticas, problemas de otras disciplinas, estéticas, curiosidad intelectual, retos, placer, recreativas) y ha estado influida por factores sociales y culturales. Igualmente, se ve a las Matemáticas como actividad humana exigente, que incorpora errores, argumentos heurísticos, incertidumbre, dudas, argumentos intuitivos, controversias y aproximaciones alternativas a los objetos matemáticos, más que como sistema de verdades. Adicionalmente, se asegura que estas visiones sobre el "hacer Matemáticas" ofrece un marco de referencia para recrear en la enseñanza los aspectos centrales de tal actividad, en tanto ideal de la actividad escolar.

La Tabla 65 refiere los documentos e ideas que apoyan la anterior postura.

Documento	Respuesta
(Arboleda, 1984)	La HM es el medio para revelar la actividad matemática, los procesos de creación de las ideas matemáticas y tomar conciencia del funcionamiento de la investigación en Matemáticas.
(González Urbaneja, 1991)	Apoya la propuesta de un aprendizaje activo a través de la cual se recreen, a través de una actividad investigadora, los procesos de elaboración científica.
(González Urbaneja, 1991)	Ofrece una visión sobre los ingentes esfuerzos que exige un resultado matemático.
(Guyot, et al., 1993)	Ofrece un panorama sobre la creación y producción del conocimiento matemático.
(del Río Sánchez, 1997)	Ofrece principios que orientan la acción docente y condicionan la acción del discente (*v.g.*, la resolución de problemas como fuente de actividad matemática, el trabajo en y sobre estrategias para hacer matemáticas).
(Sierra Vázquez, 2000)	Muestra que las Matemáticas son una actividad humana incardinada en su contexto.

Tabla 65 Documentos e ideas que soportan la primera parte de la tercera categoría en relación al por qué

Son varios los documentos que establecen que el estudio de la HM favorece una **visión de las Matemáticas** en sí mismas. De la(s) visión(es) propuesta(s) sobresale el hecho de que se reconoce a las Matemáticas como una ciencia vinculada o en estrecha relación con otras ciencias y demás manifestaciones del espíritu humano, y determinada por –y determinante para– los contextos culturales históricamente ubicados, así como por el carácter altamente humano en los procesos de creación y comunicación. Además, llama la atención que hay coincidencias al advertir que la visión emergente desde la HM subvierte sustancialmente otras visiones configuradas en ausencia de esta, particularmente las visiones que asumen las Matemáticas como ciencia autónoma e independiente, escindida de cualquier manifestación subjetiva o cultural y altamente absolutista y atemporal.

Naturalmente, varios de los autores destacan que estas visiones emergentes de la HM ofrecen un marco de referencia alterno al usual, para procurar desarrollar en las aulas de Matemáticas enfoques más coherentes con tales visiones y, así, con la naturaleza de las Matemáticas mismas.

La Tabla 66 ofrece un panorama sintético de las fuentes de las ideas expresadas antes.

Documento	Respuesta
(González Urbaneja, 1991)	Permite subvertir creencias (*v.g.*, identificar a la Matemática Moderna como una profunda revolución frente a las matemáticas tradicionales, asumir las Matemáticas como lenguaje más que como ciencia, o reconocer en el rigor –como valor supremo de las Matemáticas– la única vía para acceder a resultados matemáticos).
(González Urbaneja, 1991)	Ofrece un panorama de vínculo entre las Matemáticas y las demás ciencias y, en general, con la Cultura.
(Isaac, et al., 2000)	Permite redefinir percepciones sobre las Matemáticas.
(Gulikers & Blom, 2001	Ofrece la oportunidad de desarrollar un enfoque multicultural en el aula y de interrelación de las Matemáticas con otras disciplinas e incluso de interrelación de dominios matemáticos.
(Anacona, 2003)	Permite ganar conciencia sobre la naturaleza de las Matemáticas y sus consecuencias en la enseñanza.
(Anacona, 2003)	Configura un camino de aprendizaje y reflexión sobre la naturaleza y dinámica de las Matemáticas.
(Anacona, 2003)	Ofrece la posibilidad de mostrar los nexos entre las Matemáticas y otras producciones culturales de la humanidad.
(Anacona, 2003)	Permite reconocer las relaciones entre Matemáticas y experiencia.
(Jankvist, 2009a)	La Historia, como herramienta, es un factor de motivación pues ayuda a mantener el interés en las Matemáticas, le da un carácter más humano a las Matemáticas, o permite reconocer que los matemáticos también tuvieron dificultades en lo que le genera dificultad a los estudiantes.
(Jankvist, 2009a)	La Historia, como meta, permite reconocer que las Matemáticas existen en el tiempo y el espacio, evolucionan a través de la acción de los seres humanos e influidas por las diferentes culturas, y obedecen a fuerzas internas y externas.

Tabla 66 Documentos e ideas que soportan la segunda parte de la tercera categoría en relación al por qué

En una dirección relativamente cercana a la anterior postura, pero con una especificidad un tanto diferente, se identifican planteamientos que le atribuyen a la HM un lugar de determinación de una **visión del conocimiento matemático**. En efecto varios autores reconocen en la HM un laboratorio epistemológico en el cual explorar el desarrollo del conocimiento matemático, reconociendo en consecuencia entre otros asuntos, facetas alternativas de este y apoyando la reflexión filosófica sobre el mismo.

La Tabla 67 recoge de manera sintética los planteamientos aludidos que soportan la idea anterior.

Documento	Respuesta
(González Urbaneja, 1991)	Exhibe la fuerza creativa interna de las Matemáticas.
(Guyot, et al., 1993)	Plantea una nueva relación con el conocimiento matemático.
(Radford, 1997)	Constituye un laboratorio epistemológico para explorar el desarrollo del conocimiento matemático.
(Furinghetti, 2000)	La HM es fuente de reflexiones histórico-epistémicas sobre el conocimiento matemático.
(Sierra Vázquez, 2000)	Constituye un laboratorio epistemológico/curricular en el cual explorar el desarrollo del conocimiento matemático.
(Anacona, 2003)	Constituye un vehículo para concebir el conocimiento matemático en sus facetas no algorítmicas.
(Chassapis, 2007)	La HM nutre la discusión filosófica sobre el conocimiento matemático.

Tabla 67 Documentos e ideas que soportan la tercera parte de la tercera categoría en relación al por qué

Asimismo varias de las posturas manifiestan que la HM ofrece una posibilidad única de lograr **visiones de los objetos matemáticos**; en este sentido se afirma que la HM permite reconocer preguntas, problemas, tratamientos, acepciones, representaciones, formas de pensamiento, etc. sobre objetos matemáticos específicos. Igualmente, se sostiene que la HM exhibe interrelaciones entre objetos matemáticos o con objetos de otras disciplinas y que revela la interdependencia de metaconceptos (*v.g.*, demostración, rigor, evidencia, error) con el carácter evolutivo de los conceptos, de la formas de representación y del lenguaje. También se sostiene que la HM brinda opciones para acceder al estudio de los objetos matemáticos y, por ende, al estudio de las Matemáticas mismas, aportando información sobre el carácter evolutivo de los objetos y sobre diferentes facetas de los mismos.

Algunos de los documentos establecen que esta visión sobre los objetos puede ser particularmente útil al profesor en su actividad docente, en tanto pueden llegar a determinar los objetos mismos de las matemáticas escolares, sus enfoques y tratamientos.

En la Tabla 68 se copian las ideas y documentos en los que se desarrolla específicamente lo anterior.

Documento	Respuesta
(Boero, 1989)	Fuente de ideas para la recontextualización de conceptos matemáticos como instrumentos de conocimiento de aspectos de la realidad.
(Boero, 1989)	Oportunidad de trabajar los conceptos matemáticos como objetos de estudio.
(Boero, 1989)	Opción para abrir un discurso matemático.
(González Urbaneja, 1991)	Da una visión panorámica de los problemas y de la importancia de los temas matemáticos.

Documento	Respuesta
(González Urbaneja, 1991)	Ofrece una visión profunda de los problemas, lo que contribuye a la comprensión y consideración de los contenidos matemáticos impartidos.
(del Río Sánchez, 1997)	Ofrece principios que orientan la acción docente y condicionan la acción del discente (*v.g.*, la importancia relativa de los objetos matemáticos en relación con el contexto de desarrollo de las matemáticas, el carácter humano en la actividad matemática).
(Sierra Vázquez, 2000)	Permite reconocer el surgimiento y la evolución de conceptos, procedimientos, procesos y teorías matemáticas.
(C. O. Suárez Alemán, 2003)	Permite conocer la génesis y evolución de los conceptos, lo cual facilita la comprensión de los mismos y aclara el sentido para el que fueron desarrollados.
(González Urbaneja, 2004)	Muestra una visión de las Matemáticas y de sus objetos que supera la que se obtiene de su versión teórica y ofrece un panorama adecuado para orientar su enseñanza.

Tabla 68 Documentos e ideas que soportan la cuarta parte de la tercera categoría en relación al por qué

3.2.1.4 La Historia de las Matemáticas configura una fuente de artefactos

A través de algunos documentos se ofrece un panorama en el que se reconoce una perspectiva prescriptiva de la HM como fuente de *artefactos*[134], de diferente orden, que favorecen el conocimiento del profesor de Matemáticas o que pueden ser usados en el ejercicio docente.

Un conjunto de documentos se refiere a la metáfora filogénesis/ontogénesis, adaptada al ámbito epistemológico y educativo desde la perspectiva evolucionista de la Biología; otros abordan la perspectiva de la recapitulación propia de la epistemología genética y la emplean como marco de referencia para el caso educativo. Así, unos y otros establecen una **relación entre la mirada epistemológica** sobre la evolución del conocimiento matemático, establecida por aproximaciones históricas al mismo, y **la evolución del pensamiento matemático de los individuos**. Ligado a esto se establecen no solo rutas paralelas entre la evolución del conocimiento matemático en la humanidad y la evolución del aprendizaje de las Matemáticas, o entre las condiciones y prácticas que generaron un desarrollo de las Matemáticas y los contextos para el aprendizaje de las Matemáticas escolares, sino que también se establecen relaciones entre los obstáculos epistemológicos relacionados con ciertos objetos matemáticos y las dificultades o los obstáculos didácticos en el aprendizaje de tales objetos. Todo ello, se reconoce como conocimiento necesario y pertinente para el profesor de Matemáticas, en tanto que puede orientar sus acciones y decisiones didácticas y le ofrece un marco de referencia para interpretar dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas.

[134] En el sentido planteado por Verillon and Rabardel (1995), un *artefacto* llega a ser una *herramienta* cuando los usuarios son capaces de emplearlo para sus propios propósitos.

La Tabla 69 retoma las ideas esbozadas en algunos documentos, que sustentan esta modalidad u orden de artefactos.

Documento	Respuesta
(Gulikers & Blom, 2001)	Ofrece un marco de referencia para la discusión entre filogénesis y ontogénesis adaptada al caso pedagógico.
(Anacona, 2003)	Es un indicador de dificultades para la comprensión.
(González Urbaneja, 2004)	Ofrece a través de una aproximación genética opciones de aproximaciones del aprendizaje.
(Jankvist, 2009a)	La Historia, como herramienta, puede jugar un papel de herramienta cognitiva al promover puntos de vista o modos de presentación diferentes, o al permitir identificar y encarar los obstáculos epistemológicos.
(Jankvist, 2009a)	La Historia, como herramienta, permite reconocer la relación entre ontogénesis y filogénesis.

Tabla 69 Documentos e ideas que soportan la primera parte de la cuarta categoría en relación al por qué

El reconocimiento de la HM como fuente de **insumos para** la actividad matemática en **el aula**, para **la reflexión didáctica** de los objetos de las matemáticas escolares, o para condicionar aspectos de **los currículos** matemáticos, es un asunto tratado en varios de los documentos. Precisamente tales documentos y una síntesis de sus ideas constituyen el contenido de la Tabla 70.

Documento	Respuesta
(Radford, 1997)	Es una fuente de problemas.
(Winicki, 2000)	Genera una entrada a la discusión de asuntos didácticos.
(Anacona, 2003)	Constituye un elemento central en la elaboración de un currículo.
(Anacona, 2003)	Ofrece un ámbito para la elaboración de actividades didácticas de carácter histórico.
(Anacona, 2003)	Ofrece un rico manantial de problemas que pueden ser objeto de un tratamiento lúdico.
(González Urbaneja, 2004)	Constituye un instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza.
(Miguel & Miorim, 2011)	La HM permite disponer de un punto de referencia para la problematización pedagógica y la transformación cualitativa de la cultura matemática escolar.

Tabla 70 Documentos e ideas que soportan la segunda parte de la cuarta categoría en relación al por qué

En algunos documentos se aduce que el estudio de la HM exige y promueve el desarrollo de **competencias personales y profesionales** que van más allá del conocimiento matemático (*v.g.*, leer, escribir, escuchar, buscar fuentes, discutir, analizar y hablar sobre las Matemáticas; sensibilidad, tolerancia y respeto hacia maneras no convencionales de expresar ideas o resolver problemas; valoración de la persistencia y el ánimo ante la adversidad). En otros se plantea, de manera general, el carácter imprescindible, la utilidad y la coherencia del conocimiento histórico de las Matemáticas en relación con el CPM.

La Tabla 71 recoge algunas de las ideas propuestas.

Documento	Respuesta
(Sfard, 1995)	El conocimiento de la HM es imprescindible para el profesor.
(Isaac, et al., 2000)	Es útil para la formación profesional.
(Isaac, et al., 2000)	Es pertinente y coherente con el quehacer docente.
(González Urbaneja, 2004)	Constituye fuente de vocación, motivación, orientación, inspiración y autoformación del profesor de Matemáticas.

Tabla 71 Documentos e ideas que soportan la tercera parte de la cuarta categoría en relación al por qué

3.2.2 ¿Para qué se procura la apropiación del conocimiento histórico de las matemáticas por parte de los profesores (en formación o ejercicio)?

En términos generales se puede afirmar que, desde el contenido de los documentos reseñados en 3.1, la HM se introduce en la educación de los profesores para dotar al profesor de Matemáticas de "instrumentos" para el ejercicio docente. Un grupo de tales instrumentos se refiere a las visiones descritas como respuestas al porqué la HM en el CPM y otro grupo se refiere a los artefactos también descritos allí. En este sentido, identificamos una estrecha relación entre las respuestas al porqué y al para qué.

La Imagen 4 exhibe de manera sintética los grupos de respuestas a la pregunta sobre el para qué HM en CPM, mismas que se desarrollan en seguida.

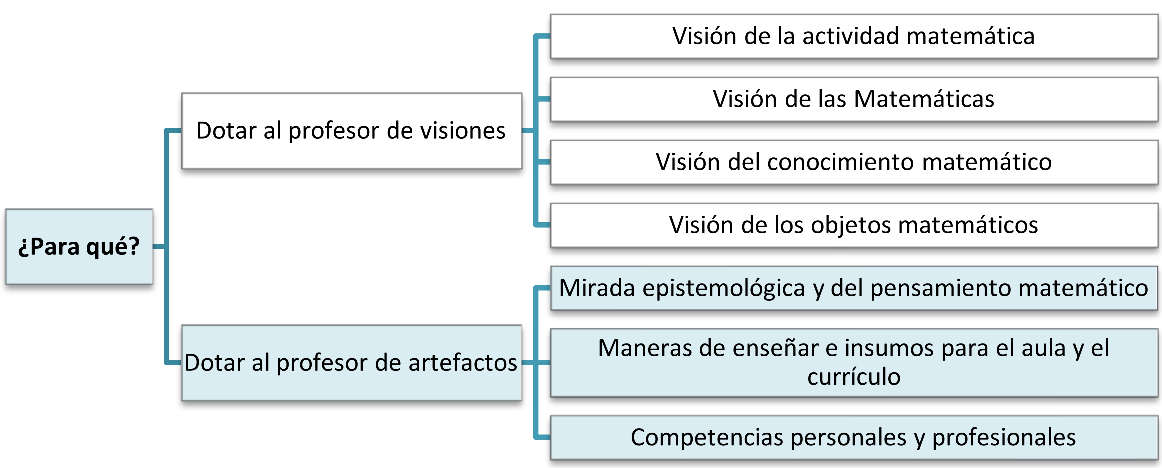

Imagen 4 Respuestas a la pregunta para qué HM en el CPM.

3.2.2.1 Dotar al profesor de visiones pertinentes para su ejercicio profesional

La mirada analítica a los documentos permite identificar un grupo de intenciones que se refieren precisamente a cada una de las visiones reportadas antes como respuestas específicas a la pregunta sobre los porqués de apropiar la HM a favor del conocimiento del profesor. En este sentido, y de manera general, podría inferirse que los autores están reconociendo que construir y disponer de una posición respecto de la naturaleza de la actividad matemática, de las Matemáticas, del conocimiento matemático y de los objetos matemáticos es parte sustancial del CPM, y que, además, la HM favorece sustancialmente dicho posicionamiento.

En efecto un conjunto de autores/documentos, recopilados en la Tabla 72, manifiesta que la intención de la apropiación de la HM por parte del profesor es acceder a **visiones de la actividad matemática** a través de las cuales logre una comprensión de la misma, reconozca que esta tiene distintas facetas, valore el acto creador y advierta el papel de la intuición y la demostración en el mismo, aprecie los aspectos estéticos ligados a la creación matemática, genere sensibilidad hacia maneras alternas de hacer y comunicar las Matemáticas, y evidencie rasgos del carácter humano intrínseco y característico de la actividad matemática, entre otras características.

Documento	Respuesta
(Arcavi, et al., 1982)	Para favorecer la comprensión de temáticas matemáticas y de la actividad matemática en torno a estas.
(Barbin, 1991)	Encarar la naturaleza de la actividad matemática en sus distintas facetas.
(Guyot, et al., 1993)	Incorporar aspectos contextuales, revelar y valorar el acto creador y la revitalizar el papel de la intuición y la deducción.
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Apreciar aspectos estéticos de la creación matemática.
(Bruckheimer & Arcavi, 2000)	Ganar sensibilidad hacia maneras alternas de hacer Matemáticas.
(Sierra Vázquez, 2000)	Lograr una visión de la actividad matemática como actividad humana contextualizada.
(Tzanakis & Thomaidis, 2000)	Abrir nuevas posibilidades de comprensión de la manera como se crean las Matemáticas.
(Barabash & Guberman-Glebov, 2004)	El reconocimiento de la contribución de miembros de su propia cultura a las Matemáticas.
(Charalambous, et al., 2009)	Evidenciar los procesos y luchas a través de los cuales se desarrollaron las Matemáticas.
(Clark, 2012)	Hacer conciencia en los profesores de los procesos de construcción de ideas matemáticas en el tiempo como una manera de concentrar y fortalecer el conocimiento del vínculo entre las matemáticas universitarias y escolares, esencial para la enseñanza.
(Despeaux, 2014)	Reconocer que la actividad matemática no es exclusiva de “grandes hombres”.
(Taani, 2014)	Identificar estrategias alternativas de hacer y comunicar las Matemáticas.

Tabla 72 Documentos e ideas que sustentan la primera parte de la intención sobre las visiones.

En estrecha relación con las visiones de la actividad matemática, reconocemos otro conjunto de documentos/autores que, como intención de la apropiación de la HM por parte del profesor, definen el configurar **visiones de las Matemáticas** adecuadas para el desempeño profesional y más cercanas a los alumnos.

Varios de ellos proponen que la HM permite a los profesores percibir las Matemáticas de manera diferente a la usual y cambiar sus creencias sobre estas e incluso, superar prejuicios relacionados con ellas. Afirman que la HM permite a los profesores establecer las particularidades (*v.g.*, motivaciones, formas de creación, procesos de validación) que definen (*i.e.*, equiparan y distinguen) a las Matemáticas en relación con otras disciplinas y, en este sentido, les permite sopesar su importancia y grandeza; de esta manera los profesores logran mejorar su comprensión sobre las Matemáticas y disponer de conocimiento para entender la distinción e interacción entre contenido y forma de las Matemáticas.

Al establecimiento de tales particularidades también contribuye el reconocimiento del carácter dinámico de las Matemáticas y su utilidad, expresado, entre otros asuntos, en el hecho de que los objetos matemáticos (y meta-matemáticos) son construidos, modificados y extendidos, para resolver problemas matemáticos y extra-matemáticos y que constituyen parte de la historia intelectual de la humanidad y de las historias personales de los sujetos que participaron en su elaboración o de quienes las estudian. De manera cercana y coherente con lo anterior, también algunos autores aluden a que la HM ofrece la posibilidad de que los profesores lleguen a valorar la importancia cultural y la riqueza histórica de las Matemáticas y sus vínculos con los fenómenos sociales y culturales, así como la participación de diferentes gentes y culturas en el desarrollo de las Matemáticas. Esto contribuye de manera especial a humanizar las Matemáticas, en tanto que se puede lograr conciencia en relación con los matemáticos como personas y las Matemáticas como esfuerzo cultural y humano. También el contacto con el contexto social de las Matemáticas puede ayudar al profesor a tomar posición en los debates sobre las relaciones entre Matemáticas y Sociedad. Todo lo anterior, le permite al profesor posicionarse de manera crítica en relación con las Matemáticas y formular juicios de valor sobre las mismas.

Más allá de las anteriores intenciones, encontramos además un planteamiento que insiste en el hecho que la HM dota a las Matemáticas, y por tanto a los profesores quienes la estudian y enseñan, de una parte imprescindible de las mismas, a saber: su historia.

La Tabla 73 ofrece el panorama sintético desde donde se configuraron las anteriores ideas.

Documento	Respuesta
(Grattan-Guinness, 1978)	Lograr comprensión de las Matemáticas que además del conocimiento de las mismas, incluya sus motivaciones, formas de creación, lógica y procesos demostrativos, etc.
(Byers, 1982)	Conocer la naturaleza de las Matemáticas.
(Byers, 1982)	Establecer la distinción y la interacción entre contenido y forma de las Matemáticas.
(Morley, 1982)	Lograr que los futuros profesores reflexionen sobre la naturaleza de las temáticas que trabajarán en sus clases.
(Bos, 1984)	Informar sobre el contexto social de las Matemáticas y ayudar así a tomar posición en los debates sobre las relaciones entre Matemáticas y Sociedad.
(Barbin, 1991)	Humanizar las Matemáticas.
(Heiede, 1992)	Dotar a las Matemáticas de una parte imprescindible: su historia.
(Shenitzer, 1995)	Convencer de la utilidad de las Matemáticas, de la profundidad de sus problemas y de la evolución de sus ideas como parte de la historia intelectual.
(Barbin, 1996)	Afectar los conceptos epistemológicos sobre las Matemáticas, por ejemplo, advertir que los conceptos matemáticos son construidos, modificados y extendidos para resolver problemas.
(Kleiner, 1996)	Promover un sentido de la importancia y grandeza de las Matemáticas.
(Kleiner, 1996)	Favorecer la indagación sobre el por qué y el cómo de las Matemáticas.
(Kleiner, 1996)	Expandir sus horizontes y profundizar su comprensión de las Matemáticas.
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Valorar los entornos culturales y matemáticos.
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Percibir las Matemáticas de manera diferente a la usual.
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Formular juicios de valor sobre las Matemáticas.
(Fauvel & van Maanen, 1997a, (Fauvel & van Maanen, 1997b), (Fauvel & van Maanen, 1997c)	Ver las Matemáticas de manera diferente.
(van Maanen, 1997)	Ganar conciencia sobre el carácter dinámico de las Matemáticas y, en consecuencia, abrir la mente hacia ellas.
(Bruckheimer & Arcavi, 2000)	Proporcionar una visión de las Matemáticas y de la actividad matemática adecuada a la docencia.
(Furinghetti, 2000)	Proporcionar flexibilidad, apertura mental y motivación en relación con las creencias sobre las Matemáticas y su enseñanza.
(Isaac, et al., 2000)	Apreciar la importancia cultural de las Matemáticas.
(Isaac, et al., 2000)	Modificar las creencias sobre la naturaleza de las Matemáticas.
(Schubring, et al., 2000)	Reconocer la participación de diferentes culturas en el desarrollo de las Matemáticas.
(Schubring, et al., 2000)	Mejorar la comprensión de las Matemáticas.
(Fried, 2001)	Humanizar las Matemáticas.

Documento	Respuesta
(C. O. Suárez Alemán, 2003)	Permitir una asimilación mejor del conocimiento matemático y una idea de matemáticas no cerrada, más humana y más cercana a los alumnos.
(Barabash & Guberman-Glebov, 2004)	La superación de numerosos prejuicios relacionados con las Matemáticas.
(Barabash & Guberman-Glebov, 2004)	La identificación de vínculos de las Matemáticas con otros campos del conocimiento y con los fenómenos sociales y culturales.
(Sriraman, 2009)	Cambiar las creencias sobre las matemáticas.
(Miguel & Miorim, 2011)	Sacar a las Matemáticas de su aislamiento disciplinar.
(Rogers, 2011)	Advertir y apropiar la riqueza histórica y cultural de las raíces de las Matemáticas.
(Smestad, 2011a)	Obtener un sentido general de que las Matemáticas se han desarrollado y darles una dimensión humana y cultural.
(Alpaslan, et al., 2014)	Modificar las ideas y creencias sobre las Matemáticas.
(Loats, et al., 2014)	Aumentar la conciencia en relación con los matemáticos como personas y la matemática como esfuerzo cultural y humano.
(Povey, 2014)	Profundizar en la comprensión matemática.
(Povey, 2014)	Ampliar y humanizar las Matemáticas.

Tabla 73 Documentos e ideas que sustentan la segunda parte de la intención sobre las visiones.

Adquirir, cualificar y mejorar una **visión sobre el conocimiento matemático**, constituye una de las intenciones de la apropiación de la HM, presentada por algunos autores. En este sentido, como se observa en la Tabla 74, se advierten voces que promueven la idea de que a través del estudio de la HM, el profesor puede conseguir una visión del conocimiento matemático alterna a la que subyace en –y deviene de– su versión teórica o formal; visión que vincula de manera más adecuada y útil dicho conocimiento a las necesidades de la educación en Matemáticas; igualmente, se observa un interés por referir una visión de aspectos meta-matemáticos, proveída por el estudio de la HM, que se incorpora al CPM y que le permite evidenciar la transformación en el tiempo histórico de los cánones de rigor matemático, de la idea de verdad matemática y de existencia de los objetos matemáticos, entre otros asuntos, a favor de la comprensión de estos en el marco de la enseñanza y aprendizaje escolar.

Documento	Respuesta
(Grattan-Guinness, 1978)	Disponer de presentaciones no formales de los conocimientos matemáticos y emplearlos como derroteros en la educación en Matemáticas.
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Evidenciar la evolución del rigor y la abstracción matemática.
(Sierra Vázquez, 2000)	Tomar postura contra el formalismo y contra el aislamiento del conocimiento matemático.
(Sierra Vázquez, 2000)	Apropiar mejor el conocimiento matemático.
(Winicki, 2000)	Favorecer el conocimiento meta-matemático de los profesores.
(Bagni, 2008)	Promover un posicionamiento epistemológico sobre las Matemáticas y el desarrollo del conocimiento matemático.

Tabla 74 Documentos e ideas que sustentan la tercera parte de la intención sobre las visiones.

Una cuarta expresión de la intención referida a las visiones puede ser reseñada a través de la expresión **visiones de los objetos matemáticos**. El grupo de autores/documentos que promueven y defienden esta expresión anotan que la HM le permite al profesor revelar asuntos ocultos o no necesariamente usuales (*v.g.*, su racionalidad e intención) respecto de los objetos e ideas matemáticos, explorar el carácter evolutivo de diversos conceptos y procedimientos matemáticos y su lugar y estatus en las Matemáticas (e incluso en otras disciplinas), así como identificar distintos significados y sentidos de los conceptos matemáticos y reflexionar sobre tales polisemias; ello contribuye de manera sustancial a una comprensión más profunda y enriquecedora de las ideas, conceptos y técnicas matemáticas, a reflexionar sobre la expresión escolar de estos objetos matemáticos y sobre su enseñanza y, a desafiar algunas creencias existentes sobre tales ideas, conceptos y técnicas.

Estas ideas están representadas en la Tabla 75.

Documento	Respuesta
(Freudenthal, 1981)	No necesariamente para aportar a la comprensión de una temática.
(Arcavi, 1991)	Revelar asuntos ocultos de ideas matemáticas.
(Kleiner, 1996)	Ampliar la visión sobre los principales asuntos y campos matemáticos.
(Hitchcock, 1997)	Procurar ambientes de reflexión sobre los objetos matemáticos y sobre su enseñanza.
(Kleiner, 1998)	Ampliar el marco de respuestas e incluir no solo aquellas referidas al cómo, sino también al por qué y para qué de las ideas matemáticas.
(Winicki, 2000)	Promover discusión sobre los objetos matemáticos y lograr comprensión conceptual.
(Santiago Fernández Fernández, 2001)	Comprender la evolución de los diversos conceptos y procedimientos matemáticos.
(Berlinghoff & Gouvêa, 2004)	Lograr una comprensión más profunda y enriquecedora de las ideas, conceptos y técnicas matemáticas.
(Furinghetti, 2007)	Generar reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos.
(Charalambous, et al., 2009)	Mejorar la comprensión de los contenidos de enseñanza.
(Miguel & Miorim, 2011)	Generar apropiación y re-significación de los saberes de la cultura matemática escolar.
(Smestad, 2011a)	Conocer qué preguntas sobre el origen de algunos términos tienen respuesta.
(Clark, 2012)	Ampliar el conocimiento del profesor sobre aquello que enseña, a aspectos matemáticos, históricos y culturales.
(Fenaroli, et al., 2014)	Identificar distintos sentidos y significados para los conceptos matemáticos.
(Fenaroli, et al., 2014)	Desafiar algunas creencias existentes sobre los conceptos.

Tabla 75 Documentos e ideas que sustentan la cuarta parte de la intención sobre las visiones.

3.2.2.2 Dotar al profesor de artefactos adecuados para su ejercicio profesional

El análisis del contenido de los documentos reseñados en 3.1 ofrece la posibilidad de identificar un segundo grupo de intenciones referidas precisamente a lo que antes denominamos artefactos. Al interior de este grupo se distinguen tres expresiones que se articulan con sendas expresiones expuestas cuando nos referimos a la HM como una fuente de artefactos.

Un primer subgrupo de autores/documentos establece una expresión que considera que la HM permite al profesor disponer de una **mirada epistemológica** en conexión con –**y** determinación de– una **mirada del pensamiento matemático**. En esta perspectiva la HM dota al profesor de una herramienta conceptual sobre el conocimiento y pensamiento matemático, desde la cual ganar en conciencia y, consecuentemente, tomar decisiones educativas más fundamentadas.

Particularmente, la aproximación histórica que refiere al estudio de los obstáculos epistemológicos, de los enfoques poco trascendentes o equívocos de algunos matemáticos a objetos matemáticos, de los procesos de aceptación legítima de propiedades y objetos matemáticos (*v.g.*, la aceptación de un teorema o de su demostración) o de maneras poco ortodoxas de tratamiento de un problema matemático, le brindan al profesor una visión, sensibilidad y disposición enriquecida sobre las maneras de pensar matemáticamente de los estudiantes; en especial, le ofrece la posibilidad de referenciar o entender las dificultades de comprensión o conceptualización y los errores que cometen los estudiantes. También la interpretación de textos históricos –y sus problemas intrínsecos– le ofrece un marco de referencia para comprender de manera profunda la interpretación que hace de las producciones de sus estudiantes. En esta dirección la HM le ofrece un esquema desde el cual ver y entender a sus estudiantes de manera diferente a la que se logra sin el estudio de esta.

En una dimensión semejante a la anterior, pero esta vez enfocada no en los estudiantes sino en el profesor, se afirma que el estudio de la HM le permite al profesor identificar creencias sobre el aprendizaje de las Matemáticas y contrastarlas con sus experiencias de aprendizaje, a la vez que pone de relieve –y hasta evalúa– su conocimiento matemático.

Por otra parte, la HM constituye un ámbito –conjugado con una aproximación filosófica– de estudio de discursos epistemológicos encarnados e ilustrados en la HM, que apoya la reflexión epistemológica y le ofrece la posibilidad de plantearse y responder a problemas de orden epistemológico que surgen en el quehacer docente.

Las anteriores ideas pretenden recopilar las expresadas en la Tabla 76.

Documento	Respuesta
(Arcavi, 1991)	Sensibilizar y disponer a las dificultades de comprensión de los estudiantes.
(Radford, 1995)	Entender las dificultades cognitivas experimentadas por los estudiantes e interpretar los errores y conceptualizaciones incorrectas que surgen cuando aprenden temas matemáticos específicos.
(Sfard, 1995)	Ser consciente de las dificultades profundamente ocultas (*v.g.*, los obstáculos ontológicos), relativas al aprendizaje de nuevos conceptos
(Barbin, 1996)	Comprender mejor los errores de los estudiantes.
(Bkouche, 1997)	Constituir un discurso epistemológico que apoye la reflexión epistemológica.
(Bkouche, 1997)	Responder a problemas de orden epistemológico que surgen en el quehacer docente.
(Fauvel & van Maanen, 1997a (Fauvel & van Maanen, 1997b), (Fauvel & van Maanen, 1997c)	Ver a los alumnos de manera diferente.
(Grugnetti, 2000)	Comprender dificultades que presentan los estudiantes.
(Sierra Vázquez, 2000)	Reconocer obstáculos, dificultades, errores y creencias.
(Waldegg, 2004)	Identificar creencias sobre el aprendizaje de las Matemáticas y contrastarlas con sus experiencias de aprendizaje.
(Arcavi & Isoda, 2007)	Articular la interpretación de textos históricos a la interpretación de la producción de los estudiantes.
(Bagni, 2008)	Dotar al profesor de una herramienta conceptual sobre el conocimiento y pensamiento matemático, para tomar decisiones educativas.
(Smestad, 2011a)	Ver que los problemas que los estudiantes enfrentan a menudo se han presentado en la Historia.
(Clark, 2012)	Poner de relieve el conocimiento previo de los futuros profesores (y, a menudo vacíos o comprensiones incompletas) e impulsar consideraciones sobre las dificultades de sus futuros alumnos.
(Fenaroli, et al., 2014)	Reflexionar sobre las dificultades relacionadas con los conceptos matemáticos.

Tabla 76 Documentos e ideas que sustentan la primera parte de la intención sobre los artefactos.

Un segundo subgrupo de autores/documentos, por demás comparativamente numeroso, sostiene que la apropiación de la HM por parte del profesor le ofrece como réditos maneras alternas de enseñar, un sinnúmero de insumos para el aula y bases para orientar el currículo.

En cuanto al aporte del estudio de la HM a las **maneras de enseñar** se encuentran voces que sugieren y defienden el uso del conocimiento histórico de las Matemáticas para favorecer las referencias sobre maneras alternas –a la dogmática empleada en la enseñanza– de construcción de objetos matemáticos, de los papeles de las gentes y comunidades vinculadas en tal construcción y, en consecuencia, de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas; en cierto sentido, se propugna un estilo ilustrado, consciente y crítico –aportado por la HM– para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Otras voces se manifiestan a favor de "incluir"[135] la HM en la enseñanza de las Matemáticas y, por tanto, condicionarla y transformarla; algunas de estas voces, además recomiendan que se desarrolle algún trabajo para que el profesor logre reconocer esas diferentes modalidades en que la HM se puede incluir en la enseñanza y que se le pueda dotar de métodos y técnicas para la inclusión de materiales históricos en la enseñanza. A estas voces –u ocasionalmente en contra de aquéllas– se suman otras que cuestionan profundamente los argumentos sobre la intención de la HM en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Un segundo ambiente de réditos, en cierto sentido ligado al anterior, se refiere a la posibilidad de encontrar en la HM una **fuente de insumos para el aula** (*v.g.*, información, materiales o recursos para la enseñanza) que favorezcan el diseño de tareas matemáticas, la explicación y presentación de ideas/temas matemáticos, la motivación para promover el aprendizaje, la comprensión de conceptos y problemas, o la exhibición de aspectos culturales e históricos de las Matemáticas. En esta perspectiva el estudio de la HM tiene como intención que el profesor conozca tal fuente de abastecimiento de problemas, situaciones, anécdotas, tratamientos, etc. para que en su momento pueda acudir a ella y usar tales recursos en la enseñanza de las Matemáticas. A este respecto, no sobra agregar que la literatura que aborda la relación HM–EM —ver Capítulo 2— ofrece un amplísimo espectro de ejemplos de materiales históricos que pueden ser (y han sido) utilizados, con mayor o menor grado de adecuación, en las clases de Matemáticas.

Como lo señalamos antes, la HM le proporciona al profesor **bases para orientar el currículo**. En esta dirección se postula que la HM ofrece un marco de referencia que permite comprender algunas cuestiones que determinan –o determinarían– el currículo en Matemáticas en general (*v.g.*, la importancia y pertinencia de las ideas matemáticas, los énfasis temáticos y su racionalidad, la estructura interna de las Matemáticas, la aplicabilidad de los resultados matemáticos). En este sentido, algunas posturas valoran la HM como fuente de decisiones curriculares[136]; otras, incluso, depositan en la HM la opción

[135] Con este verbo queremos condensar y aludir a otros (*v.g.,* usar, introducir, incorporar, integrar) que se emplean en la literatura estudiada, con diferentes niveles de significación.

[136] Bajo esta óptica se considera también la historia de la educación en Matemáticas (particularmente las perspectivas sobre la evolución de los planes de estudios de Matemáticas) como un insumo importante para la definición y comprensión curricular.

para ofrecer un contexto y tono diferente para los procesos en los que la educación en Matemáticas se desarrolla y cambiar así la imagen del proceso educativo. En una dimensión menos general, se presenta la HM como un marco de referencia para estructurar cursos específicos para la educación en Matemáticas, en particular para estructurar el orden temático, la articulación y jerarquía temática, o el enfoque de estos. Si bien en esta última dirección la mayoría de documentos refieren al currículo para la Educación Básica y Media, existe al menos un documento que precisa esta intención a favor de los cursos de Matemáticas de la Educación Superior dirigidos a la formación de profesores de Matemáticas.

La Tabla 77 exhibe de manera sintética las fuentes de las anteriores ideas.

Documento	Respuesta
(Baumgart, et al., 1969)	Disponer de materiales históricos para ser llevados al aula.
(Grattan-Guinness, 1978)	Disponer de marcos de referencia que sirvan de base en la estructuración de un curso de Matemáticas.
(Freudenthal, 1981)	Disponer de una cornucopia disponible para la instrucción, pero no para momentos preestablecidos.
(Morley, 1982)	Comprender algunas cuestiones sobre el currículo en Matemáticas.
(Hickman & Kapadia, 1983)	Valorar la importancia y pertinencia de las ideas matemáticas que configuren, o puedan configurar, el currículo de matemáticas.
(Hickman & Kapadia, 1983)	Disponer de una visión desde la cual idear presentaciones de las ideas matemáticas.
(Arboleda, 1984)	Disponer de conocimiento para orientar una enseñanza no dogmática.
(Barbin, 1991)	Acceder a conceptos epistemológicos y filosóficos que permean los textos matemáticos.
(Fauvel, 1991b)	Favorecer el conocimiento del profesor y sus acciones educativas en el aula
(Führer, 1991)	Proporcionar insumos para el diseño de tareas matemáticas para el aula.
(Führer, 1991)	Ofrecer un contexto y tono diferente para los procesos en los que la educación en Matemáticas se desarrolla.
(González Urbaneja, 1991)	Influir positivamente en las motivaciones para, y en la manera de, enseñar Matemáticas.
(Führer, 1992)	Cambiar la imagen del proceso educativo.
(Führer, 1992)	Ir más allá de argumentos superficiales sobre las intenciones de la HM en el aula.
(Heiede, 1992)	Cuestionar argumentos superficiales sobre las intenciones de la HM en el aprendizaje de las Matemáticas.
(Fernandez, 1994)	Ilustrar maneras adecuadas e inadecuadas de enseñar las Matemáticas.
(Radford, 1995)	Iluminar las decisiones relativas al conocimiento a ser enseñado y proporcionar nuevas maneras de organización y articulación temática.
(Swetz, 1995a)	Reconocer el vínculo entre la pedagogía de las Matemáticas y las obras matemáticas históricas y advertir que estas últimas son fuente de la primera.
(Kleiner, 1996)	Ampliar la perspectiva sobre las Matemáticas que enseñan, para que puedan juzgar mejor lo que enfatizan en su enseñanza y por qué lo hacen.

Documento	Respuesta
(Kleiner, 1998)	Orientar los cursos de Matemáticas dirigidos a la educación de profesores; particularmente, para identificar sus ideas centrales y sus problemas esenciales.
(Bruckheimer & Arcavi, 2000)	Ver las Matemáticas y la evolución de sus ideas desde las prácticas docentes.
(Bruckheimer & Arcavi, 2000)	Enriquecer el marco de explicaciones matemáticas.
(Grugnetti, 2000)	Ayudar en la aproximación y desarrollo didáctico a través de diferentes enfoques de los conceptos e ideas matemáticas.
(Schubring, et al., 2000)	Procurar la introducción de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas.
(Schubring, et al., 2000)	Responder a las exigencias de unas Matemáticas en las instituciones educativas que atiendan a su historia, su estructura interna y su aplicabilidad.
(Sierra Vázquez, 2000)	Presentar mejor los temas.
(Tzanakis & Thomaidis, 2000)	Contribuir a sugerir maneras alternas de presentar las Matemáticas y variar las condiciones para que puedan ser comprendidas.
(Fried, 2001)	Hacer las Matemáticas más interesantes, más comprensibles y más accesibles.
(Fried, 2001)	Dar una comprensión profunda de conceptos, problemas y solución de problemas.
(Gulikers & Blom, 2001)	Promover unas matemáticas más dinámicas y vívidas en el aula, así como ser fuente de recursos materiales útiles para el aula.
(Furinghetti & Paola, 2003)	Disponer de conocimiento sobre uno de los campos de conocimiento vinculados al diseño de una secuencia que involucre la HM.
(C. O. Suárez Alemán, 2003)	Adoptar una enseñanza orientada por el método genético.
(Furinghetti, 2007)	Vivenciar la construcción histórica de objetos matemáticos como manera alterna a la usual construcción en la enseñanza.
(Furinghetti, 2007)	Promover un estilo consciente de enseñanza de las Matemáticas.
(Høyrup, 2007)	Disponer de una fuente de referencia para llegar a pensar las Matemáticas, el papel del profesor y, en consecuencia su enseñanza.
(Charalambous, et al., 2009)	Dotar de métodos y técnicas para la incorporación de materiales históricos en la enseñanza.
(Charalambous, et al., 2009)	Adquirir perspectivas sobre la evolución de los planes de estudios de Matemáticas.
(Miguel & Miorim, 2011)	Trascender el interés y la comprensión por asuntos matemáticos e históricos y reconocer la relevancia pedagógica de la HM en el ejercicio docente.
(Clark, 2011)	Crear oportunidades para que los futuros profesores de Matemáticas consideren usar la HM en la enseñanza.
(Smestad, 2011a)	Reconocer diferentes maneras en que la Historia se puede incluir en la enseñanza.
(Gazit, 2013)	Incluir información histórica durante la enseñanza de las Matemáticas.
(Alpaslan, et al., 2014)	Disponer de elementos de motivación para promover el aprendizaje de las Matemáticas.
(Clark, 2014)	El profesor puede integrar la HM a la enseñanza.
(Clark, 2014)	El profesor logre mostrar aspectos culturales e históricos de las Matemáticas.

Documento	Respuesta
(Fenaroli, et al., 2014)	Disponer de recursos para diseñar secuencias no convencionales de enseñanza.
(Povey, 2014)	Proveer motivación y diversión.

Tabla 77 Documentos e ideas que sustentan la segunda parte de la intención sobre los artefactos.

Un tercer subgrupo de autores/documentos se refiere a lo que hemos nombrado con los términos **competencias personales y profesionales**. Algunos de las ideas expresadas en estos argumentan que el estudio de la HM le ofrece la posibilidad al profesor de vivir experiencias de aprendizaje alternativas a las usuales, que le conducen a un ambiente de aprendizaje e independencia intelectual, al desarrollo del pensamiento crítico, al [auto]reconocimiento de la capacidad de abordar de manera exitosa el estudio de aspectos históricos complejos, y a una [re]contextualización y [re]personalización de los conocimientos; estas experiencias también provocan un ejercicio meta-cognitivo sobre las operaciones que los profesores realizan con los objetos matemáticos. Asimismo varias voces aluden al desarrollo de habilidades: de lectura de literatura especializada –y, en ocasiones, compleja– que eventualmente conllevan a reflexiones meta-cognitivas (*v.g.*, reconocer que en la interpretación no siempre es posible abstraerse de las herramientas propias y asumir el lugar del otro, advertir el papel de los símbolos en tanto potenciador u obstáculo para la comprensión, reconocer las dificultades para la reconstrucción histórica); de atenta escucha de las voces de los matemáticos de otras épocas y ambientes, como una estrategia para comprender su pensamiento matemático; y, de escritura sistemática para la exposición de ideas matemáticas "de otros" a través de los textos propios o explicar las matemáticas de contextos no coetáneos. No sobra resaltar acá que las habilidades de lectura, escucha y escritura subyacen como competencias personales y profesionales al ejercicio docente.

Se arguye también que el estudio de la HM favorece la polimatía o el pensamiento interdisciplinar del profesor y enriquece su repertorio de conocimientos, proveyéndolo de un conocimiento de parte de la cultura de la humanidad y beneficiando cada uno de los dominios del "Conocimiento Matemático para la Enseñanza" (*Mathematical Knowledge for Teaching)* o, en otras palabras, el conocimiento matemático que se emplea en la práctica docente y que trasciende el mero conocimiento de conceptos y procedimientos. Lo anterior, potencialmente le permite al profesor valorar la tarea que su enseñanza tiene en el horizonte de formación cultural y científica de los estudiantes, así como comprender la función de la profesión docente en Matemáticas y su evolución.

Con una dimensión un tanto diferente –y quizá más cercada a lo que Jankvist (2009b) denomina la "historia como meta"– el estudio de la HM pretende integrarla en la cultura matemática de los profesores y reivindicar su importancia, es decir, alentar al profesor a profundizar en temas y tratamientos históricos de las Matemáticas, saborear la Historia y desear aprender aún más, ganar interés por las fuentes primarias, valorar la precisión de la información histórica y promover la competencia de proponer y responder preguntas sobre la HM. De manera cercana a ello, también se procura incrementar el interés y entusiasmo por las Matemáticas.

No sería conveniente dejar de mencionar que en algunos países el estudio de la HM constituye la estrategia llevada a cabo para que los profesores logren responder adecuadamente a los exámenes exigidos para ejercer la docencia.

La Tabla 78 contiene las ideas anteriormente sintetizadas y organizadas.

Documento	Respuesta
(Baumgart, et al., 1969)	Alentar al profesor a profundizar en temas y tratamientos históricos de las Matemáticas.
(Shenitzer, 1995)	Generar un ambiente de aprendizaje e independencia intelectual.
(Kleiner, 1996)	Incrementar el interés por la disciplina.
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Tener experiencias de aprendizaje alternativas a las usuales.
(Fauvel & van Maanen, 1997a	Desarrollar habilidades de lectura, uso de literatura especializada y escritura expositiva.
(Fauvel & van Maanen, 1997a), (Fauvel & van Maanen, 1997b), (Fauvel & van Maanen, 1997c)	Promover entusiasmo por las Matemáticas.
(Fauvel & van Maanen, 1997b)	Desarrollar habilidades de lectura y de escritura.
(Fauvel & van Maanen, 1997c)	Desarrollar habilidades de lectura, uso de bibliografía y escritura expositiva.
(van Maanen, 1997)	Favorecer las competencias de lectura, escritura y exposición de ideas matemáticas.
(Schubring, et al., 2000)	Responder adecuadamente a los exámenes para poder ejercer la docencia.
(Schubring, et al., 2000)	Ganar en autoreconocimiento cultural en tanto aportantes y constructores de Matemáticas.
(Schubring, et al., 2000)	Comprender la evolución de la profesión docente en Matemáticas.
(Winicki, 2000)	Reconocer el aspecto humanístico de las Matemáticas y valorar la tarea que en este sentido tienen los profesores de Matemáticas.
(Gulikers & Blom, 2001)	Influir en las actitudes y el repertorio didáctico de los profesores.
(Barabash & Guberman-Glebov, 2004)	El [auto]reconocimiento de la capacidad de abordar de manera exitosa el estudio de aspectos históricos complejos.
(Waldegg, 2004)	Provocar un ejercicio metacognitivo sobre las operaciones que los profesores realizan con los objetos matemáticos.
(Arcavi & Isoda, 2007)	Aprender a escuchar al otro como una estrategia para comprender su pensamiento matemático.

Documento	Respuesta
(Arcavi & Isoda, 2007)	Reconocer que en la interpretación no siempre es posible abstraerse de las herramientas propias y asumir el lugar del otro.
(Sriraman, 2009)	Promover la polimatía o el pensamiento interdisciplinar.
(Miguel & Miorim, 2011)	Generar apropiación y re-significación de los saberes de la cultura matemática escolar.
(Miguel & Miorim, 2011)	Estimula la participación activa de los futuros profesores.
(Smestad, 2011a)	Saborear la Historia y desear aprender aún más.
(Clark, 2012)	Aportar al conocimiento matemático para la enseñanza en aquello que va más allá del conocimiento de conceptos y procedimientos y en cómo tal conocimiento se emplea en la práctica docente.
(Estepa Castro, et al., 2012)	Favorecer la actividad docente de producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos.
(Gazit, 2013)	Disponer de un conocimiento de parte de la cultura de la humanidad, entendido como un activo de cualquier graduado del sistema académico.
(Alpaslan, et al., 2014)	Enriquecer el repertorio de conocimientos de los profesores.
(Despeaux, 2014)	Ganar interés por las fuentes primarias.
(Despeaux, 2014)	Explicar las matemáticas en contextos no coetáneos.
(Despeaux, 2014)	Reconocer dificultades para la reconstrucción histórica.
(Fenaroli, et al., 2014)	Integrar la HM en la cultura matemática de los profesores.
(Loats, et al., 2014)	Promover la competencia de proponer y responder preguntas sobre la HM.
(Loats, et al., 2014)	Valorar la precisión de la información histórica.
(Mosvold, et al., 2014)	Beneficiar los diferentes dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del horizonte del contenido, el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento del contenido y el currículo).
(Povey, 2014)	Desarrollar pensamiento crítico.

Tabla 78 Documentos e ideas que sustentan la tercera parte de la intención sobre los artefactos.

3.2.3 ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor (en formación o ejercicio)?

Analizar el contenido de los documentos reseñados en 3.1 ofrece una mirada panorámica –y no menos variopinta– que permite reconocer una amplia variedad de respuestas a la pregunta en cuestión. En principio estimamos que la aproximación lograda en un artículo donde describimos diez tipologías de la HM (Guacaneme, 2010) ofrecía de por sí un marco de organización de las distintas posturas; sin embargo el análisis crítico de las tipologías, aunado al uso de estas en dos proyectos de investigación[137] y en dos trabajos de grado de un programa de Maestría (Gálvez Socarrás & Maldonado Guinea, 2012; Manrique García & Triana Yaya, 2013), nos ofrece una nueva disposición de objetos de estudio y

[137] Caracterización de las estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en programas de formación inicial de profesores de Matemáticas. Universidad del Valle – Código CI 5220 (2010-2011).
El conocimiento histórico en la constitución de una visión sobre la naturaleza de la Aritmética y el Álgebra en maestros de Matemáticas en formación. Universidad Pedagógica Nacional – Código DMA-353-13 (2013-2014).

tratamientos, que procuramos sintetizar en la Imagen 5. Es esta, los objetos de estudio se refieren a los asuntos que son propuestos para ser estudiados con el fin de favorecer los conocimientos del profesor de Matemáticas; los tratamientos se refieren a los enfoques que podría tener la HM, algunos de los cuales se consideran valiosos para la formación de profesores. En el artículo citado, no establecimos tal distinción, incluimos unas tipologías que acá no aparecen y excluimos algunos objetos que ahora figuran; confiamos en que la siguiente organización (construida, como ya se dijo, a partir del contenido de los documentos reseñados en 3.1) ofrezca una visión menos abigarrada que la presentada en el artículo[138].

[138] Las tipologías consideradas en el artículo se esbozan a continuación:

A. **Objeto de referencia** de la obra histórica (biografías, versiones originales de obras, correspondencia entre matemáticos, o el estudio de una noción o problema, del pensamiento matemático, de teorías, o de una obra matemática).
B. Fuentes **originales** (manuscritos originales o sus traducciones, correspondencia entre matemáticos, etc.) y **secundarias** (análisis, comentarios o recapitulaciones sobre las fuentes originales). Fuentes **didácticas** (resultados de la transposición didáctica).
C. Dos tipos extremos de Historia (**internalista** y **externalista**) y posturas intermedias de estas.
D. Dos tendencias casi siempre opuestas: el **relato histórico** y el **análisis histórico**.
E. Diversos **enfoques del análisis histórico** (filosóficos, lógicos, axiológicos, matemáticos, psicológicos, o sociológicos).
F. Historia sobre las **matemáticas hegemónicas** (o matemáticas occidentales) o sobre las matemáticas que pertenecen a **culturas o sociedades específicas**.
G. Dos tendencias de aprehender las matemáticas del pasado (**historia** y **herencia**).
H. Historia contada desde el **punto de vista del autor** o historia cultural e historia contada desde la **perspectiva de los científicos modernos**.
I. Historia **evolutiva** e historia **situada**.
J. Historia **conceptual** e historia de los **problemas**.

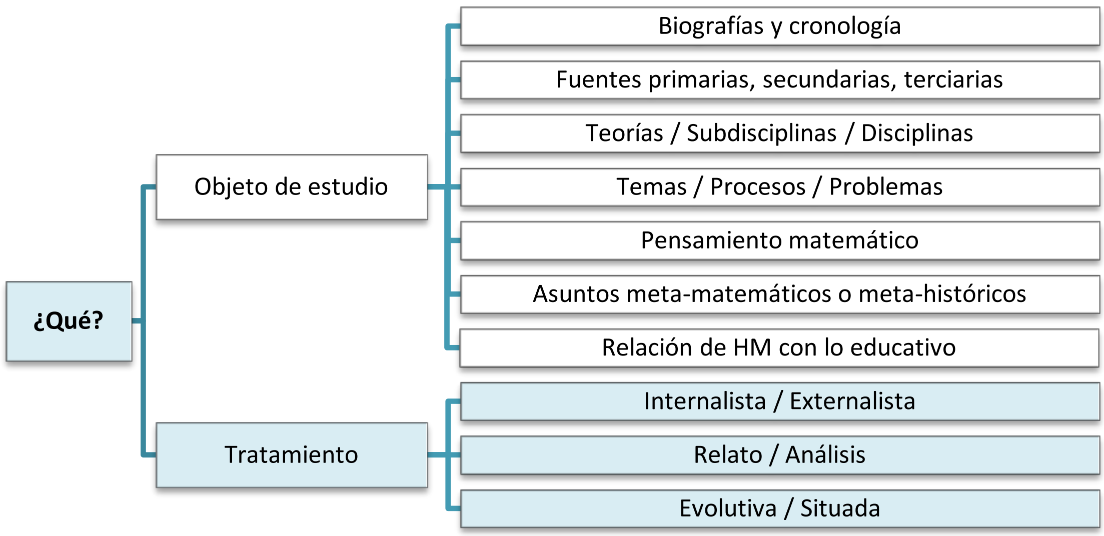

Imagen 5 Respuestas a la pregunta qué HM en el CPM.

3.2.3.1 En relación con los objetos de estudio

Algunas posturas (ver Tabla 79) establecen el estudio de aspectos **biográficos y cronológicos**, es decir asuntos como biografías de matemáticos, anécdotas de las vidas y obras de los matemáticos, o fechas de acontecimientos matemáticos.

Documento	Respuesta
(Hickman & Kapadia, 1983)	Historia de la vida y obra de algún matemático enfatizando en los procesos de descubrimiento.
(Santiago Fernández Fernández, 2001)	Cronología de nombres, citas, fechas y aspectos más importantes.
(Santiago Fernández Fernández, 2001)	Los creadores de las Matemáticas.
(Santiago Fernández Fernández, 2001)	Un personaje, una determinada cultura o un periodo de tiempo más o menos largo.
(Loats, et al., 2014)	Estudio de aspectos biográficos de algunos matemáticos.

Tabla 79 Respuestas que favorecen el estudio de aspectos biográficos y cronológicos.

Varias posturas (ver Tabla 80) sostienen que el estudio de la HM en la formación de profesores acuda a las **fuentes** originales, es decir a los manuscritos de las obras matemáticas o a sus traducciones al idioma nativo de los profesores; algunos indican la necesidad de alterar lo menos posible dichas obras para disponer de la versión más cercana posible a la del autor (por ejemplo, postulan que modificaciones introducidas en aspectos simbólicos pueden constituir un cambio sustancial). Señalan que la lectura del original exige y promueve algunas competencias y conocimientos deseables para el profesor de Matemáticas. No obstante lo anterior, se debe reconocer que el recurso a tal tipo de fuentes no descarta el estudio de otras fuentes, como por ejemplo algunos libros de HM considerados de buen nivel.

Documento	Respuesta
(Freudenthal, 1981)	Fuentes originales.
(Arcavi, et al., 1987)	Fuentes primarias.
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Fuentes originales.
(van Maanen, 1997)	Fuentes originales contrastadas con visiones actuales.
(Bruckheimer & Arcavi, 2000)	Fuentes primarias.
(Furinghetti & Paola, 2003)	Fuentes primarias.
(Smestad, 2011a)	Fuentes originales.
(Clark, 2014)	Fuentes primarias.
(Fenaroli, et al., 2014)	Fuentes originales.
(Taani, 2014)	Fuentes originales.

Tabla 80 Respuestas que favorecen el estudio de fuentes primarias.

Varios autores/documentos (ver Tabla 81) sostienen que el estudio de la HM debe contemplar un trabajo en torno a la evolución y fundamentación de **teorías matemáticas, subdisciplinas o disciplinas de las Matemáticas**, más que el estudio de la HM en su generalidad y amplitud.

Documento	Respuesta
(Baumgart, et al., 1969)	Visión panorámica de temas generales (*v.g.*, Geometría, Álgebra, Cálculo) y desarrollos específicos de temas particulares.
(Grattan-Guinness, 1978)	Estudio de una rama de las Matemáticas en un periodo de tiempo definido y no una mirada superficial a todo el espectro de la HM.
(Arboleda, 1984)	Problemas relativos a la evolución y fundamentación de algunas de las teorías matemáticas elementales.
(Isaac, et al., 2000)	Momentos epistémicos de la Geometría.
(Schubring, et al., 2000)	HM universales.
(Winicki, 2000)	Temas de la HM.
(Santiago Fernández Fernández, 2001)	Ciertas subdisciplinas de las Matemáticas.
(Furinghetti & Paola, 2003)	Documentos de HM.
(Berlinghoff & Gouvêa, 2004)	Panorama de la HM.
(Alpaslan, et al., 2014	Matemáticas en civilizaciones antiguas.

Tabla 81 Respuestas que favorecen el estudio de fragmentos de la HM

Algunos documentos establecen que el estudio de la HM debe centrarse en **temas** e ideas matemáticas básicas, centrales o importantes (ver Tabla 82, primera parte); otros precisan el estudio de los **procesos** matemáticos o la génesis de los resultados matemáticos más que en los resultados mismos (ver Tabla 82, segunda parte). También se identifican documentos que propugnan el estudio de los aspectos históricos de los **problemas** matemáticos y de sus estrategias/métodos de solución (ver Tabla 82, tercera parte); e incluso existen documentos que promueven el estudio de otros elementos matemáticos (como las paradojas o los materiales manipulativos) desde una perspectiva histórica (ver Tabla 82, cuarta parte).

Documento	Respuesta
(Shenitzer, 1995)	Temas matemáticos de importancia matemática y cultural desde una perspectiva histórica.
(Kleiner, 1996)	Ideas matemáticas centrales.
(Berlinghoff & Gouvêa, 2004)	Breves ensayos sobre temáticas matemáticas básicas.
(Freudenthal, 1981)	Historia de los procesos más que de los productos de la creatividad humana.
(Boero, 1989)	Historia de la Protomatemática.
(Furinghetti, 2000)	La génesis de los resultados más que en los resultados matemáticos mismos, los procesos de construcción de ideas matemáticas y los métodos matemáticos.
(Barbin, 1996)	Historia de los problemas.
(Bkouche, 1997)	Una epistemología de las problemáticas y una historia de sus descubrimientos.
(Tzanakis & Thomaidis, 2000)	Historia de las motivaciones, preguntas, problemas y procesos de descubrimiento.
(Santiago Fernández Fernández, 2001)	La evolución y desenlace de determinados problemas matemáticos.
(Waldegg, 2004)	Situaciones problemáticas cuyas soluciones contienen elementos teóricos familiares a los profesores, pero no de sus ejercicios de aplicación rutinarios.
(Miguel & Miorim, 2011)	Historia-problema que parte de los problemas manifestados en las prácticas pedagógicas.
(Smestad, 2011a)	Problemas históricos.
(Clark, 2014)	Historia de métodos, estrategias y problemas.
(Despeaux, 2014)	Almanaques donde aparecen problemas matemáticos.
(Sriraman, 2009)	Paradojas.
(Meavilla Seguí & Oller Marcén, 2013)	Materiales manipulativos, interpretaciones y visualizaciones de objetos y propiedades matemáticas, extraídos de textos antiguos.

Tabla 82 Respuestas que favorecen el estudio de temas, procesos, problemas y otros asuntos.

Ubicamos dos documentos que asignan un lugar trascendental al estudio de la historia del **pensamiento matemático** y su determinación de la actividad matemática (ver Tabla 83).

Documento	Respuesta
(Sfard, 1995)	Historia del pensamiento matemático.
(Santiago Fernández Fernández, 2001)	La evolución del pensamiento y el quehacer matemático.

Tabla 83 Respuestas que favorecen el estudio del pensamiento matemático

También identificamos algunos documentos (ver Tabla 84) que sugieren el estudio de asuntos **meta-matemáticos** (*v.g.*, rigor y prueba) o **meta-históricos** (la precisión de la HM).

Documento	Respuesta
(Fauvel & van Maanen, 1997a)	La historia de los fundamentos de las Matemáticas y las ideas de rigor y prueba.
(Loats, et al., 2014)	La precisión del relato histórico.

Tabla 84 Respuestas que favorecen el estudio de asuntos meta-matemáticos o meta-históricos.

Un último grupo de documentos defiende la idea que la formación histórica del profesor también debe tener en consideración asuntos de la relación de la **HM con lo educativo** (ver Tabla 85); particularmente, se postula el estudio de la relación HM–EM en algunas de sus facetas presentadas en el Capítulo 2 de este trabajo.

Documento	Respuesta
(Arboleda, 1984)	Reflexión sobre la enseñanza de las Matemáticas y la Historia, a través del estudio de: los procesos cognitivos, la evolución histórica de la escuela y la enseñanza, problemas que enfrenta la enseñanza de las Matemáticas, la relación enseñanza e HM.
(Boero, 1989)	Estudio de la relación entre Historia y Didáctica.
(Fauvel, 1991b)	Conocimiento sobre evidencias de uso de la HM en el aula y sus beneficios efectivos.
(Schubring, et al., 2000)	La contribución de la Historia a la enseñanza de las Matemáticas.
Miguel & Miorim, 2011)	Articulación entre HM e historia de la educación en Matemáticas.
Miguel & Miorim, 2011)	Historias pedagógicamente vectorizadas.
(Alpaslan, et al., 2014	Materiales históricos de enseñanza (tales como tangramas).

Tabla 85 Respuestas que favorecen el estudio de asuntos de la relación HM–EM.

3.2.3.2 En relación con los tratamientos históricos

En varios de los documentos (ver Tabla 86) encontramos una panoplia de ideas que aluden a un tratamiento de aspectos socioculturales vinculados a los objetos matemáticos mismos o a la actividad matemática; por ello, decimos que se propugna por un tratamiento **externalista** de la HM o, en otras palabras, por una historia social de las Matemáticas como elemento del conocimiento del profesor. Bajo este enfoque se propone el estudio de, entre otros asuntos: las relaciones entre Matemáticas, sociedad y cultura; el lugar de las instituciones académicas o de las comunidades de práctica y la difusión de las ideas matemáticas; o, las raíces sociales y culturales de la actividad matemática.

Documento	Respuesta
(Grattan-Guinness, 1978)	Estudio de los aspectos de fundamentación más que en aspectos técnicos.
(Hickman & Kapadia, 1983)	Historia evolutiva de la relación entre Matemáticas y Sociedad, y de las revoluciones en Matemáticas.
(Arboleda, 1984)	Cultura general en ciencias que avive reflexiones sobre la evolución de las matemáticas y su relación con las sociedades y las culturas.
(Arboleda, 1984)	Reflexión sobre la naturaleza y el estatuto de las ideas matemáticas en diferentes momentos, el lugar del entorno en el desarrollo de las Matemáticas, el papel de las instituciones académicas, y la difusión de las ideas matemáticas.
(Radford, 1995)	Resultados de la investigación didáctico-historiográfica que se centra en la investigación sobre las raíces sociales de la actividad matemática y sobre la dimensión tríadica funcional de conceptos, problemas y procedimientos de solución de problemas.
(Isaac, et al., 2000)	Factores sociales y culturales que influyen el desarrollo de las Matemáticas elementales.
(Schubring, et al., 2000)	HM desarrolladas por la comunidad académica de un país específico o la contribución de tal comunidad a las Matemáticas universales.
(Tzanakis & Thomaidis, 2000)	Atmósfera cultural puede haber influido la aparición de nuevo conocimiento.
(Bagni, 2008)	Historia del desarrollo del conocimiento matemático con énfasis en el contexto socio-cultural.
(Miguel & Miorim, 2011)	Historias de la cultura matemática, escritas desde el punto de vista del educador matemático, y relacionadas con las prácticas sociales (*v.g.*, la escolar).
(Miguel & Miorim, 2011)	Historia de la construcción condicionada, situada y orientada de ideas matemáticas.

Tabla 86 Tratamiento sociocultural de la HM.

Identificamos también algunos documentos (ver Tabla 87) que proponen que en la formación del conocimiento del profesor se hagan presentes los **relatos históricos**, más que una aproximación a una HM erudita.

Documento	Respuesta
(Führer, 1991)	Relatos históricos.
(Führer, 1992)	Relatos históricos o “buenas historias” matemáticas.
(Clark, 2014)	Historia como relato.

Tabla 87 Tratamiento de la HM a través de relatos históricos.

Asimismo identificamos algunos documentos (ver Tabla 88) que plantean una aproximación a una HM que estudie los aspectos **evolutivos** en el tiempo de un objeto matemático, pues se considera que este tratamiento favorece la comprensión y el conocimiento de los profesores respecto de dicho objeto, usualmente incorporado y estudiado en las matemáticas escolares.

Documento	Respuesta
(Arcavi, et al., 1987)	Historia conceptual que exhibe desarrollo de los conceptos, los enfoques matemáticos, las dificultades y los procesos creativos y de formalización.
(Clark, 2011)	Ideas matemáticas que evolucionan con el tiempo.
(Smestad, 2011a)	Historia evolutiva.
(Alpaslan, et al., 2014)	Evolución histórica de conceptos matemáticos.

Tabla 88 Enfoque evolutivo para la HM.

Ahora bien, antes de concluir este apartado, y aún a pesar de no haber dispuesto en la Imagen 5 un objeto o tratamiento específico, debemos señalar que en los documentos ubicamos un planteamiento que, desde nuestra postura, refiere a la pertinencia de los objetos matemáticos estudiados a través de la formación en HM. En efecto, varios autores/documentos (ver Tabla 89) señalan que las temáticas que se estudien deben responder a –y surgir desde– el interés de los profesores de Matemáticas y deben estar en concordancia con las temáticas de las matemáticas escolares.

Documento	Respuesta
(Freudenthal, 1981)	Conocimiento integrado y familiar al profesor.
(Loats, et al., 2014)	Preguntas de HM suscitadas por –y de interés de– los futuros profesores.
(Baumgart, et al., 1969)	Historia de asuntos relativos a temas matemáticos escolares de todos los grados.
(Arcavi, et al., 1987)	Historia de temas directamente conectados con el currículo.
(Bruckheimer & Arcavi, 2000)	Evolución de las ideas y temas matemáticos relacionados con los contenidos que los profesores enseñan.
(Miguel & Miorim, 2011)	Historia-problema que parte de los problemas manifestados en las prácticas pedagógicas.
(Rogers, 2011)	La herencia o patrimonio matemático ligado al currículo en Matemáticas.
(Fenaroli, et al., 2014)	Conceptos importantes que se enseñan en la escuela.

Tabla 89 HM pertinentes al currículo y a los profesores.

Para concluir este apartado referido a la pregunta sobre qué HM debe ser apropiada para favorecer el CPM queremos reseñar que algunas ideas contenidas en cinco documentos (ver Tabla 90) no las logramos ubicar en lo discutido antes.

Documento	Respuesta
(Arcavi, et al., 1982)	Depende de variables que trascienden la Historia misma (tales como el público objetivo, su trasfondo matemático, las fuentes, el enfoque, o los temas).
(Boero, 1989)	Varios tipos de HM.
(Fowler, 1991)	Historia que permita construir una pseudo-historia o historia simplificada en/para las aulas.
(Rogers, 1991)	Fuentes para visiones generales, fuentes de trabajos más detallados, trabajos sobre las Matemáticas en contextos más amplios y recursos para uso en el aula.
(Smestad, 2011a)	Algo más que anécdotas y biografías.

Tabla 90 Ideas adicionales

3.2.4 ¿Cómo se llevan a cabo los procesos de apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los profesores (en formación o ejercicio)?

El análisis de las ideas y propuestas contenidas en los documentos reseñados en 3.1 nos ha llevado a establecer dos conjuntos de opciones de respuesta a la pregunta sobre el cómo. Un primer grupo representa las **opciones curriculares**, es decir la elección que hace el formador de profesores si compromete el estudio de la HM en cursos de HM, a través de su integración a los cursos de Matemáticas, o de su involucramiento en cursos de diseño curricular y tareas para el aula. Un segundo grupo alude a las **opciones metodológicas** que el formador selecciona y emplea para comprometer la actividad de los futuros profesores o profesores en ejercicio. La Imagen 6 presenta esquemáticamente las dos opciones referidas antes.

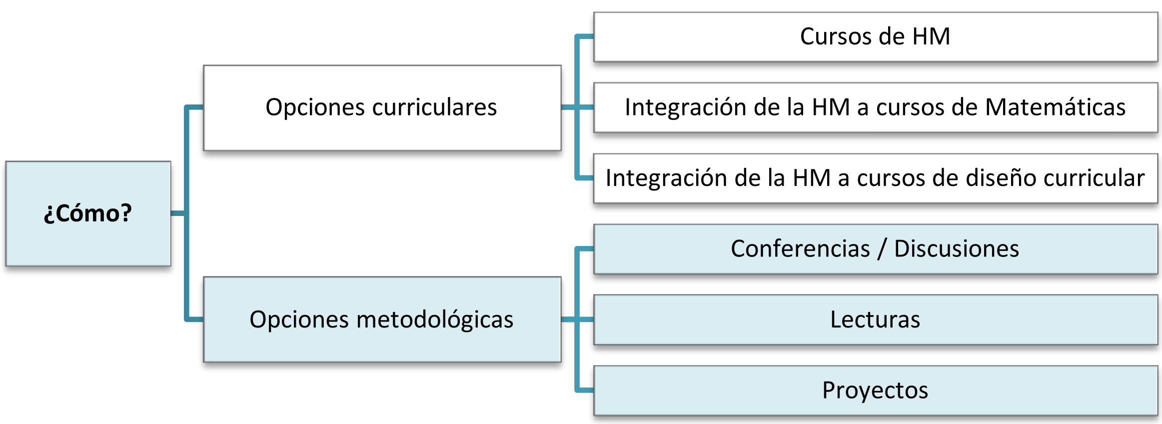

Imagen 6 Respuestas a la pregunta cómo HM en CPM.

3.2.4.1 Eligiendo alguna de las opciones curriculares

Una primera opción curricular son naturalmente los **cursos de HM** (ver Tabla 91). A propósito de esta, algunos autores reclaman que estos cursos ocupen un lugar particular en los planes de estudio de los programas de formación de profesores y tengan una intencionalidad en relación con un cierto tipo de enseñanza de las Matemáticas, o bien que sean especializados y hagan un tratamiento riguroso y hasta profesional de la HM, ya sea con un enfoque de historia contada desde el punto de vista del autor o bien desde un enfoque de historia contada desde la perspectiva de los científicos modernos (usando uno de los tratamientos reseñados en 3.2.3.2).

Documento	Respuesta
(Arboleda, 1984)	Cursos de HM que no sean simples agregados en los planes de estudio y que estén al servicio de una enseñanza no dogmática.
(Heiede, 1992)	Mediante cursos especializados de HM.
(Schubring, et al., 2000)	A través de cursos opcionales u obligatorios de HM.
(Fried, 2001)	Separación radical.
(Clark, 2014)	A través de cursos de HM.

Tabla 91 Respuestas a favor de cursos de HM.

Una segunda opción curricular refiere a la **integración de la HM a los cursos de Matemáticas** (ver Tabla 92). Dicha integración, sin embargo, tiene diferentes expresiones. Por ejemplo, para algunos autores la integración es un compromiso con la naturaleza de las Matemáticas mismas, al considerarla histórica; para otros la HM constituye más un agregado a las Matemáticas; mientras que para otros la HM es una herramienta de fundamentación de la apuesta curricular que se haga para el curso de Matemáticas.

Documento	Respuesta
(Freudenthal, 1981)	No necesariamente a través de cursos de HM.
(Heiede, 1992)	A través de la formación matemática.
(Schubring, et al., 2000)	A través de introducción de elementos de la HM en los cursos de formación de docentes de Matemáticas.
(Fried, 2001)	Acomodación radical.
(Clark, 2011)	Desarrollo de tareas matemáticas con orientación histórica.
(Clark, 2014)	A través de fundamentar históricamente cursos de Matemáticas o de métodos de enseñanza.

Tabla 92 Respuestas a favor de la integración de HM a cursos de Matemáticas.

La tercera opción curricular se refiere a la **integración de la HM a cursos de diseño curricular** o a cursos de métodos de enseñanza (ver Tabla 93). Por lo general los autores que reseñan esta como una opción, refieren la actividad de diseñar una unidad o secuencia didáctica, o una lección o tarea de clase, bajo la batuta de la HM o la inclusión en la HM en el diseño curricular. También hay posturas que propugnan por la formación de un conocimiento pedagógico del/para el profesor, respecto de los aspectos que la inclusión de la HM en las tareas de clase implica. Asimismo, hay posturas que propugnan por la posibilidad de que la HM se conciba como un orientador para el currículo de cursos de métodos de enseñanza de las Matemáticas.

Documento	Respuesta
(Schubring, et al., 2000)	Por medio de la incorporación de aspectos históricos en los diseños de unidades didácticas o de enseñanza.
(Furinghetti & Paola, 2003)	Promoviendo el diseño de secuencias didácticas orientadas o mediadas por la HM.

Documento	Respuesta
(Barabash & Guberman-Glebov, 2004)	A través de un curso de HM que asume como objeto de estudio a matemáticos y sus obras y, luego, a través de un trabajo de graduación que procura el diseño de tareas para el aula en relación con la HM estudiada.
(Furinghetti, 2007)	A través de la exploración de la HM para analizar los conceptos y procesos que se pueden encontrar en la enseñanza del Álgebra y, luego, el diseño de la secuencia de enseñanza y la discusión de la misma.
(Clark, 2011)	Realización de un proyecto de inclusión de la Historia en la enseñanza en una unidad didáctica o en una lección.
(Smestad, 2011a)	Realizando proyectos que incluyen la Historia en tareas escolares.
(Clark, 2012)	Desarrollo de los conocimientos pedagógicos necesarios para integrar una perspectiva histórica en la enseñanza de las Matemáticas escolares.
(Clark, 2012)	Tareas para vincular lo estudiado con las matemáticas y considerar sus implicaciones pedagógicas.
(Clark, 2014)	A través de fundamentar históricamente cursos de Matemáticas o de métodos de enseñanza.

Tabla 93 Respuestas a favor de la integración de HM a cursos de diseño curricular

3.2.4.2 Empleando una o varias opciones metodológicas

El análisis de la literatura contemplada en 3.1 nos permitió reconocer que una de las opciones metodológicas empleadas o sugeridas para la formación de profesores de Matemáticas, implica el desarrollo de **conferencias** sobre HM y el desarrollo de **discusiones** sobre los contenidos tratados (ver Tabla 94). Algunos autores proponen la realización de algunas lecturas como parte de la preparación para la discusión, y de esta forma promover una actividad tipo seminario.

Documento	Respuesta
(Grattan-Guinness, 1978)	A través de conferencias, seguidas de la presentación de algunas lecturas clásicas y de un lapso de discusión.
(Hickman & Kapadia, 1983)	Conferencias y sesiones de discusión.
(Arboleda, 1984)	Conferencias, discusiones y sistematización de lecturas.
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Discusión de interpretaciones de las fuentes originales.
(Clark, 2011)	Discusión de las fuentes originales.
(Smestad, 2011a)	Incorporando la Historia en conferencias.

Tabla 94 Respuestas que favorecen el desarrollo de conferencias y discusiones.

Ligado a algunas de las respuestas anteriores encontramos la estrategia de realización de **lecturas** de documentos de HM o de fuentes originales del trabajo matemático (ver Tabla 95). En algunos casos las lecturas están acompañadas de unas tareas que incluyen responder preguntas, resolver problemas o desarrollar ejercicios.

Documento	Respuesta
(Arcavi, et al., 1987)	A través de talleres de lectura y trabajo sobre las fuentes, lo cual implica resolver preguntas, desarrollar ejercicios y resolver problemas.
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Lectura y estudio de fuentes originales.
(Winicki, 2000)	Desarrollando talleres que implican trabajo individual, grupal y colectivo en lecturas de materiales históricos, solución de problemas y cuestiones para promover la reflexión ulterior.
(Berlinghoff & Gouvêa, 2004)	Lecturas y estudio de fuentes sugeridas.
(Clark, 2011)	Lecturas previas de fuentes originales y de información histórica.
(Smestad, 2011a)	Leyendo fuentes originales.
(Clark, 2012)	Asignación de lecturas previas (extractos históricos y biográficos) en torno a las ideas matemáticas escolares, para situar adecuadamente el tema y las fuentes primarias para desarrollar un concepto matemático clave.

Tabla 95 Respuestas que favorecen el desarrollo de lecturas.

Varios de los documentos/autores exponen ideas y realizaciones en donde el estudio de la HM en la formación de profesores se hace a través del desarrollo de un abanico amplio de **proyectos** de varios tipos (ver Tabla 96). Algunos de tales proyectos implican la escritura de ensayos o informes sobre el estudio de un asunto histórico de las Matemáticas, la realización de exposiciones de resultados de los estudios, la representación teatral de situaciones o hechos históricos que implicaron a los matemáticos y de fragmentos de sus obras matemáticas, el desarrollo de talleres en los que se estudian aspectos históricos o se solucionan problemas que ponen al profesor (o al futuro profesor) en situaciones semejantes a las que pueden llegar a presentarse en el aula, la construcción de mapas de conceptos y sus narrativas, el estudio etimológico de algunos términos, el trabajo con –y a través de– almanaques de problemas matemáticos, la formulación de preguntas que puedan ser respondidas por la HM y la realización de indagaciones para determinar sus respuestas, o la construcción de narrativas y descripciones de hechos para estudiar el problema de la certeza y objetividad del relato histórico.

Documento	Respuesta
(Hickman & Kapadia, 1983)	Elaboración de un proyecto y discusión de los resultados del mismo en un seminario.
(Kleiner, 1996)	Partiendo del estudio de citas.
(Kleiner, 1996)	Estudiando contextos históricos concisos (y tratamientos de las ideas matemáticas) referidos por las citas.
(Kleiner, 1996)	Resignificando las citas y sus potenciales implicaciones.
(Laubenbacher & Pengelley, 1996)	Escritura de resultados de estudios matemáticos e históricos.
(Hitchcock, 1997)	Dramatización y diálogos de la HM.
(van Maanen, 1997)	Estudiar la fuente original, escribir sobre la misma y presentarla a los demás.

Documento	Respuesta
(Kleiner, 1998)	La lectura de fuentes secundarias y la escritura de ensayos a partir de estas.
(Bruckheimer & Arcavi, 2000)	Participación activa en la lectura de materiales históricos y en el desarrollo de talleres en torno a estos para cuestionar el lenguaje, aplicar los contenidos matemáticos y comparar los tratamientos contenidos en tales materiales.
(Berlinghoff & Gouvêa, 2004)	Lecturas de ensayos, seguidas de cuestionamientos y proyectos sobre las mismas.
(Waldegg, 2004)	Colocar al profesor en una situación semejante a la que viven sus estudiantes al estudiar Matemáticas, a través de enfrentarlo a solucionar problemas históricos que connotan notación, algoritmos y ambientes no convencionales.
(Arcavi & Isoda, 2007)	La lectura de textos históricos originales, la interpretación de respuestas de los estudiantes y la reflexión sobre lo aprendido.
(Miguel & Miorim, 2011)	A través de una secuencia de acciones, a saber: • Construcción de memorias individuales y colectivas en relación con temas matemáticos. • Proposición de preguntas de investigación sobre los temas. • Diálogo con las memorias de quienes promueven las transformaciones educativas en Matemáticas. • Diálogo con las comunidades de memorias oficiales. • Diálogo con comunidades de memorias representadas por profesores y estudiantes. • Elaboración de textos que contemple la complejidad de los diálogos con las diferentes comunidades de memoria.
(Rogers, 2011)	Construcción y lectura de mapas de conceptos, sus narrativas y orientaciones.
(Smestad, 2011a)	Desarrollando tareas de contenido histórico.
(Smestad, 2011a)	Indagando la etimología de algunas palabras matemáticas.
(Clark, 2012)	Trabajo con las ideas matemáticas que evolucionaron a través del tiempo.
(Clark, 2012)	Estudio y discusión de las influencias históricas y culturales, y los porqués de las Matemáticas que se fueron desarrollando.
(Clark, 2012)	Durante las sesiones de clase, examinar en detalle del concepto matemático en la fuente primaria.
(Despeaux, 2014)	Explorando almanaques británicos del siglo XVIII.
(Despeaux, 2014)	Analizando los problemas matemáticos contenidos en los almanaques y sus respuestas.
(Despeaux, 2014)	Realizando prosopografías de las personas que contribuían en los almanaques.
(Despeaux, 2014)	Estudiando algunas fuentes secundarias que versan sobre los almanaques estudiados.
(Despeaux, 2014)	Presentando resultados de la indagación.
(Loats, et al., 2014)	Escribiendo, de manera individual y colectiva, un relato sobre un acontecimiento y analizando su certeza.
(Loats, et al., 2014)	Formulando preguntas y realizando indagaciones que conduzcan a sus respuestas.
(Loats, et al., 2014)	Reconociendo aspectos de la vida y obra de un matemático y representando al mismo en un panel.

Tabla 96 Respuestas que favorecen el desarrollo de proyectos.

3.3 Discusión sobre la relación Historia de las Matemáticas – conocimiento del profesor de Matemáticas

Los resultados del anterior análisis y clasificación, reportado en 3.2, ofrecen un panorama que pretende recoger las respuestas que los autores manifiestan, a través de los documentos abordados en 3.1, a las cuatro preguntas que hemos postulado para organizar y describir la relación HM–CPM. Dicho panorama constituye ahora el objeto de discusión y el trasfondo para expresar nuestras posturas y reflexiones. Expongamos entonces estas para cada una de las preguntas y para la relación en general.

3.3.1 Discusión y reflexión a propósito de los porqués

Recordemos inicialmente que establecimos cuatro respuestas generales a la pregunta sobre el porqué, a saber: existen gentes o comunidades que tienen interés en la HM como parte del CPM, hay una valoración social de la historicidad de las Matemáticas, se reconoce en la HM una cornucopia de visiones, y se asume la HM como una fuente de artefactos potencialmente convertibles en herramientas para la actividad docente.

La **existencia de comunidades y gentes** que conozcan de HM y se interesen por la formación de profesores se muestra como una condición *sine qua non* para la integración del conocimiento histórico al CPM. Este problema se ubica en el plano del formador de profesores de Matemáticas (ver apartado 1.2.2) y ha sido descrito por Vasco (2002) y en un apartado del capítulo que hemos citado en varias oportunidades antes (Schubring, et al., 2000, pp. 140-142); el problema se resume en la necesidad de conocimiento histórico en los formadores de profesores y en la necesidad de que más académicos con conocimiento sobre la HM se vinculen a la tarea de formar profesores desde/en la HM.

Una opción de largo aliento para afrontar este problema, basada en la experiencia y tradición colombiana de casi cuatro décadas (particularmente en la experiencia en la Universidad del Valle liderada por el doctor Luis Carlos Arboleda Aparicio), es la creación de escuelas de pensamiento que, motivadas por uno o más individuos, incorpore la HM en los programas de formación inicial de profesores de Matemáticas (o Matemáticos), seduzca a algunos profesores a realizar trabajos de grado en HM, incorpore la HM en los programas de posgrados o formación avanzada de profesores de Matemáticas, dé oportunidad para que los profesores seducidos realicen docencia en HM y dirijan trabajos de grado con perspectivas históricas en pregrado y posgrado, induzca la necesidad de incluir una perspectiva histórica en las investigaciones en Educación Matemática o Didáctica de las Matemáticas, promueva el desarrollo de proyectos de investigación en HM, dirija tesis doctorales en HM o en Educación Matemática con un enfoque o acento histórico, favorezca condiciones para que los académicos formados en tal escuela de pensamiento se diseminen por las instituciones formadoras de profesores, y promueva una actividad académica de estudio y divulgación de la HM a través de seminarios y eventos académicos regionales, nacionales e internacionales. En suma, la opción para afrontar el problema es formar comunidad académica en torno a la HM, con sensibilidad e interés por la educación del profesor de Matemáticas.

Al margen de esta opción, no reconocemos ni imaginamos otra factible[139], a no ser aquella, auspiciada de manera un tanto artificial por decisiones del Estado u organismo que defina políticas para la formación de docentes, que a través de un Decreto o Resolución establezca la obligatoriedad de la HM en los programas de formación de profesores o en exámenes de incorporación laboral de profesores de Matemáticas. Esta opción crea la necesidad y compele a algunos formadores a asumir un compromiso con el conocimiento de la HM.

Independiente de la opción asumida o disponible, debemos insistir y enfatizar en que no es suficiente el interés y formación en HM para orientar procesos –eficaces y eficientes– de formación en HM para los profesores en formación o ejercicio (así como tampoco es suficiente el interés y formación en Matemáticas o en Didáctica de las Matemáticas para dirigir procesos de formación en cada una de estas disciplinas); desde nuestra perspectiva, debe haber tanto un interés legítimo en el vínculo o la relación HM–CPM, como una formación en las particularidades de tal relación y, específicamente en la Didáctica de la Historia de las Matemáticas (así como debe haber en el formador un interés en las relaciones Matemáticas–CPM o Didáctica de las Matemáticas–CPM y una formación en Didáctica de las Matemáticas y en Didáctica de la Didáctica de las Matemáticas).

La **valoración social** de la HM impone retos mayúsculos, sobre todo a sociedades en donde esta ha estado relegada a un segundo plano y donde las Matemáticas (casi siempre en su presentación axiomática o acabada) han ocupado un lugar preponderante en el concierto de las ciencias y disciplinas científicas. El reclamo gestionado por Heiede (1992,

[139] La opción que desde el campo EPM surja un movimiento a favor de la inclusión de la HM en el CPM se ve un tanto lejana, pues ha habido mayor preocupación por la formación matemática (asociada al *Subject Matter Knowledge*) y la formación en didácticas específicas de las Matemáticas (relacionada con el *Pedagogical Content Knowledge*) y no se reconoce a la HM participando explícita ni protagónicamente de tales ámbitos.

1996), de ubicar la HM como parte sustancial de las Matemáticas, tiene una dificultad implícita por superar y que nos atrevemos a postular a través del siguiente interrogante de orden epistemológico (en cierto sentido inspirado en Fried (2001, 2007)): ¿puede convivir un discurso de una disciplina formal, como las Matemáticas, con un discurso de una ciencia humana o social, como la Historia de las Matemáticas? Quizá la única posibilidad para que estos discursos puedan coexistir sin un aparente detrimento de uno u otro (más allá de lo planteado por Fried (2001, 2007), es asumir posturas filosóficas sobre las Matemáticas que abandonen los paradigmas absolutistas y que se plieguen hacia posturas falibilistas de las Matemáticas (Ernest, 1991), en donde las ideas de rigor, verdad y demostración (entre otras) adquieren un sentido relativo y dependiente de los momentos históricos y de las culturas, tradiciones e instituciones matemáticas.

Ahora bien, si aceptáramos como válida la postura epistemológica de Heiede y consideráramos, por ejemplo, que para el caso del profesor de Matemáticas aprender Matemáticas implica el conocimiento de los resultados y también de los procesos, se podrían enunciar varias consecuencias: De un lado el conocimiento de la HM debería hacer parte integral del aprendizaje de las Matemáticas para los futuros docentes y, por ende, conocimiento exigido a, y promovido por, los formadores de estos; así, se impondrían nuevas exigencias de formación para los formadores de profesores, ya sean matemáticos, educadores matemáticos o didactas de las Matemáticas, y muy probablemente, nuevas estrategias y objetos de enseñanza en los programas de formación de ellos. De otro lado, la cuestión de integrar la HM a la enseñanza de las Matemáticas, se convertiría en un asunto de primer orden para la investigación didáctica y para la acción docente (ello bajo el reconocimiento de que aún no lo es para la comunidad de Educación Matemática).

Otro reto relacionado con la valoración social de la HM es lograr empoderar la HM producidas por comunidades convencionalmente consumidoras o “importadoras”[140] de Matemáticas, como parte importante de la HM y como elemento fundamental para favorecer la identidad cultural y científica de los miembros de aquellas comunidades. Este reto implica, en primer lugar, contar con la historia de la producción matemática específica y, en segundo lugar, o bien luchar contra o trasgredir los esquemas que han identificado a la HM occidentales como la HM hegemónica y posicionar la historia del contexto social específico como parte de la HM, o bien emprender procesos formativos en esta historia específica que permee la mentalidad de los matemáticos y profesores de

[140] Empleamos este término basados en la descripción hecha en https://www.technologyreview.com/s/601179/data-mining-algorithm-reveals-the-stormy-evolution-of-mathematics-over-700-years/

Matemáticas de la comunidad específica. No excluimos la posibilidad de realizar las dos acciones planteadas antes de manera excluyente.

A modo de ejemplo, se puede citar para el caso colombiano el desarrollo de un proyecto[141] dirigido a la identificación, catalogación y conservación del patrimonio matemático nacional a través de un sistema de información de la producción matemática colombiana. Asimismo se puede citar un importante número de trabajos[142] realizados en Colombia a través de los cuales se procura la reconstrucción de la Historia de las Matemáticas colombianas, o la sorpresiva y constante respuesta que en desarrollo de un proyecto de investigación[143] obtuvimos al indagar en varios programas de formación de profesores de Matemáticas acerca de si se estudiaba la Historia de las Matemáticas colombianas, a saber: "¿acaso existe?".

Vale la pena señalar que conseguir una valoración de la historicidad de las Matemáticas es una tarea en la que la comunidad de matemáticos tiene una alta responsabilidad —incluso mayor que la de la comunidad de historiadores de las Matemáticas—; esta obedece al reconocimiento de la existencia de discursos meta-matemáticos (*v.g.*, los provenientes de la Didáctica de las Matemáticas, la Filosofía de las Matemáticas, la HM, la Epistemología de las Matemáticas, la Sociología de las Matemáticas) en los que ellos pueden participar no solo como jueces o aprendices, sino como generadores y hacedores de dichos discursos, sin que ello implique una pérdida de estatus académico, ni pérdida de *cientificidad*, sino todo lo contrario, es decir una redimensión de la profesión matemática.

Frente a la argumentación que refiere a la **HM como cornucopia de visiones** podemos advertir, de un lado, la adjudicación de un valor intrínseco de esta, independiente incluso de la estrategia metodológica que se use para su estudio o apropiación (*i.e.*, de los *cómo*) y, de otro lado, una tendencia hacia la generalidad de las afirmaciones que se refleja en una independencia de las razones argüidas para sustentar la HM en la educación de los profesores, del tipo de historia disponible, y de las temáticas, énfasis o tratamientos efectivamente disponibles (*i.e.*, de los *qué*). Creemos, entonces, que las aserciones sobre el porqué incorporar la HM en la educación de un profesor, se deben articular o matizar

---

[141] La información del proyecto se puede acceder a través de http://www.accefyn.org.co/proyecto/proyecto.htm. El proyecto es auspiciado por la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales; la Sociedad Colombiana de Matemáticas; y la Universidad Nacional de Colombia.

[142] Varios de estos trabajos están referenciados en la segunda nota a pie de página de un artículo publicado en la revista Quipu (Torres, Guacaneme, & Arboleda, 2014).

[143] Caracterización de las estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en programas de formación inicial de profesores de Matemáticas. Universidad del Valle – Código CI 5220 (2010-2011).

con las respuestas a las preguntas sobre el *cómo*, pero sobre todo sobre el *qué*. Por ejemplo, consideramos que una HM con una fuerte tendencia internalista puede no favorecer suficientemente la identificación de las relaciones de los objetos matemáticos con otros objetos y contextos no matemáticos, ni la apreciación de la amplitud de visiones acerca de la actividad matemática que acompañó su evolución; aunque esta misma tendencia puede sí proporcionar una visión del objeto matemático y de su tratamiento en el marco de una teoría. En suma, consideramos que no todo tipo de HM responde suficiente ni adecuadamente a las expectativas que se infieren de los planteamientos recapitulados y que adjudican a la HM el carácter de cornucopia de visiones de la actividad matemática, de las Matemáticas, del conocimiento matemático y de los objetos matemáticos.

Al observar los argumentos que respaldan la idea de que la HM configura una **fuente de artefactos** debemos afirmar que en este caso también se le asigna un valor intrínseco a la HM, en cierto sentido independiente del tipo de HM o de la estrategia que se emplee en su apropiación. Por ejemplo, consideramos totalmente necesario disponer de una HM evolutiva o una HM que ofrezca un panorama de dificultades o de obstáculos epistemológicos para poder establecer un cierto paralelismo con la evolución del pensamiento matemático de los estudiantes o con sus errores o maneras de pensar. Asimismo, se debe haber hecho un trabajo con fuentes históricas originales que haya implicado una descentración del profesor, para que tal experiencia sirva de referencia al profesor sobre la situación en la que sus estudiantes se encontrarán al estudiar un discurso matemático que les es ajeno.

Ahora bien, frente a la idea de HM como artefacto y cómo este tiene la potencialidad de convertirse en herramienta, debemos mencionar que consideramos necesario que existan unas acciones específicas que promuevan tal conversión. En este sentido creemos que el proceso de apropiación de la HM no conlleva de manera natural ni inmediata el uso de la misma, ello en tanto que la HM no tiene de manera intrínseca la condición de ser herramienta, sino solo artefacto. En un sentido semejante en un capítulo de un *Handbook* (Shiqi, Rongjin, & Hyunyong, 2008) se afirma la necesidad de establecer conexiones explícitas entre el conocimiento matemático usual promovido en un programa de formación de profesores y el conocimiento matemático escolar, y que estas conexiones se realicen al interior del programa y no se dejen al arbitrio de los egresados ni de las condiciones laborales que las exijan o determinen.

3.3.2 Discusión y reflexión a propósito de los para qué

Recordemos que antes identificamos dos respuestas generales a la pregunta para qué la HM como parte del CPM, a saber: para dotar al profesor de visiones (sobre la actividad matemática, las Matemáticas, el conocimiento matemático y los objetos matemáticos) y para dotar al profesor de artefactos para su ejercicio profesional (mirada epistemológica y del pensamiento matemático, maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo, y competencias personales y profesionales).

Para discutir las afirmaciones relativas a las **visiones sobre la actividad matemática**, **sobre las Matemáticas** y **sobre el conocimiento matemático**, presentemos un hecho que se revela en principio trivial: la variedad de visiones y creencias específicas sobre las Matemáticas, sobre su conocimiento y sobre "hacer Matemáticas" depende de las experiencias, tendencias y perspectivas empleadas en el estudio de estas. Veamos al menos dos ejemplos: un estudio de las Matemáticas que se centre en el manejo de procedimientos conllevará a apreciar las Matemáticas como fuente de herramientas operativas, reconocer lo algorítmico como aspecto esencial de su conocimiento y resolver ejercicios como una manera típica de la actividad matemática; y, estudiar la presentación axiomática deductiva (o pseudo-teórica) de las Matemáticas puede develar una idea de las Matemáticas como conjunto de teorías, una percepción de los teoremas como expresión esencial del conocimiento matemático, y la actividad de producción deductiva de teoremas (y de sus demostraciones) como actividad matemática central.

Bajo esta línea argumental, siguiendo las ideas de algunos de los autores consultados y citados, se podría entonces sustentar que si las experiencias de estudio de las Matemáticas incorporan simultáneamente el estudio de aspectos históricos de estas, las visiones en cuestión se afectarían en positivo, logrando –por ejemplo–: ver las Matemáticas como ciencia no necesariamente autónoma y altamente interactuante con otras expresiones del pensamiento humano; notar del conocimiento matemático su carácter perfectible y con validez relativa, con expresiones que superan los resultados exitosos que trascienden el tiempo; y, advertir que la actividad matemática no está condicionada exclusivamente por los principios de la deducción lógica, que la intuición contribuye de manera importante a la actividad creativa y que puede la actividad matemática está permeada por los contextos socioculturales.

La anterior perspectiva tiene aún un carácter hipotético, pues infortunadamente la incorporación de la HM en las experiencias de estudio de las Matemáticas no parece ser el tipo de prácticas que usualmente orienta la formación matemática de los profesores de

Matemáticas y en las investigaciones empíricas sobre HM–CPM las referencias a tales prácticas son altamente escasas.

No obstante la precedente situación, reconocemos que varios de los estudios empíricos contemplados en la literatura consultada sí refieren experiencias –no siempre exitosas– de introducción de la HM en la formación de profesores con el propósito de “modificar” sus visiones. También advertimos que varias de las propuestas contempladas en la literatura sobre la relación HM–CPM exponen la idea de cursos de HM llevados a cabo con posterioridad a la formación matemática básica de los profesores; en algunos casos incluso esta formación matemática básica se exige como prerrequisito del curso de HM.

A este respecto, debemos señalar que detrás de varias posturas reconocemos que a la HM se le adjudica un papel de conocimiento “corrector” de visiones (como lente de anteojos), más que como conocimiento consustancial a las Matemáticas mismas (como el cristalino para el ojo). En efecto, pareciera que las experiencias matemáticas que los futuros profesores han tenido formándose como matemáticos, o educándose en su conocimiento matemático disciplinar, han conducido a una visión “deformada” de las Matemáticas, de su conocimiento y de la actividad matemática misma, y que la HM tiene la facultad de “re-formar” tales visiones.

Esta condición asignada a la HM revela otro hecho, quizá no tan trivial como el mencionado antes sobre las implicaciones de las experiencias formativas en las visiones, a saber: para el profesor de Matemáticas no es suficiente lograr una visión “restringida” de las Matemáticas y requiere disponer de una visión y creencias sobre esta más amplia y diversa, como la proporcionada por la HM. Bajo la aceptación de este hecho se hace necesario explorar y explicitar qué y cómo, del ejercicio profesional docente, se favorece con una visión tal, asunto no suficientemente abordado de manera explícita en la literatura estudiada por nosotros y reportada en 3.1.

A modo de inferencia, a partir de tal literatura, podríamos llegar a proponer que una visión amplia de la actividad matemática (que incluya sus diferentes facetas, la valoración del acto creador, la asignación de un lugar para la intuición y para los aspectos estéticos, o propicie sensibilidad en torno a la existencia de maneras alternas de hacer Matemáticas, entre otras de sus características) dispondría al profesor a proponer formas alternas de actividad matemática en el aula o a valorar en la actividad matemática de sus alumnos aspectos no técnicos del quehacer matemático, a la vez que le impondría retos respecto a cómo promover el desarrollo de la intuición matemática o de la creatividad matemática de los estudiantes, a través de las tareas que les proponga. De manera semejante, y manteniendo un estado hipotético casi especulativo, podemos inferir que una visión no distorsionada de las Matemáticas y de su conocimiento (que la asocie a las demás disciplinas, que le asigne un lugar a sus relaciones con la Cultura y la Sociedad, o que le permita entrever el carácter relativo del rigor, verdad o existencia del conocimiento matemático) permitirá que el profesor –entre otras opciones– considere la posibilidad de realizar proyectos escolares de Matemáticas en donde intervengan otros colegas, disciplinas y artes, así como que le brinde la posibilidad de reconsiderar la existencia –y evolución– en el aula de cánones de rigor, verdad y existencia, alternos a los aparentemente estandarizados para las Matemáticas.

Ahora bien, la línea argumentativa relacionada con la **visión de los objetos matemáticos** expresada por varios autores, conlleva la idea de que una visión amplia y profunda de los objetos matemáticos (expresada, por ejemplo, en el conocimiento de su racionalidad e intención, su carácter evolutivo, sus distintos significados, o su ubicación en las Matemáticas mismas) es un componente deseable en el conocimiento de los profesores, por cuanto aporta a su comprensión de los objetos matemáticos. Desde nuestra perspectiva, esta es una manera adecuada de responder al requerimiento referido en la expresión "el profesor de Matemáticas debe aprender más Matemáticas que las que deben aprender sus estudiantes" y que usualmente se interpreta como que debe aprender sobre temas y disciplinas que no enseña (y que hacen parte del conocimiento exigido a los matemáticos). En otras palabras, creemos que la comprensión que sobre los objetos matemáticos escolares debe tener el profesor, se favorece sustancialmente a través del conocimiento y profundización en los aspectos históricos de tales objetos, pero no se agota con ello.

Al margen de esta consideración, la mayoría de las argumentaciones estudiadas nos parecen carentes de detalles acerca de la conveniencia y utilidad de una mejor comprensión de los objetos matemáticos, a favor del ejercicio docente[144]. En otras palabras, creemos necesario responder qué beneficios, a más de erudición, obtiene un profesor al tener una visión histórica de los objetos matemáticos que configuran las matemáticas escolares.

Ligada a esta pregunta aparece entonces la segunda intención aludida (*i.e.*, dotar al profesor de artefactos para su desempeño profesional) y algunas respuestas. Procurando mantener el orden de los aspectos aludidos a este respecto (mirada epistemológica y del

[144] Esta afirmación no debería interpretarse como un rechazo a la necesidad de la comprensión profunda de los objetos matemáticos; debería interpretarse como una búsqueda de justificación y sentido de tal comprensión.

pensamiento matemático, maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo, y competencias personales y profesionales) exploremos tales respuestas y expresemos nuestras posturas.

En una primera vía de respuesta, específicamente en lo relativo a la **mirada epistemológica y del pensamiento matemático**, se encuentra la interesante discusión que se ha dado en torno a si la filogénesis puede y debe orientar los procesos de abordaje de los objetos matemáticos en el aula y si en efecto entre esta y la ontogénesis existe un "paralelismo". Más allá de tomar una postura que en dicha discusión, consideramos fundamental señalar al menos dos supuestos tácitos no cuestionados en ninguno de los documentos estudiados sobre la relación HM–CPM: el primero es precisamente la existencia y disponibilidad de una historia y análisis epistemológicos de los objetos matemáticos que se constituyen en objeto de enseñanza y aprendizaje en la escuela; el segundo es la adecuada presentación de tal historia y análisis en relación con las posibilidades y exigencias de los procesos formativos de los profesores de Matemáticas. En otras palabras, antes de abordar la discusión (o al menos al margen de esta) debe garantizarse la existencia de una historia evolutiva del objeto matemático, que sirva de referencia o filogénesis, y una presentación de los detalles históricos claramente pertinentes, adecuados y dirigidos a la formación del profesor.

Recordemos ahora que varios de los autores estudiados plantean que un análisis histórico y epistemológico de un concepto permite a los profesores comprender por qué un cierto concepto es difícil para los estudiantes o interpretar los errores que surgen en el aprendizaje de las Matemáticas. Acá también debemos cuestionar la existencia de dichos análisis y señalar que muchos de ellos han surgido como una necesidad y respuesta desde las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas y que algunos de los existentes casi siempre se apoyan en versiones internalistas de la HM; desde nuestra óptica, esta es una de las razones de existencia y promoción de enfoques socioculturales o socioepistemológicos para la HM tan en boga particularmente en este siglo.

Una segunda vía de respuesta se refiere a una transformación en la **manera de enseñar** Matemáticas, mediada por la introducción de una componente histórica en la educación del profesor. En esta vía se han pronunciado voces que argumentan, entre otros asuntos, que el aprendizaje de la HM por parte de los profesores proporciona un cambio en la manera habitual de abordar la educación en Matemáticas y de promover el pensamiento de los individuos, transforma la práctica de enseñanza de las Matemáticas –debido al cambio epistemológico que, para los conceptos matemáticos, se genera al estudiar su perspectiva histórica-epistemológica–, o promueve un estilo consciente de enseñanza.

Desde nuestra perspectiva, podría llegar a ser relativamente obvio que la introducción de un componente histórico en la educación de los profesores sí afecte el ejercicio docente y genere algunas diferencias en la enseñanza de las Matemáticas, pero no es igualmente obvio que tales diferencias sean lo suficientemente profundas y esenciales que mejoren la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas; infortunadamente, los resultados de las investigaciones por nosotros estudiadas no reportan mucha evidencia para verificar esta hipótesis. Al respecto de esto, vale la pena recordar la crítica que Bkouche (1997) hace al "enfoque histórico en la enseñanza de las Matemáticas", al señalar que si bien es válido recurrir a la HM para mejorar la enseñanza, esta no es la panacea a todos los problemas que dicha enseñanza contempla.

En una tercera vía de respuesta, específicamente al considerar que el estudio de la HM dota al profesor de **insumos para el aula y el currículo**, encontramos que varios autores aluden a la potencialidad de la historia de un concepto en tanto fuente de ideas para la enseñanza de este. El documento de Grugnetti (2000) constituye un buen ejemplo de ello, pues luego de presentar algunos elementos de la historia y evolución del concepto de función, invita a tomar de dicha historia ideas para lograr diferentes enfoques de enseñanza de este concepto. Los documentos que proponen el conocimiento de problemas matemáticos históricos y su incorporación al aula de clase constituyen otros ejemplos.

Desde nuestra perspectiva, esta aproximación a la HM (es decir como proveedora de insumos) tiene un carácter utilitario, pues el profesor se sirve de esta para utilizar sus resultados, de manera relativamente directa, en la enseñanza de las Matemáticas. Consideramos que este uso, si bien puede ser importante para el ejercicio profesional del profesor y puede configurarse como estrategia pedagógica innovadora, incorpora un sentido poco profundo de la HM en razón a que muy probablemente se fracciona o simplifica la obra matemática, el relato o análisis histórico al incorporar solo segmentos de la HM y difícilmente se incorporarán los análisis históricos-epistemológicos generados por los historiadores y filósofos de las Matemáticas. Asimismo, incorpora un sentido poco profundo del CPM, identificándolo más con un conocimiento técnico (o tecnológico) que con un conocimiento que define a un profesional de la educación.

En un sentido semejante al nuestro identificamos el cuestionamiento de Bkouche (1997), a través del cual reclama y propone un uso de la HM en torno a las cuestiones epistemológicas, de manera análoga a como, para el caso de Francia, lo reportan Schubring y sus colegas (2000). En dicho artículo, el autor francés establece que la HM puede y debe responder a las necesidades de carácter epistemológico que le surjan al profesor de Matemáticas en su ejercicio docente, reivindicando así un tipo de Historia que trasciende la versión conocida biográfica y cronológica y, así, el trabajo profesional de los historiadores en el que descansan los análisis y la producción que publican en revistas y libros especializados. Quizá los argumentos de Monk y Osborne (1997) en torno a que la Historia y la Filosofía de la ciencia deben tener unas razones subyacentes que sean integrales a, y compatibles con, los principales objetivos de los profesores, constituyan un elemento adicional a favor de la reivindicación del papel de la HM en una dimensión como la planteada por Bkouche.

Una cuarta línea de respuesta alude a las **competencias personales y profesionales**. Recordemos que al respecto se reseña que el estudio de la HM conlleva: un ambiente de aprendizajes que trascienden el conocimiento histórico y que implica el aprendizaje de habilidades y el desarrollo de competencias metacognitivas, el contacto con otros resultados culturales, o valorar la HM. Estos planteamientos encajan muy bien en la categoría “historia como medio”, propuesta por Jankvist (2009b). Para nosotros esta intención debe ser valorada en su justa medida, pues parece aportar de fondo al conocimiento del profesor en tanto profesional de la educación en Matemáticas. Específicamente reconocemos que estas competencias más que aludir al “saber” del profesor, refieren al “ser”.

En un vía semejante hemos identificado algunos documentos que refieren refiere al propósito de fortalecer la valoración y el papel de la profesión docente, puesto que la HM contiene algunos materiales que reflexionan —o permiten reflexionar— sobre la profesión del docente de Matemáticas. Por ejemplo Høyrup (2007), presenta un documento en el cual a través de sus referencias a la enseñanza de las Matemáticas, al papel y carácter del profesor de Matemáticas o del matemático de una época antigua, genera cuestionamientos sobre estos aspectos hoy en día. Por su parte, en una dimensión diferente de la historia (*i.e.*, historia de la enseñanza de las matemáticas) Schubring y sus colegas (2000) plantean la posibilidad que esta permita la comprensión de la evolución de la profesión docente.

Identificamos así, asuntos aún no suficientemente abordados como contribuciones particulares de la HM al CPM que deberían ser objeto de estudio para seguir consolidando el papel de la HM en el CPM.

3.3.3 Discusión y reflexión a propósito del qué

Para iniciar la discusión, reseñemos nuevamente la diferencia entre los planteamientos que hicimos en un momento específico de la aproximación a la pregunta en cuestión (Guacaneme, 2010) y lo presentado ahora como forma de organización de las respuestas identificadas en los documentos citados en 3.2.1. Consideramos que existe una diferencia, aparentemente nimia, entre los objetos de estudio de la HM y los tratamientos que se pueden hacer de los mismos; tal diferencia no fue evidenciada en el artículo citado.

Para ir precisando la diferencia en cuestión, consideremos dos casos particulares a través de los cuales se ilustra cómo un objeto matemático puede ser tratado históricamente de dos modos distintos y por qué el tratamiento no puede ser considerado objeto de estudio de la HM.

Desde la HM se podría estudiar el funcionamiento de la definición euclidiana de proporción –para magnitudes geométricas– en el marco del Libro V de *Elementos* de Euclides, o se podría explorar cómo el trabajo de Eudoxo en Astronomía sobre los ciclos de los cuerpos celestes y su coincidencia periódica, condicionaron la emergencia de tal definición. Así, se observa cómo un objeto matemático (la definición quinta del Libro V) puede ser abordado desde la HM bajo una perspectiva internalista para identificar su funcionamiento en el marco de una teoría o externalista para establecer cómo las condiciones socioculturales le determinaron. Debe ser claro entonces, a través de este ejemplo, que las miradas internalista y externalista no son objetos de la HM, sino modos de abordar el estudio histórico del objeto matemático.

Otro ejemplo podría retomar como objeto de estudio de la HM, la manera en que Euclides, en el Libro V de sus Elementos, emplea el término “equimúltiplos” para referir el mismo múltiplo de dos magnitudes no necesariamente homogéneas (por ejemplo, el “triple” de una longitud y el “triple” de una superficie) y el estudio que de esto se hace a través de notaciones simbólicas que asocian a una magnitud la letra a, a la otra la letra b y a los múltiplos las letras na y nb ($3a$ y $3b$, para el ejemplo específico). Si bien el asunto matemático es el mismo (la idea de equimúltiplo), la lectura e interpretación puede hacerse desde el punto de vista del autor (es decir sin una notación simbólica sino simplemente retórica apoyada en dibujos) o desde la perspectiva de los científicos modernos (empleando la notación sugerida antes), como lo mencionamos en el artículo (Guacaneme, 2010) siguiendo una un planteamiento interesante (Tosh, 2006), es decir desde dos tratamientos históricos diferentes con posturas antípodas.

Bajo esta consideración, lo que en este capítulo hemos considerado bajo el título “tratamiento” sí define tipologías de la HM, pero estas no son objeto de estudio de la HM sino maneras de abordar los “objetos de estudio”. En este punto nos atrevemos a señalar que el estudio y definición de las tipologías de la HM pertenece al terreno del discurso meta-histórico o de la historiografía, entendida esta en su acepción más básica (*i.e.*, como la disciplina que se ocupa del estudio de la historia).

Advirtamos entonces que actualizando las tipologías del artículo citado (Guacaneme, 2010), tendríamos no diez sino cinco tipologías, tres de las cuales se han identificado en la literatura tratada en este capítulo (Internalista/Externalista, Relato/Análisis y Evolutiva/Situada). En la Imagen 7 hemos ilustrado las tipologías e incluido las dos no tratadas en la literatura de este capítulo pero sí identificadas en el artículo; a propósito de estas debemos precisar que la tipología “Historia/Herencia” proviene directamente y sin cambios del artículo citado, en tanto que la tipología “Original/Anacrónico” recapitula las ideas de lo que en el artículo denominamos la tipología “Historia cultural/perspectiva moderna”. La tipología que en el artículo denominamos “enfoques del análisis histórico” la hemos incluido como una descripción más fina del segundo elemento de la tipología “Relato/Análisis”.

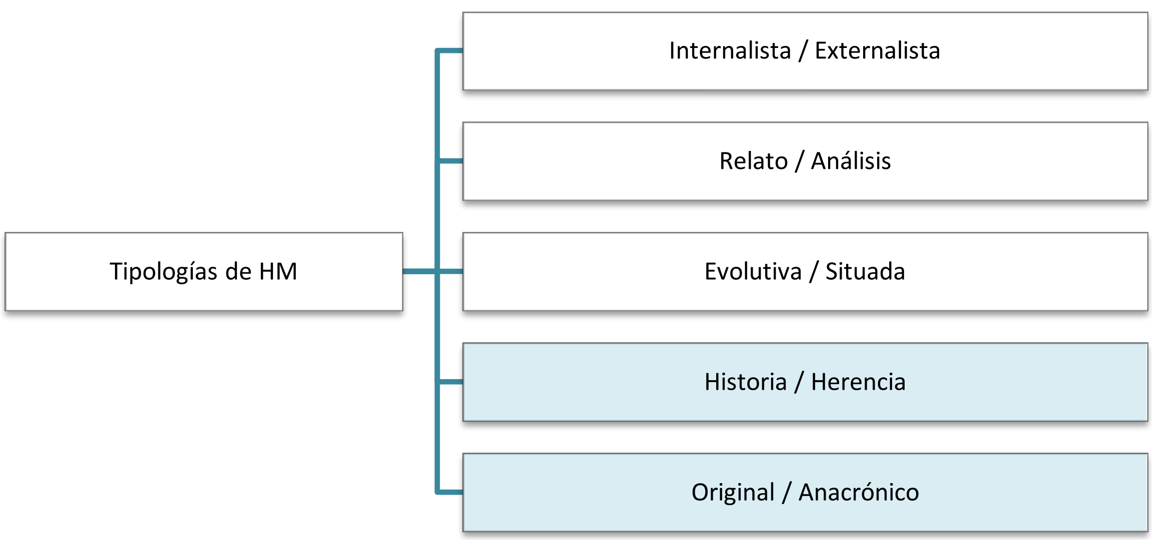

Imagen 7 Tipologías de HM

En este mismo sentido debemos reconocer que algunas de las tipologías tratadas en el artículo se consideran ahora como “Objeto de estudio” de la HM. La aludida en el artículo como “objeto de referencia” se expresa ahora en algunos de los objetos de estudio, en tanto que la que nombramos como “historia conceptual/historia de problemas” se contiene en el objeto de estudio denominado “Temas/Procesos/Problemas”. La denominada “fuentes”, ahora ingresa como objeto de estudio. Consideramos que la tipología que en el artículo nombramos “Matemáticas hegemónicas/Matemáticas de culturas no hegemónicas” ahora debe ser pensada como un objeto de estudio de la HM; por ello, en la Imagen 8 la hemos resaltado. Debemos precisar que los seis primeros objetos son precisamente objetos de estudio **de** la HM, el séptimo es un objeto de estudio **sobre** la HM y el octavo asume una **relación** de la HM con el contexto educativo.

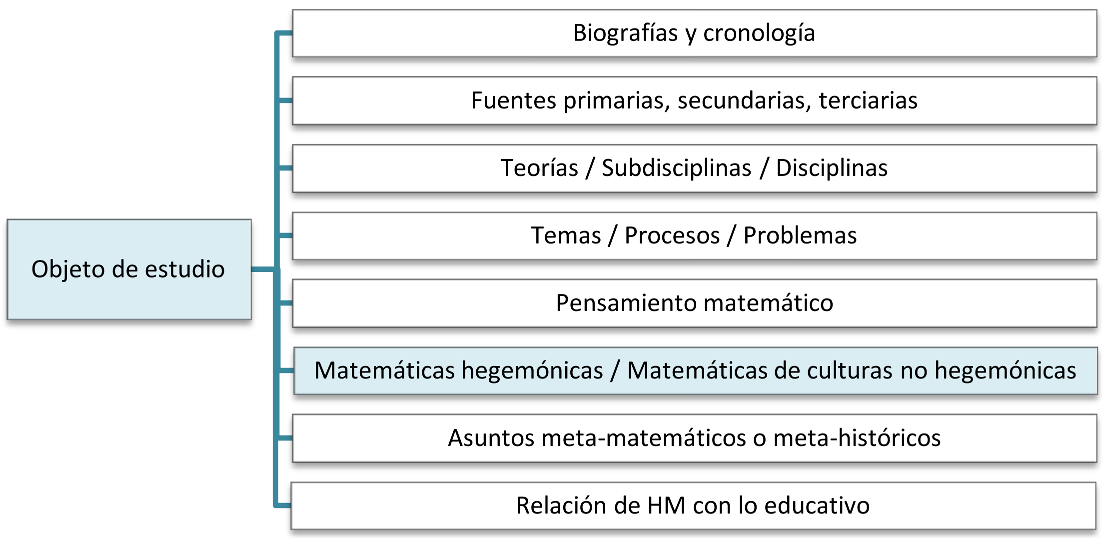

Imagen 8 Objetos de estudio

Más allá de lo comentado hasta acá queremos resaltar que la identificación de objetos de estudio y tratamientos (o tipologías de la HM) nos ha llevado a reconocer dos preguntas, relacionadas con la pregunta sobre qué HM debe ser apropiada por un profesor, a saber: (i) ¿qué objetos de estudio deben ser abordados en la apropiación de la HM para la formación del CPM? y (ii) ¿qué enfoque o tratamiento histórico debe ser empleado para tratar los objetos de estudio de la HM?

3.3.3.1 ¿Qué objetos de estudio deben ser abordados en la apropiación de la Historia de las Matemáticas para la formación del conocimiento del profesor de Matemáticas?

Abordemos entonces la discusión relacionada con la pregunta ¿qué objetos de estudio deben ser abordados en la apropiación de la HM para la formación del CPM? Como se puede advertir, las respuestas dadas por los documentos/autores incluyen quizá todos los objetos que considera la HM (a saber: biografías y cronología; fuentes primarias, secundarias, terciarias; teorías, subdisciplinas, disciplinas; temas, procesos, problemas; pensamiento matemático; Matemáticas hegemónicas, Matemáticas de culturas no hegemónicas). Lo anterior de manera alguna significa que todos los documentos/autores concuerdan en la respuesta a la pregunta en cuestión; más bien lo que debería interpretarse es que lo que para algunos es un objeto de estudio deseable para la formación del CPM, para otros no lo es.

Muy probablemente no exista disenso alguno entre los profesionales de la HM para aceptar que los aspectos históricos (tales como las **biografías** o las fechas de acontecimientos matemáticos) hacen parte de aquello de lo cual la HM se ocupa; así, ubicar a los matemáticos célebres en determinadas épocas de desarrollo de las Matemáticas o las fechas (o épocas) en que una obra se desarrolla o publica, se considera conocimiento histórico que, entre otras cosas, genera un halo de erudición. El consenso puede llegar a extenderse a la pertinencia de este conocimiento como parte del CPM; al menos, no parece tener buen recibo un profesor de Matemáticas que no logre referir a algunos de los principales matemáticos, ni algunos hitos de las Matemáticas (carecer de tal conocimiento evidenciaría falta de “cultura básica” sobre las Matemáticas o sobre su historia)[145].

Sin embargo, un terreno donde el consenso parece desvanecerse es aquel en donde se postula el carácter fundamental de dicho conocimiento histórico para el profesor de Matemáticas (*i.e.*, cuando se cuestiona si este conocimiento condiciona profundamente su ejercicio profesional). En efecto, existen serias dudas de que a más de erudición este tipo de conocimiento proporcione un valor agregado al CPM, sin embargo no hay que desconocer que, por ejemplo, las anécdotas[146] usualmente se emplean en las clases de Matemáticas para amenizar (que no es lo mismo que motivar) el discurso matemático objeto de enseñanza o aprendizaje, que algunos datos biográficos coadyuvan a incluir un aspecto humano a las Matemáticas o a no perder el vínculo de la obra con su autor, y que la vida de un matemático constituye el contexto sociocultural y personal inmediato que

[145] Esta consideración tiene un matiz particular cuando tal cultura básica tiene como referencia a los matemáticos y sus obras de una comunidad no muy prolífera en Matemáticas en el concierto internacional. Por ejemplo, en un país como Colombia esa cultura parece ser altamente inexistente o haber sido apropiada por unos muy pocos investigadores en HM y aún por muchos menos profesores de Matemáticas. Nos atrevemos a reseñar que en aras de ganar identidad nacional, al menos sería deseable que más profesores conocieran siquiera los nombres de algunos matemáticos colombianos que han aportado sustancialmente al desarrollo de las Matemáticas y algo de sus obras matemáticas.

[146] No nos resistimos a referir acá un muy interesante libro de anécdotas (Alsina Català, 2010). En la lectura de este el lector vive experiencias que le sirven como referencia para abordar la discusión sobre el papel de las anécdotas históricas sobre el conocimiento matemático y sus protagonistas.

sustenta su obra matemática (asunto valorado en una perspectiva externalista o en un enfoque sociocultural). Probablemente el estudio de varias biografías de matemáticos sobresalientes le permita al profesor valorar la importancia que para ellos tuvo sumergirse en un ambiente académico y de estudio, en tanto contexto común a la mayoría de ellos, como una de las condiciones altamente deseable –y totalmente necesaria– a recrear en las clases de Matemáticas que oriente.

A este respecto debemos mencionar que reconocemos una subvaloración del conocimiento histórico referido a biografías, anécdotas y fechas, pues quizá no tiene un valor pedagógico intrínseco que conlleve un uso directo o inmediato en el aula, pero consideramos que tiene un potencial para la identificación de variables de contexto que favorecieron y podrían favorecer la actividad matemática de los estudiantes. Aquí es importante señalar que además de que el conocimiento histórico (sobre los elementos biográficos y cronológicos) se puede asumir como un fin, también se puede asumir como un medio para la identificación de dichas variables contextuales que favorecieron (y podrían favorecer) la actividad matemática.

Por otra parte, atendiendo a la clasificación de **fuentes** históricas que hicimos en el artículo ya citado (Guacaneme, 2010) y que refiere las fuentes primarias, secundarias y terciarias,[147] debemos reconocer un cierto énfasis en los documentos/autores en sugerir el estudio de las fuentes primarias, basado –por ejemplo– en argumentos que reconocen la potencialidad del contacto con la obra en su contexto y modo de formulación original. A este respecto aclaramos que nos parecen razonables los argumentos esgrimidos y reconocemos el potencial formativo que tiene la actividad de estudio de las fuentes originales o primarias. A pesar de ello, debemos objetar la consideración de que las fuentes primarias sean un objeto de la HM; nuestra visión las ubica más bien como objetos de las Matemáticas que pueden ser analizados desde perspectivas históricas (o más precisamente desde la HM), a partir de lo cual se genera un discurso histórico sobre los mismos (es decir, lo que hemos llamado fuentes secundarias). Para ilustrar este punto, consideremos la obra *Elementos*; la traducción que hemos consultado (Puertas, 1991, 1994, 1996) constituye una obra matemática o fuente primaria; las notas a pie de página

[147] Recordemos que las fuentes primarias (u originales) las identificamos con los manuscritos originales de las obras matemáticas e incluso sus traducciones, la correspondencia entre matemáticos, los discursos de los matemáticos en congresos o eventos académicos, o los instrumentos y máquinas construidas para favorecer la producción matemática. Las fuentes secundarias las referimos como los análisis, comentarios o recapitulaciones sobre estas fuentes originales. Y las fuentes terciarias (o fuentes didácticas) como los productos resultantes de transposiciones didácticas de la HM con la intención de incorporarla a la enseñanza de las Matemáticas

de la traducción, que no son otra cosa que los análisis elaborados por la historiadora, son una fuente secundaria.

Bajo esta óptica –coincidiendo plenamente con Vardi (1999)– estudiar las fuentes primarias es estudiar Matemáticas (antiguas, para el ejemplo reportado antes), en tanto que estudiar los análisis históricos es estudiar HM. Entendemos entonces que las posturas de quienes defienden el estudio de las fuentes primarias o bien se ubica en un ámbito en el que se favorece el estudio de las Matemáticas o en uno en donde se privilegia una aproximación semejante a la que realiza un historiador de las Matemáticas cuando investiga un hecho histórico y elabora un discurso histórico (*v.g.*, una interpretación) sobre el mismo a partir de acudir a la fuente original[148]. En este sentido o bien se estudia Matemáticas o bien se hace HM.

Siguiendo la línea argumentativa anterior, el estudio de la HM, es decir el estudio de las fuentes secundarias, consistiría en el estudio de los resultados de la investigación que los historiadores hacen y que presentan en artículos de revistas especializadas, en libros (bien sea especializados o de divulgación), en ponencias y conferencias en eventos académicos, o en videos divulgativos.

Ahora bien, las fuentes terciarias aparecen cuando académicos no profesionales de la HM, sino más bien diletantes, estudian y hacen uso de la HM para configurar discursos que la relacionan con lo educativo. En esta dirección es ampliamente conocido el caso de los estudios de transposición didáctica que desde la Didáctica de las Matemáticas se han desarrollado en donde el conocimiento histórico del objeto de estudio se asume como conocimiento sabio y desde allí se establecen maneras de interpretar y caracterizar el conocimiento matemático escolar (Chevallard & Joshua, 1982). Pongamos también por caso el de los estudios de obstáculos epistemológicos de un objeto matemático, para desde allí iluminar el estudio de potenciales errores y dificultades en el aprendizaje escolar del objeto (J. P. Bishop et al., 2014; Hefendehl-Hebeker, 1991; Sierpinska, 1987). Asimismo relacionemos los estudios socio-epistemológicos a través de los cuales se estudian las historias de las prácticas matemáticas en torno a un objeto matemático y se hacen inferencias y propuestas didácticas (Buendia Abalos & Montiel Espinosa, 2011; Buendia, 2006; Castañeda, 2002; Cordero & Flores, 2007; Ferrari, 2008; Montiel, 2005).No sería justo dejar de lado el caso de las reelaboraciones históricas que se configuran con el

---

[148] En un ensayo un tanto especulativo no publicado (Guacaneme, 2007a) nos dimos a la tarea de discutir la tarea del historiador de las Matemáticas, ejercicio historiográfico y hasta historiológico, que nos deparó muchos réditos de comprensión sobre la HM.

fin de integrar la HM a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; de estas últimas hay un sinnúmero de referencias en el Capítulo 2. Consideramos que las fuentes terciarias, en tanto relacionan la HM con lo educativo, podrían llegar a tener un papel destacado en los programas de educación del profesor de Matemáticas, reconociendo en ellas –y a través de ellas– una forma "indirecta" de estudiar HM o, si se prefiere, de estudiar HM como medio más que como fin. En este caso, la HM se estudia en relación un uso específico, lo cual le podría asignar un carácter funcional al conocimiento histórico y mayor pertinencia al mismo.

Cuando se observa lo plantado respecto de los objetos **teorías/subdisciplinas/disciplinas** y **temas/procesos/problemas** se reconoce una pluralidad de posturas frente a la dimensión del objeto de estudio. Tomar posición a favor del estudio de un objeto amplio (como puede ser la historia del Cálculo) o del estudio de un objeto específico (la solución de ecuaciones) implica necesariamente considerar si la prioridad en la formación del CPM es la extensión o la profundidad de la HM. El problema es que la HM es tan extensa como profunda y no vemos que sea posible cubrir ambas características en un programa de formación de profesores de Matemáticas, ni en un conjunto de estos. La decisión entonces estará tensionada y condicionada por otras variables o factores, y siempre estará en deuda con el criterio de amplitud y de profundidad, a pesar de procurar un equilibrio.

El **pensamiento matemático**, como objeto de la HM, está sub-representado en los documentos/autores reseñados en 3.2. Sin embargo, cuando se observa el panorama variopinto que tal noción evoca, se advierte un ámbito histórico muy amplio y no menos diverso, y potencialmente pertinente para el CPM.

En efecto, el pensamiento matemático se concibe de muy diversas maneras. Quienes lo conciben como la manera particular como los matemáticos (en tanto sujetos) piensan los objetos matemáticos, encuentran en la historia del pensamiento matemático una fuente inagotable de información que devela, por ejemplo, los métodos o las heurísticas personales que se usaban para resolver problemas matemáticos, el carácter metafísico de concebir algunas nociones sobre las que se estructuran algunas teorías matemáticas, o la valoración de su propia producción matemática en relación con los cánones de la comunidad matemática. Quienes le atribuyen una dimensión menos subjetiva, es decir más social, reconocen en la historia del pensamiento matemático facetas más universales; en esta perspectiva se identifican formas de pensamiento (*v.g.*, pensamiento sintético y pensamiento analítico; intuición y formalismo; intradisciplinar e interdisciplinar) que se privilegian en un momento particular de la historia o en momentos específicos de la actividad matemática, reconociendo en todo caso su carácter e intervención dialéctica en la creación matemática y en la comunicación de avances y resultados. Quienes enfatizan en los procesos matemáticos (*v.g.*, visualización, estimación, abstracción, reconocimiento de regularidades, justificación, razonamiento bajo hipótesis) como expresión sustancial del pensamiento matemático, a más de reconocer su especificidad para el campo de las Matemáticas, a través de una historia del pensamiento matemático reconocen que estos constituyen singularidades en el concierto del pensamiento científico y del pensamiento humano en general.

Cada una de las anteriores (y otras) miradas al pensamiento matemático a través de su historia, parecen ofrecer elementos fundamentales al profesor de Matemáticas los cuales probablemente a más de erudición le permitan: comprender sus propias maneras de pensar y actuar matemáticamente; disponer de un conjunto de marcos de referencia para comprender la manera de pensar matemáticamente de sus estudiantes, de los autores de libros de texto, de los diseñadores curriculares y de los matemáticos coetáneos; perfilar ideales de pensamiento que sirvan como horizonte de sentido de la actividad matemática de sus estudiantes. Asuntos, todos ellos, de particular importancia en la acción profesional educativa del profesor de Matemáticas.

En el contexto colombiano, en el cual el currículo escolar de Matemáticas está centrado en el desarrollo del pensamiento matemático desde los albores de la nueva carta política de 1991, conocer perspectivas históricas sobre el pensamiento matemático puede llegar a complementar las aproximaciones cognitivas del mismo y permitir la comprensión profunda que subyace a tal currículo.

Bajo el título **Matemáticas hegemónicas/Matemáticas de culturas no hegemónicas** hemos expuesto el sexto objeto de estudio reportado en la Imagen 8; este se refiere a si las Matemáticas objeto del estudio histórico son las reconocidas como hegemónicas (o Matemáticas occidentales) o si pertenecen a culturas o sociedades específicas (*v.g.*, Matemáticas orientales o Matemáticas de comunidades indígenas). Con relación a esta dualidad mencionamos en otro documento que:

> Rowe (1996, pp. 4-6) advierte de la existencia de una tendencia en la HM que implica un cambio desde una postura relativamente limitada (visión eurocéntrica de un cuerpo monolítico de conocimiento matemático), hacia el reconocimiento de un panorama más amplio de la actividad matemática incorporada en una rica variedad de culturas y periodos. (Guacaneme, 2010, p. 140).

Con este contexto de significación de fondo, debería quedar claro que la HM tiene fronteras más amplias que las contempladas usualmente, asunto que problematiza aún más la decisión sobre qué HM debería ser apropiada por un profesor de Matemáticas. En efecto, al considerar la HM de las culturas orientales ancestrales o los resultados de la investigación en Etnomatemática que revela las formas de "hacer matemáticas" de culturas indígenas y de grupos culturales minoritarios, se incrementa notoriamente el espectro histórico potencialmente incorporable en el CPM. En este punto cabe volver a mencionar las posibilidades de adquirir identidad cultural a través de disponer y estudiar la HM propia, es decir la historia que recapitule, analice y valore las maneras propias de una cultura o comunidad de hacer Matemáticas, incluso si estas están condicionadas por las culturas hegemónicas. Esto vale de manera especial para el caso colombiano en donde, desde nuestra perspectiva, existe aún una exaltación de lo extranjero y, consecuentemente, una subvaloración de lo propio.

Luego de haber abordado la discusión relacionada con los objetos relativamente usuales que considera la HM (a saber: biografías y cronología; fuentes primarias, secundarias, terciarias; teorías, subdisciplinas, disciplinas; temas, procesos, problemas; pensamiento matemático; Matemáticas hegemónicas, Matemáticas de culturas no hegemónicas), nos resta discutir dos objetos de los reportados en la Imagen 8 (a saber: asuntos meta-matemáticos o meta-históricos y relación de HM con lo educativo) los cuales podrían incluso, desde algunas posturas, ser considerados objetos no pertenecientes a la HM.

Debemos manifestar que solo en uno de los documentos encontramos una referencia explícita a los **asuntos meta-matemáticos**, más específicamente a los fundamentos de las Matemáticas y a las ideas de rigor y prueba. Comencemos por estas últimas.

Nuestra aproximación a las ideas de rigor y prueba desde una perspectiva histórica nos permiten reconocer en estas una dualidad casi inseparable y un objeto perfectamente abordable desde la HM que le brinda al profesor un marco de referencia tanto para comprender miradas alternas a tal dualidad como para aprehenderla en sus expresiones escolares. Entre la variedad de documentos que la estudian podemos recomendar dos que nos parecen suficientemente descriptivos y profundos: un artículo (Kleiner, 1991) y un libro (Chelma, 2012).

Ahora bien, se puede suponer que la dualidad rigor y prueba fue reconocida por Pamela Grossman (1990) (discípula de Lee S. Schulman) como porción de una de las tres partes del conocimiento disciplinar del profesor (*Subject Matter Knowledge*), entendido como una de las cuatro áreas generales que describen el conocimiento del profesor; para

Grossman el conocimiento disciplinar incluye el conocimiento del contenido de una área temática así como el conocimiento de las estructuras sustantivas y el conocimiento de las estructuras sintácticas de la disciplina. Precisamente, afirma que las estructuras sintácticas de una disciplina incluyen una comprensión de los cánones de evidencia y demostración dentro de la disciplina o una comprensión de cómo se evalúan las proposiciones, por los miembros de la disciplina. Recordemos acá que en un trabajo anterior (Guacaneme, 2013) establecimos una interpretación de las estructuras sintácticas para el caso del CPM, en el cual, apoyados en lo propuesto por Kleiner (1991), concluíamos que estas configuran un ámbito supremamente complejo, polisémico, cambiante, abierto a la discusión, en tanto que:

> (i) no existe una, sino varias acepciones del término demostración, llegando incluso a disponerse de suficientes argumentos para afirmar que no hay respuesta definitiva y absoluta a la pregunta sobre qué es la demostración; (ii) no hay respuesta absoluta a qué es, cómo discurre y en qué se basa la verdad de las proposiciones matemáticas; (iii) la búsqueda de la certeza en las matemáticas es una misión relativa, e incluso, inútil; y, (iv) hay una condición de convención de la comunidad académica que orienta lo que es válido en la actividad matemática que se reinterpreta y redefine por la actividad matemática misma. (Guacaneme, 2013a, p. 89).

Por otra parte, la dualidad rigor y prueba es sin duda un asunto estudiado por la Filosofía de las Matemáticas y específicamente de la Epistemología de las Matemáticas; quizá esa sea la razón que justifica tan escasa referencia en los documentos/autores estudiados en 3.1. Esto mismo podría justificar la exigua alusión a los fundamentos de las Matemáticas como un objeto de la HM que debería apropiar un profesor. Ante esto podría sencillamente citarse la célebre frase de Lakatos "la filosofía de la ciencia sin la historia de la ciencia es vacía; la historia de la ciencia sin la filosofía de la ciencia es ciega" o adelantar estudios sobre el papel de la Filosofía de las Matemáticas en el CPM[149].

Pasando ahora a los **asuntos meta-históricos**, debemos hacer una consideración que en principio es obvia: estos se refieren a asuntos **sobre** la HM. Este hecho puede justificar que se piense que la precisión del relato histórico, no es un objeto de la HM, postura que se reafirma si se asume que la historia es el conjunto de hechos acontecidos en el pasado de la humanidad, la historiografía es la ciencia de la historia y la historiología es su epistemología; desde allí, la precisión histórica sería un tema de la historiología de la HM. Más allá de la discusión que esto pueda generar, queremos resaltar que al menos un

[149] En la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional se está adelantando una tesis sobre este asunto y se espera que sus resultados aproximen de mejor manera este asunto.

documento (Loats, et al., 2014) pone de manifiesto la posibilidad de que este tipo de asuntos sea objeto de estudio a favor de la formación del CPM. Dicha postura nos cuestiona sobre el lugar que los aspectos meta-históricos pueden llegar a tener sobre la comprensión y valoración de los conocimientos históricos, de manera semejante a como nos hemos cuestionado sobre cómo los aspectos meta-matemáticos condicionan la valoración y comprensión de los objetos matemáticos. Sin embargo, tal cuestionamiento, quizá por nuestra escasa comprensión de lo implicado en el mismo, nos parece por ahora un tanto distante a nuestro objeto de interés (la relación HM–CPM), pero no por ello queremos disminuir su potencial importancia.

En cuanto a la **relación de HM con lo educativo**, debemos admitir que no hace parte de los objetos que usualmente estudie la HM. Como lo referimos antes, los historiadores no están conminados a realizar su trabajo investigativo para que este sea asociado a aspectos educativos; son, en general, los investigadores en Educación Matemática quienes se ocupan de establecer las particularidades de la relación entre la HM y lo educativo o, de manera más general, la relación HM–EM tratada en el Capítulo 2.

De esta relación cobra particular importancia el primer ámbito de intervención de la HM en la EM, identificado en dicho capítulo (es decir la intervención de la HM en la enseñanza de las Matemáticas). Nuestra postura al respecto es que este ámbito debe hacer parte de lo que el profesor se apropie pues contribuye a su desempeño profesional; sin embargo consideramos que esto debe estar acompañado de una visión suficientemente informada y crítica sobre las singularidades de intervención de la HM. De hecho, en esta dirección, en el marco de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia), hace algunos años gestionamos y desarrollamos una propuesta de formación para profesores de Matemáticas en ejercicio en torno al estudio de la intervención de la HM en la educación en Matemáticas (Guacaneme, et al., 2013). Transcribimos a continuación una descripción general de dicha propuesta:

> Hoy en día, a nivel mundial, la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática" constituye un objeto de estudio de una inmensa comunidad de investigadores. La extraordinaria cantidad de artículos, monográficos de revistas y libros especializados configuran una evidencia de ello; igualmente, la existencia de grupos trasnacionales y de una intensa actividad de comunicación y discusión de avances investigativos y de innovación en eventos académicos, constituyen otra importante evidencia. Esta dinámica no ha sido ajena a la comunidad académica colombiana, de tal suerte que actualmente en Colombia se cuenta con un acervo que, entre otros asuntos, permite identificar en el conocimiento histórico de las Matemáticas, tanto un potente motor de desarrollo del conocimiento del profesor de Matemáticas, como una de las falencias más notable en la educación de los profesores.

Bajo esta óptica, se estima pertinente ofrecer un programa de formación que aborde el estudio de aspectos del conocimiento histórico desde al menos tres perspectivas, que se articulan convenientemente con la estructura curricular distintiva de la *Especialización en Educación Matemática*. Así, se prevé estudiar:

(i) algunas teorías matemáticas que son consideradas hitos en la Historia de las Matemáticas y que vistas en su contexto sociocultural de surgimiento, ofrecen una oportunidad sin igual de comprender las Matemáticas de otras épocas y otras gentes;

(ii) algunas implicaciones de la Historia de las Matemáticas en la educación en matemáticas, particularmente en la cualificación y mejoramiento del conocimiento del profesor de Matemáticas y en las implicaciones de su uso en las clases de Matemáticas; y,

(iii) el papel de algunos artefactos (*v.g.*, máquinas, instrumentos, algoritmos) que se constituyeron en mediadores instrumentales en la constitución de las Matemáticas y, ocasionalmente, en objeto de estudio de las Matemáticas mismas.

De esta manera, se intenta participar activamente de la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas, y ofrecer una estrategia para, entre otros objetivos:

a) proporcionar nuevas visiones de la actividad matemática, de las Matemáticas y de sus objetos de estudio;
b) auspiciar una cualificación y mejoramiento de competencias profesionales a favor de la docencia, relacionadas tanto con las posibilidades de descentración y empatía (como estrategias para re-conocer las subjetividades de los estudiantes, aprendices de las Matemáticas), como con habilidades de lectura de textos de otras culturas y escritura de textos de propios;
c) explorar reflexivamente el papel innovador, para docentes y discentes, de la incorporación de la Historia de las Matemáticas en las clases de Matemáticas, más allá de la obvia transformación que implica la presencia de algo inusual en estas;
d) analizar críticamente la incorporación de recursos provenientes de la Historia de las Matemáticas a favor de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; y,
e) revitalizar la imagen del profesor de Matemáticas en torno a las actividades matemáticas de creación y comprensión del conocimiento matemático.

A través de esta experiencia, centrada en la idea matemática de curva, pudimos comprobar que el estudio de propuestas de intervención de la HM en la enseñanza constituye un ambiente propicio para motivar la necesidad de estudiar a profundidad: la HM empleada (y otra colateral y relacionada con esta), las Matemáticas implicadas tanto en su contexto histórico como en su presentación contemporánea, la expresión curricular actual de la temática de las Matemáticas escolares que eran objeto de intervención, los aspectos didácticos que la investigación en Educación Matemática refería respecto del tema matemático y el lugar de la tecnología (instrumentos de mediación) en la historia del tema y de en sus expresiones modernas.

Finalmente, no sobra recordar que en el artículo citado ya (Guacaneme, 2010) habíamos expuesto de manera provisional e hipotética nuestra postura al respecto.

> [Si bien] consideramos necesario el estudio de la HM como parte de la formación del profesor de Matemáticas, creemos que en la formación de profesores de Matemáticas, este debe complementarse con (o acompañarse de), por ejemplo: el estudio de experiencias del uso de esta a favor de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas (*v.g.*, Helfgott, 1995; Kronfellner, 1996; Radford & Guérette, 2000); el estudio de prácticas investigativas que apoyadas en la HM han indagado sobre las concepciones, errores o dificultades de los estudiantes en torno a conceptos matemáticos esenciales o, de manera más general, han analizado comparativamente la filogénesis y la ontogénesis de objetos matemáticos (*v.g.*, Bero, 1996; Sfard, 1995; Sierpinska, 1987)[150]; el estudio de la evolución histórica de un concepto y su evolución educativa en los currículos escolares (*v.g.*, Chevallard & Joshua, 1982; Gagatsis & Thomaidis, 1993); o, el estudio de nociones metamatemáticas (*v.g.*, rigor, verdad, demostración, lo obvio, axiomatización, formalización, solución de problemas) trabajadas con fundamentos históricos (*v.g.*, Barbin, 2000; Kleiner, 1991; Swetz, 2000). (Guacaneme, 2010, pp. 144-145)

3.3.3.2 ¿Qué enfoque o tratamiento histórico debe ser empleado para tratar los objetos de estudio de la Historia de las Matemáticas?

Antes señalamos que hemos actualizado a cinco las tipologías de la HM (Internalista/Externalista, Relato/Análisis, Evolutiva/Situada, Historia/Herencia y Original/Anacrónico), las esquematizamos en la Imagen 7 y mencionamos que el estudio de estas pertenece a la historiografía. Si bien las descripciones de estas se pueden seguir en el artículo citado (Guacaneme, 2010), hemos querido retomar acá algunos elementos de aquéllas.

La tipología **Internalista/Externalista** entiende estas dos opciones de HM como extremos de un intervalo en donde también hay posturas intermedias (Anacona, 2003, pp. 31-32).

> En cierto sentido, el reconocimiento de —y atención a— aspectos sociales y culturales como elementos fundamentales en la constitución y desarrollo de la obra matemática, objeto del estudio histórico, es el aspecto central de distinción entre estas posturas. (Guacaneme, 2010, p. 139)

También la tipología **Relato/Análisis** se puede entender como un intervalo, en el que en los extremos se ubica al relato histórico y al análisis histórico, respectivamente, entendiendo en ellos expresiones diferentes de profundidad del producto de la HM. Los análisis históricos usualmente corresponden al contenido de artículos de revistas de HM, o

[150] Uno de los capítulos del libro resultante del estudio ICMI aborda esta temática particular (Radford et al., 2000).

capítulos de libros o libros de HM. En los relatos históricos se incluyen tratamientos relacionados con cronologías, biografías, anécdotas, fragmentos descontextualizados de obras matemáticas o citas textuales.

> Un ejemplo de estos últimos son los relatos (*Historical Stories*) que refiere Führer (1992; 1991) y que él mismo califica como no ajustados a los estándares de la ciencia histórica. … Fowler (1991) [los] califica con el apelativo *pseudo-historia* y sobre la cual advierte peligros en su uso didáctico por parte de los profesores de matemáticas. … Una manera alterna de entender esta tipología es identificando el relato histórico con la descripción del hecho histórico, y el análisis histórico con el análisis e interpretación del hecho histórico. (Guacaneme, 2010, p. 139)

Debemos advertir que lo que en el artículo (Guacaneme, 2010) describimos como una quinta tipología, ahora lo consideramos como una descripción de énfasis del análisis histórico. En efecto, allí planteamos que

> … la perspectiva del análisis puede enfatizar, entre otros, en aspectos: (i) filosóficos acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos implicados en la obra matemática, (ii) lógicos en torno al tratamiento de tales objetos, (iii) axiológicos de la obra misma, (iv) matemáticos propiamente dichos, (v) psicológicos en torno al pensamiento matemático implicado en la constitución de la obra, o (vi) sociológicos. (Guacaneme, 2010, p. 140)

La tipología **Evolutivo/Situado** refiere a la comprensión de los procesos de evolución de los objetos matemáticos o la comprensión de los razonamientos de los matemáticos en un momento específico, o en otras palabras a una historia que estudia la evolución de un objeto matemático y una historia que estudia una obra matemática en un contexto específico.

La tipología **Historia/Herencia** ha sido retomada de lo planteado por Grattan-Guinness (Grattan-Guinness, 2004a, 2004b). Sus características se resumen en la Tabla 97[151].

Rasgo	Historia	Herencia
Motivaciones de N	Asunto importante; puede ser difícil de encontrar	Probablemente de menor interés
Tipos de influencia	Puede ser tanto positiva como negativa; ambas se deberían registrar	Probablemente solo reporte los casos positivos
Relaciones de N con nociones anteriores y posteriores	Asunto principal; se acentúan las diferencias tanto como las semejanzas	Asunto importante; las semejanzas se acentúan más que las diferencias

[151] Traducción de la tabla presentada por Grattan-Guinness (2004a, p. 4); en esta, la letra N, simboliza a la palabra "noción", la cual sirve como un término para cubrir una obra matemática (teoría o definición, método de prueba, técnica, algoritmo, notación(es), rama entera de las Matemáticas).

Rasgo	Historia	Herencia
Aprehender asuntos oscuros evidentes en N	Los reconstruye tan claramente como sea posible	Los reconocen, pero los limpia
Desarrollos exitosos	Muy importante; pero también estudia fracasos, retrasos, oportunidades perdidas, y arribos tardíos	Probablemente es el asunto principal
Papel de la cronología	Usualmente importante; puede ser difícil de establecer	Más allá de detalles generales; probablemente no interesa mucho
Consecuencias históricas	Puede tratar de reconstruir la *previsión* (esperanzas, etc.) para N, sostenida por las figuras históricas	Puede tratar de construir la *retrospectiva* y la perspectiva histórica de los desarrollos posteriores de N
¿Determinismo?	Preferiblemente no reivindicado: los desarrollos reales fueron así y así, pero no necesariamente así y así.	Pueden acarrear un sabor determinístico; *tenemos* que lograrlo (¡sin ver la columna de la historia!)
Cimientos de una teoría	Derribarlos y construir sobre un pantano	Dejarlos y construir a partir de ellos, como sobre un terreno sólido
Nivel de importancia o popularidad de N	Puede variar con el tiempo, independientemente del contenido; debería ser destacado (y podría ser explicado)	Normalmente no considerado; se asigna la importancia actual

Tabla 97 Tipología Historia/Herencia

Bajo los términos **Original/Anacrónico** reportamos dos tendencias que definen una quinta tipología, las cuales remiten necesariamente a la discusión asincrónica sostenida entre Wilhelm Dilthey (1833-1911) y Hans-Georg Gadamer (1900-2002) en torno a la objetividad de la interpretación histórica; estas tendencias se relacionan respectivamente con:

> … una historia contada *desde el punto de vista del autor* o *historia cultural* y una historia contada *desde la perspectiva de los científicos modernos*. (Guacaneme, 2010, p. 141)

Las cinco tipologías descritas constituyen un marco de referencia para especificar la pregunta que titula este subapartado (*i.e.*, ¿Qué enfoque o tratamiento histórico debe ser empleado para tratar los objetos de estudio de la HM?) y obtener así al menos cinco preguntas. Así, por ejemplo, en relación con la primera tipología, podríamos preguntar si conviene más un enfoque internalista que uno externalista para el estudio de HM a favor del CPM; algo similar se podría hacer para las restantes tipologías.

La comunidad interesada en la relación HM–CPM está aún a la espera de acopiar suficiente evidencia empírica (desde la indagación e investigación), para responder consistentemente tales preguntas; por ahora lo que hay es la existencia de varias posturas teóricas (u opiniones más o menos fundamentadas) y algunas experiencias de formación. Precisamente bajo el subtítulo “Consensos o trazas de tendencias sobre el tipo de HM que debe ser apropiada por un profesor” en el artículo (Guacaneme, 2010) hicimos una aproximación parcial a la historia de tales posturas y experiencias, a través de la cual, a propósito de los tratamientos, afirmamos que:

> … las posturas de los autores reseñados no permiten identificar consenso alguno, aunque probablemente sí algunas trazas de ciertas tendencias. Una de estas la constituye la posición de varios autores quienes cuestionan una aproximación erudita a la Historia o proponen alguna aproximación alterna a esta —desde el punto de vista del contenido— (Führer, 1992; Heiede, 1992; Kleiner, 1996; Shenitzer, 1995) … Una tercera y una cuarta tendencia, relativamente opuestas, promueven o bien el uso de aspectos historiográficos (Cortez Godinez, Ponce Ocegueda, Flores Robles, Muñoz Carrillo, & Reynaga Luna, 2009; Santiago Fernández Fernández, 2001), o bien —no siempre de manera explícita— el estudio de los análisis históricos (Bkouche, 1997, 2000; Bruckheimer & Arcavi, 2000; Santiago Fernández Fernández, 2001; Freudenthal, 1981; Grugnetti, 2000). (Guacaneme, 2010, p. 144)

En el mismo artículo señalamos la coincidencia de varios autores en reseñar la insuficiencia en los materiales que puedan ser apropiados por los profesores para favorecer el conocimiento histórico relacionado con su ejercicio docente, asunto que ahora reconocemos de manera más precisa como la carencia –o al menos escases– de materiales que puedan favorecer el estudio de una aproximación histórica específica. Así, por ejemplo, echamos de menos documentos de HM que aborden un tratamiento externalista (o con cierta tendencia a tal postura), de documentos que versen sobre los abordajes proto-matemáticos y para-matemáticos de ideas que luego adquieren el estatus de objeto matemático en el marco de teorías matemáticas específicas, de documentos que trascienda la versión de herencia de la HM, o de documentos que respeten la simbología original y atendiendo a esta realicen los análisis históricos.

3.3.4 Discusión y reflexión a propósito del cómo

Cada uno de los dos tipos de opciones (curriculares y metodológicas) identificados en 3.2.4 determina sendas discusiones/reflexiones.

Las **opciones curriculares** parecen referirse al lugar que ocupa la HM en los planes de estudio de los programas de formación de profesores de Matemáticas. Si se trata de que el profesor (en formación o en ejercicio) aprenda HM, proponer cursos de HM en los pensum es una respuesta natural. Lo que no resulta tan natural es que el número de cursos para aprender HM sea habitualmente tan bajo, en comparación con el número total de cursos del plan de estudios[152]. No obstante lo anterior, parece un desatino proponer un solo curso de HM en un programa de formación de profesores de Matemáticas, y mucho más, pretender que allí se capture siquiera una panorámica de la

[152] Para el caso de los planes de estudio colombianos esto se reportó en (Torres & Guacaneme, 2011a, 2011b).

actividad matemática de la humanidad –en sus diferentes culturas y épocas–; sin duda una valoración semejante merecería la propuesta de resumir en un curso de Matemáticas los resultados matemáticos que constituyen las disciplinas usuales, o la propuesta de sintetizar en un curso los resultados de las Didácticas específicas de las Matemáticas, para favorecer el CPM. Quizá esta situación de subvaloración *de facto* de la HM tenga que ver con qué se considera fundamental y qué subsidiario para el CPM.

Ahora bien, si lo que se busca es que la HM sea el medio para lograr u apoyar otros aprendizajes, es también natural que se estudie HM, aunque puede no ser la única opción. Este es el caso que se presenta cuando se quiere lograr el aprendizaje de las Matemáticas, como parte del CPM, y se integra la HM, bien sea como un componente adicional a las Matemáticas, bien como parte constitutiva de estas. Cualquiera sea el caso, la problemática de integración de la HM a las Matemáticas es en esencia independientemente del nivel educativo. Sin embargo, integrar la HM a la enseñanza de las Matemáticas que aprende el profesor de Matemáticas sí genera una diferencia fundamental: el profesor cuenta con una experiencia personal en la cual, como aprendiz, ha vivido la integración de la HM a las Matemáticas y, en consecuencia, tiene un referente propio para eventualmente gestionar sus prácticas docentes de manera semejante, si es que ello lo considera deseable y pertinente, o tomar postura crítica –ya no totalmente ingenua– frente a tal manera de integración. Pero como la integración de la HM a la enseñanza de las Matemáticas también puede hacerse de maneras no explícitas (por ejemplo cuando se establece la HM como un organizador curricular de un curso de Matemáticas para formar profesores[153]), la experiencia como aprendiz puede no necesariamente ser consciente y no redundar como referente personal para el ejercicio docente.

La integración de la HM a cursos de diseño curricular o de las didácticas específicas de las Matemáticas presenta una situación semejante a la descrita antes. En efecto, la integración de la HM puede implicar necesariamente el estudio de la HM como apoyo al estudio de la Didáctica de las Matemáticas o puede asumirse la HM como organizador curricular. Ambas situaciones han sido identificadas en una serie de investigaciones que

[153] En la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá-Colombia), durante el presente siglo, se ha desarrollado una experiencia de investigación e innovación en algunos cursos de Matemáticas (específicamente en los titulados “Aritmética” y “Sistemas numéricos”) dirigidos a la formación de profesores de Matemáticas, los cuales –desde nuestra perspectiva– han asumido la HM como organizador curricular y, así, los formadores de profesores proponen tareas a sus estudiantes, que promueven actividad matemática inspirada en la HM, pero que los estudiantes no reconocen de tal manera pues, en general, no han tenido contacto con el discurso histórico de las Matemáticas ni es de interés de los formadores que lo hagan.

realizamos u orientamos al asumir un curso, titulado "Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra", como objeto de estudio (Gálvez Socarrás & Maldonado Guinea, 2012; Manrique García & Triana Yaya, 2013; Mora & Guacaneme, 2014; Mora, Jiménez, & Guacaneme, 2014)

No obstante lo anterior, no reconocemos claramente evidencia empírica o investigativa que reporte el estudio de la integración de la HM en la enseñanza –asunto más o menos recurrente en las intenciones que justifican la relación HM–CPM–, como objeto de un curso para la formación de profesores. La experiencia más cercana en esta dirección está enmarcada en la que reportamos al final de la sección 3.3.3.1, desarrollada en el marco de la cohorte 2013 de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. So pena de ser repetitivos, recordemos acá que antes (en la sección 3.3.3.1 cuando discutimos el asunto de las fuentes terciarias) mencionamos la posibilidad/necesidad de que se instauren cursos para la formación de profesores de Matemáticas en donde se estudien las estrategias y propuestas de integración de la HM en la enseñanza de las Matemáticas, los reportes de estudios de transposición didáctica de objetos matemáticos, las investigaciones que asumen el estudio de la filogénesis y ontogénesis de objetos matemáticos, los estudios socio-epistemológicos de objetos matemáticos, etc.

A propósito de la integración de la HM a cursos de Matemáticas o cursos de diseño curricular, vale la pena mencionar algo aparentemente obvio: los formadores de profesores deben disponer de un conocimiento de la HM para poder agenciar los procesos de integración. Esta exigencia, apenas natural, conduce a un problema adicional y es precisamente la relación entre HM y el conocimiento del formador de profesores, el cual a la vez remite al problema de educación de los formadores en los posgrados. Si bien este no es el objeto de estudio de la presente tesis, amerita al menos ser relatado. Hoy en día los formadores de profesores de Matemáticas se forman, esencialmente, en posgrados de Matemáticas o de Educación Matemática, en los cuales, en la mayoría de los casos, la HM no está presente o no lo está de manera considerable.

Por otra parte, a más de reconocer la diversidad de posturas (expresadas en la existencia de uno o más cursos de HM, en la integración de HM a los cursos de Matemáticas, o en la integración de HM a cursos de diseño curricular o didácticas específicas) y, en consecuencia, la aparente inexistencia de consenso, debemos señalar que sí parece haber un lugar común o acuerdo: la HM no ocupa el lugar central en la formación de profesores, sino un lugar secundario.

Si bien esto se evidencia al mirar los programas de formación inicial de profesores de Matemáticas de algunas instituciones educativas[154] o las descripciones de la formación de profesores de Matemáticas en algunos países de América Central y El Caribe[155], consideramos que la situación es mucho más global. La visión que hemos logrado, nos evidencia que la formación en Matemáticas (en muchos sentidos muy semejante a la de un matemático –o si se prefiere un pseudo-matemático–) ha ocupado –y aún hoy día ocupa– un lugar central en los planes de estudio de los programas de formación inicial de profesores de Matemáticas; en varios casos, este lugar protagónico, hace al menos dos décadas, ha encontrado en la Didáctica de las Matemáticas un dominio –desde algunas ópticas– antagonista que puede haber disminuido su cobertura, pero que definitivamente no le ha reemplazado en su protagonismo. Recientemente, hemos participado de la elaboración de un artículo (Torres, et al., 2014) en el que se argumenta a favor de asignar el papel central a la HM en la formación de profesores de Matemáticas, lo cual conlleva la necesidad de formar una comunidad de práctica que desde la Didáctica de la HM asuma la investigación sobre la relación HM–CPM de manera dialéctica con su enseñanza. Al respecto, no hay que olvidar que estudiar HM implica, casi siempre, estudiar Matemáticas y que existe una estrecha relación entre la HM y el discurso de la Didáctica de las Matemáticas, ambos considerados desde nuestra visión como discursos meta-matemáticos.

Las **opciones metodológicas** identificadas (conferencias/discusiones, lecturas, proyectos) pueden tener relación o coherencia con la manera en que se concibe el aprendizaje del futuro profesor o del profesor en ejercicio y con la manera como se aprende la HM; o más específicamente, en la manera como se concibe cómo el profesor aprende los objetos de la HM. En este sentido, escoger una opción relacionada con conferencias, discusiones o lecturas puede revelar una postura en la cual se concibe la HM como un discurso que se puede exponer y sobre el cual se pueden generar discusiones para promover su apropiación. Por su parte, seleccionar una opción relacionada con los proyectos, puede

[154] En el proyecto “Caracterización de las estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en programas de formación inicial de profesores de Matemáticas. Universidad del Valle – Código CI 5220 (2010-2011)” hicimos una mirada a nueve programas colombianos de formación inicial de profesores de Matemáticas y constatamos que la HM, en el mejor de los casos constituye una de las líneas de formación, pero usualmente está representada en uno o dos cursos de los cerca del medio centenar que configuran un programa.

[155] Las descripciones a las que nos referimos acá se presentaron en el marco del proyecto *Capacity and Network Project* (CANP), específicamente en la “Escuela-seminario Internacional Construcción de capacidades en Matemáticas y Educación Matemática”, llevada a cabo en San José de Costa Rica del 6 al 17 de agosto de 2012, y fueron objeto de edición y publicación en un número especial de la revista “Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática” en 2013 (http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1281) y en un reporte (Ruiz Zúñiga, 2015).

indicar una postura que incluye el desarrollo de una actividad por parte del aprendiz, que promueve la apropiación de la HM; al respecto de esta opción hay que reconocer que en la literatura consultada –y relacionada en 3.2.4.2, más específicamente en la Tabla 96– se advierten diversas opciones metodológicas, las cuales parecerían muy potentes.

Más allá de la especulación que guía las ideas expresadas en el anterior párrafo, no contamos con una aproximación teórica respecto del aprendizaje de la Historia de las Matemáticas, sobre la cual fundamentar nuestras opiniones. El reconocimiento de nuestra ignorancia frente a este asunto pone al descubierto un hecho más preocupante: no identificamos documento alguno, de todos los citados en este capítulo, que refiera una aproximación teórica tal. Decimos que es preocupante porque en la construcción de una Didáctica de la HM se debe contar con al menos una teoría del aprendizaje de la HM, así como para el establecimiento de la Didáctica de las Matemáticas hubo que contar con al menos una teoría del aprendizaje de las Matemáticas o como para la constitución de una Didáctica de la Didáctica de las Matemáticas hay que disponer de una teoría del aprendizaje de la Didáctica de las Matemáticas. Probablemente el estudio de la historiografía o de la historiología de la HM nos ofrezca una teoría del aprendizaje de la HM, o al menos las bases para una teoría tal.

3.3.5 Discusión y reflexión adicional

Más allá de lo discutido para cada una de las preguntas, hemos visto la necesidad de presentar brevemente dos asuntos sobre la relación HM–CPM. El primero alude a la apropiación y uso de la HM; y el segundo refiere a la Didáctica de la HM en relación con el CPM.

En primer lugar, queremos destacar la existencia de dos "estados" de la relación HM–CPM: un estado de apropiación y otro estado de uso. Estos estados podrían verse organizados temporalmente en dos momentos sucesivos o bien como dos caras de una misma moneda que se relacionan dialécticamente como parte del CPM.

En efecto, una perspectiva que implica que el conocimiento histórico debe aprenderse antes de poder usarse, ordena temporalmente la apropiación y el uso. Bajo esta, se puede reseñar una extensa tradición, que implica la inclusión de cursos de HM en los programas de formación de los profesores Matemáticas; Schubring y sus colegas (2000) informan que la decisión de que la HM conforme parte del CPM tiene ya más de un siglo. Al contrario, el estudio sobre el uso de la HM no tiene una tradición tal, e incluso en la actualidad, puede parecer un tanto extraño para algunos formadores de profesores, quienes consideran que el uso del conocimiento (matemático, histórico, didáctico, pedagógico, etc.) debe hacer parte de lo que el profesor aprende en su práctica profesional docente, con posterioridad a la obtención de su grado. Bajo esta consideración, para ellos es suficiente con apropiar la HM; su uso procederá naturalmente en la práctica docente.

Desde una postura no tan radical, debemos reconocer que la respuesta usual, es decir la de formar el conocimiento histórico del profesor a través de cursos de HM, puede entenderse también como un momento de apropiación del conocimiento histórico que implica el aprendizaje del mismo, pero también el desarrollo de actitudes relativas a dicho conocimiento y una oportunidad para visualizar o prever usos potenciales de este, a favor de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas o a favor del desarrollo profesional del CPM. Sin embargo, el estudio sobre el uso de la HM puede ir más allá y constituir un objeto de aprendizaje en el marco de un programa de formación de profesores de Matemáticas. En el capítulo 2 listamos un abundante número de documentos que reportan estrategias de enseñanza de las Matemáticas en las cuales se ha integrado la HM de diversas maneras; precisamente el estudio crítico de estos documentos puede constituir una actividad deseable en la formación de profesores de Matemáticas y brindar contacto con un discurso más cercano a la actividad docente; además, el estudio detallado de tales documentos puede llegar a promover y exigir el estudio de la HM aludida en los mismos. Así, al estudio de la HM podría seguir el estudio del uso de la misma, o viceversa.

La apropiación y el uso de la HM puede verse también, metafóricamente, como dos caras de una moneda. Bajo esta perspectiva, un planteamiento que refiere al aprendizaje de un objeto a través de –y simultáneamente con– su uso, podría constituir una expresión de la relación dialéctica entre las dos caras. Veamos algunos ejemplos. El estudio de la transposición didáctica de un objeto matemático exige/permite el estudio de la historia del mismo, pero con un fin específico e inmediato: contar con un marco de referencia del conocimiento matemático sabio con el cual –y a través del cual– contrastar la versión escolar de dicho objeto. El estudio de la manera usual de resolución de ecuaciones algebraicas exigiría/promovería el estudio de la forma de pensamiento analítico característico de *La Géométrie* de Descartes, entendida como fundamento y racionalidad de la expresión escolar de tal resolución. La búsqueda de racionalidad sobre el orden de tratamiento escolar de los sistemas numéricos exigiría/promovería el estudio del orden histórico de aparición y tratamiento de los mismos, ofreciendo argumentos a favor de trasgredir el orden escolar convencional. El estudio de las dificultades que presentan los jóvenes para acceder a una conceptualización de los números negativos exige/promueve el estudio de la existencia de obstáculos epistemológicos relativos a tales números[156].

Como se puede apreciar a través de los ejemplos referidos, existe siempre una intención didáctica o funcional, para apropiar el conocimiento histórico, esto es, la HM se estudia con una intencionalidad funcional a favor del CPM, la cual determina qué estudiar. Esta condición probablemente es la que justifica que un estudio de la HM, entendido bajo la metáfora de las dos caras de la moneda, pueda ser característico de la integración de la HM en cursos de diseño curricular y de las didácticas específicas de las Matemáticas.

Antes de pasar al segundo punto de este apartado, debemos señalar que este planteamiento metafórico puede ser extrapolado para los discursos matemáticos o de las didácticas específicas; hacerlo pondría la discusión en si es posible –y hasta deseable– que el estudio de las Matemáticas o de la Didáctica de las Matemáticas, esté orientado por intencionalidades funcionales del CPM y que sean estas las que definan qué estudiar de estas disciplinas científicas. En todo caso, ello pone en evidencia uno de los mayores retos en la educación del profesor de Matemáticas: ¿cómo integrar en la educación los usos del conocimiento, sin que ello conlleve a la "tecnificación" de la docencia?

Pasemos ahora al segundo asunto, la Didáctica de la HM en relación con el CPM. Recordemos inicialmente que en el apartado 2.2.2 hicimos referencia a la Didáctica de la Historia de las Matemáticas como escenario para el estudio de la relación HM–EM. Allí discutimos el carácter unidireccional de la relación en cuestión; mientras que acá enfatizamos que la relación HM–CPM también parece tener una relación con un único sentido que representamos con HM→CPM; es en este único sentido que se ubica la pregunta sobre el papel o injerencia que tiene la HM en el CPM, la cuestión sobre la apropiación y uso de la HM por parte del profesor de Matemáticas, o la pregunta por el carácter necesario de los procesos de transposición didáctica de las HM para integrarla al CPM. Estos y otros asuntos han sido discutidos por los documentos/autores que hemos reseñado en el presente capítulo; sin embargo en ninguno de ellos identificamos un tratamiento de la relación restante (*i.e.*, HM←CPM).

Bajo este sentido no atendido, podría cuestionarse acerca de si las necesidades del CPM pueden reclamar o condicionar a la HM. Desde nuestra óptica es bastante probable que este sentido sea el determinante en la respuesta a la pregunta sobre qué tipo HM estudiar o bajo qué tratamiento hacerlo, pues las necesidades de formación del profesor para el

[156] Al respecto se recomienda ver (Schubring, 2012b).

desempeño de su quehacer docente, estarían determinando los rasgos de la HM que se estudie. Por otra parte, creemos que —salvo los ejemplos de los libros de texto reportados por Schubring y sus colegas (2000) y un libro (Berlinghoff & Gouvêa, 2004)— la HM no ha sido escrita explícitamente para los profesores de Matemáticas (en formación o en ejercicio) y menos para ser estudiada en beneficio del CPM; consideramos que ello se debe fundamentalmente a que, en general, no se reconoce la necesidad de que esta deba satisfacer tal condición. Una vez que esto se reconozca habría la necesidad de realizar procesos de transposición didáctica del conocimiento histórico para construir una HM que se adecue a las necesidades del CPM. Adicionalmente, bajo el reconocimiento que la HM es un conocimiento que aporta erudición, pero no necesariamente formación, debería estudiarse cómo transformarla o tratarla para que trascienda su carácter informativo e incorpore uno formativo, consustancial con la necesidad de profesionalizar efectivamente la formación del profesor.

4 Estudio de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en el Libro V de *Elementos* de Euclides

Con la intención de establecer el potencial formativo que tiene la historia de la teoría euclidiana de la proporción expuesta en el Libro V de *Elementos*, ha sido necesario conocer la teoría con cierto detalle; por ello, hemos desarrollado un estudio de la misma, el cual recapitulamos en la primera parte del presente capítulo. Asimismo, procurando identificar los aspectos o temáticas centrales de la historia de la proporción, en segundo lugar, listamos y reseñamos o resumimos el contenido de aproximadamente un centenar de documentos que abordan un tratamiento histórico de los objetos matemáticos razón y proporción. La tercera parte del capítulo sintetiza la perspectiva lograda al "aplicar" al contenido de los documentos citados, dos de las categorías constituidas en el capítulo anterior, específicamente las relativas al qué y para qué de la HM en el CPM. La cuarta parte sintetiza los resultados obtenidos en las tres primeras partes; luego de ella, se incluye una quinta parte donde se discuten los resultados sintetizados.

4.1 Una visión sobre la teoría de la proporción en el Libro V de *Elementos*

Para iniciar, debemos señalar que el contenido de este apartado recapitula y retoma los textos de un trabajo nuestro publicado por el Doctorado Interinstitucional en Educación como producto parcial de la tesis (Guacaneme, 2012c); en aquel, bajo la óptica de la Teoría de Significados Sistémicos del Enfoque Ontosemiótico –y más específicamente de sus seis categorías (Situaciones problemas / tareas matemáticas; lenguaje matemático; procedimientos / procesos matemáticos; conceptos / definiciones; propiedades; y, argumentos)–, presentamos un descripción y análisis de la teoría de la proporción expuesta por Euclides en el Libro V de *Elementos*.

En la introducción del documento en cuestión señalamos que:

> … hemos seleccionado una de las obras matemáticas más importantes para las matemáticas, en general, y para la teoría de la proporción, en particular: los *Elementos*[157]. Si bien los Libros V, VI, VII y X, de esta obra contienen información relativa a las proporciones, desde nuestra perspectiva ha merecido especial atención el Libro V, puesto que: (i) en éste Euclides hace un tratamiento de la teoría de la proporción para las magnitudes geométricas; (ii) esta teoría contiene la definición de proporción, por demás ampliamente estudiada por los historiadores, la cual constituye la innovación central frente a la teoría de la proporción pitagórica; (iii) el Libro V maneja un nivel de generalidad *sui generis* en los *Elementos*; (iv) la “proporcionalidad geométrica” no ha sido tan comentada y estudiada en la investigación didáctica (o al menos no tanto como la “proporcionalidad aritmética”) y por tanto, presenta un “sabor” especial a la reflexión; y, (v) abordar el estudio de todos los libros mencionados desborda nuestras posibilidades de tiempo y espacio actuales. (Guacaneme, 2012c, pp. 99-100).

Posterior a la introducción, y luego de describir brevemente las seis categorías de la Teoría de los significados sistémicos, procedimos a hacer una descripción de la relación del Libro V con los demás que constituyen *Elementos*:

> Por considerarse como componente de la obra total, se debe suponer que el Libro V está antecedido y condicionado por las ocho nociones comunes, enunciadas al inicio del Libro I (ver, Puertas, 1991, pp. 199-201). Además, en tanto que hace referencia a las magnitudes geométricas generalizadas[158] y no de manera específica a las tratadas en los anteriores libros, se supone que éstos no condicionan o se implican en aquél; en cierto sentido, los historiadores estudiosos de los *Elementos* reconocen una independencia del Libro V con respecto a los que le preceden. Igualmente se muestran de acuerdo en que el Libro VI constituye una particularización de la teoría de las proporciones generalizada y que en esencia aborda el estudio de la semejanza entre figuras. También, establecen que la teoría expuesta en el Libro V no condiciona el tratamiento de la teoría de la proporciones en el ámbito aritmético, contenida en esencia en el Libro VII, lo cual no puede interpretarse como la ausencia de ciertas analogías y diferencias entre el tratamiento de la proporción entre los ámbitos de las magnitudes y los números. Así mismo, discuten si la teoría de proporciones generalizada es o

[157] Como los historiadores reconocen varias traducciones de los *Elementos* procedentes de diversas versiones, aclaramos que se asumirá la versión de Puertas (1994), la cual procede de la edición de J.L. Heiberg y H. Menge, *Euclidis Opera omnia*, vols. I-IV, Leipzig, 1883-1886.

[158] Luis Vega, en la Introducción General (Puertas, 1991, p. 73), califica el contenido del Libro V como la teoría *generalizada* de la proporción, y no teoría *general*, por al menos tres motivos: “[i] La forma de aparición de la teoría –en sustitución de nociones anteriores más limitadas y concretas de razón y proporción, en la primera mitad del siglo VI–, [ii] el hecho de que estas magnitudes hayan de cumplir ciertas condiciones –la de ser homogéneas y “arquimedianas”, [iii] el punto oscuro de las relaciones entre las ideas de magnitud y número”. (La numeración es nuestra).

> no empleada en el Libro X, en tanto que algunos reconocen, en ciertas proposiciones, el uso de la idea de *antanairesis* –o como se llamó después, *anthyphairesis*–, como una definición alterna de proporción, no enunciada por Euclides ni en el Libro V ni en el VII. (Guacaneme, 2012c, pp. 102-103).

Respecto de la afirmación anterior sobre el Libro VI y su tratamiento de la semejanza, en un trabajo posterior (Aura Lucía Quintero, Molavoque, & Guacaneme, 2012) establecimos algo diferente al reconocer en el mismo un tratamiento de la proporcionalidad geométrica y, dentro de este, uno de la semejanza geométrica.

Ahora bien, la teoría en cuestión, tal como la presenta Puertas (1994, pp. 9-54), contiene los enunciados de las siguientes definiciones (Tabla 98) y proposiciones (Tabla 99).

Enunciados de las definiciones	
1.	Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.
2.	Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.
3.	Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.
4.	Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.
5.	Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda, que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.
6.	Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.
7.	Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.
8.	Una proporción entre tres términos es la menor posible.
9.	Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que [guarda] con la segunda.
10.	Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que [guarda] con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción.
11.	Se llaman magnitudes correspondientes las antecedentes en relación con las antecedentes y las consecuentes con las consecuentes.
12.	Una razón *por alternancia* consiste en tomar el antecedente en relación con el antecedente y el consecuente en relación con el consecuente.
13.	Una razón *por inversión* consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente.
14.	La composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto con el consecuente como una sola [magnitud] en relación con el propio consecuente.
15.	La separación de una razón consiste en tomar el exceso por el que el antecedente excede al consecuente en relación con el propio consecuente.
16.	La conversión de una razón consiste en tomar el antecedente en relación con el exceso por el que el antecedente excede al consecuente.

Enunciados de las definiciones	
17.	Una razón *por igualdad* se da cuando, habiendo varias magnitudes y otras iguales a ellas en número que tomadas de dos en dos guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— la primera es a la última; o, dicho de otro modo, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.
18.	Una proporción perturbada se da cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como el antecedente es al consecuente —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— el antecedente es al consecuente, y como el consecuentes es a alguna otra [magnitud] —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— alguna otra [magnitud] es al antecedente.

Tabla 98 Definiciones del Libro V de *Elementos* de Euclides

En la Tabla 99, al lado del enunciado de las proposiciones hemos incluido una versión simbólica moderna del mismo; reconocemos en esto un anacronismo, pero acudimos a lo simbólico con la intención de hacer más comprensivos los enunciados.

Enunciados de las proposiciones		**Simbolización del enunciado**[159]
1.	Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas.	$m(x_1+x_2+...+x_n)=mx_1+mx_2+...+mx_n$
2.	Si una primera [magnitud] es el mismo múltiplo de una segunda, que una tercera de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta.	$(m\oplus n)x=mx+nx$
3.	Si una primera [magnitud] es el mismo múltiplo de una segunda, que una tercera de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos [magnitudes] tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda, y la otra de la cuarta.	$m(nx)=(m\odot n)x$
4.	Si una primera [magnitud] guarda la misma razón con una segunda, que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente.	Si $w{:}x::y{:}z$, entonces $\forall$ m y n, $mw{:}nx::my{:}nz$

[159] Nótese que hemos empleado símbolos diferentes para indicar las relaciones u operaciones entre magnitudes (=, <, >, :, +, -), las relaciones entre razones (≺, ≻, ::), o las operaciones entre números (⊕, ⊖, ⊙). Además, hemos empleado las letras *u*, *v*, *w*, *x*, *y*, *z* para las magnitudes, en tanto que para los números hemos usado las letras *m*, *n*. No hemos empleado signo alguno para el múltiplo *n*-ésimo de una magnitud (por ejemplo, *nx*), pues no lo reconocemos como producto del número por la magnitud (es decir, del natural *n* por la magnitud *x*, en el ejemplo).

Enunciados de las proposiciones	**Simbolización del enunciado**[159]
5. Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra que una [magnitud] quitada [a la primera] lo es de otra quitada [a la segunda], la [magnitud] restante [de la primera] será también el mismo múltiplo de la [magnitud] restante [de la segunda] que la [magnitud] entera de la [magnitud] entera.	$m(x\text{-}y)=mx\text{-}my$
6. Si dos magnitudes son equimúltiplos de dos magnitudes y ciertas [magnitudes] quitadas [de ellas] son equimúltiplos de estas [dos segundas], las restantes también son o iguales a las mismas o equimúltiplos de ellas.	$(m\ominus n)x=mx\text{-}nx$
7. Las [magnitudes] iguales guardan la misma razón con una misma [magnitud] y la misma [magnitud] guarda la misma razón con las [magnitudes] iguales.	Si $x=y$, entonces $x{:}z{::}y{:}z$ y $z{:}x{::}z{:}y$
Porisma 7': Si algunas magnitudes son proporcionales, también son proporcionales por inversión.	Si $w{:}x{::}y{:}z$, entonces $x{:}w{::}z{:}y$
8. De magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma [magnitud] una razón mayor que la menor, y la misma [magnitud] guarda con la menor una razón mayor que con la mayor.	Si $x<y$, entonces $x{:}z\prec y{:}z$; y $z{:}x\succ z{:}y$
9. Las [magnitudes] que guardan con una misma [magnitud] la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma [magnitud] guarda la misma razón, son iguales.	Si $x{:}z{::}y{:}z$, entonces $x=y$. Y, si $z{:}x{::}z{:}y$, entonces $x=y$
10. De las [magnitudes] que guardan razón con una misma [magnitud], la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma [magnitud] guarda una razón mayor, es menor.	Si $x{:}z\prec y{:}z$, entonces $x<y$. Y si $z{:}x\prec z{:}y$, entonces $x>y$
11. Las razones que son iguales a una misma razón son también iguales entre sí.	Si $u{:}v{::}w{:}x$ y $w{:}x{::}y{:}z$, entonces $u{:}v{::}y{:}z$
12. Si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes.	Si $x_1{:}y_1{::}x_2{:}y_2{::}\ldots{::}x_n{:}y_n$, entonces $(x_1+x_2+\ldots+x_n){:}(y_1+y_2+\ldots+y_n){::}\ x_i{:}y_i$, $\forall i=1,\ldots,n$
13. Si una primera [magnitud] guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con una sexta.	Si $u{:}v{::}w{:}x$ y $w{:}x\succ y{:}z$, entonces $u{:}v\succ y{:}z$
14. Si una primera [magnitud] guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si menor, menor.	Si $w{:}x{::}y{:}z$ y $w\gtreqless y$, entonces $x\gtreqless z$
15. Las partes guardan la misma razón entre sí que sus mismos múltiplos, tomados en el orden correspondiente.	$x{:}y{::}nx{:}ny$

Enunciados de las proposiciones	Simbolización del enunciado[159]
16. Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.	Si $w{:}x{::}y{:}z$, entonces $w{:}y{::}x{:}z$
17. Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por separación serán proporcionales.	Si $(w+x){:}x{::}(y+z){:}z$, entonces $w{:}x{::}y{:}z$
18. Si unas magnitudes son proporcionales por separación, también por composición serán proporcionales.	Si $w{:}x{::}y{:}z$, entonces $(w+x){:}x{::}(y+z){:}z$
19. Si como un todo es a otro todo, así es una [parte] quitada [de uno] a una [parte] quitada [de otro], la [parte] restante será también a la [parte] restante como el todo es al todo.	Si $(w+x){:}(y+z){::}w{:}y$, entonces $(w+x){:}(y+z){::}x{:}z$
Porisma 19’: Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por conversión serán proporcionales.	Si $(u+v){:}(x+y){::}v{:}y$, entonces $(u+v){:}(x+y){::}u{:}x$
20. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual, y si es menor, menor.	Si $u{:}v{::}x{:}y$ y $v{:}w{::}y{:}z$ y $u \gtreqless w$, entonces $x \gtreqless z$
21. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón y su proporción es perturbada, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual; y si es menor, menor.	Si $u{:}v{::}y{:}z$ y $v{:}w{::}x{:}y$ y $u \gtreqless w$, entonces $x \gtreqless z$
22. Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón.	Si $x_1{:}x_2{::}y_1{:}y_2$, $x_2{:}x_3{::}y_2{:}y_3$, ... , y $x_{n-1}{:}x_n{::}y_{n-1}{:}y_n$, entonces $x_1{:}x_n{::}y_1{:}y_n$
23. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón.	Si $u{:}v{::}y{:}z$ y $v{:}w{::}x{:}y$, entonces $u{:}w{::}x{:}z$
24. Si una primera [magnitud] guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas, guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta.	Si $u{:}v{::}w{:}x$ y $y{:}v{::}z{:}x$, entonces $(u+y){:}v{::}(w+z){:}x$
25. Si cuatro magnitudes son proporcionales, la mayor y la menor [juntas] son mayores que las dos restantes.	Si $w{:}x{::}y{:}z$ y $w>x$ y $w>y$ y $x>z$ y $y>z$, entonces $w+z>x+y$

Tabla 99 Proposiciones del Libro V de *Elementos* de Euclides

Una primera aproximación a la estructura del Libro V, a través de la información de las tablas, permite reconocer un grupo de dieciocho definiciones, veinticinco proposiciones (ninguna de ellas construcción o problema), dos porismas (o corolarios) y ningún postulado. A partir de esta información, de las demostraciones de las proposiciones y de algunos documentos históricos, desarrollamos los análisis de las seis categorías que configuran los siguientes subtítulos; salvo la numeración de los subtítulos, su contenido es idéntico al que apareció en el capítulo ya citado (Guacaneme, 2012c, pp. 103-127).

4.1.1 Situaciones problemas/Tareas matemáticas

Acabamos de señalar que ninguna de las veinticinco proposiciones del Libro V enuncia explícitamente un problema matemático o una construcción; todas ellas son teoremas.[160] La gran mayoría de las proposiciones tienen una configuración condicional o bicondicional; en efecto, salvo la proposición 15, las demás o bien tienen un enunciado explícitamente condicional (Si p entonces q), o se puede hacer una interpretación simbólica de la forma $p \Rightarrow q$. En este sentido, la actividad matemática esencial en el Libro V no es otra que la de demostrar enunciados condicionales; ahora bien, es apenas natural admitir que en el marco de una presentación deductiva, como la de los *Elementos*, es completamente adecuado asumir la demostración de cada proposición como una problemática evocada por el enunciado mismo de la proposición; bajo esta óptica, la demostración de cada proposición constituiría un problema lógico deductivo. El asunto de la demostración será abordado en esencia cuando demos cuenta de la categoría *Argumentación*.

Por otra parte, antes de pasar al análisis de la segunda categoría, creemos conveniente señalar que más allá de la mirada internalista que se pueda hacer al tipo de problemas y tareas matemáticas que subyacen en el Libro V, hay que considerar que la teoría euclidiana de las proporciones emerge en atención a dos problemas específicos de la época.

Por un lado, la entonces clásica teoría pitagórica de la proporción –y en general la cosmovisión pitagórica– había sufrido un duro revés al confirmarse la “anomalía” relativa a la conmensurabilidad de cualquier par de segmentos; es decir, a la imposibilidad de asignar un número (o medida), o dos números, a la razón de dos segmentos cualesquiera. Esto conminó a los matemáticos griegos a, entre otras tácticas[161], replantear la teoría de la proporción de tal suerte que se pudiera hablar de razones y proporciones, sin necesidad de especificar si las magnitudes consideradas eran o no conmensurables; en últimas, a excluir la noción de medida numérica de la geometría. En cierto sentido, el mérito de esta teoría es que frente a la teoría de los pitagóricos, esta no alude a la medida (como número) que establece “cuántas veces” una magnitud está contenida en otra, o cuántas veces una magnitud debe ser repetida para

[160] Nos referimos aquí a problemas o construcciones como los dados en las proposiciones 1 del Libro III (*Hallar en centro de un círculo* dado) y 1 del Libro I (*Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada*), respectivamente. Por teoremas asumimos aquellos enunciados que exhiben los atributos esenciales de los objetos. Euclides al terminar la demostración de un problema emplea la locución “*que es lo que había que hacer*” en tanto que al terminar la demostración de un teorema utiliza la locución “*que es lo que había que demostrar*”.

[161] El artículo de Rusnock & Thagard (1995) ofrece una gama y análisis de al menos cinco tácticas ligadas a los diferentes elementos (a saber: la construcción geométrica, la estructura lógica, la teoría de números, y la teoría de razón/proporción) que el problema de la inconmensurabilidad involucra. Dos de las tácticas se refieren a “limitar la aplicación de la razón en geometría y reformular la geometría tanto como sea posible sin el uso de la razón; o […], generalizar los conceptos de razón y proporción” (p. 115). Estas dos están implicadas en las propuestas eudoxiana y euclidiana.

igualar a un múltiplo de la otra, o, como lo señala Corry (1994, p. 4), el mérito mayor de la teoría expuesta en el Libro V es la posibilidad de comparar magnitudes inconmensurables. Lo anterior no debe interpretarse como si en este libro se le diera salida total al problema de la conmensurabilidad, pues es en el Libro X y no en el V, donde se hace un tratamiento específico de la conmensurabilidad (o si se prefiere, de la inconmensurabilidad).

Por otro lado, es conveniente recordar que el Libro V atiende a la necesidad que motiva los *Elementos* y, más en general, a la obra euclidiana. Ésta no es un requerimiento ni iniciativa enciclopédica; más bien es una necesidad de presentar bajo el esquema axiomático deductivo las teorías matemáticas y, en este sentido, justificar las afirmaciones de la teoría bajo unos cánones matemáticos que se apropian y logran una forma particular. Así, el Libro V no es una simple recopilación del trabajo de Eudoxio, ya que implicó una revisión, recapitulación y transformación de su teoría, e incluso la creación de resultados.[162] En otras palabras, la teoría euclidiana de las proporciones responde a un problema metamatemático que se relaciona directamente con un *estilo* de hacer matemáticas y de comunicarlas, característico de aquella comunidad y época, que se constituyó en acicate y guía para la mayor parte de las matemáticas ulteriores.

4.1.2 Lenguaje matemático

Cuando pensamos en el lenguaje utilizado en el Libro V, debemos hacer alusión al idioma en que han sido escritos los *Elementos*. Se sabe que originalmente fueron escritos en griego antiguo y que se realizaron traducciones al árabe y al latín, y que éstas se han vertido en lenguas vernáculas modernas.[163] Este asunto, que puede ser de orden menor, ha sido considerado por historiadores a través de análisis muy específicos (*v.g.*, estudios de carácter filológico o etimológico[164]) y de análisis más generales, que, por ejemplo, contemplan el estudio de las modificaciones de orden estructural (*v.g.*, inclusión o exclusión de proposiciones, postulados, etc., e incluso la inclusión de los Libros XIII al XV). Como este aspecto está lejos de nuestras posibilidades, lo asumiremos como no relevante para el presente propósito y, en consecuencia, reiteramos y precisamos nuestro objeto de estudio: el Libro V de los *Elementos* en la versión en español presentada por Puertas (1994, pp. 9-54).

Al examinar este texto, sin incluir las notas elaboradas por la autora de la traducción, reconocemos que las definiciones, las proposiciones y sus demostraciones están escritas en un estilo retórico que incorpora palabras o términos, notación simple y diagramas o dibujos;

[162] Una amplia y detallada exposición sobre el vínculo entre la teoría de proporción de Eudoxio y la de Euclides se encuentra en Knorr (1992).

[163] En un apartado de la Introducción General, Luis Vega (Puertas, 1991, pp. 123-151) presenta una amplia y minuciosa discusión acerca de las diferentes versiones y ediciones de los *Elementos*; allí, presenta cuatro fases características del texto, a saber: Euclides griego, Euclides árabe, Euclides latino y Euclides de las lenguas vernáculas. Por su parte, Acerbi (2003b) reconoce que a diferencia de otros libros de los *Elementos*, el Libro V no presenta diferencias sustanciales en cuanto a su estructura entre las tradiciones griega y árabe-latina.

[164] En la Sección 5 *Las magnitudes geométricas de Euclides: glosario*, Grattan-Guinness (1996, p. 364) refiere una discusión acerca de la traducción del término griego σημεῖον (posteriormente traducido como *punctum*) como *punto* y no como *signo*, como parece haber sido usado originalmente por Euclides, asunto que cobra un valor mayor cuando luego reconoce que el uso de *signo* descartaba la posible consideración de este objeto como constitutivo de las magnitudes.

precisamente estos cuatro elementos del lenguaje constituyen los apartados siguientes a través de los que desarrollamos el análisis de esta categoría.

4.1.2.1 Palabras o términos

Las palabras o términos usados, como era de esperarse, en esencia refieren a algunos objetos y relaciones matemáticas definidas implícita o explícitamente (nos referiremos a éstos como *palabras-concepto*); por supuesto que también se encuentran palabras que cumplen una función secundaria en el discurso. Las palabras-concepto han sido objeto de trabajo e interpretación histórica, y en libros como el de Puertas (1994) y Heath (1908) constituyen buena parte de sus comentarios; algunos ejemplos de éstas, identificadas en las definiciones, son: magnitud, parte, menor, mayor, mide, múltiplo, medida, razón, tamaño, homogéneas, guardar razón, equimúltiplo, proporcionales, razón duplicada, razón triplicada, antecedentes, consecuentes, razón por alternancia, razón por inversión, composición, separación, conversión, razón por igualdad, extremos, medios, proporción perturbada.[165] Más allá de la posible dificultad en la interpretación de las palabras-concepto, por experiencia propia reconocemos que el estilo utilizado impone enormes dificultades a un lector no familiarizado con éste, es decir, a un lector moderno; para corroborarlo, basta con leer cualquiera de los enunciados de la mayoría de las definiciones o proposiciones para encontrarse con textos abstrusos que ocasionalmente pueden llegar a parecer trabalenguas, y comparar tal experiencia con la lectura e interpretación de su expresión algebraica dual.

Sin embargo, más allá de las dificultades generadas por el estilo retórico, es preciso señalar que hay un componente lógico en la enunciación que genera dificultad en la lectura. Dicho componente es planteado detalladamente por Gardies (2004, pp. 9-26) en uno de los apartes del capítulo titulado "*De quoi parlait le Géomètre grec*". Nuestra interpretación de lo expuesto allí se resume en que una definición de la proporción desborda los límites del lenguaje de primer orden en tanto que se refiere a una relación entre relaciones y, por tanto, implica una manera de predicación sobre predicados. La virtud de Euclides, que conlleva a lo abstruso de sus predicados, es precisamente lograr enunciar en lenguaje de primer orden una definición tal.

4.1.2.2 Notación

Decimos que la notación es simple, en tanto que esta solo incorpora el uso de letras griegas mayúsculas (*v.g.*, A, B, Γ, Δ, E, Z, Θ) para denotar magnitudes, exclusivamente en las demostraciones. Sin embargo, Euclides hace un uso dual de éstas: en la demostración de una misma proposición, utiliza un par de letras para nombrar una magnitud y también emplea una sola para nombrar otra magnitud; por ejemplo, la demostración de la Proposición 1 comienza así: "Sean un número cualquiera de magnitudes AB, $\Gamma\Delta$ respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes E, Z iguales en número" (Puertas, 1994, p. 18). La notación de la magnitud a través de dos letras evoca la notación que el mismo Euclides ha usado en libros anteriores para denotar segmentos; allí las letras parecerían denotar los extremos del segmento, es decir los puntos. Algo similar podría considerarse que sucede en el Libro V, pero nos resistimos a aceptar tal interpretación pues es claro que en él se está tratando con

[165] En la sección titulada *Conceptos/definiciones* discutiremos los conceptos implicados por algunas de éstas.

magnitudes generalizadas y no solo unidimensionales (*i.e.*, segmentos). De esta manera, cuando Euclides enuncia “la magnitud AB” o “la magnitud E” debe entenderse que se está refiriendo a un segmento, una región o un sólido (o más precisamente, a la cantidad de longitud de un segmento, la cantidad de superficie de una región o la cantidad de volumen de un sólido, respectivamente) y no exclusivamente al segmento cuyos extremos son los puntos denotados con A y B; no hacerlo así implicaría el desconocimiento del nivel de generalidad que el Libro V implica, del cual hablaremos más adelante, cuando nos refiramos a los *procesos* matemáticos identificados. Euclides también hace uso de esta notación de letras griegas en los dibujos que acompañan las demostraciones en el mismo sentido que el señalado antes; sin embargo, bajo la consideración de que los trazos rectos y finitos en los dibujos no representan segmentos –como lo discutiremos adelante–, la interpretación de estas letras denotando puntos o segmentos no tiene sentido alguno. Por otra parte, examinando con un poco más de cuidado el uso de la notación con una o dos letras, advertimos que ello está relacionado con la operatoria de las magnitudes; así, Euclides nota una magnitud con una letra cuando ésta será multiplicada o constituye un múltiplo de otra magnitud, en tanto que usa las dos letras, cuando la magnitud será dividida en sus partes o cuando será objeto de una resta (o será restada de otra). En consecuencia, a través de esta observación, debemos reconocer que la notación también incorpora un aspecto de ostensión operatoria.

Un señalamiento adicional respecto de la notación empleada es el hecho de que, excepto para las magnitudes, no hay notación alguna para ninguna de las palabras-concepto citadas arriba; en efecto, incluso para los objetos como razón o proporción, se usan expresiones retóricas de la forma “como… es a …, así… es a…”. De esta manera queda claro que las discusiones acerca de si debe usarse el signo “=”, en vez de “$::$”, o el signo “/” en lugar de “:” para simbolizar la proporción y la razón, respectivamente, son sencillamente anacrónicas.[166] Ello no implica que en una interpretación moderna de las razones y proporciones, esta discusión no tenga sentido, pues definitivamente el uso de unos u otros símbolos sí impone relaciones diferentes entre el lector y el texto, como lo hemos podido advertir a través de la experiencia de leer las propiedades de las razones con unos y otros símbolos, o a la manera como sugiere Grattan-Guinness (1996) en la Sección sobre *La ontología de Euclides* (pp. 369-371).

De las anteriores precisiones sobre la notación, se deduce que en los *Elementos* no hay uso de notación algebraica alguna del estilo $a{:}b::c{:}d$ o $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.[167]

4.1.2.3 Diagramas o dibujos

Los diagramas o dibujos incluidos en el Libro V acompañan cada una de las demostraciones de las proposiciones.[168] Todos están constituidos por trazos rectilíneos con pequeños trazos en

[166] Grattan-Guinness (1996) refiere que la notación “::” procede de William Oughtred, en el siglo XVII.

[167] Esta y otras razones son expresadas por Grattan-Guinness (1996, p. 366) en su discusión en torno a si existió o no en los *Elementos* una álgebra geométrica.

[168] En este punto debemos reconocer que algunos autores han puesto en duda la originalidad de los dibujos en la obra euclidiana manifestando que éstos fueron insertados en transcripciones y traducciones posteriores. Al margen de la posible validez de tales declaraciones, las razones expresadas en torno a la triangulación de la información disponible para lograr una versión muy cercana a la original, argüidas por Luis Vega (Puertas, 1991, pp. 123-151), nos permiten considerar que los dibujos sí hacían parte de la obra euclidiana objeto de análisis.

sus extremos o en su interior. A modo de ejemplo, y para facilitar la referencia a los comentarios sobre los dibujos, presentamos en la Figura 1 una reproducción del dibujo empleado en la demostración de la proposición 3 (Puertas, 1994, p. 24).

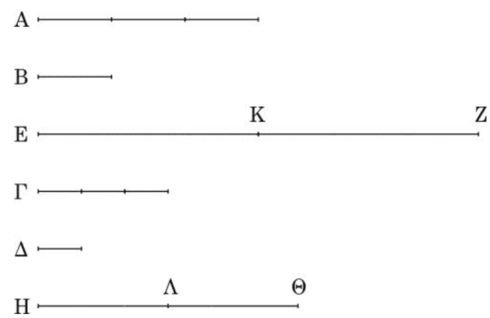

Figura 1.

Como lo señalamos antes, no nos parece acertada la lectura de estos trazos como segmentos, ni la de las letras como puntos o extremos de estos; ello en consideración a que los trazos están representando cantidades de longitud, de superficie y de volumen. A este respecto Beppo Levi comenta:

> *y el hecho de que la figuración que acompaña las demostraciones se hace todavía exclusivamente por segmentos, mientras que los comentaristas se esfuerzan frecuentemente en acentuar el nuevo punto de vista con el dibujo de objetos diferentes, sólo demostrará más claramente el pensamiento más puramente abstracto del autor antiguo, desvinculado de la representación material; pues estos segmentos no tienen diferente significación que las letras en nuestras demostraciones algebraicas (Levi, 2003, p. 167).*

La anterior interpretación puede ser entendida como una anticipación en la obra euclidiana de la *linealización* de las magnitudes geométricas, lograda por Descartes en su *Geometría*, varios siglos después. Consideramos que Euclides estaba lejos de considerar tal proceso en los términos técnicos en que lo planteo Descartes, pues este último sí tenía entre sus propósitos lograr una definición operativa del producto de segmentos; creemos que Euclides simplemente reconoció en los trazos la posibilidad de representar la cantidad de una magnitud geométrica cualquiera y una relativa –pero restringida– operatividad.

En efecto, debemos resaltar el hecho de que la longitud (o quizá sea mejor decir la extensión) de cada trazo sí está en correspondencia con la cantidad de la magnitud considerada. Esto se puede evidenciar por la manera como en que se representa una relación como la "equimultiplicidad"; por ejemplo, en la demostración de la proposición 3, Euclides inicialmente enuncia: "Pues sea la primera, A, el mismo múltiplo de la segunda, B, que la tercera, Γ, de la cuarta, Δ, y tómense los equimúltiplos EZ, $\mathrm{H}\Theta$ de A, Γ" (Puertas, 1994, p. 24) para luego presentar el diagrama de la Figura 1. Como puede apreciarse, la extensión de A es tres veces la de B, así como la extensión de Γ es tres veces la de Δ; igualmente, la extensión de EZ es dos veces la de A, así como la extensión de $\mathrm{H}\Theta$ es dos veces la de Γ.

El hecho de que la extensión del trazo esté en correspondencia con la cantidad de la magnitud considerada tiene una expresión bastante diciente en las proposiciones que implican una proporción o una desproporción. Tal es el caso, por ejemplo, del dibujo que acompaña la demostración de la proposición 14, cuya primera frase es “Guarde pues la primera, A, con la segunda, B, la misma razón que la tercera, Γ, con la cuarta, Δ, y sea A mayor que Δ” (Puertas, 1994, p. 40), y que reproducimos en la Figura 2.

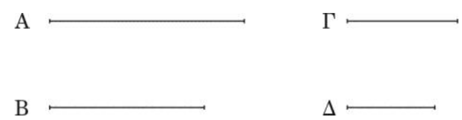

Figura 2.

En este dibujo se logra observar que en efecto la extensión del trazo nombrado con A es mayor que el del trazo notado con Δ. Pero más allá de esto, llama la atención que ciertamente los trazos conforman una proporción geométrica –al menos desde una aproximación intuitiva–, es decir, (i) no solo A es mayor que B, y Γ es mayor que Δ, sino que (ii) el resto de A con respecto a B, es mayor que el resto de Γ con respecto a Δ, en tanto que A es mayor que Γ, y además (iii) tales restos parecen la misma fracción de A y Γ, respectivamente, o simplemente (iv) B parece ser la misma fracción de A, como Δ es fracción de Γ. Desde esta perspectiva, la razón y la proporción tienen una expresión figurativa particular, totalmente implícita en el dibujo; en otras palabras, si bien en el dibujo es relativamente evidente el reconocimiento de un múltiplo de una magnitud, no lo es así la razón entre dos magnitudes ni mucho menos la proporción entre dos razones.

El papel de la figura en los *Elementos* es discutido ampliamente por Gardies (1997, pp. 127-155) en el capítulo titulado “*Le rôle de la figure chez Euclide et Archimède*”. Allí, destacando que las entidades tratadas en la obra son de naturaleza diferente (números, magnitudes geométricas específicas y magnitudes en general), comenta que las figuras empleadas en los diferentes libros tienen que ser consideradas de manera igualmente diversa; así, a las figuras empleadas para representar a las magnitudes geométricas específicas (*v.g.*, segmentos, ángulos, triángulos, círculos) las denomina *propias*, en tanto que utiliza el término *impropias* para las figuras que representan los otros dos tipos de entidades.[169] Desde esta postura, diremos que los dibujos del Libro V son representaciones impropias, o no ostensivas, de las magnitudes generalizadas representadas. Este reconocimiento constituye un argumento más a favor de nuestra interpretación de los trazos rectos y finitos como representación indistinta de los segmentos, regiones y volúmenes.

4.1.3 Procedimientos/Procesos matemáticos

4.1.3.1 Procedimientos matemáticos

La lectura del contenido del Libro V nos permite reconocer algunos procedimientos matemáticos, a saber:

a. *Medir o ser medido*. El procedimiento matemático de medir está referido en las definiciones 1 y 2; sin embargo, como lo menciona (Puertas, 1994, p. 9), “La noción de medida y la relación de medir a (y ser medido por) quedan indefinidas”. Al respecto

[169] Esta división nos evoca la distinción entre las representaciones ostensivas y no ostensivas, respectivamente.

reiteramos que uno de los rasgos de esta teoría es precisamente la de no asociar una medida (*i.e.*, un número) a la relación entre dos magnitudes homogéneas; no obstante esta consideración, nuestra interpretación de las definiciones citadas sí incorpora la referencia a la existencia de un número entero aunque no requiere establecer cuál es este.

b. *Multiplicarse*. Esta idea se aplica a una magnitud y, desde nuestra interpretación, se reduce a añadir una magnitud a sí misma cualquier número entero de veces, es decir, a una adición repetida. Esta idea aparece no sólo en la Definición 4, sino que es aplicada dondequiera que en el Libro V aparece las expresiones múltiplo o equimúltiplo; especialmente se reconoce tal tratamiento en las demostraciones de las diferentes proposiciones, a través de su representación en los dibujos e incluso a través de la inclusión de términos como *doble*, *triple* o *cuádruple*.

c. *Comparar magnitudes*. Para parejas de magnitudes homogéneas aparece el proceso general de comparación para establecer cuando una excede, es igual o resulta inferior, que la otra. A través de estas comparaciones se colige cuándo una magnitud es igual, desigual, mayor o menor que otra.

d. *Suma de magnitudes*. Si bien en la idea de multiplicarse se admitía la reiteración de una magnitud, en la Definición 14 (composición de una razón) se admite la suma de dos magnitudes cuando estas son antecedente y consecuente de una razón. Ahora bien, aún no logramos entender la justificación para que tal definición se interprete en términos de proporciones –como lo hace Puertas (1994, p. 16) “$a{:}b{::}c{:}d \Rightarrow (a+b){:}b{::}(c+d){:}d$”– y no en términos de una razón; por otra parte, la proposición 18 admite también la suma, y su formulación simbólica no es otra que la recíproca de la que acabamos de incluir.

e. *Diferencia de magnitudes*. En las definiciones 15 y 16 (separación y conversión de una razón, respectivamente) se incorpora la idea de resta de magnitudes cuando estas son antecedente y consecuente de una razón y, aunque no se explicite, el antecedente es mayor que el consecuente. Aquí también Puertas (1994, p. 16) hace una interpretación en términos de proporciones: “$a{:}b{::}c{:}d \Rightarrow (a-b){:}b{::}(c-d){:}d$” –interpretación que también hace para la proposición 17– y “$a{:}b{::}c{:}d \Rightarrow a{:}(a-b){::}c{:}(c-d)$”, respectivamente. De la misma forma, en las proposiciones 17, 18 y 19 se incorpora la separación de una razón, pero en éstas claramente en el marco de proporciones y, en consecuencia, la idea de resta de magnitudes. Asimismo, una idea similar a la de resta aparece en las proposiciones 5 y 6; en éstas, de una magnitud *se quita* otra menor y se generan restos de aquella.

f. *División de una magnitud*. En la demostración de las proposiciones 1, 3 y 15, Euclides divide una magnitud en magnitudes iguales a una parte de aquella, condición que limita el resultado y no permite interpretarlo como la división de una magnitud en un número cualquiera de partes alícuotas; en efecto, en las tres proposiciones se garantiza que la magnitud a dividir es múltiplo de la magnitud en que se va a dividir.

Los procedimientos que acabamos de discutir parecieran tener su racionalidad en los libros anteriores de los *Elementos* –lo cual contrastaría con la independencia del Libro V señalada antes–; sin embargo, consideramos que ello puede ser cierto para el caso en que las magnitudes referidas sean segmentos, e incluso superficies, pero no es así si éstas son volúmenes; recordemos que el trabajo con objetos geométricos sólidos (o quizá sea más prudente decir, objetos en el espacio) tendrá que esperar a los Libros XI, XII y XIII.

4.1.3.2 Procesos matemáticos

Con respecto a los procesos matemáticos (y atendiendo a lo señalado al inicio de la sección *Situaciones problemas/Tareas matemáticas*) debemos reiterar que el proceso por excelencia desarrollado en el Libro V, ante la ausencia de problemas o construcciones, es la demostración de enunciados condicionales; adicionalmente, y ligado con este proceso, advertimos en el Libro V el uso del proceso matemático de *instanciación*; estos procesos serán tratados en la sección *Argumentos*. Asimismo, reconocemos el proceso de generalización como un rasgo del Libro V. Como lo señalamos en la sección *Estructura del Libro V* y en la sección *Lenguaje matemático*, la generalización se advierte al considerar que se está incluyendo en una misma estructura a las magnitudes geométricas arquimedianas y no se les está dando un tratamiento particular que atienda a su dimensión. Además, en la Definición 5, especialmente en la idea evocada por la locución *cualquier equimúltiplo*, aparece una manera particular de referirse a todos los elementos de un conjunto, en este caso de magnitudes; el nivel de generalización aumenta en esta misma definición, cuando se condiciona la comparación de dos parejas de tales conjuntos de equimúltiplos, para garantizar que *se comportan –frente al orden– de la misma manera*. De modo un poco diferente, la generalización aparece en las proposiciones 1 y 12, al hablarse de "un número cualquiera de magnitudes" (Puertas, 1994, pp. 18, 37).

Con una mirada de lejos más especializada, Acerbi (2003b) alude al Libro V como una fuente principal en el estudio de la generalidad. Además, establece que al respecto de la generalidad, las tradiciones griega y árabe-latina de los *Elementos*, ofrecen tratamientos bastante disímiles. Igualmente, sostiene que ya en los tiempos de Euclides estaba muy refinada la comprensión de la generalidad y de las herramientas lingüísticas para expresarla. Él asume como objeto central de estudio a la proposición 8 (especialmente su demostración), como caso revelador de la existencia y expresión del proceso de generalidad euclidiano.

4.1.4 Conceptos/definiciones

Cómo ya se mencionó, el Libro V contiene 18 definiciones, las cuales han sido discutidas minuciosamente por los historiadores. De éstas identificamos al menos tres nominales, a saber: la Definición 3 (nomina la razón como una relación entre dos magnitudes), la Definición 6 (nomina magnitudes proporcionales o proporción a las que satisfacen la condición de la Definición 5) y la Definición 11 (nomina magnitudes correspondientes a lo que hoy llamaríamos parejas de antecedentes y parejas de consecuentes)[170]. Las quince definiciones

[170] En esta definición aparece por primera vez la mención a los términos "antecedente" y "consecuente" sin una significación explícita en el contenido anterior; creemos que la significación surge de manera relativamente natural cuando se atiende al orden explícito de referencia a las magnitudes de una proporción (*i.e.*, primera, segunda, tercera,

restantes establecen condiciones, y catorce de éstas, además, dan nombres a los objetos implicados; la Definición 8 solo precisa la condición pero no nomina algo. De estas definiciones, el grupo de la 12 a la 16 alude a transformaciones en las razones sin que su enunciado implique, al menos de manera inmediata o directa, la aplicación a una proporción; a este respecto, Puertas (1994, p. 15) sostiene que estas definiciones "Euclides las aplica a razones cuando describirían mejor proporciones, tal vez porque, al referirlas a proporciones, parecería que asume algo que todavía no se ha probado".

Atendiendo la opinión de los historiadores, quienes coinciden en asignar un lugar central a la paradigmática Definición 5 (proporción), y junto con ella a las definiciones 3 (razón) y 7 (desproporción), recapitularemos y discutiremos algunos de sus planteamientos.[171]

Hay un cierto consenso en que la Definición 3, en sí misma, es una definición general y vaga, y desempeña un papel secundario –y en cierto sentido innecesario– en la teoría; por ejemplo, Hill (1928, p. 38) expresa que "El primer señalamiento que habría que hacer respecto de las definiciones es la ausencia de una definición útil de razón, por ello es imposible hacer cualquier uso de la tercera definición de Euclides". También hay un consenso en que esta definición es complementada por la Definición 4 y adquiere un carácter específico en la medida en que interactúa con la Definición 5; al respecto, por ejemplo, Fine (1917, p. 73) establece que "una noción muy definida de razón está implicada en la definición de proporción".

La existencia de estos consensos contrasta con la existencia de diversas interpretaciones que hacen los historiadores sobre las ideas de razón y proporción en conjunto. En suma, tales interpretaciones configuran una gama de posibilidades que incluyen concebir la razón (y ocasionalmente la proporción) como –o relacionada con–: (i) una cantidad, adicional a los números y las magnitudes, (ii) una comparación o relación binaria de segundo orden, (iii) un arreglo o secuencias ordenadas de magnitudes, (iv) un número real.[172]

Para Grattan-Guinness (1996), en la obra euclidiana existen tres tipos distintos de cantidades, a saber: los números, las magnitudes y las razones. Nos parece que en esencia su argumento se centra en el hecho de que las razones se pueden comparar para establecer si están *en la misma razón,*[173] o si una *es mayor* o *es menor* que otra, de manera análoga a como se hace

---

cuarta) implicado desde la definición 5, y de manera mucho más obvia, cuando se incorpora una notación como "a:b" pues allí se observa que a antecede a b.

[171] Fine (1917, p. 73) sostiene que las definiciones significativas del Libro V son de la 3 a la 7. Antes hicimos una consideración acerca del carácter nominal de la definición 6 y frente a la definición 4 podemos señalar, brevemente, que desde nuestra perspectiva esta impone la condición de que para poder establecer una razón entre dos magnitudes, estas deben ser arquimedianas, condición que no satisfacen los ángulos euclidianos, observación esta última que no hemos encontrado en ninguno de los documentos históricos estudiados y que se sustenta en el hecho de que para Euclides no puede haber un ángulo mayor o igual a dos rectos.

[172] Al margen de estas interpretaciones con referentes históricos, en los capítulos 3 y 4 de la tesis de Guacaneme (2001) se encuentran sendos análisis de las ideas de razón y proporción en teorías matemáticas y textos escolares de matemáticas. Igualmente, en Guacaneme (2002) se encuentra una descripción del tratamiento que de las razones, proporciones y proporcionalidad se realiza en algunos textos escolares.

[173] Si bien Grattan-Guinness (1996, p. 361) reconoce una igualdad aplicable a los números y a las magnitudes, sostiene que Euclides nunca dice que las razones sean *iguales* entre sí, solamente que están *en la misma razón*, o que una razón

con los números y las magnitudes. En oposición, Corry (1994) ha afirmado que la razón no puede concebirse como una cantidad en tanto que la idea de cantidad griega no la admite; de hecho afirma que "La razón, a diferencia del número y de la magnitud, no mide nada ni es cantidad" (p.10). El argumento, coincidencialmente, es similar al que emplea su contradictor, pues también se refiere a que la comparación de dos razones no permite establecer si estas son *iguales* o *desiguales*, sino para establecer la *identidad* o falta de ella; como parte de su argumentación, cita el siguiente pasaje de las *Categorías* (VI, 6a) de Aristóteles, para reforzar la idea de que la condición de igualdad o desigualdad solo se aplica a las cantidades:

> *Lo que realmente es peculiar para las cantidades es que nosotros las comparamos o contrastamos en términos o sobre los fundamentos de igualdad. Predicamos los términos 'igual' o 'desigual' de todas las cantidades mencionadas.*

Corry (1994, p. 5) establece que "La proporción es, por tanto, una comparación entre dos diferentes razones dadas y no un esquema operacional entre cuatro cantidades" y luego (p. 10) señala que "La razón entre dos cantidades del mismo tipo (bien sean dos números o dos magnitudes homogéneas), permite compararlas aún siendo desiguales". A partir de ello se puede colegir que la proporción es asumida como una comparación entre dos comparaciones. Por su parte, Grattan-Guinness (1996, pp. 367-368) en la octava sección, "*Razones de Euclides ¿un fondo musical?"*, considera que las razones pueden estar en una estrecha conexión con las relaciones entre notas musicales –o quizá sea mejor decir entre intervalos– en tanto que la proporción sería una manera de afirmar que dos de tales relaciones son la misma, sin requerir que los términos de las razones sean iguales; así, la relación entre las notas Fa sostenido y La [F#-A] puede reconocerse como una tercera menor, que es la misma relación, o el mismo intervalo, que hay entre Si y Re [B-D][174]; desde esta perspectiva la proporción sería una relación entre dos relaciones.

La razón relacionada con un arreglo o secuencias ordenadas de magnitudes es una propuesta que encontramos en el trabajo de Fine (1917), donde establece que:

> *Ya que según la Definición 5 la condición para que A, B, X, Y sean proporcionales es que: si los múltiplos A, 2A, 3A, … y B, 2B, 3B, … son dispuestos en un arreglo en una sola secuencia en el orden de tamaño, y de la misma manera se disponen los múltiplos X, 2X, 3X, … y Y, 2Y, 3Y, …, la ley de distribución de los múltiplos de A entre aquellos de B debe ser la misma que la de los múltiplos de X entre aquellos de Y. De ahí que "la identidad" de las razones A:B y X:Y significa la identidad de estas dos leyes de distribución, y la razón A:B en sí misma significa la relación de tamaño entre A y B que es indicada por la manera en que los múltiplos de A están distribuidos entre aquellos de B (p. 73).*

---

es como otra. Éste es uno de los tres rasgos de los *Elementos* que Grattan-Guinness utiliza en su argumentación en contra de una lectura de la obra en términos de álgebra geométrica.

[174] Casualmente, luego de la lectura del Capítulo 4, *The role of the theory of proportions in Nicomachus, Theon, and Domninus*, (Klein, 1968, pp. 26-36) –y antes de la lectura de (Grattan-Guinness, 1996)– habíamos escrito: A partir del documento de Klein parece razonable explorar la expresión musical que da origen a la teoría de las proporciones, pues éste puede constituir un ámbito sugerente para el trabajo escolar y con los profesores con las proporciones, además que permitiría esclarecer una idea de razón "práctica" o "sensible" y contrastarla con una idea de razón "teórica" o "abstracta". (Quizá se pueda afirmar que la relación entre las notas Mi y Do, es la misma que entre las notas Si y Sol).

Esta interpretación se puede resumir en una correspondencia entre dos sucesiones ordenadas de múltiplos, cada una compuesta por los múltiplos de las dos magnitudes de una razón. Fine (1917, pp. 74-75) argumenta a favor de esta interpretación al advertir cómo ésta se pone en juego en varios de los teoremas (proposiciones 7 a 10, 11, 13, 16, 18, 22, 24). La idea propuesta por Fine establece la necesidad de que las dos magnitudes de cada razón sean homogéneas, pues de no ser así, no se podría armar una sucesión con los múltiplos de éstas. Igualmente, tal idea no impide que las magnitudes de las dos razones tengan que ser todas del mismo tipo o la misma naturaleza. Además, implica una manera poco usual de interpretar la Definición 5, en tanto que no toma parejas de múltiplos sino de secuencias. Además, Fine sostiene que para una teoría general de la proporción no se requiere una definición de razón, en singular, aunque sí se exigen sendas definiciones de igualdad y desigualdad entre razones, las cuales son suministradas en las definiciones 5 y 7. Bajo esta última interpretación, la razón se despoja de todo halo referido a la cantidad; en efecto, no es posible aquí pensar en que una cantidad pueda estar asociada a una secuencia ordenada de equimúltiplos de dos magnitudes, o en otras palabras, que no se puede pensar en una entidad (*v.g.*, un número) que se asocie o ponga en correspondencia con una sucesión.

La interpretación de la teoría de la proporción del Libro V como una manifestación de la teoría del número real ha sido objeto de opinión y estudio de varios historiadores. Recapitulando las ideas de Corry (1994, pp. 7-13) podemos señalar que algunos historiadores de las matemáticas han argumentado a favor de la equivalencia entre la teoría de proporciones de Euclides y la de cortaduras de Dedekind. Uno de los argumentos consiste en considerar una razón o cociente de dos magnitudes homogéneas y asociarlo a una cortadura, para luego considerar dos cocientes de magnitudes que resulten iguales (proporcionales) y mostrar que las cortaduras asociadas son equivalentes. Otros historiadores de las matemáticas rechazan tal equivalencia bajo la idea de que la interpretación de los textos griegos debe hacerse en el marco de las restricciones en que estos fueron producidos. Una de tales restricciones se refiere al lenguaje; en este sentido no se acepta la traducción o formulación simbólica de las definiciones, ni las interpretaciones y deducciones que a partir de ellas se hacen. Otra de las restricciones obedece a la radical diferencia entre la idea de número de la obra griega y la del número del siglo XIX.[175] Atendiendo a lo anterior, se entiende que no pueda reconocerse en la teoría de las proporciones una teoría de números.

En la misma dirección, Fine (1917, pp. 75-76) discute la relación entre los irracionales y las razones de inconmensurables, afirmando que el argumento expresado por algunos historiadores a favor de reconocer que en efecto se puede asociar una razón y una pareja de números enteros a cada cortadura de Dedekind –y que con esto se podría entender que Euclides ya poseía una teoría del número real y, en consecuencia, Dedekind no habría *creado* el sistema de los números reales– está apoyado en un simbolismo algebraico y en unas nociones de número y de razón que no se corresponden con las ideas euclidianas respectivas.

Estas posturas contrastan con afirmaciones de estudiosos de la teoría de la proporción del Libro V. Por ejemplo, en Zubieta (1991) encontramos las siguientes oraciones: “Esta nota presenta la definición de número real atribuida a Dedekind como una interpretación de la

[175] La idea griega reconoce a los números y las magnitudes como cantidades *no abstractas* asociadas respectivamente al contar y medir, en tanto que la idea moderna se refiere a la cantidad como abstracta y general.

definición de proporción de Eudoxio, tal como la enuncia Euclides al principio de su libro V"(p. 477) y "Esto significa que la definición de número real propuesta por Richard Dedekind es la misma que la presentada por Eudoxio" (p. 478). También (Knorr, 1992) señala que "Como es bien sabido, las definiciones euclidianas son un equivalente de la técnica de Dedekind (a través de 'cortes' en los racionales) para investigar la propiedad de los números reales" (p. 3). De manera análoga Hill en al menos dos de sus documentos sobre los Libros V y VI de los *Elementos,* señaló que "La razón de una magnitud *A* a otra magnitud *B* de la misma clase es un número real, racional o irracional, determinado de la manera como se explican en lo que sigue. Éste se denota por el símbolo *A*:*B*" (M. J. M. Hill, 1912b, p. 360) y que "estos seis resultados suministran una regla para determinar si la razón (*A*:*B*) es mayor que, igual a, o menor que cualquier número racional; consecuentemente, en concordancia con la definición de Dedekind, la razón (*A*:*B*) es considerada como un número" (M. J. M. Hill, 1928, p. 44).
Antes de pasar a los comentarios sobre la Definición 7, nos parece interesante destacar que otro elemento interesante en la discusión de la Definición 5 lo constituye su expresión simbólica, pues existen varias versiones simbólicas de traducción de ésta. Por ejemplo Corry (1994, p. 3) propone la siguiente:

> *"a:b=c:d, si para todo par de enteros m, n, se tiene ma>nc (o ma<nc, o ma=nc) si y solo si mb>nd (o mb<nd, o mb=nd) respectivamente".*

Entre tanto, Puertas (1994, p. 12) reseña dos versiones no equivalentes desde el punto de vista lógico; una que implica una *disyunción de conjunciones*, a saber:

> *"siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción a:b::c:d si y solo si: o ((ma>nb) y (mc>nd)) o ((ma=nb) y (mc=nd)) o ((ma<nb) y (mc<nd))."*

y otra que es una *conjunción de condiciones (implicaciones)*, la cual es la forma lógica de su aplicación en la proposición 11, a saber:

> *"siendo a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m y n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción a:b::c:d si y solo si: (si ma>nb, entonces mc>nd) y (si ma=nb, entonces mc=nd) y (si ma<nb, entonces mc<nd)."*

A través de una notación particular de la reunión de los signos "=", "<" y ">", Filep (2003, p. 1) incorpora una forma simbólica equivalente a la citada inmediatamente antes, a saber:

> *"si a, b, c, d son magnitudes (de la misma clase), entonces a:b=c:d si y solo si para cualesquiera enteros positivos ('números' en el uso griego) n, m,* $ma \gtreqless nb \Rightarrow mc \gtreqless nd$*."*

Con respecto a lo planteado por los historiadores sobre la Definición 7, queremos resaltar que (Knorr, 1992, p. 8) establece que:

> *Uno de los defectos conocidos de la teoría euclidiana en el libro V es que no prueba que "no tener la misma razón" sea equivalente a "tener una razón mayor o menor razón". Pero, de hecho, algunas veces supone esta afirmación (por ejemplo, en el libro V,*

> *proposiciones 9 y 10), por lo cual es preciso pensar que lo entendían tanto él como los geómetras que le precedieron.*

Esta aserción es importante para entender que hay un supuesto tácito en la teoría que provee a Euclides de una herramienta potente para la demostración de la proporcionalidad o desproporcionalidad de cuatro magnitudes; en otras palabras, si se supone que tener una razón mayor que otra equivale a afirmar que no es cierto que exista proporción entre tales magnitudes, se dispone de una herramienta para demostrar por reducción al absurdo.

También, nos llama la atención la manera en que Fine (1917, p. 73) parafrasea la Definición 7 [“Si (en la notación de la Definición 5) se pueden encontrar m y n tal que $m\text{A}>n\text{B}$ pero $m\text{X}\leq n\text{Y}$, entonces se dice que A tiene una mayor razón a B que la que X tiene a Y], pues es una manera alterna de mirar la comparación entre las razones.

4.1.5 Propiedades

En el Libro V hay veinticinco proposiciones y dos porismas a través de las cuales se reseñan y demuestran propiedades de los diferentes objetos tratados. Al examinar el contenido de las proposiciones y atendiendo al dominio al que se refiere (*v.g.*, magnitudes o proporciones) –o más específicamente, a los dominios que relaciona (*v.g.*, magnitudes y magnitudes, magnitudes y proporciones, proporciones y magnitudes, proporciones y proporciones– se reconocen cinco grupos de proposiciones.

El primer grupo –compuesto por las proposiciones 1, 2, 3, 5 y 6– se refiere a las magnitudes y sus múltiplos (*i.e.*, magnitudes), pero no aluden a las razones ni a las proporciones. La expresión simbólica de tales proposiciones (*i.e.*, [$m(x_1+x_2+...+x_n)=mx_1+mx_2+...+mx_n$], [$(m\oplus n)x=mx+nx$], [$m(nx)=(m\odot n)x$], [$m(x-y)=mx-my$], [$(m\ominus n)x=mx-nx$]) permite reconocer que, en lenguaje moderno, se están expresando propiedades relativas a la distributividad (proposiciones 1, 2, 5 y 6) y aparentemente a la asociatividad del producto (proposición 3)[176]; además, advertimos que se admite la suma de magnitudes, la suma y resta de múltiplos de magnitudes, la suma y resta de los números que representan las veces que se suma una misma magnitud y el producto de tales números, y que no hay referencia alguna al producto de magnitudes.[177] Pero para que estas operaciones se puedan aplicar se requiere, de una parte, que las magnitudes implicadas sean homogéneas y, de otra, que se considere que los números m, n no son exactamente los números tratados en los libros aritméticos de los *Elementos*, sino, podríamos decir, números de contar repeticiones de una misma magnitud.

El segundo grupo consta de las proposiciones 7 (sin su porisma 7’) y 8. Al observar los enunciados simbólicos de las propiedades en cuestión (*i.e.*, [Si $x=y$, entonces $x:z::y:z$ y $z:x::z:y$], [Si $x<y$, entonces $x:z\prec y:z$; y $z:x\succ z:y$]) reconocemos cómo se explicitan propiedades “de orden” de las razones a partir de propiedades “de orden” en las magnitudes o, en otras palabras,

[176] Para la propiedad expresada en el simbolismo [$m(nx)=(mn)x$] hay que precisar que se están incorporando dos productos y que una notación más precisa podría ser [$m\otimes(n\otimes x)=(m\odot n)\otimes x$] en la que el símbolo $\otimes$ expresa el producto de un escalar por una magnitud (o simplemente la idea de múltiplo de una magnitud) y el símbolo $\odot$ expresa el producto de dos “números de contar”. Bajo estas consideraciones no es muy evidente que la propiedad se refiera a la asociatividad del producto.

[177] Esta última observación es amplia y vehementemente discutida por Corry (1994, pp. 2-5) en el apartado titulado “*La teoría de proporciones de Eudoxio*”.

cómo la igualdad o desigualdad de las magnitudes se refleja o trasmite a algunas de las razones en que ellas están implicadas. La anterior afirmación debe matizarse con la observación que está implicada en la simbología empleada aquí, y que distingue, por ejemplo, el igual para las magnitudes (=) del hoy "igual" para las razones (::).

El tercer grupo está integrado por proposiciones que describen cómo relaciones entre razones determinan relaciones u operaciones entre magnitudes. Así, en este grupo están las proposiciones 9, 10, 14, 20, 21 y 25. Sus expresiones simbólicas respectivamente son: [Si $x:z::y:z$, entonces $x=y$. Y, si $z:x::z:y$, entonces $x=y$], [Si $x:z\prec y:z$, entonces $x<y$. Y si $z:x\prec z:y$, entonces $x>y$], [Si $w:x::y:z$ y $w\gtreqless y$, entonces $x\gtreqless z$], [Si $u:v::x:y$ y $v:w::y:z$ y $u\gtreqless w$, entonces $x\gtreqless z$], [Si $u:v::y:z$ y $v:w::x:y$ y $u\gtreqless w$, entonces $x\gtreqless z$], [Si $w:x::y:z$ y $w>x$ y $w>y$ y $x>z$ y $y>z$, entonces $w+z>x+y$]. De estas seis proposiciones, las últimas cuatro (*i.e.*, 14, 20, 21 y 25) tienen una condición específica en tanto que la hipótesis no solo se incluyen condiciones sobre las razones, sino también sobre las magnitudes implicadas.

El cuarto grupo es el más numeroso; éste incluye propiedades de las proporciones o desproporciones, es decir de las razones en sí mismas. Allí, ubicamos las proposiciones 4, 7', 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 19', 22, 23 y 24, cuyos enunciados simbólicos respectivamente son: [Si $w:x::y:z$, entonces $\forall$ m y n, $mw:nx::my:nz$], [Si $w:x::y:z$, entonces $x:w::z:y$], [Si $u:v::w:x$ y $w:x::y:z$, entonces $u:v::y:z$], [Si $x_1:y_1::x_2:y_2::\ldots::x_n:y_n$, entonces $(x_1+x_2+\ldots+x_n):(y_1+y_2+\ldots+y_n)::x_i:y_i$, $\forall i=1,\ldots,n$], [Si $u:v::w:x$ y $w:x\succ y:z$, entonces $u:v\succ y:z$], [Si $w:x::y:z$, entonces $w:y::x:z$], [Si $(w+x):x::(y+z):z$, entonces $w:x::y:z$], [Si $w:x::y:z$, entonces $(w+x):x::(y+z):z$], [Si $(w+x):(y+z)::w:y$, entonces $(w+x):(y+z)::x:z$], [Si $(u+v):(x+y)::v:y$, entonces $(u+v):(x+y)::u:x$], [Si $x_1:x_2::y_1:y_2$, $x_2:x_3::y_2:y_3$, ... , y $x_{n-1}:x_n::y_{n-1}:y_n$, entonces $x_1:x_n::y_1:y_n$], [Si $u:v::y:z$ y $v:w::x:y$, entonces $u:w::x:z$], [Si $u:v::w:x$ y $y:v::z:x$, entonces $(u+y):v::(w+z):x$]). Como se puede observar, las razones no son objeto de operación tales como la suma o el producto, aunque sí sus elementos (*i.e.*, las magnitudes), al menos para la suma y para, lo que hoy llamaríamos, el producto por un escalar; en oposición a esta afirmación, encontramos en Fine (1917, p. 75) la siguiente afirmación:

> *El Teorema 22 implica una definición del producto de las dos razones A:B y B:C, y el Teorema 24 una definición de la suma de dos razones A:C y B:C, en el mismo sentido que la Definición 5 implica una definición de razón en sí misma.*

El quinto grupo contiene únicamente a la proposición 15 ([$x:y::nx:ny$]), la cual no presenta estructura de condicional y tan solo muestra una proporción. Nos parece que esta forma de enunciación no permite ubicar esta proposición en alguno de los otros grupos.

4.1.6 Argumentos

En tanto ícono del estilo hipotético deductivo, la argumentación utilizada en los *Elementos*, procede vía deductiva y esencialmente sintética. En las proposiciones del Libro V hemos identificado que la mayoría de sus demostraciones proceden a través del estilo directo, aunque también hemos reconocido proposiciones cuya demostración incorpora la reducción al absurdo; las demostraciones de las proposiciones 9, 10 y 18 incorporan esta última estrategia demostrativa.

Las proposiciones (y sus demostraciones) exhiben una estructura que ha sido descrita por los historiadores; en general ella contempla seis etapas, a saber: *prótasis*, *ectesis*, *diorismo*, *construcción*, *demostración* y *conclusión*.[178] En la versión de Puertas (1994), en el Libro V la prótasis aparece al inicio en letra cursiva y en esencia es el enunciado de la proposición; la *ectesis* es el párrafo siguiente a la *prótasis*, el cual casi siempre inicia con los términos “Sean” o “Pues sean”. El tercer párrafo, que inicia con la palabra “Digo”, es el *diorismo*. Luego del *diorismo* aparece uno o varios párrafos en los cuales no siempre es evidente el reconocimiento de la *construcción* y la *demostración*, como partes separadas, aunque creemos que en la etapa de la construcción, los diagramas o dibujos son una parte constitutiva medular. La *conclusión* normalmente es el último párrafo (excepto cuando hay porismas) y comienza con la expresión “Por consiguiente” e incorpora el texto de la *prótasis*.[179]

En las demostraciones de las proposiciones identificamos una forma especial de prueba, pues Euclides presenta una demostración para equimúltiplos específicos de las magnitudes (casi siempre el doble y el triple), y sin un discurso particular que propenda por la generalización a cualquier equimúltiplo, construye una argumentación válida para el caso general; en otras palabras, pareciera que muestra la validez de la *prótasis* para un caso particular que subsume todos los casos. Esta estrategia exhibe lo que algunos han dado en llamar un proceso de *instanciación*; en éste, en la *ectesis* se reemplaza la forma de cuantificación universal enunciada en la *prótasis* por la designación de un objeto singular que representa la clase general, sobre el que se desarrolla la demostración.

Otra estrategia demostrativa llamativa que hemos identificado, es la empleada en parte de la demostración de la proposición 8, pues Euclides arguye con una especie de inducción sobre los múltiplos cuando expresa “tómese A doble de Δ y M triple (de Δ), y así **sucesivamente** hasta que el múltiplo tomado de Δ sea el primero mayor que K” (la negrilla es nuestra).

Ahora, siguiendo las directrices de Hill (1923, pp. 217-220), las proposiciones del Libro V se pueden clasificar en seis grupos. Cada uno de estos ha sido representado, en la Figura 3, por una columna de proposiciones (notadas P*i*).

[178] En este texto hemos usado los términos “proposición” y “demostración” en un sentido amplio para referirnos con el primero a lo que aquí se llama *prótasis*, en tanto que el segundo lo hemos usado para referirnos al conjunto de las otras cinco etapas citadas. En adelante seguiremos usando la misma convención y emplearemos la cursiva (o itálica) cuando hagamos referencia a una etapa específica.

[179] Debemos reconocer que en la interpretación de cada *prótasis* y en la reescritura de la proposición en lenguaje simbólico moderno fue fundamental el texto de la *ectesis*, el del *diorismo* e incluso el de la *construcción* y *demostración*; sin éstos, varias veces nos sentimos ante un enunciado abstruso sin mayor sentido.

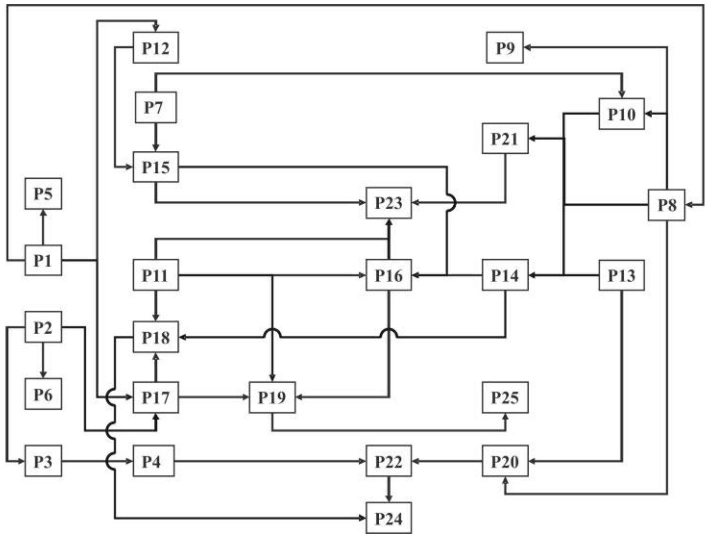

Figura 3.

Antes de examinar los grupos definidos por Hill, debemos señalar que en la Figura 3 hemos procurado representar también la estructura deductiva del Libro V. En ésta hemos utilizado una flecha de conexión si una proposición interviene en la demostración de otra; así, por ejemplo, en la figura se puede leer que la proposición 15 (P15) es utilizada en las respectivas demostraciones de las proposiciones 16 y 23, en tanto que en la demostración de la proposición 15 intervienen las proposiciones 7 y 12. Esta representación, junto con la tabla de la Figura 4, (ver páginas siguientes), nos ha permitido reconocer un indicador de la *complejidad lógica* de cada proposición; de esta manera, es muy probable que una proposición tenga mayor complejidad lógica que otra, si en la primera intervienen un número mayor de proposiciones que en la segunda.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	P25	
P1					X			X				X					X									4
P2			X			X											X									3
P3				X																						1
P4																						X				1
P5																										0
P6																										0
P7										X					X											2
P8									X	X				X						X	X					5
P9																										0
P10														X						X	X					3
P11																X		X	X				X			4
P12															X											1
P13														X						X	X					3
P14																X		X								2
P15																X							X			2
P16																			X				X			2
P17																		X	X							2
P18																								X		1
P19																									X	1
P20																						X				1
P21																							X			1
P22																								X		1
P23																										0
P24																										0
P25																										0
	0	0	1	1	1	1	0	1	1	2	0	1	0	3	2	3	2	3	3	3	3	2	4	2	1	

Figura 4.

Así, a partir de la lectura de la última fila de la tabla, se advierte que es muy probable que la proposición 23 y las proposiciones 14, 16, 18, 19, 20 y 21 tengan un nivel de complejidad lógica mayor que el de las demás, en tanto que en su demostración se involucran cuatro y tres proposiciones, respectivamente. De forma análoga se identifica que las proposiciones 1, 2, 7, 11 y 13 no incorporan proposición alguna en su demostración, lo que hace suponer que su complejidad lógica es baja. Por otra parte, leyendo la información de la última columna de la tabla, se tiene un indicio de identificación del nivel de intervención y potencia de las proposiciones en la deducción de resultados de la teoría; así, se observa que la proposición 8 es utilizada en cinco proposiciones, en tanto que las proposiciones 1 y 11, lo son en cuatro proposiciones y las proposiciones 5, 6, 9, 23, 24 y 25 no se implican en demostración alguna. Como veremos enseguida, estos y otros indicadores han sido utilizados parcialmente por estudiosos y críticos del Libro V para agrupar sus proposiciones.

Ahora sí, demos una mirada a los grupos definidos en el apartado V de la crítica de Hill al Libro V de los *Elementos* (1923, pp. 217-220).

El primer grupo contiene las proposiciones que versan sobre las magnitudes y sus equimúltiplos (no sobre sus razones), a saber: las proposiciones 1, 2, 3, 5 y 6. Hill (1923, p. 217) sostiene que sus demostraciones no dependen del Axioma de Arquímedes.[180] Además, señala que a este grupo es necesario añadir una proposición (que llamará *Proposición subsidiaria*), que si bien no es explicitada como tal, sí se reconoce en la demostración de la proposición 8 y que enuncia así: "Si A, B, C son magnitudes de la misma clase, y A es mayor que B, entonces existen números n y t tales que nA>tC>nB".

El segundo grupo que identifica Hill se refiere a razones *desiguales* (o desproporciones) e incluye las proposiciones 8, 10 y 13. De estas afirma que solo son usadas para demostrar propiedades de razones iguales (proporciones)[181] y critica entonces la insuficiencia del criterio para razones iguales (Definición 5) y la recurrencia al criterio de razones desiguales (Definición 7) para tal fin; además, sostiene que la *Proposición subsidiaria* (citada antes) desempeña un papel fundamental en el uso de estas proposiciones en las demostraciones en que están implicadas. Acerbi (2003b) resalta que si bien el Libro V se refiere a la proporcionalidad, estas tres proposiciones aluden a la desproporcionalidad; comparativamente en número muy pocas respecto a la cantidad de proposiciones de dicho libro, pero fundamentales en la demostración de varias de las proposiciones de éste. El mismo autor afirma que la proposición 8 jugó un papel fundamental en los primeros desarrollos de la teoría general de proporciones y en los tratamientos pre-euclidianos de esta teoría; particularmente, en su citado artículo de cerca de setenta páginas, señala la importancia del razonamiento en la demostración de esta proposición y manifiesta que en el Libro V no se da cuenta de dicha importancia. También, este autor señala que la proposición 8, a pesar de su enunciado intuitivo, tiene una gran importancia en la estructura deductiva del Libro; ella tiene una de las demostraciones más extensas (e incompleta), a pesar de que solo alude a una proposición anterior y a pocas

[180] En el capítulo 3, *El método de exhaución y la heurística*, de la Torre (1997, pp. 25-29) dirige su estudio hacia la *propiedad arquimediana*; luego de presentar y discutir sus diferentes formas enunciativas, expresa que su formulación contemporánea es "Dadas dos magnitudes homogéneas desiguales, siempre existe un múltiplo de la cantidad menor que supera a la mayor". (p. 26).

[181] En Puertas (1994, p. 35) sí se usa la proposición 8 en la demostración de la proposición 10.

suposiciones. A través de ella se establece una condición suficiente para la desigualdad de razones (desproporcionalidad).
El tercer grupo reseñado por Hill está integrado por las proposiciones 4, 7, 7’[182], 11, 12, 15, 17 y 18, y señala que las pruebas de estas proposiciones (excepto la de la 18) dependen exclusivamente de la Definición 5 y de las proposiciones del primer grupo. Esta observación se contrasta y a la vez se matiza cuando se observa la segunda columna de proposiciones en la Figura 3; allí se evidencia que salvo la proposición 18, a las demás proposiciones solo llegan flechas de las proposiciones del grupo de la primera columna y de proposiciones de la segunda columna. Asimismo se hace evidente que estas proposiciones solo van a estar involucradas en proposiciones del mismo grupo o de los grupos cuatro y cinco.
El cuarto grupo está constituido por las proposiciones 16, 22, 23 y 24. En términos generales sus demostraciones proceden por lo que Hill (1923, p. 218) llama el *tipo normal* y requieren del Axioma de Arquímedes. Hill (1923, pp. 217-218) sostiene que “Cada demostración es independiente de todas las demás propiedades de las razones iguales”, pero lo exhibido en las Figuras 3 y 4 nos ponen en desacuerdo con tal planteamiento, en tanto que hemos reconocido que las proposiciones 4, 11 y 18 (que en la Sección titulada *Propiedades* hemos incluido como proposiciones que exhiben propiedades de las proporciones) sí intervienen en las demostraciones de las proposiciones 22, 16 y 24, respectivamente.
El quinto grupo contiene únicamente a la proposición 19. Hill considera que su demostración no procede por el *tipo normal*. Aunque advierte que podría ser considerada como una transformación de la hipótesis y conclusión de la proposición 17 con la ayuda de la proposición 16; en las Figuras 3 y 4 se observa cómo en la demostración de la proposición 19 en efecto intervienen las proposiciones 16 y 17, pero además la proposición 11.
El sexto y último grupo considerado por Hill, incluye las proposiciones 9, 14, 20, 21 y 25. En cierto sentido (salvo por la proposición 10) este grupo coincide con el que señalamos como tercer grupo en el apartado titulado *Propiedades* y, como era de esperarse, su caracterización es bastante similar. Para Hill (1923, p. 219) “El objeto de estas proposiciones no es demostrar la igualdad de dos razones, sino probar que ciertas magnitudes implicadas en las razones son iguales o desiguales, dependiendo del caso”.

Como lo dijimos antes, a través de los textos copiados en los apartados 4.1.1 a 4.16 exhibimos una visión a la teoría euclidiana de la proporción expuesta en el Libro V de *Elementos*, mediada por las seis categorías de la Teoría de los Significados Sistémicos.

Con esta visión en mente, pasemos ahora a ver el listado de los documentos que hemos identificado versan sobre la historia de la teoría de la proporción.

[182] Este porisma, por nosotros notado como 7’, es reseñado por Hill (1923, p. 218) como Corolario de la proposición 4.

4.2 Una visión sobre la historia de la razón y la proporción

La búsqueda y acopio de bibliografía sobre la historia de los objetos matemáticos razón y proporción ha sido una tarea cuyos inicios se remontan varios años antes de iniciar el desarrollo de la presente tesis y que hemos llevado a cabo de manera más sistemática durante el desarrollo de la misma.

Esta tarea ha implicado ubicar algunas de las principales publicaciones académicas especializadas en HM y de Filosofía de las Ciencias (*v.g.*, *Historia Mathematica*, *Archive for History of Exact Sciences*, *Isis*, *Revue d'histoire des sciences*, *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, *Archives internationales d'histoire des sciences*, Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas), consultar y acopiar libros de HM e identificar artículos en revistas de investigación en Educación Matemática y de Matemáticas. La identificación de estas fuentes documentales constituye un conocimiento que valoramos de manera especial, pues si bien para los investigadores y especialistas en HM puede ser un conocimiento elemental, para los diletantes en esta disciplina constituye el resultado de un esfuerzo considerable, alcanzado por no muchas gentes de la comunidad académica dedicada a la investigación en los campos de la Educación Matemática o de la Educación del Profesor de Matemáticas, sino quizá por aquellos que tienen un interés particular por el conocimiento histórico y este orienta, en mayor o menor grado, sus acciones investigativas.

Adicional a las contribuciones del "Grupo de Historia de las Matemáticas" de la Universidad del Valle, esta busqueda documental ha contado con el apoyo decidido del "Centro de Documentación y Publicaciones" (CENDOPU) del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, dependencia que, en conjunto con el sistema bibliotecario de esta universidad, posee hoy en día, en el contexto colombiano, una de las más importantes colecciones de documentos de HM y suscripción a importantes bases bibliográficas donde se aloja documentación de la mayoría de las fuentes citadas antes.

Como resultado de la identificación de material bibliográfico disponemos de cerca de un centenar de documentos que versan sobre aspectos relacionados con la historia de los objetos matemáticos razón y proporción, la gran mayoría de ellos escritos en Inglés[183] y referidos a la HM occidentales y hegemónicas. Si bien el número de documentos que

[183] El hecho de que la mayoría de los documentos esté escrito en Inglés, si bien puede ser insignificante en otras latitudes y culturas, constituye un obstáculo y reto para que estos sean ampliamente consultados y estudiados por aún una parte importante de la comunidad académica de profesores de Matemáticas.

pueden contener información histórica relevante puede ser superior a este, en el proceso de búsqueda bibliográfica tuvimos que convensernos que sería ingenuo procurar un acopio de documentación que abarcara la totalidad de esta, y que deberíamos procurar ser razonables frente a lo ideal. No obstante tal nivel de conciencia, a través de las referencias bibliográficas contenidas en los documentos que ibamos ubicando, procuramos identificar documentos ampliamente citados o desconocidos por nosotros y acceder a ellos; asimismo, hicimos algunas consultas de índices de citación de algunos documentos para identificar los más relevantes, al menos desde la perspectiva de tales índices.

4.2.1 Identificación de hitos

A partir de la documentacion recopilada, en un primer momento (Guacaneme, 2007b) identificamos seis hitos, que describimos entonces como sigue:

(i) la época de la escuela pitagórica en la cual existía una teoría de las proporciones que entra en crisis por el "descubrimiento" de las magnitudes inconmensurables;
(ii) la época dorada de los griegos (fundamentalmente de Eudoxo, Euclides y Apolonio) en la que se "crea" una teoría de las proporciones, se adapta a la versión axiomático-deductiva y se usa en la descripción de curvas geométricas;
(iii) la época del surgimiento de lo que hoy se llama Álgebra —y particularmente de la Geometría Analítica— en la que se hace uso de la teoría de las proporciones en la solución de problemas geométricos a través de procedimientos analíticos y en la creación de nuevas magnitudes físicas;
(iv) la época de la Edad Media en la que la clásica teoría de proporciones griega se transforma y reformula para ampliar su ámbito de empleo;
(v) la época de creación del Cálculo y el Análisis en la que el lenguaje de las funciones sustituye el clásico lenguaje de las proporciones empleado por varios siglos; y,
(vi) las épocas de desarrollo de los trabajos del matemático y filósofo alemán Gottlob Frege y del matemático alemán Julius W. R. Dedekind relativos a la construcción del conjunto de los números reales en la que la definición euclidiana de proporción juega un papel fundamental.

Esto hitos fueron redefinidos posteriormente (Guacaneme, 2012d) y entonces se presentaron como sigue:

a. la época de la escuela pitagórica en la cual existía una teoría de las proporciones que, según la tradición hegemónica[184], entra en crisis por el 'descubrimiento' de la inconmensurabilidad;

b. la época dorada de los griegos (fundamentalmente de Eudoxo, Euclides y Apolonio) en la que se 'crea' una teoría de las proporciones, se adapta a la versión hipotético-deductiva y se usa en la descripción de las cónicas;

c. la época del surgimiento de lo que hoy se llama Álgebra —y particularmente de la Geometría Analítica— en la que se hace uso de la teoría de las proporciones en la solución de problemas geométricos a través de procedimientos analíticos;

d. la época del Renacimiento en la que la clásica teoría de proporciones griega se transforma y reformula para ampliar su ámbito de aplicación a magnitudes no geométricas y su empleo en las ciencias naturales y médicas;

e. la época de creación del Cálculo y del Análisis en la que el lenguaje de las funciones sustituye el clásico lenguaje de las proporciones empleado por varios siglos, cayendo este último en un estado de aletargamiento; y,

f. la época de desarrollo de los trabajos del matemático alemán Julius W. R. Dedekind y del matemático y filósofo alemán Gottlob Frege, relativos a la construcción del conjunto de los números reales, en la que de manera un poco intempestiva la teoría euclidiana parece renacer en cuanto a su protagonismo, como acicate en dichas construcciones. (p. 114)

A partir de la identificación de estos hitos y mediado por una lectura de estudio de los documentos realizada de manera más cuidadosa y un poco más profunda, establecimos una clasificación de los documentos, determinada por seis épocas o lapsos, a saber:

a. Teorías pre-euclidianas.
b. Teoría euclidiana.
c. La proporción en la época helenística.
d. Traducciones árabes y latinas.
e. Adaptaciones de la teoría en la Baja Edad Media y el Renacimiento.
f. Influencia de la teoría de la proporción en la construcción de los reales.

Antes de entrar a presentar brevemente los documentos ubicados en cada una de tales épocas, es necesario precisar que con estos hitos no pretendemos recapitular una historia

[184] Esta tradición ha sido cuestionada por autores como Knorr (2001).

de los conceptos matemáticos de razón y proporción, sino establecer un primer filtro para determinar cuáles son los documentos en los que centramos esta parte del estudio.

4.2.2 Documentación bibliográfica sobre la historia de la razón y la proporción

La identificación de los seis hitos nos ofrece la posibilidad de generar una organización de los documentos a través de sendos subtítulos; incluimos un séptimo subtítulo, el cual no corresponde a una época específica, para ubicar allí aquellos documentos que no se corresponden con una época particular o en los que el asunto tratado no permite hacerlo. Bajo cada subtítulo presentamos los documentos ordenados de acuerdo con su fecha de publicación.

4.2.2.1 Teorías pre-euclidianas

1. **La idea griega de proporción**[185], (Evans, 1927). Muestra la existencia implícita de la antanairesis como una definición alterna de proporción a las dos que aparecen en *Elementos* de Euclides (Definiciones V. 5 y VII. 20). Adicionalmente, explica en qué consiste el método o procedimiento de antanairesis y establece, a través de su aplicación al caso de la diagonal y el lado del cuadrado, un nexo entre esta y lo implicado en la Definición V. 5.

2. **Ciruelo sobre los nombres de proporciones y progresiones aritméticas y geométricas**[186], (Cajori, 1928). El autor presenta una discusión acerca del origen y significado de los términos "proporción aritmética" y "proporción geométrica". Para ello recurre a las notas del *Cursus*, libro de Matemáticas de Pedro Sánchez Ciruelo ubicado al final del siglo XV e inicios del XVI, y refiere que este autor no está de acuerdo con la explicación que sostiene que los términos en cuestión se emplean en relación con los campos matemáticos (Aritmética y Geometría, respectivamente) en el que las respectivas proporciones tienen su aplicación. Establece que ni Euclides, ni Apolonio de Perga, ni Arquímedes emplean adjetivos para las proporciones; sin embargo, ubica los términos "aritmética", "geométrica" y "armónica", en relación con las "medias" o "proporciones", en referencias anteriores a Euclides (específicamente en los pitagóricos, Platón y Aristóteles).

[185] *The Greek Idea of Proportion*.

[186] *Ciruelo on the Names "Arithmetical" and "Geometrical" Proportions and Progressions*.

3. **Eudoxo – Estudios 1: Una proporcionalidad pre-eudoxiana y pistas en Aristóteles y Euclides**[187]**,** (Becker, 1933). Bajo el supuesto que la inconmensurabilidad provocó ciertas dificultades a la teoría ingenua de la proporción, el autor, basado en algunas observaciones de Aristóteles, afirma que se dispuso de un remedio específico: una definición de razón basada en la antifairesis, o algoritmo de Euclides. A partir de esta definición, intenta reconstruir una teoría de la proporción que debió haber existido entre el descubrimiento de la inconmensurabilidad y la definición de proporción del Libro V de *Elementos*; así demuestra la mayoría de las proposiciones del Libro V.

4. **La evolución de los *Elementos* euclidianos**[188], (Knorr, 1975). Este libro, generado por la tesis doctoral del autor, pretende arrojar nuevas luces acerca de la geometría griega del siglo IV a. C. En esta dirección, entre otros propósitos, se fija la cronología de la teoría pre-euclidiana de las magnitudes inconmensurables que lleva a los primeros descubrimientos pitagóricos del siglo V a. C., aborda trabajos de Teodoro de Cirene, Teeteto, Arquitas y Eudoxo y culmina en la teoría formal presentada en el Libro X de *Elementos*. En al menos cuatro segmentos del libro se aborda el estudio de la antifairesis (II/II *Anthyphairesis and the Side and Diameter*, IV/III *Anthyphayretic Reconstruction*, VIII/II *Anthyphairesis and the Theory of Proportions* y *Appendice B: On the Anthyphairetic Proportion Theory*) y se alude a la existencia de una teoría pre-euclidiana de la proporción basada en esta.

5. **Arquímedes y la teoría pre-euclidiana de la proporción**[189], (Knorr, 1978). Exhibe una nutrida argumentación a favor de la existencia de una teoría pre-euclidiana de la proporción, atribuida a Eudoxo y basada en su principio-bisección de convergencia, que sirve de puente entre la primera teoría, basada en la antifairesis, y la última teoría, presentada en el Libro V de *Elementos*. Esta perspectiva modifica drásticamente la interpretación usual de la contribución de Eudoxo a la teoría euclidiana de la proporción, a la vez que provee una solución al problema de la relación entre el "axioma arquimediano" de la continuidad y su contraparte euclidiana.

6. **Los inicios de las Matemáticas griegas**[190], (Szabó, 1978). El autor titula "La teoría pre-euclidiana de las proporciones" a la segunda de tres partes o capítulos de este

[187] *Eudoxos – Studien I. Eine voreudoxische proportionenlehre und ihre spuren bei Aristoteles und Euklid*.
[188] *The Evolution of the Euclidean Elements.*
[189] *Archimedes and the Pre-Euclidean proportion theory.*
[190] *The Beginnings of Greek Mathematics.*

libro. En esta presenta un análisis minucioso (que incorpora una meticulosa aproximación lingüística y semántica a algunos términos) acerca de la relación que la teoría musical desarrollada por los pitagóricos pudo haber tenido con elementos e ideas ligadas a una teoría aritmética o geométrica sobre las proporciones en la época dorada griega.

7. **La razón en las primeras Matemáticas griegas**[191], (Fowler, 1979). Se discute la antifairesis como el aspecto central de una teoría pre-euclidiana de la razón (pero no de la proporción). En los apartados 3 y 4, (titulados "La noción de razón" y "Multiplicación y adición de razones", respectivamente) se alude a algunos objetos de *Elementos*, particularmente a algunas definiciones y proposiciones del Libro V, VI y X, en tanto que allí se identifican algunos vestigios de la teoría de la razón basada en la antifairesis.

8. **El Libro II de los *Elementos* de Euclides y la teoría pre-eudoxiana de la razón**[192], (Fowler, 1980, 1982a). En este artículo, seccionado en dos partes, el autor presenta una interpretación del Libro II de *Elementos* a través de la cual reconoce un interesante nexo de lo tratado en este y la teoría pre-eudoxiana de la razón cuyo elemento central es la antifairesis. Específicamente, muestra cómo las proposiciones del Libro II pueden interpretarse como configuraciones geométricas necesarias para verificar la periodicidad de la antifairesis de unas razones particulares.

9. **La razón antifairética y la proporción eudoxiana**[193], (Fowler, 1981). A propósito de un trabajo de otro autor (Riddell, 1979) sobre algunas propuestas de Eudoxo en Astronomía, discute que la definición eudoxiana de proporción surge naturalmente del proceso clásico de antifairesis o, en otras palabras, que el patrón de comportamiento de los múltiplos de las magnitudes de una razón puede ponerse en correspondencia con la antifairesis de estas.

10. **La razón de Eratóstenes para la oblicuidad de la eclíptica**[194], (Fowler & Rawlins, 1983). Fowler discute unos cálculos efectuados sobre unos ángulos, a través del uso de fracciones continuas en un documento escrito por Rawlins (1982), y propone hacerlos a través del método de antifairesis, método que consideran el adecuado

[191] *Ratio in Early Greek Mathematics.*

[192] *Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan Theory of Ratio*.

[193] *Anthyphairetic Ratio and Eudoxan Proportion*.

[194] *Erathosthenes' Ratio for the Obliquity of the Ecliptic*.

para la interpretación y contexto histórico. Rawlins le responde señalando que los dos métodos empleados, por uno y otro, son en esencia el mismo.

11. **Sobre la posibilidad de una teoría pre-euclidiana de la proporción**[195], (Larsen, 1984). El autor exhibe una reconstrucción de la teoría pre-euclidiana de la proporción, como lo sugirió Oskar Becker (1933), basada en el algoritmo de Euclides. El principal problema que una reconstrucción tal tiene es satisfacer el teorema de las proporciones alternantes o la proposición V. 16 de *Elementos*. En el artículo se establece de manera simple el problema y la demostración, la cual parece descansar en una técnica de notación moderna tan densa, que es difícil creer que se haya desarrollado antes de Euclides y Eudoxo.

12. **La proporción y la Historia de las Matemáticas**, (Santiago Fernández Fernández, 1988). El autor presenta la "teoría de las mediedades" como teoría de las proporciones trabajada por los pitagóricos. Refiere las medias aritmética, geométrica y armónica como tres de tales mediedades y señala que los pitagóricos y neo-pitagóricos encontraron un esquema general de proporción que contiene las tres medias como casos particulares, pero que involucra otros casos.

13. **De exhaución a cortaduras: primeras etapas de la teoría griega de las proporciones**, (Knorr, 1992). Discute dos preguntas a saber: ¿Cuáles son las diferencias que distinguieron la teoría de Eudoxo, de su presentación euclidiana? y ¿Cómo se desarrolló la forma euclidiana de la teoría, a partir de su forma eudoxiana anterior? Argumenta que Eudoxo desarrollo una técnica de demostración (el método de exhaución), que se basa en el razonamiento indirecto, la construcción de figuras auxiliares mediante la bisección continua y la manipulación de desigualdades. Sostiene que con algunas modificaciones menores, esta técnica lleva a las definiciones de la teoría euclidiana de las proporciones.

14. **Una teoría pre-euclidiana de las proporciones**[196], (Thorup, 1992). Presenta una teoría alterna de las proporciones, construida con base en la idea de antifairesis y en una interpretación muy simple de la misma; con ello no intenta mostrar que tal teoría fuese la efectivamente existente entre los matemáticos antecesores a Eudoxo; más bien, procura mostrar que ninguna parte de una teoría se puede excluir por su simple conexión con una teoría o notación moderna. Así, demuestra algunas

[195] *On the Possibility of a Pre-Euclidean Theory of Proportions.*
[196] *A Pre-Euclidian Theory of Proportions.*

propiedades que tienen su dual en la teoría euclidiana de la proporción del Libro V de *Elementos*.

15. **La proporcionalidad de las magnitudes en la doctrina aristotélica de la naturaleza**[197], (Caveing, 1994). Se discuten algunos apartes de *La Física* de Aristóteles para analizar la manera en que las Matemáticas se usan en ese trabajo; particularmente se estudia la noción de proporcionalidad. Se sostiene que las ideas de velocidad y fuerza no fueron tratadas exactamente como magnitudes, a partir de lo cual se sigue que algunas interpretaciones modernas del trabajo aristotélico son erróneas o inexactas.

16. **Estrategias para el cambio conceptual: Razón y proporción en las Matemáticas clásicas griegas**[198], (Rusnock & Thagard, 1995). En este artículo se usan las estrategias formuladas por Lindley Darden (1991) para la resolución de anomalías, para analizar los acontecimientos en las matemáticas griegas sucedidos después del descubrimiento de los inconmensurables, en relación con los conceptos de razón y proporción. El análisis muestra que el desarrollo de las Matemáticas puede tener mucho en común con el de las Ciencias Naturales. Se presenta así un breve bosquejo del esquema de Darden para la resolución de anomalías, seguida de una discusión del trasfondo histórico del descubrimiento de los inconmensurables. Entonces se presenta un resumen esquemático de las tácticas de solución de la anomalía suscitada por el descubrimiento de la inconmensurabilidad y se reportan las teorías de razón y proporción, basadas en la antifairesis y la euclidiana, como tácticas para afrontar la anomalía.

17. **Números pitagóricos lado-diagonal**[199], (Filep, 1999). Los pitagóricos descubrieron que la razón de la diagonal (diámetro) y el lado del cuadrado no se podían expresar como la razón de dos naturales positivos lo cual significa en lenguaje moderno que esta no es un número racional. Tal inconmensurabilidad tuvo un gran efecto sobre la Filosofía y Matemáticas griegas. Muchos artículos se refieren a ello y abordan su impacto, pero relativamente pocos abordan la aproximación de la razón en cuestión. Ni siquiera lo hace *Elementos* de Euclides, obra puramente teórica que abandonó los métodos de cálculo. El propósito del artículo es analizar las fuentes y la literatura acerca de este problema y dar una nueva explicación (esperanzadamente

[197] *La proportionnalité des grandeurs dans la doctrine de la nature d'Aristote.*
[198] *Strategies for Conceptual Change: Ratio and Proportion in Classical Greek Mathematics*.
[199] *Pythagorean Side and Diagonal Numbers*.

satisfactoria) del método de aproximación pitagórica, es decir, de sus así llamados números lado y diagonal (diámetro).

18. **Las Matemáticas de la Academia de Platón**[200], (Fowler, 1999). En la primera parte de este libro, el autor presenta algunas nuevas interpretaciones de la idea de razón en las primeras matemáticas griegas y las ilustra en discusiones detalladas de varios textos; particularmente aborda el estudio de la teoría antifairética de la razón. La segunda parte, se centra en las fuentes mismas y ofrece una mirada crítica al conocimiento sobre la Academia de Platón, a las fuentes de los *Elementos* de Euclides, y la comprensión de las primeras matemáticas griegas. En la parte final contrasta algunas de las evidencias de la antigüedad temprana y tardía, para luego dar una explicación histórica, que comienza en el siglo XVII, de la teoría moderna de las fracciones continuas, la cual subyace a la reconstrucción de las primeras matemáticas griega.

19. **Eudoxo y la Matemática**, (Mederos Martín, 2000). El autor hace un seguimiento de las huellas de las ideas de razón y proporción, a través de un somero recorrido por varias manifestaciones culturales griegas que se desarrollaron en los siglos anteriores a la aparición de *Elementos* de Euclides. Así refiere citas o ejemplos de la Arquitectura, la Medicina y la Música; asimismo examina la antifairesis. Además, resalta que los objetos de la Geometría junto con la proporción, como método para explicar la relación entre las partes y el todo, constituyen la vía para la obtención de conocimiento cierto, es decir, la vía de la verdad. Reseña el surgimiento de la inconmensurabilidad y el trabajo de Eudoxo, haciendo un análisis de algunas de las definiciones del Libro V de *Elementos* y de algunas proposiciones que abordan sus desarrollos singulares.

20. **La teoría de la proporción en las Matemáticas griegas**[201], (Filep, 2003). Se estudia tanto la teoría pre-euclidiana de la proporción como la génesis de la definición dada por Eudoxo, la cual, según el autor es la base de la teoría de la proporción para magnitudes geométricas expuesta en el Libro V de *Elementos*. Así se hacen observaciones a la teoría de la proporción y se examina el desarrollo de la teoría griega de la proporción en donde se incluyen tres etapas, que se reflejan en *Elementos* de Euclides, a saber: una etapa pre-antanairesis, una fase pro-

[200] *The Mathematics of Plato' Academy: A New Reconstruction*.
[201] *Proportion Theory in Greek Mathematics*.

antanairesis y una fase de inconmensurabilidad. Adicionalmente, se estudia la génesis de la definición de razones iguales en Eudoxo.

21. **Teorías fantasmas de la proporción pre-eudoxiana**[202], (Saïto, 2003). En este trabajo se propone una visión alternativa a la reconstrucción de Oskar Becker (1933) de la teoría pre-Eudoxiana de la proporción. Allí se señala que ningún documento existente demuestra explícitamente la supuesta alternancia de teorías de la proporción antes del Libro V de *Elementos*. También se sostiene que los Libros V y VI de *Elementos* no son tan completos como una teoría de las proporciones en abstracto, y que se pueden interpretar mejor como un conjunto de proposiciones útiles en Geometría; como argumento esgrime que el Libro V trata únicamente con las proposiciones que son demostrables para todas las magnitudes geométricas (aunque deja de enunciar y demostrar algunas proposiciones posibles), mientras que en el Libro VI se incluyen las que son demostrables para magnitudes específicas. Se deduce entonces que las teorías antiguas, si es que existían, deben haber sido menos completas. El interés vigente en la Geometría por parte de los matemáticos griegos también es visible en algunas expresiones en el Libro VI para la razón y proporción específica utilizada solamente en el contexto geométrico definido. Por tanto, se sugiere que es más fructífero considerar la "teoría" de la proporción antes de Eudoxo como un conjunto de técnicas sobre la proporción que son útiles en la Geometría, y no como el resultado de un esfuerzo consciente para construir un conjunto lógico de proposiciones sobre la base de una definición.

22. **¿Cómo los griegos podrían haber descubierto y aproximar números irracionales?**[203], (Filep, 2004). Se reseña el problema de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado y se propone que los pitagóricos usaron la propiedad recapitulada en la proposición II 10 de *Elementos* para aproximar, a través de números racionales, la razón entre la diagonal y el lado. El autor señala que tanto la inconmensurabilidad como la aproximación pueden proceder del mismo proceso implicado en la proposición citada. Menciona que este enfoque puede ayudar al profesor para formar una idea descriptiva del concepto abstracto de número irracional y especialmente del axioma de Cantor.

[202] *Phantom Theories of pre-Eudoxean Proportion*.
[203] *How the Greeks might have discovered and approximate Irrational Numbers*.

23. **Los dos mayores contribuciones de Eudoxo de Cnido "la teoría de las proporciones y el método de exhausión"**[204], (Bongiovanni, 2005). El autor reseña el descubrimiento de la inconmensurabilidad y algunas consecuencias de este. Describe la propuesta de Eudoxo para trabajar con razones de magnitudes conmensurables e inconmensurables y establece un nexo entre estas y las cortaduras de Dedekind. Adicionalmente, expone el método de exhausión de Eudoxo.

24. **¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo?**, (Jiménez, 2006). Se hace una discusión de la idea de inconmensurabilidad y se asocia con la idea de razón y proporción. Se plantea una conexión entre la inconmensurabilidad y la irracionalidad, y en este sentido se establece un nexo entre los griegos y Dedekind.

25. **Dos rastros de dos etapas de la teoría eudoxiana de la proporción en Aristóteles: un cuento de las definiciones de Aristóteles, con una moral**[205], (Mendell, 2007). Discute la existencia de una teoría pre-euclidiana de la proporción, reportada por Knorr (1978), a través de ubicar en los planteamientos de Aristóteles dos rastros de tal teoría, que por separado son incoherentes, pero que tomados juntos constituyen la evidencia de tal teoría y de la existencia de una técnica general de demostración. Adicionalmente estudia la idea de antanairesis en Aristóteles.

26. **La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. La teoría de la proporción y el método de exhaución**, (González Urbaneja, 2008). El autor discute algunos aspectos matemáticos y filosóficos relacionados con la inconmensurabilidad. Presenta, luego, aspectos de la obra de Eudoxo, centrándose en su aporte de la definición de proporción y en el método de exhausión. Finaliza reseñando algunas consecuencias sobre la naturaleza de la geometría griega.

4.2.2.2 Teoría euclidiana

27. **La conexión entre número y magnitud: un intento de explicar el Libro V de Euclides**[206], (De Morgan, 1836). En este libro, que no alcanza el centenar de páginas y pensado como parte de un curso de Trigonometría, se re-presenta una teoría de las proporciones que retoma la teoría euclidiana de la proporción para magnitudes y se señala cómo esta elabora un discurso matemático en torno a las magnitudes, pero establece relaciones con los números. Para ello utiliza un sistema de notación y

---

[204] *As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido "a teoria das proporções e o método de exaustão".*

[205] *Two Traces of Two-Step Eudoxan Proportion Theory in Aristotle: a Tale of Definitions in Aristotle, with a Moral.*

[206] *The Connexion of number and magnitude: An Attempt to Explain The Fifth Book of Euclid.*

reelabora algunas definiciones; por ejemplo, propone que la razón de A a B es una relación entre las magnitudes de A y B, determinada por la manera en la cual los múltiplos de A se distribuyen entre los múltiplos de B.

28. **El contenido de los Libros V y VI de Euclides**[207], (M. J. M. Hill, 1900). Libro de texto, construido por el autor para hacer más comprensible los Libros V y VI de *Elementos*[208]. En el Prefacio se hacen declaraciones interesantes sobre particularidades del Libro V y se alude a la idea de proporción expresada por De Morgan (1836).

29. **Los trece libros de *Elementos* de Euclides**[209], (Heath, 1908). Se presenta una traducción al Inglés de los libros de *Elementos* y se incluyen comentarios sobre los objetos de la teoría expuesta.

30. **Discurso presidencial sobre la teoría de la proporción**[210], (M. J. M. Hill, 1912a, 1912b). Un artículo (presentado en dos partes) en donde, apoyado en su libro de 1900, discute algunas definiciones y proposiciones del Libro V y presenta su reescritura. Particularmente aborda a profundidad el estudio de las definiciones 3, 4, 5 y 7; para el caso de las proposiciones, establece cuatro grupos temáticos de las mismas (*i.e*., 1, 2, 3, 5 y 6; 4, 7, 11, 12, 15 y 17; 8, 10 y 13; 9, 14, 16 y 18 a 25). Incorpora, además, algunas críticas que se han hecho al Libro V, y precisa su apreciación del Libro como el monumento más noble del intelecto griego.

31. **La teoría de la proporción**[211], (M. J. M. Hill, 1914). Libro de texto[212] donde el autor recapitula su versión de la teoría de la proporción y detalla algunas aplicaciones geométricas y su relación con lo numérico. En su tercera parte, constituida por el capítulo XII, discute y comenta algunos aspectos del Libro V.

32. **Razón, proporción y medida en *Elementos* de Euclides**[213], (Fine, 1917). Este artículo exhibe una breve mirada a algunos apartes de los Libros V, VI, VII y X a través de los cuales se hace una presentación de la teoría euclidiana de la proporción la cual se

[207] *The Contents of the Fifth and Sixth books of Euclid*.

[208] En este sentido el libro constituye un interesante ejemplo de “transposición didáctica” de la teoría euclidiana de la proporción.

[209] *The Thirteen Books of Euclid’s Elements.*

[210] *Presidential Address on the Theory of Proportion.*

[211] *The Theory of Proportion*.

[212] De este libro logramos ubicar dos reseñas (J, 1920; Mathews, 1915).

[213] *Ratio, proportion and Measurement in the Elements of Euclid*.

basa en la idea de proporción sin exigir una definición explícita de razón; a través de esta teoría se aborda el problema de la inconmensurabilidad sin recurrir al problema de la medida ni a los números fraccionarios. La interpretación de la definición V. 5 retoma la propuesta por De Morgan (1836), conocida también como las escalas de múltiplos relativos; no obstante, se establece una relación entre esta definición y los números reales construidos bajo las ideas de Dedekind.

33. **Una explicación crítica de la exposición de Euclides de la teoría de la proporción en el Libro V de *Elementos***[214], (M. J. M. Hill, 1923). En este artículo se presentan de manera resumida algunos de los aspectos discutidos en los trabajos anteriores (M. J. M. Hill, 1900, 1912a, 1912b, 1914).

34. **La mirada lógica y la mirada matemática. Su perspectiva de la teoría de la proporción de Euclides**[215], (M. J. M. Hill, 1928). En el artículo se discute ampliamente una mirada lógica y una mirada matemática sobre la teoría euclidiana de la proporción, específicamente la contenida en el Libro V y particularmente sobre algunas definiciones y proposiciones. La mirada lógica retoma la propuesta de De Morgan (1836) y algunos estudios de otros lógicos que reseñan algunos problemas lógicos; la mirada matemática identifica seis obstáculos para la adquisición de las ideas de Euclides. Se propone entonces una Teoría algebraica de las proporciones (desarrollada en sus anteriores trabajos), la cual soluciona los problemas citados.

35. **Homogeneidad en la teoría de la proporción de Eudoxo**[216], (Mueller, 1970). Discute la interpretación que Aristóteles hace de la teoría de la proporción de Eudoxo, especialmente en lo relativo a la homogeneidad de las magnitudes involucradas. Presenta, además, el análisis de algunas demostraciones de propiedades y de enunciados de algunas propiedades del Libro V de *Elementos*, a través de lo cual evidencia la consideración a un discurso generalizado para la idea de magnitud (como la concibe Aristóteles), y argumenta una alta probabilidad de que Eudoxo haya concebido una teoría de las proporciones sin preocuparse de la homogeneidad de las magnitudes, garantizada de hecho por su concepción de magnitud.

36. **El desarrollo histórico de las magnitudes, las razones y las proporciones**[217], (Berghout, 1974, 1975). Este artículo, compuesto por dos partes, discute algunos

---

[214] *A Critical Account of Euclid's Exposition of the Theory of Proportion in the Fifth Book of the “Elements”.*

[215] *The Logical Eye and the Mathematical Eye. Their Outlook on Euclid's Theory of Proportion.*

[216] *Homogeneity in Eudoxus's Theory of Proportion.*

[217] *The historical development of magnitudes, ratios and proportions*.

asuntos relacionados con las magnitudes, las razones y las proporciones en algunos momentos de la historia. Particularmente presenta una interpretación en términos y notación moderna de parte del Libro V y reelabora así las ideas de magnitud, razón y proporción.

37. **Número y magnitud en las Matemáticas griegas hasta Euclides**[218], (Dhombres, 1978). En el primer capítulo de su libro, aborda la discusión sobre las ideas de número y magnitud en la matemática griega hasta Euclides. Luego de presentar algunas ideas acerca de las Matemáticas para Platón y sobre la doctrina platónica sobre los objetos matemáticos, aborda el análisis del Libro V de *Elementos* de Euclides. Para ello reseña aspectos sobre los manuscritos y sobre el ambiente intelectual de aparición del Libro V. Además discute las definiciones y algunas proposiciones de este, la cuarta proporcional y la duplicación del cubo. Trata también aspectos de los resultados del Libro V reinterpretados en el siglo XX y cuestiona su participación en la construcción de los reales. Aborda también el asunto de la irracionalidad.

38. **Matemáticas eudoxianas y las esferas eudoxianas**[219], (Riddell, 1979). El autor discute los nexos que pudieron haber existido entre el trabajo de Eudoxo sobre Astronomía, particularmente en su modelo de esferas anidadas para recrear el movimiento del Sol, la Luna y cinco planetas, y los desarrollos matemáticos existentes en la primera mitad del siglo IV a. C. (algunos de ellos desarrollados por Eudoxo). Específicamente en la tercera sección del artículo, titulada "Comparación de periodos y la noción de 'razón'", argumenta la manera en que una unidad básica geométrica-cinemática, abstraída de su modelo de esferas anidadas, se articula con una intuición cinemática de la razón, que lleva directamente a las definiciones 4 y 5 del Libro V de *Elementos*.

39. **Una generalización de la sección dorada**[220], (Fowler, 1982b). El autor aborda la construcción que en *Elementos* se realiza de la división de un segmento en extrema y media razón. Posteriormente describe una generalización de tal división (denotada como *nth order extreme and mean ratio* [*noem ratio*]), la define y muestra algunas propiedades, que relaciona con otras que aparecen en *Elementos*. Para finalizar, discute la noción de razón en *Elementos*.

[218] *Nombre et Mesure dans la Mathématique Grecque jusqu'à Euclide*.
[219] *Eudoxan Mathematics and the Eudoxan Spheres.*
[220] *A Generalization of the Golden Section*.

40. **La razón *di isou* (Euclides V, definición 17): definición, utilización y trasmisión**[221], (Aujac, 1986). En este artículo se discute la definición V. 17 (razón por igualdad; *di isou*) tanto en el marco del Libro V, como en otros trabajos de pensadores griegos. Se analiza el uso del término "por igualdad" en Euclides, Aristarco de Samos, Arquímedes, Apolonio de Perga, Papus de Alejandría y Eutocio. Además se examina la trasmisión del texto en: los manuscritos griegos, la tradición indirecta (Herón y Casiodoro) y las traducciones latinas del Árabe. Se proponen nuevas versiones de las definiciones de razón por igualdad.

41. **La herencia epistemológica de Eudoxo de Cnide. Un ensayo de reconstitución**[222], (Gardies, 1988). Libro a través del cual el autor examina detalladamente los aportes de Eudoxo a las matemáticas griegas, especialmente a *Elementos* de Euclides. Atendiendo a los capítulos, el autor trata asuntos referidos a: Aristóteles y Euclides, las implicaciones de la antifairesis, la teoría eudoxiana de las proporciones, las anomalías del Libro V de *Elementos*, algunas concepciones epistemológicas y matemáticas eudoxianas, incomprensiones del siglo XVII, y la herencia eudoxiana en Dedekind.

42. **Eudoxo y Dedekind: Sobre la antigua teoría griega de las razones y su relación con las Matemáticas modernas**[223], (Stein, 1990). En el segundo apartado (titulado "Cantidades y sus razones: Eudoxo") se propone a la razón como una de las tres cantidades trabajadas por Euclides y se discuten algunas definiciones del Libro V. En el tercer apartado se reseña una comparación inicial con la noción de número real en Dedekind. En el cuarto apartado se discuten algunas operaciones sobre/con las razones. En el quinto apartado se discute la continuidad de la recta y el trabajo de Dedekind. Luego se hace un análisis de la evolución de la idea de magnitud y posteriormente se discute la existencia efectiva de una teoría de los reales en los griegos. En el octavo apartado se discute el tratamiento de la razón y la proporción en Arquímedes.

43. **La proposición 14 del Libro V en la economía de *Elementos* de Euclides**[224], (Gardies, 1991). Discute la proposición 14 del Libro V en el marco deductivo de la teoría

[221] *Le rapport* di isou *(Euclide V, définition 17): Définition, utilisation, transmission.*
[222] *L'Héritage Épistémologique D'Eudoxe de Cnide. Un essai de reconstitution.*
[223] *Eudoxos and Dedekind: On the Ancient Greek Theory of Ratios and its Relation to Modern Mathematics*.
[224] *La proposition 14 du livre V dans l'économie des Eléments d'Euclide*.

expuesta en este y en un contexto más general de algunos libros siguientes de *Elementos*.

44. **La definición de proporción de Eudoxio**, (Zubieta, 1991). Presenta la definición de número real, atribuida a Dedekind, como una interpretación de la definición de proporción de Eudoxo. Muestra, además, las demostraciones de dos proposiciones del libro VI de *Elementos* y luego demuestra el Teorema de Tales.

45. **La teoría de las proporciones en los *Elementos* de Euclides** (Martiñón Cejas, 1992). Se hace una exposición de parte de la teoría de la proporcionalidad contenida en el Libro V de *Elementos* y se establecen relaciones con los números reales.

46. **Euclides, Elementos, Libro V**, (Puertas, 1994). Se presenta una traducción al Español de los Libros V a IX de *Elementos*. A nota a pie de página se hacen comentarios históricos sobre los objetos de la teoría expuesta.

47. **Debate. La proposición 14 del Libro V de *Elementos*: una proposición que permaneció como lema local**[225], (Saïto, 1994a). Presenta una reacción al documento de Gardies (1991) y propone una interpretación alterna del lugar en el discurso hipotético-deductivo de la proposición V. 14.

48. **Números, magnitudes, razones y proporciones en los *Elementos* de Euclides: ¿Cómo logró manipularlos?**[226], (Grattan-Guinness, 1996, 1997). A propósito de la discusión sobre la existencia de una álgebra geométrica en *Elementos*, al autor introduce la discusión acerca de la posibilidad de considerar las razones como un tercer tipo de cantidad, adicional a los números y las magnitudes, y reseña aspectos relativos a la definición de razón y proporción, así como a la imposibilidad de asumir la composición de razones como multiplicación y la imposibilidad de multiplicar magnitudes entre sí.

49. **La definición V. 8 en *Elementos* de Euclides**[227], (Vitrac, 1996). En este artículo el autor establece la falta de autenticidad de la definición V. 8 de Euclides y subraya el hecho de que Euclides no utiliza el concepto de "proporción" (analogía) en tanto objeto de segundo orden. Además, examina las consecuencias de esta abstención en

[225] *Débat. Proposition 14 of Book V of the Elements: A proposition that remained a Local Lemma.*
[226] *Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them?*
[227] *La Définition V. 8 des Eléments d'Euclide*.

la historia del texto de las definiciones del Libro V en la antigüedad tardía y la Edad Media.

50. **Ahogamiento por múltiplos. Observaciones sobre el Libro V de *Elementos* de Euclides, con especial énfasis en la proposición 8**[228] , (Acerbi, 2003b). Se examina la expresión de generalidad en algunos segmentos del antiguo corpus matemático. La discusión sobre la generalidad incorporada en un análisis textual compara la tradición directa del quinto libro de *Elementos* de Euclides con la tradición árabe-latina. Se reseña la condición suficiente para una desigualdad de razones y se hace un escrutinio del corpus de demostraciones alternas.

51. **Leyendo a Euclides**, (Levi, 2003). En el tercer capítulo, titulado *El Álgebra geométrica y la teoría de las proporciones*, el autor presenta algunos comentarios sobre el Libro V y reconstruye la teoría de las proporciones sobre la base de una equivalencia-reducida. Además, expone algunos comentarios relativos a algunas de las definiciones del Libro V y establece algunas relaciones con los números reales.

52. **¿Versiones históricas no multiplicativas de la proporcionalidad?**, (Guacaneme, 2015). Se presentan los aspectos esenciales de un minicurso realizado en un evento de la "Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe". Se reseña que la historia de la proporcionalidad brinda la posibilidad de reconocer al menos dos teorías de la proporción (a saber: pre-eudoxiana y euclidiana) que recurren a sendos tratamientos aditivos de las magnitudes (o cantidades) geométricas. El estudio de aspectos centrales de estas dos teorías no solo logra confrontar el saber matemático usual de los profesores e investigadores sobre las ideas de razón, proporción y razonamiento proporcional, sino que además ofrece opciones para un tratamiento curricular radicalmente innovador de la proporcionalidad y abre una novedosa ventana a la investigación sobre el razonamiento proporcional aditivo.

4.2.2.3 La proporción en la época helenística

53. **Pensamiento matemático griego y el origen del Álgebra**[229], (Klein, 1968). En el capítulo 4 de este libro se discute el papel de la teoría de la proporción (aritmética) en el trabajo de Nicómaco, Teón y Domninos.

54. **¿Razón media y extrema en Virgilio?**[230] (Waterhouse, 1972). El autor discute la tesis de Duckworth (1962) que afirma que Virgilio deliberadamente le dio forma a su

[228] *Drowning by Multiples. Remarks on the Fifth Book of Euclid's* Elements*, with Special Emphasis on Prop. 8.*

[229] *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*.

poesía para incorporar la extrema y media razón; para ello recurre a la HM y particularmente a la inconmesurabilidad de las partes obtenidas al dividir un todo en extrema y media razón.

55. **Tratamiento numérico de Herón de Alejandría de la división en media y extrema razón**[231], (Curchin & Fischler, 1981). El propósito del documento es comentar la posibilidad del conocimiento de las razones de Fibonacci en un periodo clásico, específicamente en el trabajo *Métrica* de Herón de Alejandría.

56. **Una interpretación bizantina de Diofanto**[232], (Christianidis, 1998). En el artículo el autor presenta una nueva interpretación, basada en la noción de proporción, de un procedimiento de Diofanto, el cual se aplica a todos los casos de ecuaciones con dos incógnitas solucionadas por Diofanto (250 d.C.). Esta interpretación fue propuesta en primer lugar por Maximus Planudes (1255-1305) en su comentario al problema II 8 de la *Aritmética*.

57. **La Aritmética de Nicómaco de Geresa y sus aplicaciones a los sistemas de proporción**[233], (Kappraff, 2000). Nicómaco de Gerasa se ha ganado una posición de importancia en la historia de las Matemáticas antiguas, debido en gran medida a su *Introducción a la Aritmética*, uno de los pocos documentos supervivientes de la teoría de números griega. El autor discute un par de tablas de enteros que se encuentran en la *Aritmética* y muestra la forma en que conducen a una teoría general de la proporción, incluido el sistema de proporciones musicales desarrollados por los arquitectos del Renacimiento neo-platónico Leon Battista Alberti y Andrea Palladio, el sistema romano de proporciones descrito por Teón de Esmirna, y el Modulor de Le Corbusier.

4.2.2.4 Traducciones árabes y latinas

58. **Las tradiciones textuales árabes de *Elementos* de Euclides**[234], (De Young, 1984). El autor señala que sendos estudios del Libro V y los Libros VII-IX de las versiones árabes de *Elementos* de Euclides indican la necesidad de una revisión de la perspectiva estándar de la tradición euclidiana en el mundo islámico. Reseña que manuscritos recientemente descubiertos muestran que hay dos versiones distintas,

[230] *Extreme and Mean Ratio in Vergil?*
[231] *Hero of Alexandria's Numerical Treatment of Division in Extreme and Mean Ratio and Its Implications.*
[232] *Une interpretation byzantine de Diophante.*
[233] *The Arithmetic of Nicomachus of Gerasa and its Applications to Systems of Proportion.*
[234] *The Arabic textual traditions of Euclid's elements.*

cada una atribuida a Ishaq ibn Hunayn (en la revisión de Thabit ibn Qurrah), aunque la tradición recibida no distingue las dos. Una traducción anónima recién analizada (ahora en Leningrado) parece tener vínculos con la traducción perdida de al-Hajjaj y puede proporcionar información importante para la reconstrucción de las principales características de estas versiones perdidas.

59. **Ishaq ibn Hunayn, Hunayn ibn Ishaq y la tercera traducción árabe de *Elementos* de Euclides**[235], (De Young, 1992). El relato generalmente aceptado de las traducciones árabes de *Elementos* de Euclides se encuentra en la introducción a la traducción al Inglés de Heath de esta obra clásica; si bien este puede parecer complejo, puede ser demasiado simple. Aunque las dos primeras traducciones al árabe, hechas por al-Hajjaj, o bien se perdieron o existen en forma de manuscrito fragmentario, existen numerosos ejemplos de manuscritos de la tercera traducción, hechos por Ishaq Ibn Hunayn y revisado por Thabit Ibn Qurra. Un estudio anterior revela evidencia de que al menos dos versiones distintas de traducción existen entre los manuscritos árabes sobrevivientes. Estos manuscritos son también incompatibles al citar el nombre(s) de los que prepararon la traducción. Este estudio examina los manuscritos árabes disponibles y describe los patrones de adscripción al traductor, tal como aparecen en estos textos. Aunque la evidencia textual es a veces contradictoria y confusa, no parece haber una razón de peso para dudar que Ishaq ibn Hunayn fue el principal, si no el único, traductor involucrado en la creación de la superviviente traducción al árabe de *Elementos* de la cual en la actualidad existe en distintas versiones.

60. **Dos comentarios sobre la definición de Euclides de magnitudes proporcionales**[236], (Vahabzadeh, 1994). La definición de magnitudes proporcionales en el Libro V de *Elementos* de Euclides dio lugar a muchos comentarios. En el artículo se examinan de cerca dos de estos comentarios, uno manifestado por al-Jayyānī (siglo XI) y el otro por Saunderson (siglo XVIII). Tanto al-Jayyānī y Saunderson trataron de defender la definición de Euclides, haciendo explícito lo que Euclides había dado a entender. Se demuestra que los dos autores explican la posición de Euclides de manera casi idéntica.

61. **Al-Khayyâm matemático**[237], (Rashed & Vahabzadeh, 1999). En la segunda parte de este libro, los autores contextualizan y discuten el trabajo de Al-Khayyâm (escrito

---

[235] *Ishaq ibn Hunayn, Hunayn ibn Ishaq, and the third Arabic translation of Euclid's Elements.*
[236] *Two Commentaries on Euclid's Definition of Proportional Magnitudes.*
[237] *Al-Khayyam Mathématicien.*

cerca del año 1077) sobre tres desafíos que identificaba respecto de *Elementos* de Euclides: la teoría de las paralelas, los conceptos de razón y proporcionalidad y la composición de razones.

62. **Ómar Al-Khayyâm y Eutocio: los antecedentes griegos del tercer capítulo del comentario Sobre ciertas premisas problemáticas del Libro de Euclides**[238]**,** (Vitrac, 2000). El autor analiza textos griegos antiguos consagrados a las razones compuestas de razones (Euclides, Nicómaco, Teón de Alejandría, Eutocio ...). Además establece comparaciones con el libro III de al-Khayyâm, relativo a los comentarios sobre las premisas problemáticas de *Elementos* de Euclides. Reporta además un estudio terminológico de "*pêlikotês*" de una razón.

63. **¿Dos comentarios sobre *Elementos* de Euclides? Sobre la relación entre el texto árabe atribuido a al-Nayrīzī y el texto en latín adscrito a Anaritius**[239], (Brentjes, 2001). La autora discute la postura expresada por Busard (1996) respecto de la relación entre dos comentarios a *Elementos* de Euclides atribuidos a al-Nayrīzī (en un texto árabe del año 922) y a Anaritius (en un texto latino de 1187 que traduce el de al-Nayrīzī) en la que cuestiona, y hasta sugiere, la posibilidad de que ambos procedan de autores árabes diferentes. Se defiende la idea que ambos textos proceden del mismo autor y se explican las diferencias entre estos.

64. **Teoría de la razón antifairética en las Matemáticas islámicas medievales**[240], (Hogendijk, 2002). El autor discute en detalle los tratados de tres eruditos musulmanes (al-Māhānī, al-Nayrīzī y 'Umar al-Ḫayyām) sobre una definición alternativa de razón basada en la antifairesis.

65. **Omar Khayyâm y la antifairesis: Estudio del segundo libro de su comentario "Sobre algunas cuestiones premisa del libro de Euclides"**[241], (Vitrac, 2002). El autor presenta un estudio sobre la teoría antifairética de las proporciones. Reseña algunas dificultades del tratamiento euclidiano en el Libro V y problemas textuales en su

[238] *'Umar al Khayyam et Eutocius: Les antécédents grecs du troisième chapitre du commentaire Sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide.*
[239] *Two comments on Euclid's Elements? On the relation between the Arabic text attributed to al-Nayrızı and the Latin text ascribed to Anaritius.*
[240] *Anthyphairetic Ratio Theory in Medieval Islamic Mathematics.*
[241] *'Umar al Khayyâm et l'anthyphérèse: Étude du deuxième Livre de son commentaire «Sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide».*

transmisión y examina las teorías desarrolladas por los comentaristas árabes (al-Mâhânî, an Nairîzî y al-Khayyâm).

66. **Diagramas en la tradición árabe euclidiana: Una evaluación preliminar**[242], (De Young, 2005). El autor señala que recientemente se han descubierto algunos diagramas geométricos atribuidos a al-Hajjaj y que estos ofrecen una nueva visión de la transmisión árabe de *Elementos* de Euclides. A partir del análisis de los textos árabes y latinos, encuentra evidencia indirecta de la existencia de una tradición de diagramas al-Hajjaj. Esta tradición, tomada junto con otras características textuales, ayuda a revelar la influencia de al-Hajjaj, a pesar de que la transmisión de su traducción se ha contaminado con otras tradiciones árabes.

67. **Campanus de Navara y los *Elementos* de Euclides [reseña]**[243], (Høyrup, 2006). Høyrup reseña el libro *Campanus of Novara and Euclid's Elements*, escrito por Busard, a través del cual se ofrece una traducción comentada a la versión de *Elementos* de Campanus.

68. ***Elementos*: Recepción de *Elementos* de Euclides en el mundo islámico**[244], (Brentjes, 2008). Este apartado de una enciclopedia exhibe elementos descriptivos sobre *Elementos* y específicamente sobre la historia de sus traducciones realizadas entre los siglos IX y XIII. Contiene unas ideas acerca del trabajo de algunos árabes en torno a la elaboración de una teoría alterna de la razón y la proporción del Libro V.

4.2.2.5 Adaptaciones de la teoría en la Baja Edad Media y el Renacimiento

69. **Las leyes matemáticas generales que regulan y extienden la proporción universalmente; o bien, un método para comparar magnitudes de cualquier tipo, en todos los grados posibles de crecimiento y decrecimiento. Por James Glenie, A. M. teniente en el Regimiento Real de Artillería**[245], (Glenie, 1777). Breve artículo (8 páginas) que presenta una manera general de trabajar unos asuntos específicos de las razones entre magnitudes geométricas, homogéneas o heterogéneas, aparentemente no trabajados hasta ese momento (siglo XVIII). Particularmente se

[242] *Diagrams in the Arabic Euclidean tradition: A preliminary assessment.*

[243] *Campanus of Novara and Euclid's Elements [Book review].*

[244] *Elements: Reception of Euclid's Elements in the Islamic World.*

[245] *The General Mathematical Laws Which Regulate and Extend Proportion Universally; Or, a Method of Comparing Magnitudes of Any Kind Together, in All the Possible Degrees of Increase and Decrease. By James Glenie, A. M. and Lieutenant in the Royal Regiment of Artillery.*

aborda la composición de razones sin exigir un referente geométrico para los resultados de esta.

70. **Nicolás Oresme y su *De Proportionibus Proportionum***[246], (Grant, 1960). En este artículo se intenta mostrar que el trabajo de Oresme no es solo una aplicación o extensión de las ideas propuestas por Bradwardine, sino que más bien constituye un intento de fundamentación de las ideas usadas por Bradwardine, en relación con la proporcionalidad.

71. **Teoría medieval de la razón versus los medicamentos compuestos en los orígenes de la regla de Bradwardine**[247]**,** (Drake, 1973). En este artículo se presenta una mirada a la manera como en la Edad Media se realiza una "reescritura" de algunas definiciones y proposiciones de la teoría de las proporciones de *Elementos* de Euclides que facilita relacionar los números con las razones. En cierto sentido tal reescritura genera una nueva teoría de las proporciones, la cual, al parecer, permite establecer una relación muy potente entre Matemáticas y Física, que posibilita escribir de manera diferente las relaciones entre magnitudes físicas.

72. **Mengoli sobre las "cuasi proporciones"**[248], (Massa Esteve, 1997). En este artículo la autora examina los tres primeros elementos de la *Geometriae speciosae elementa* (Bologna, 1659) de Pietro Mengoli (1625–1686), probablemente el pupilo más original de Bonaventura Cavalieri (1598–1647). En su trabajo, Mengoli desarrolla un nuevo método para calcular cuadraturas usando una teoría llamada "cuasi proporciones", fundamentada en la teoría de las proporciones presentada en el Libro V de Elementos, para lo cual incluye ideas originales: la razón "cuasi cero", la razón "cuasi infinito" y la razón "cuasi un número". El análisis expuesto demuestra la originalidad del trabajo de Mengoli.

73. **Una cuestión de gran magnitud: el conflicto sobre la aritmetización de los Libros I a VI de *Elementos* de Euclides en las ediciones inglesas de los siglos XVI, XVII y XVIII**[249], (Goldstein, 2000). El autor reseña los conflictos que se advierten en algunas traducciones de los seis primeros libros de *Elementos*, realizadas en los siglos XVI y XVII, pues reconoce que tales ediciones se enfrentaron a la aritmetización de las

[246] *Nicole Oresme and His De Proportionibus Proportionum.*
[247] *Medieval Ratio Theory vs Compound Medicines in the Origins of Bradwardine's Rule.*
[248] *Mengoli on "Quasi Proportions".*
[249] *A Matter of Great Magnitude: The Conflict over Arithmetization in 16th-, 17th-, and 18th-Century English Editions of Euclid's Elements Books I Through VI (1561-1795).*

Matemáticas. Las ediciones de Henry Billingsley, Claude Dechales e Isaac Barrow de los siglos reseñados, prestaron relativamente poca atención a la primacía en Matemáticas. En el siglo XVIII, sin embargo, William Whiston afirmó que las representaciones algebraicas, las demostraciones y las proporciones eran más convenientes que, incluso la tan rigurosa Geometría. El Álgebra de John Playfair adaptó *Elementos* a las audiencias modernas. Edmund Scarburgh, John Keill, Edmund Stone y Robert Simson, sin embargo, atacaron las ediciones por incluir alteraciones. Algunos editores intentaron recuperar el texto original de Euclides. La mayoría de los pasajes sobre este tema aparecieron en los prefacios de los editores al Libro II y Libro V, o de sus notas.

74. **La oscuridad de los equimúltiplos**[250], (Palmieri, 2001). En este trabajo el autor analiza algunos aspectos de la relación entre los estudios de Clavius y Galileo sobre la teoría euclidiana de las proporciones y específicamente sobre sus elaboraciones teóricas para evitar el uso de la idea de equimúltiplo como fundamento de la teoría euclidiana. Así, analiza la interpretación que hace Clavius de las definiciones euclidianas de proporcionalidad y el modelo de equivalencia que propone, y esboza la dependencia parcial del modelo usado por Galileo de este modelo. Luego analiza la reforma de Galileo a la teoría de las proporciones y reseña las dificultades que Galileo encontró cuando aplicó la técnica de los equimúltiplos fuera del dominio de las matemáticas puras.

75. **Modelos mentales en la primera matematización de la naturaleza de Galileo**[251], (Palmieri, 2003). El artículo explora los mecanismos cognitivos subyacentes en la matematización de la naturaleza desarrollada por Galileo; para ello se adopta una perspectiva de historia cognitiva la cual descansa sobre la teoría de los modelos mentales. En esta dirección se reseña la aceptación de Galileo de la teoría euclidiana de la proporción, y de su base en la idea de equimúltiplos, como un lenguaje para la matematización de la Física.

76. **Matemáticas y Filosofía en las "Preguntas" de Blaise de Parma sobre el "Tratado sobre las razones" de Thomas Bradwardine**[252], (Biard, 2003).[253] El autor presenta la

[250] *The Obscurity of the Equimultiples.*
[251] *Mental models in Galileo's early mathematization of nature.*
[252] *Mathématiques et philosophie dans les "Questions" de Blaise de Parme sur le "Traité des rapports" de Thomas Bradwardine.*

manera en que, para enseñar matemáticas en sus clases de Filosofía Natural, Blaise de Parma utiliza el *Tractatus proportionum seu de proportionibus velocitatum in motibus* (o Tratado sobre las razones) escrito en 1328 por Thomas Bradwardine y, específicamente sus comentarios, en forma de preguntas, a dicho trabajo. Se reseña que de Parma no es el primero en emplear esta forma típica medieval de estudiar las Matemáticas, la cual parece ir en contravía al ideal deductivo euclidiano; además se destaca que esta forma, además de permitir una manera pedagógica y de refutar algunos argumentos, conlleva un tratamiento combinado de perspectivas físicas y matemáticas, así como a realizar consideraciones epistemológicas sobre el estado de los objetos matemáticos como parte del tratamiento matemático de los mismos.

77. **La irracionalidad de la diagonal y el lado de un cuadrado en las “Preguntas” de Blaise de Parma sobre el “Tratado sobre las razones” de Bradwardine**[254], (Rommevaux, 2003). Como parte de sus cuestiones sobre el *Tratado sobre las razones* de Bradwardine, Blaise de Parma examina la irracionalidad de la razón de la diagonal y el lado del cuadrado. Tal razón fue discutida por Bradwardine para ilustrar su definición de la denominación de razones irracionales y la cuestión de la irracionalidad de esta razón la discutió Nicolás Oresme en sus *Questions sur la géométrie d'Euclide*. La autora del artículo aborda la manera en que Blaise de Parma y Nicolás Oresme tratan estas cuestiones en el marco estricto de la *questio* típicamente medieval. Luego examina el papel desempeñado por el concepto de denominación de razón irracional y reflexiona sobre la concepción de irracionalidad apuntalada en estos textos.

78. **El movimiento del punto de vista de la causa y el movimiento desde el punto de vista del efecto en el “Tratado sobre las razones” de Albert de Sajonia**[255], (Celeyrette & Mazet, 2003). El *Tratado sobre razones* de Albert de Sajonia, escrito en la década de 1350, tuvo considerable éxito en el Renacimiento; el mismo constituye un testimonio notable de la difusión en París de textos de la Universidad de Oxford dedicados al movimiento, bajo perspectivas físico-matemáticas. Dicho tratado toma prestadas ideas tanto del libro homónimo de Bradwardine y de los de Heytesbury y

[253] El volumen 56, número 2 de la revista *Revue d'histoire des sciences* se dedicó a la recepción de *Elementos* de Euclides en la Edad Media y el Renacimiento. Este y los tres artículos reseñados en los siguientes numerales corresponden a aquellos en donde hay alusiones o tratamientos relacionados con la historia de las proporciones.

[254] *L'irrationalité de la diagonale et du côté d'un même carré dans les "Questions" de Blaise de Parme sur le "Traité des rapports" de Bradwardine.*

[255] *Le mouvement du point de vue de la cause et le mouvement du point de vue de l'effet dans le "Traité des rapports" d'Albert de Saxe.*

Swineshead, como de la Física de Nicolas Oresme. Este tratado, que debe compararse con *Questions sur la Physique* del mismo Albert, muestra que en ese momento en París, junto a la física de Buridan, se desarrolló un trabajo físico matemático inspirado en los trabajos ingleses.

79. **La teoría euclidiana de las proporciones en la "*Geometriae speciosae elementa*" (1659) de Pietro Mengoli**[256], (Massa Esteve, 2003). En este artículo la autora muestra cómo Pietro Mengoli (1625-1686) en su *Geometriae speciosae elementa* (1659) hace uso de la teoría de las proporciones de Euclides. En efecto Mengoli desarrolla nuevas teorías, la teoría de las "cuasi proporciones" y la teoría de las razones logarítmicas, en las cuales involucra argumentos similares a los utilizados por Euclides en la elaboración de la teoría de las proporciones en el Libro V de *Elementos*. El texto revela un análisis detallado de la construcción de la teoría de las razones logarítmicas, fundadas en la idea original de la elevación de una razón. Además, expone las razones que llevaron a Mengoli a utilizar la teoría de Euclides como la base de sus propias teorías.

80. **Preguntas sobre el *Tractatum Proportionum* del Señor Thomas Bradwardine por Blaise de Parma [reseña]**[257], (Sylla, 2007). Reseña el libro *Questiones circa Tractatum Proportionum Magistri Thome Braduardini* (de Parme, 2005). En este se alude a que Blaise de Parma enseñó Matemáticas, Filosofía Natural y Lógica en algunas universidades del norte de Italia a finales de los siglos XIV y XV. En sus consultas acerca del tratamiento de las razones de Thomas Bradwardine, examina los problemas que plantea la aplicación de la teoría de las proporciones en el estudio del movimiento, un ejemplo emblemático de la aplicación de las Matemáticas a la Filosofía Natural en la Baja Edad Media. De este modo, analiza y critica ciertos supuestos de la Física aristotélica y herramientas matemáticas sofisticadas desarrolladas por Thomas Bradwardine y Nicole Oresme, y rechaza el principio del movimiento, llamada "ley de Bradwardine", comúnmente aceptada desde el siglo XIV. Muchos de sus argumentos se tomarán y discutirán hasta el siglo XVI.

81. **La regla de Bradwardine: ¿una ley matemática?**[258], (Celeyrette, 2008). Se presentan y caracterizan algunos de los trabajos que discuten la "ley de Bradwardine", la cual

[256] *La théorie euclidienne des proportions dans les "Geometriæ speciosæ elementa" (1659) de Pietro Mengoli.*
[257] *Questiones circa Tractatum Proportionum Magistri Thome Braduardini By Blaise de Parme [Book review].*
[258] *Bradwardine's Rule: A Mathematical Law?*

se expresa en contravía a la visión aristotélica respecto a la velocidad. Para ello se discuten los orígenes aristotélicos de la ley, se ubica el *Tractatus de proportionibus* como la obra que reformula la idea de razón y algunas de sus propiedades y se exponen ideas centrales de algunos textos que discuten la propuesta de Bradwardine y la postura aristotélica, varios de los cuales centran su atención en la comprensión de la idea de razón.

82. **El origen y destino del *De Proportionibus Velocitatum in Motibus* de Thomas Bradwardine en relación con la Historia de las Matemáticas**[259], (Sylla, 2008). En este trabajo, la autora muestra cómo se entrelazan la introducción y el destino de la regla dinámica de Bradwardine con la HM, en particular, con las ideas acerca de las proporciones, proporcionalidades, y, más tarde, razones. Thomas Bradwardine, eligió excluir la composición de razones a través de la multiplicación de denominaciones a fin de presentar una teoría matemática consistente en la que su regla para la dinámica apareció matemáticamente muy simple, derivada de la versión de *Elementos* de Euclides, traducida por Campanus. Las pocas personas que rechazaron la propuesta de Bradwardine en los doscientos años después de que se propuso, rechazaron su fundamentación matemática, en lugar de encontrarla incompatible con la experiencia física.

83. **La teoría de las proporciones en el siglo XV: entre Filología y Matemáticas**[260], (Giusti, 2008). En este capítulo el autor centra la mirada en el Libro V de *Elementos*, y especialmente en las definiciones de este, en las ediciones publicadas en el siglo XVI, en al menos tres periodos bien definidos. Exhibe las transformaciones de estas en algunas de las tales ediciones.

84. **Un punto de vista proporcional: Las Matemáticas de James Glenie (1750-1817)**[261], (Craik, 2009). Se presentan aspectos de la obra matemática de James Glenie quien se desempeñó como como asistente en Matemáticas en la Universidad de St. Andrews, en Escocia. Sus logros matemáticos, subestimados por algunos historiadores, estaban profundamente arraigados en la Geometría Euclidiana y su propia teoría generalizada de la proporción (Glenie, 1777), de la cual esboza algunos de sus elementos. Entre ellos se encuentran muchas nuevas construcciones y

[259] *The Origin and Fate of Thomas Bradwardine's De Proportionibus Velocitatum in Motibus in Relation to the History of Mathematics.*
[260] *La théorie des proportions au XVI^e siècle: entre philologie et mathématiques*.
[261] *A proportional view: The mathematics of James Glenie (1750-1817).*

demostraciones geométricas, una nueva demostración del Teorema del binomio y un enfoque alternativo para el Cálculo diferencial.

85. **Algunas concepciones de la teoría de las proporciones en los tratados de la segunda mitad del siglo XVII**[262], (Lamandé, 2013). Este artículo examina cómo se explicó la teoría de proporciones durante la segunda mitad del siglo XVII en las obras de Andreas Tacquet, Antoine Arnauld, Ignace Gaston Pardies, Bernard Lamy y Jacques Rohault. Estos cinco autores tenían muy diferentes concepciones sobre este tema y muestran que este asunto no fue olvidado, incluso después de *La Géométrie* de Descartes; asimismo en sus trabajos se evidencia la progresiva transformación de los objetos matemáticos. Mientras Tacquet profundizó en el pensamiento euclidiano, los demás dejaron de tomar el modelo euclidiano como paradigmático y trataron de cambiar el orden de *Elementos* y establecer el Libro V de Euclides de nuevas maneras. Esta multiplicidad de enfoques pone de relieve tanto la vitalidad de las reflexiones como la dificultad para desarrollar una nueva ontología de las Matemáticas. Algunos de ellos, sin embargo, abrieron nuevas perspectivas que iban a florecer solo mucho más tarde. Se observa también el lugar cada vez más importante del Álgebra con el paso del tiempo.

86. **Un tratado sobre la proporción en la tradición de Thomas Bradwardine: El *De Proportionibus libri duo* (1528) de Jean Fernel**[263], (Rommevaux, 2013). La autora discute algunos elementos tratados en el libro *De proportionibus libri duo* publicado en 1528 en París por el médico francés Jean Fernel. Este tratado pertenece a la tradición de textos que sobre la proporción siguen el publicado por Bradwardine en 1328, titulado *Tractatus de proportionibus seu de proportionibus velocitatum en motibus*. En el primer libro, Fernel presentó una teoría tradicional de las razones, en la que incluye novedades sobre la nominación de las razones, sobre las fracciones y sobre las razones irracionales. El segundo libro está dedicado a una teoría de la relación de proporciones.

87. **Razones y variaciones. El papel de la teoría de proporciones en el estudio galileano del movimiento**, (Álvarez Jiménez, s.f). El autor discute el uso que de la teoría euclidiana de la proporción Galileo exhibe en una de sus obras en la que asume como objeto de estudio el movimiento, en sus diferentes clases.

[262] *Quelques conceptions de la théorie des proportions dans des traités de la seconde moitié du dix-septième siècle.*

[263] *A treatise on proportion in the tradition of Thomas Bradwardine: The De proportionibus libri duo (1528) of Jean Fernel.*

4.2.2.6 Influencia de la teoría de la proporción en la construcción de los reales

88. **La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind**, (Corry, 1994). El artículo expone y discute los argumentos en pro y en contra de la conocida tesis histórica, según la cual la teoría de las proporciones de Eudoxio anticipó plenamente teorías modernas del número irracional tales como las de Dedekind y Weierstrass. Se dedica especial énfasis a la teoría de cortaduras de Dedekind y a la interpretación que el propio Dedekind propuso respecto a la conexión entre su teoría y la de Eudoxio. Dicha interpretación ilumina interesantes aspectos de esta disputa historiográfica, así como de la matemática del siglo XIX.

89. **Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor?**, (Guacaneme, 2012d). Desde la época dorada griega, la teoría euclidiana de la proporción, expresada en el Libro V de Elementos, se constituyó en esquema para la formulación de relaciones entre magnitudes, sin interesar si estas eran o no conmensurables y, en consecuencia, sin recurrir a los valores numéricos de sus medidas para establecer tanto las razones entre magnitudes, como la proporción entre razones. Cerca de veinte siglos después, esta manera de tratamiento independiente de una estrategia aritmética parece ser precisa y, paradójicamente, el acicate y guía para la constitución del conjunto de números reales. Los historiadores de las Matemáticas han discutido la relación entre estas teorías y conjeturamos que el estudio de sus posturas puede traer beneficios a la educación del profesor de Matemáticas. Estos beneficios se refieren, entre otros aspectos, a visiones alternas de la actividad matemática de estudio de una teoría y a la ampliación de la mirada sobre los objetos matemáticos implicados en las teorías.

4.2.2.7 Otros

90. **Razón - La teoría de las proporciones de la antigüedad al siglo XIX: Trento, Italia, 9 a 13 de enero de 1989**[264], (Dhombres & Giusti, 1989). Se hace una invitación a un coloquio titulado “Razón - La teoría de las proporciones de la antigüedad al siglo XIX”; se señalan ocho temas que serán abordados en el evento: 1. La teoría de las proporciones en la antigüedad clásica 2. La ciencia árabe y el Libro V de *Elementos*. 3. Traducciones y comentarios del medioevo. 4. Las ediciones de *Elementos* en el siglo XVI. 5. Las reformas a Euclides: críticas y proposiciones de reforma. 6. La teoría de las proporciones como lenguaje de la ciencia nueva. 7. Número y magnitud: del

[264] *Ratio - La theorie des proportions de l'antiquite au XIXeme siecle: Trento, Italia, 9-13 Janvier 1989.*

rigor de la Geometría a la generalidad del Álgebra. 8. La investigación sobre el cuerpo euclidiano: las ediciones de *Elementos* en el siglo XIX.

91. **Coloquio: Razón - La teoría de las proporciones de la antigüedad al siglo XIX: Centro Internacional para la Investigación Matemática, Trento, 9 a 13 de enero de 1989**[265], (Dhombres & Giusti, 1990). Se reportan los participantes del coloquio citado antes (Busard, Cassinet, Dhombres, di Stefano, Djebbar, Fowler, Freguglia, Galuzzi, Gardies, Garibaldi, Guisti, Griffiths, Knorr, Mairrù, Napolitani, Picutti, y de Grave) y los títulos de sus intervenciones.

92. **La teoría de las proporciones de Palladio y el Segundo libro del "*Quattro Libri dell'Architettura*"**[266], (Mitrović & Djordjević, 1990). Se presenta una explicación de las razones arquitectónicas tenidas en cuenta en la construcción de palacios considerados joyas arquitectónicas.

93. **Concepciones erróneas sobre la razón de oro**[267], (Markowsky, 1992). Se presentan algunos aspectos matemáticos sobre la razón dorada y varias concepciones e ideas equivocadas, pero ampliamente difundidas, sobre esta.

94. **De la teoría de las proporciones a la teoría de números reales**[268], (Cousquer, 1994). Inicialmente se discute el tratamiento de los reales en la escuela. Se hace entonces una mirada a elementos de la historia, comenzando con el descubrimiento de la irracionalidad y la naturaleza del infinito; luego se estudia la medida de las cantidades en Grecia y específicamente en la obra de Euclides, centrando la atención en la teoría de las relaciones entre las magnitudes de Eudoxo y Euclides y las aproximaciones a los irracionales a partir de ello. Se discute el trabajo de Proclo y las contribuciones de los matemáticos árabes referidas a la teoría de las proporciones, el desarrollo del Álgebra y la invención de la coma decimal. En seguida se hace una mirada al proceso de aritmetización de las razones. Al final se presentan algunas opciones para el trabajo escolar.

[265] *Colloque: Ratio--La theorie des proportions de l'Antiquite au XIXeme siecle: Centro Internazionale per la Ricerca Matematica, Trento, 9-13 janvier 1989.*

[266] *Palladio's Theory of Proportions and the Second Book of the "Quattro Libri dell'Architettura".*

[267] *Misconceptions about the Golden Ratio.*

[268] *De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels.*

95. **Triángulos pitagóricos y proporciones musicales**[269], (Euser, 2000). El autor explora la relación entre las proporciones musicales y los triángulos pitagóricos.

96. **Los problemas perdidos de Gersónides – Una edición crítica**[270], (Simonson, 2000b, 2000c). A través de un artículo, presentado en dos partes, el autor muestra y analiza la amplia sección de problemas de proporciones y algoritmos para el cálculo, que aparecen como parte del trabajo titulado *Maaseh Hoshev (The Art of Calculation)* (1321) del matemático Levi ben Gershon, mejor conocido como Gersónides.

97. **Razón y proporcionalidad en la Geometría euclídea**, (Yuste, 2004). La autora presenta un estudio sobre aspectos de la teoría euclidiana de la proporcionalidad, reseñando algunos antecedentes de la misma y algunos episodios posteriores.

98. **Una investigación a profundidad de la razón divina**[271], (Fett, 2006). Este artículo investiga cómo la razón áurea ha influenciado civilizaciones a lo largo de la historia y, por su prevalencia, ha intrigado a los matemáticos y a otros.

99. **Kant sobre la Aritmética, el Álgebra y la Teoría de las proporciones**[272], (Sutherland, 2006). El autor procura dar una interpretación de la Filosofía de las Matemáticas de Kant. Advierte que en algunas interpretaciones no se ha tenido muy en cuenta la importancia de la teoría de magnitudes de Kant ni la manera como la teoría eudoxiana de las proporciones, presentada en *Elementos*, la influenció. Reseña que la teoría eudoxiana trata con magnitudes continuas, en particular con magnitudes espaciales, pero que no es claro cómo esta se relaciona con las magnitudes discretas y por tanto se cuestiona la incidencia en el tratamiento que Kant hace de las intuiciones aritméticas y geométricas. En este sentido, el autor inicialmente hace una revisión de la concepción griega de número y de la teoría de las proporciones. Posteriormente, hace una explicación de Kant sobre la posibilidad de cognición de las magnitudes y números. En seguida aborda la relación entre Aritmética, Álgebra y magnitudes, entre Álgebra y la teoría de las proporciones, y entre Aritmética y número.

[269] *Pythagorean Triangles and Musical Proportions.*
[270] *The missing problems of Gersonides—A critical edition.*
[271] *An In-depth Investigation of the Divine Ratio.*
[272] *Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportions.*

100. **La teoría de las razones de Augusto de Morgan**[273], (Gandon, 2009). El autor presenta un análisis sobre la interpretación que Augusto De Morgan (1836) hace de la teoría euclidiana de proporciones. Muestra así que la lectura que hace De Morgan del Libro V de *Elementos* corresponde al marco de sus prácticas matemáticas y relata la interpretación de su nueva lógica de relaciones. Así, se muestra una interconexión entre el trabajo euclidiano y el del lógico Inglés.

101. **La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización**, (Oller Marcén & Gairín Sallán, 2013). En el artículo se presenta una revisión histórica de los conceptos de razón y proporción relacionados con la proporcionalidad aritmética.

4.2.3 Síntesis de asuntos abordados por la historia de la teoría euclidiana de la proporción

Una vez listados y reseñados brevemente los documentos que versan sobre la historia de la proporción, hemos creído conveniente elaborar un listado de temáticas que caracterizarían la historia de la teoría euclidiana de la proporción.

Los documentos relacionados bajo el hito que titulamos **teorías pre-euclidianas** refieren a distintos asuntos que, bajo una consideración cronológica, pueden presentarse así:

i. **La existencia de una teoría pitagórica de la proporción**. Bajo este asunto, distinguimos la primera parte de un trabajo (Knorr, 1978) que alude a la existencia de una teoría restringida a las magnitudes conmensurables. Asimismo ubicamos al menos dos trabajos sobre el origen de las medias, mediedades o proporciones aritméticas, geométricas y armónicas (Cajori, 1928; Santiago Fernández Fernández, 1988) y junto a estos el trabajo que discute la procedencia, desde la teoría musical pitagórica, de algunas ideas relacionadas con la razón y la proporción (Szabó, 1978).

ii. **La emergencia del problema de la inconmensurabilidad de magnitudes**. Este asunto es abordado por varios autores (Bongiovanni, 2005; Filep, 1999, 2004; Fowler, 1999; González Urbaneja, 2008; Jiménez, 2006; Knorr, 1975; Mederos Martín, 2000; Rusnock & Thagard, 1995).

[273] *La théorie des rapports chez Augustus de Morgan*.

iii. **La existencia de una "teoría" de la razón basada en la antanairesis o antifairesis**. Sobre este asunto se identifica una variedad de aproximaciones. Algunos autores discuten la teoría misma (Fowler, 1999; Knorr, 1975, 1978; Mederos Martín, 2000; Rusnock & Thagard, 1995) o la reconstrucción de una teoría de la proporción basada en esta (Becker, 1933; Larsen, 1984; Thorup, 1992), otros tratan la relación de esta teoría con otras disciplinas científicas desarrolladas en el contexto griego clásico (*v.g.*, Astronomía (Fowler & Rawlins, 1983), Física (Caveing, 1994) o en la obra de Aristóteles (Mendell, 2007)). También se identifican documentos que abordan la relación entre tal teoría y el contenido de los *Elementos*; por ejemplo, se estudian los vestigios de la teoría de la razón basada en la antifairesis encontrados en los *Elementos* (Filep, 2003; Fowler, 1979), la presencia en el Libro II de *Elementos* de la teoría de la razón basada en la antifairesis (Fowler, 1980, 1982a, 1999), o la relación entre la antanairesis y la Definición V. 5 de *Elementos*. (Evans, 1927; Filep, 2003; Fowler, 1981).

iv. **La existencia de una "teoría" de la razón basada en el principio de la bisección**. Este asunto es tratado minuciosamente en uno de los documentos (Knorr, 1978) y en otro del mismo autor (Knorr, 1992).

v. **La concreción, en el Libro V de *Elementos*, de una teoría de la proporción para las razones entre magnitudes geométricas**. Bajo este asunto se identifican al menos cuatro temáticas: La discusión sobre la teoría de la proporción como estrategia para afrontar la anomalía producida por la existencia de magnitudes inconmensurables (Bongiovanni, 2005; Filep, 2003; González Urbaneja, 2008; Jiménez, 2006; Rusnock & Thagard, 1995), el estudio de algunos elementos de la teoría euclidiana de la proporción presentada en el Libro V (González Urbaneja, 2008; Jiménez, 2006; Mederos Martín, 2000), los orígenes extra-matemáticos de la Definición V. 5 (Riddell, 1979) y los nexos entre la teoría euclidiana de la proporción y los números reales. (Bongiovanni, 2005; Jiménez, 2006).

Adicionalmente, en el conjunto de documentos en cuestión, identificamos:

vi. **El tratamiento de asuntos de un orden meta-matemático o, si se prefiere, histórico-epistemológico**. Dos asuntos se ubican acá, a saber: la discusión sobre las proporciones como elemento fundamental, al lado de los objetos de la Geometría, como vía para la obtención de conocimiento cierto (Mederos Martín, 2000); y, la discusión acerca de si la teoría de la razón basada en la antanairesis y la teoría de la proporción euclidiana, fueron efectivamente teorías, en un sentido fuerte (Saïto, 2003).

Los documentos clasificados bajo el hito que titulamos la **teoría euclidiana** abordan distintos objetos, y los hemos agrupado temáticamente como sigue:

vii. **Condiciones de emergencia del Libro V.** Uno de los documentos aborda el ambiente intelectual de surgimiento del Libro V (Dhombres, 1978). Otro autor (Riddell, 1979) discute posibles nexos u orígenes, extra-matemáticos, de la Definición V. 5. Uno más examina en detalle el aporte de Eudoxo y de sus concepciones epistemológicas y matemáticas, a la teoría del Libro V (Gardies, 1988).

viii. **Re-escritura de la teoría euclidiana**. Tres de los libros referidos (De Morgan, 1836; M. J. M. Hill, 1900, 1914) constituyen intentos de re-escritura de la teoría euclidiana de la proporción, con la intención de que su contenido sea más comprensible para quien la estudie; las propuestas incorporan notaciones modernas y la idea de escalas de múltiplos relativos, propuesta por De Morgan. Estos trabajos son acompañados también, con la misma intención didáctica, por tres artículos (M. J. M. Hill, 1912a, 1912b, 1923, 1928), uno de ellos publicado en dos partes. Adicionalmente, encontramos un artículo (escrito en dos partes) que procura una reescritura de la teoría del Libro V, con notación y conceptos modernos (Berghout, 1974, 1975).

ix. **Traducción comentada de la teoría euclidiana**. Dos traducciones al Inglés y Español, respectivamente, (Heath, 1908; Puertas, 1994), incluyen comentarios históricos sobre el contenido del Libro V de *Elementos*.

x. **Estudio de algunos apartes del Libro V**. Algunos autores discuten las definiciones centrales del Libro V y algunas proposiciones del mismo (Dhombres, 1978; Fine, 1917; Grattan-Guinness, 1996, 1997; Levi, 2003; Stein, 1990; Zubieta, 1991). Otros documentos abordan el estudio de un aspecto específico, como la homogeneidad de las magnitudes implicadas en el Libro V (Mueller, 1970), la Definición V. 5 y el tipo de pensamiento matemático involucrado (Guacaneme, 2015), la Definición V. 8 (Vitrac, 1996), la Definición V. 17 (razón por igualdad) (Aujac, 1986), la proposición 8, como hito de la generalidad en Matemáticas (Acerbi, 2003b), o la proposición 14 (Gardies, 1991; Saïto, 1994a).

En los documentos constitutivos del hito que llamamos **la proporción en la época helenística** no identificamos un tratamiento de las razones entre magnitudes geométricas sino aspectos de las razones entre números o de las proporciones aritméticas. No obstante hay que precisar que el argumento relacionado con el uso de la división en extrema y media razón en la poesía de Virgilio (Waterhouse, 1972), sí precisa una referencia al carácter estrictamente geométrico (o más precisamente, teórico-geométrico) de tal división. Por esta razón no reportamos un tema específico.

Los documentos reportados en la sección titulada **traducciones árabes y latinas** permiten reconocer los siguientes temas:

xi. **Precisiones acerca de las versiones de las traducciones de Elementos y los comentarios a las mismas**. Algunos documentos (De Young, 1984, 1992) discuten, a la luz de nuevas evidencias y análisis históricos, la versión más ampliamente conocida de las traducciones árabes de *Elementos*, ubicada en la introducción de una traducción de los mismos (Heath, 1908). De manera semejante otro documento (Brentjes, 2001) discute las diferencias y semejanzas entre un texto árabe y otro latino; este mismo autor reseña la historia de tales traducciones realizadas entre los siglos IX y XIII (Brentjes, 2008).

xii. **Explicaciones de la Definición V. 5**. Uno de los documentos (Vahabzadeh, 1994) refiere dos propuestas, casi idénticas pero con siete siglos de diferencia, de explicación de la Definición V. 5. Otro documento (Rashed & Vahabzadeh, 1999) discute a profundidad un tratamiento árabe de la noción de proporción implicada en esta misma definición. Dos documentos más (Hogendijk, 2002; Vitrac, 2002) abordan interpretaciones que comentaristas árabes hacen de la idea de proporción, asociándola con la antanairesis.

xiii. **Interpretaciones de la composición de razones**. Dos de los documentos (Rashed & Vahabzadeh, 1999; Vitrac, 2000) estudian y explicitan los comentarios árabes sobre la composición de razones (o las razones compuestas de razones).

xiv. **Los diagramas en las traducciones árabes**. Este asunto es tratado de manera profunda, pero aún de forma preliminar, por un documento (De Young, 2005) que asume los diagramas geométricos de al-Hajjaj como una tradición que circula en las traducciones y comentarios árabes.

Los documentos referidos bajo el título **adaptaciones de la teoría en la Baja Edad Media y el Renacimiento** versan sobre:

xv. **La reescritura de los Libros de *Elementos* o la redefinición de conceptos**. En uno de los documentos (Goldstein, 2000) se discute la manera como algunas traducciones de los primeros libros de *Elementos*, fueron condicionadas por los desarrollos en Aritmética y Álgebra; se habla así, por ejemplo, de la aritmetización de la teoría de las proporciones del Libro V. En un sentido similar en otro documento (Giusti, 2008) se examinan las trasformaciones del Libro V en el siglo XVI; una de ellas es tratada de manera particular en uno de los documentos (Rommevaux, 2013). Las transformaciones y estudios de la teoría de las proporciones en el siglo XVII son el objeto de estudio de otro documento (Lamandé, 2013). Uno de los documentos trata la composición de razones sin restricción de su significado geométrico (Glenie, 1777), mientras que otro (Craik, 2009) analiza la obra de Gleine. Otros dos documentos (Massa Esteve, 1997, 2003) exhiben el desarrollo por parte de Mengoli de una teoría de las cuasi-proporciones para calcular algunas cuadraturas o de una teoría de las razones logarítmicas (razones de razones), con base en la propuesta euclidiana del Libro V de *Elementos*. Otro documento (Rommevaux, 2003) estudia la irracionalidad de la razón entre la diagonal y el lado del cuadrado, bajo las ideas de razón irracional mediada por la “denominación” de razones.

xvi. **La extensión del trabajo euclidiano a dominios no matemáticos**. Un documento (Drake, 1973) refleja cómo, con base en una teoría medieval de las proporciones y la incorporación de una forma de denominación de las razones, se amplía el dominio de las razones de magnitudes geométricas para incorporar tratamientos de magnitudes físicas; en una dirección similar otro documento (Celeyrette & Mazet, 2003) discute como el *Tratado sobre razones* de Albert de Sajonia participa de la discusión y difusión del tratamiento medieval sobre el movimiento. Otros documentos (Palmieri, 2001, 2003) reseñan intentos de reformulación de la teoría para evitar la idea de equimúltiplo en la aplicación de la teoría fuera del dominio geométrico o la formulación de una nueva definición, menos ligada a lo geométrico, a partir de la cual se pudiera deducir la definición euclidiana (es decir la que incorpora la idea de equimúltiplo). De manera cercana a estos otro documento (Álvarez Jiménez, s.f) discute el uso de la teoría euclidiana de la proporción por Galileo.

xvii. **El uso de una propuesta teórica sobre las razones, en el estudio de las Matemáticas**. Esto es precisamente lo que se reporta en dos de los documentos reseñados (Biard, 2003; Sylla, 2007). La estrategia discutida va en contravía del uso del estilo euclidiano en la enseñanza de las Matemáticas e incorpora discusiones sobre asuntos de la Física y la Filosofía de las Matemáticas; la propuesta teórica sobre las razones refiere al *Tractatus de proportionibus* y particularmente a la "ley de Bradwardine" (Celeyrette, 2008; Sylla, 2008) sobre el movimiento.

Los documentos relativos a la **influencia de la teoría de la proporción en la construcción de los reales**, al igual que algunos reseñados en el segundo de los hitos, establecen claramente un tema:

xviii. **Relación de la teoría de la proporción y los números reales**. Este asunto, si bien no es el centro de varios documentos (Dhombres, 1978; Fine, 1917; Gardies, 1988; Levi, 2003; Martiñón Cejas, 1992; Stein, 1990; Zubieta, 1991), sí constituye objeto de referencia destacado en los mismos. Sin embargo, en la menos un artículo (Corry, 1994) la relación entre la teoría euclidiana de la proporción y la construcción de los números reales por Dedekind sí constituye el núcleo del mismo. Otro documento (Guacaneme, 2012d) aborda dicha relación, pero también refiere a la construcción de Frege.

A través de los documentos reportados bajo el subtítulo **otros** identificamos el tratamiento de:

xix. **Una historia de la teoría de la proporción**. Al menos tres documentos (Cousquer, 1994; Oller Marcén & Gairín Sallán, 2013; Yuste, 2004) refieren aspectos de lo que se podría considerar una historia de la teoría de la proporción; uno de ellos (Oller Marcén & Gairín Sallán, 2013) enfatiza en la historia de la teoría de la proporción en el ámbito aritmético. Dos más contienen información sintética sobre hitos de la misma (Dhombres & Giusti, 1989, 1990).

xx. **Usos estéticos de la teoría de la proporción**. Uno de estos usos se expresa en la Arquitectura y específicamente en el análisis del uso de la proporción armónica (Mitrović & Djordjević, 1990).

xxi. **La razón de oro**. Si bien el tema (también conocido como sección dorada, número de oro, media de oro, divina proporción o división en media y extrema razón) tiene muchísimas referencias más, no tenidas en cuenta entre los documentos reseñados antes, identificamos a través de nuestra búsqueda bibliográfica sobre la teoría de la proporción unos específicos (Fett, 2006; Markowsky, 1992).

Los demás artículos reseñados (Gandon, 2009; Simonson, 2000b, 2000c; Sutherland, 2006) no los logramos ubicar en relación con una temática específica de las aludidas antes. Debemos resaltar que estuvimos tentados a ubicar uno de ellos (Gandon, 2009) en el apartado titulado **teoría euclidiana** pero advertimos que más que estudiar esta, lo que hace es estudiar las motivaciones matemáticas y lógicas de De Morgan para re-presentar una teoría de las proporciones.

4.3 La historia de la teoría euclidiana de la proporción a través de dos categorías de análisis

En el capítulo anterior construimos un marco de referencia en relación con las preguntas sobre el qué, por qué, para qué y cómo de la HM en el CPM. Con base en los documentos de la historia de la proporción no vemos pertinente abordar las preguntas sobre el por qué y el cómo, pues su contenido no refiere estos asuntos. Sí, vemos posible identificar los tipos de objetos y de HM que contemplan los documentos y anticipar posibles papeles que desempeñarían a favor del CPM.

4.3.1 ¿Qué tipos de objetos y de Historia de las Matemáticas se identifica en los documentos?

Recordemos que en el capítulo anterior propusimos que la pregunta sobre el qué HM se podía responder desde dos enfoques; uno relativo al tipo de objeto de estudio y el otro frente al tipo de HM o tratamiento de la misma.

4.3.1.1 Tipo de objeto de estudio

Veamos inicialmente, a través de la Tabla 100[274], los tipos de objeto de estudio que se pueden reconocer en los documentos que constituyen parte sustancial de la historia de la teoría de la proporción del Libro V[275].

[274] Las convenciones que se emplean son como sigue:

Bio / Crono	Biografías y cronología.
FP / FS / FT	Fuentes primarias, secundarias, terciarias.
Teo / Sud / Disc	Teorías / Subdisciplinas / Disciplinas.
Tem / Proc / Prob	Temas / Procesos / Problemas.
PM	Pensamiento matemático.
MH / MnH	Matemáticas hegemónicas / Matemáticas de culturas no hegemónicas.

Documento	Bio Crono	FP FS FT	Teo Sub Disc	Tem Proc Prob	PM	MH MnH	AmM AmH	HM-E
(Evans, 1927)		FS		Tem		MH		
(Knorr, 1978)		FS	Teo			MH		
(Fowler, 1979)		FS		Tem		MH		
(Fowler, 1981)		FS		Tem		MH		
(Rusnock & Thagard, 1995)		FS		Prob	PM	MH	AmM	
(Mederos Martín, 2000)		FS		Tem		MH	AmM	
(Filep, 2003)		FS		Tem		MH		
(Saïto, 2003)		FS	Teo			MH	AmM	
(Jiménez, 2006)		FS		Tem		MH		
(González Urbaneja, 2008)		FS		Tem		MH		
(De Morgan, 1836)		FP	Teo			MH		HM-E
(M. J. M. Hill, 1900)		FP	Teo			MH		HM-E
(Heath, 1908)		FP/FS	Teo			MH	AmM	
(M. J. M. Hill, 1912a, 1912b)		FS		Tem		MH		
(M. J. M. Hill, 1914)		FP		Tem		MH		HM-E
(Fine, 1917)		FS		Tem		MH		
(M. J. M. Hill, 1923)		FS		Tem		MH		
(M. J. M. Hill, 1928)		FS	Teo			MH	AmM	
(Mueller, 1970)		FS		Tem	PM	MH	AmM	
(Berghout, 1974, 1975)		FS	Teo			MH		
(Dhombres, 1978)		FS	Teo			MH		
(Riddell, 1979)		FS		Tem		MH	AmM	
(Fowler, 1982b)		FS		Tem		MH		
(Aujac, 1986)		FS		Tem		MH		
(Gardies, 1988)		FS	Teo			MH		
(Stein, 1990)		FS		Tem		MH		
(Gardies, 1991)		FS		Tem		MH		
(Zubieta, 1991)		FS		Tem		MH		
(Martiñón Cejas, 1992)		FS		Tem		MH		
(Puertas, 1994)		FP/FS	Teo			MH	AmM	
(Saïto, 1994a)		FS		Tem		MH		
(Grattan-Guinness, 1996, 1997)		FS		Tem		MH		

AmM / AmH — Asuntos meta-matemáticos /Asuntos meta-históricos.
HM-E — Relación de HM con lo educativo.

[275] Si la celda aparece vacía debe interpretarse que el documento no admite clasificación alguna en la respectiva categoría.

Documento	Bio Crono	FP FS FT	Teo Sub Disc	Tem Proc Prob	PM	MH MnH	AmM AmH	HM-E
(Vitrac, 1996)		FS		Tem		MH		
(Acerbi, 2003b)		FS		Proc		MH		
(Levi, 2003)		FS		Tem		MH		
(Guacaneme, 2015)		FT		Tem	PM	MH		HM-E
(Waterhouse, 1972)		FT		Tem		MH		
(De Young, 1984)		FS	Teo			MnH	AmH	
(Vahabzadeh, 1994)		FS		Tem		MnH		
(Rashed & Vahabzadeh, 1999)		FS		Tem		MnH		
(Vitrac, 2000)		FS		Tem		MH		
(Hogendijk, 2002)		FS		Tem		MnH		
(Vitrac, 2002)		FS		Tem		MnH		
(De Young, 2005)		FS		Tem		MnH	AmM	
(Glenie, 1777)		FP		Tem		MH		
(Drake, 1973)		FS		Tem		MH		
(Massa Esteve, 1997)		FS	Teo			MH		
(Goldstein, 2000)		FS		Tem		MH	AmM	
(Palmieri, 2001)		FS		Tem		MH		
(Palmieri, 2003)		FS		Tem	PM	MH	AmM	
(Massa Esteve, 2003)		FS	Teo			MH		
(Sylla, 2008)		FS	Teo			MH	AmM	
(Giusti, 2008)		FS		Tem		MH		
(Lamandé, 2013)		FS	Teo			MH		
(Rommevaux, 2013)		FS	Teo			MH		
(Álvarez Jiménez, s.f)		FS		Tem		MH	AmM	
(Corry, 1994)		FS		Tem		MH		
(Guacaneme, 2012d)		FT		Tem		MH		HM-E
(Cousquer, 1994)		FS		Tem		MH		HM-E
(Yuste, 2004)		FS		Tem		MH		
(Sutherland, 2006)		FS		Tem	PM	MH	AmM	
(Oller Marcén & Gairín Sallán, 2013)		FS		Tem		MH		

Tabla 100 Tipos de objetos identificados en los documentos

En la Tabla 100 hemos excluido algunos de los documentos citados antes que no se relacionan con la teoría euclidiana de la proporción del Libro V de *Elementos*, aunque sí hacen parte de la historia de la proporción. Específicamente, de los citados bajo el título "teorías pre-euclidianas" excluimos dieciséis documentos (Becker, 1933; Bongiovanni, 2005; Cajori, 1928; Caveing, 1994; Santiago Fernández Fernández, 1988; Filep, 1999, 2004; Fowler, 1980, 1982a, 1999; Fowler & Rawlins, 1983; Knorr, 1975, 1992; Larsen, 1984; Mendell, 2007; Szabó, 1978; Thorup, 1992); de los referidos en "la proporción en la época helenística" descartamos cuatro (Curchin & Fischler, 1981; Christianidis, 1998;

Kappraff, 2000; Klein, 1968); de los reseñados en “las traducciones árabes y latinas” exceptuamos cuatro (Brentjes, 2001, 2008; De Young, 1992; Høyrup, 2006); de los documentos incluidos en “adaptaciones de la teoría en la Baja Edad Media y el Renacimiento” excluimos siete (Biard, 2003; Celeyrette, 2008; Celeyrette & Mazet, 2003; Craik, 2009; Grant, 1960; Rommevaux, 2003; Sylla, 2007); y de los documentos bajo el título “otros” exceptuamos ocho (Dhombres & Giusti, 1989, 1990; Euser, 2000; Fett, 2006; Gandon, 2009; Markowsky, 1992; Mitrović & Djordjević, 1990; Simonson, 2000b, 2000c). Como era de esperarse, no prescindimos de ninguno de los documentos relacionados bajo los títulos “teoría euclidiana” e “influencia de la teoría de la proporción en la construcción de los reales”.

La caracterización de los documentos a través de la Tabla 100 ofrece información que merece ser destacada para cada una de las categorías.

Como se puede observar, consideramos que los documentos no se clasificaban bajo la categoría “Biografía / Cronología”, lo cual no significa que algunos aspectos biográficos no sean presentados o que el asunto temporal no sea considerado; lo que significa es que estos asuntos no son centrales en los documentos. Lo anterior no obsta para resaltar que las historias de la proporción (Cousquer, 1994; Oller Marcén & Gairín Sallán, 2013; Yuste, 2004) se organizan cronológicamente.

Resaltemos, ahora, que identificamos que la mayoría de documentos son fuentes secundarias relacionadas con la teoría euclidiana de la proporción. Como fuentes primarias reconocimos dos traducciones de *Elementos* (Heath, 1908; Puertas, 1994), documentos que a la vez pueden ser entendidos como fuentes secundarias si se considera la producción integrada como notas de pie de página a las traducciones, y tres propuestas de teoría de la proporción (De Morgan, 1836; Glenie, 1777; M. J. M. Hill, 1900, 1914), dos de ellas generadas con la intencionalidad didáctica de propender por una mejor comprensión de la abstrusa teoría euclidiana. Entre tanto, catalogamos tres fuentes como terciarias, dos de ellas con una alusión clara sobre lo educativo (Guacaneme, 2012d, 2015) y la tercera (Waterhouse, 1972) exhibiendo un uso de un aspecto de la teoría de la proporción, como parte de un argumento en el ámbito del análisis literario.

Al mirar las frecuencias de los valores de las dos siguientes categorías, se advierte que de los sesenta y dos documentos, la mayoría (cuarenta y cuatro) refieren estudios de temáticas específicas relacionadas con la teoría eucidiana de la proporción, dieciséis abordan el estudio de teorías o presentan una teoría, uno (Acerbi, 2003b) refiere a un proceso y uno (Rusnock & Thagard, 1995) a un problema. Este último aborda el problema de la aparición de la inconmensurabilidad como anomalía, desde un punto de vista epistemológico, más que como problema matemático; la generalidad es el proceso referido en el documento citado.

Por otra parte, el contenido de cinco documentos permitió catalogarlos en relación con el tratamiento del pensamiento matemático. Las estrategias de solución de una anomalía matemática o, más precisamente, meta-matemática (Rusnock & Thagard, 1995), el estudio de una manera de concebir la homogeneidad de las magnitudes desde la generalidad (Mueller, 1970), la identificación de un tipo de pensamiento aditivo en el tratamiento de la proporcionalidad (Guacaneme, 2015), la exploración de los mecanismos cognitivos en la matematización de la naturaleza en Galileo (Palmieri, 2003) y la influencia que la teoría de la proporción pudo tener en una postura filosófica (Sutherland, 2006), constituyen las temáticas de tales documentos.

Al examinar los documentos se estableció que la gran mayoría versan sobre la historia de las Matemáticas occidentales y de las escuelas europeas, sin embargo, clasificamos los documentos descritos bajo el título "traducciones árabes y latinas" como de Matemáticas no hegemónicas (salvo uno de ellos que tiene un fuerte contenido de las Matemáticas griegas), bajo el entendido que la contribución de la cultura árabe se ha subordinado y que, en este sentido, pareciera representar unas Matemáticas de culturas no hegemónicas. Más allá de ello, vale la pena resaltar que en el listado de documentos no disponemos de alguno que verse sobre el tratamiento de la teoría de la proporción en culturas orientales o comunidades indígenas.

Al mirar el resultado de la clasificación sobre asuntos meta-matemáticos y meta-históricos, se advierte que solo un documento (De Young, 1984) exhibe un contenido que consideramos meta-histórico, en tanto plantea y discute la unicidad o diversidad de traducciones árabes de *Elementos*. Asimismo se reconoce que catorce documentos abordan asuntos meta-matemáticos relacionados con, entre otros: la solución de anomalías (Rusnock & Thagard, 1995), la proporción como método para explicar la relación entre el todo y las partes y vía para la obtención de conocimiento cierto (Mederos Martín, 2000), las condiciones para considerar un cuerpo deductivo como teoría matemática (Saïto, 2003), la identificación de problemas lógicos en la teoría euclidiana de la proporción (M. J. M. Hill, 1928), la existencia de un nivel de generalidad para las magnitudes que abstrae el problema de la homogeneidad (Mueller, 1970), el origen cinemático de nociones matemáticas centrales en la teoría euclidiana de la proporción (Riddell, 1979), el lugar de los diagramas geométricos en algunas traducciones árabes de

Elementos (De Young, 2005), el lugar adjudicado al rigor geométrico en relación con el rigor algebraico en algunas ediciones de Elementos (Goldstein, 2000), la consideración de la teoría de la proporción como lenguaje de matematización de la Física (Palmieri, 2003), el rechazo de una fundamentación matemática para una ley física (Sylla, 2008), el surgimiento razones entendidas como magnitudes físicas (Álvarez Jiménez, s.f), el lugar de la teoría euclidiana de la proporción en las posturas filosóficas kantianas (Sutherland, 2006).

En la última categoría se ubicaron seis documentos que establecen una relación de la HM con lo educativo. Tres de estos documentos (De Morgan, 1836; M. J. M. Hill, 1900, 1914), como ya lo mencionamos, establecen unas teorías para hacer la teoría euclidiana de la proporción más comprensible; los otros tres exhiben reflexiones en relación con lo educativo (Cousquer, 1994; Guacaneme, 2012d, 2015).

4.3.1.2 Tipo o tratamiento de Historia de las Matemáticas

Veamos ahora en la Tabla 101[276] la catalogación de los mismos documentos considerados en el anterior subtítulo, pero esta vez de acuerdo con las categorías del tipo de HM.

Documento	I	E	R	A	Ev	S	Hi	He	O	An
(Evans, 1927)	I			A	Ev			He		
(Knorr, 1978)	I			A	Ev		Hi			
(Fowler, 1979)	I			A	Ev			He		
(Fowler, 1981)	I			A	Ev			He		
(Rusnock & Thagard, 1995)		E		A	Ev		Hi			
(Mederos Martín, 2000)	I/E			A	Ev			He		
(Filep, 2003)	I			A	Ev			He		
(Saïto, 2003)	I			A		S	Hi			
(Jiménez, 2006)	I			A	Ev			He		
(González Urbaneja, 2008)	I			A	Ev			He		
(De Morgan, 1836)	I					S			O	
(M. J. M. Hill, 1900)	I					S			O	
(Heath, 1908)	I			A		S		He		
(M. J. M. Hill, 1912a, 1912b)	I			A		S	Hi			
(M. J. M. Hill, 1914)	I			A		S		He	O	
(Fine, 1917)	I			A	Ev			He		

[276] Las convenciones que se emplean son como sigue:

I / E	Internalista / Externalista.
R / A	Relato / Análisis.
Ev / S	Evolutiva / Situada.
Hi /He	Historia / Herencia.
O / An	Original / Anacrónico.

Documento	**I** / **E**	**R** / **A**	**Ev** / **S**	**Hi** / **He**	**O** / **An**
(M. J. M. Hill, 1923)	I	A	S	He	
(M. J. M. Hill, 1928)	I	A	S	Hi	
(Mueller, 1970)	E	A	S	He	
(Berghout, 1974, 1975)	I	A	S	He	An
(Dhombres, 1978)	I/E	A	Ev	He	
(Riddell, 1979)	E	A	S	Hi	O
(Fowler, 1982b)	I	A	S	He	An
(Aujac, 1986)	I	A	Ev	He	
(Gardies, 1988)	I	A	Ev	Hi	
(Stein, 1990)	I	A	Ev	He	An
(Gardies, 1991)	I	A	S	He	
(Zubieta, 1991)	I	A	S	He	An
(Martiñón Cejas, 1992)	I	A	Ev	He	An
(Puertas, 1994)	I	A	S	He	
(Saïto, 1994a)	I	A	S	He	
(Grattan-Guinness, 1996, 1997)	I	A	S	He	
(Vitrac, 1996)	I	A	S	Hi	
(Acerbi, 2003b)	I	A	Ev	He	
(Levi, 2003)	I	A	Ev	He	
(Guacaneme, 2015)	I	A	S	He	
(Waterhouse, 1972)	E	A	S		
(De Young, 1984)		A	Ev	Hi	
(Vahabzadeh, 1994)	I	A	S		
(Rashed & Vahabzadeh, 1999)	I	A	S	Hi	
(Vitrac, 2000)	I	A	Ev	Hi	
(Hogendijk, 2002)	I	A	S	He	
(Vitrac, 2002)	I	A	S	Hi	
(De Young, 2005)	I	A	S	He	O
(Glenie, 1777)	I		S		O
(Drake, 1973)	I	A	S	He	
(Massa Esteve, 1997)	I	A	S	He	O
(Goldstein, 2000)	I	A	S	Hi	
(Palmieri, 2001)	I	A	S	Hi	
(Palmieri, 2003)	E	A	S	Hi	
(Massa Esteve, 2003)	I	A	Ev	He	O
(Sylla, 2008)	I/E	A	S	Hi	
(Giusti, 2008)	I	A	Ev	He	
(Lamandé, 2013)	I	A	Ev	Hi	
(Rommevaux, 2013)	I	A	Ev	He	
(Álvarez Jiménez, s.f)	I/E	A	S	He	
(Corry, 1994)	I	A	Ev	Hi	O
(Guacaneme, 2012d)	I	A	Ev	He	
(Cousquer, 1994)	I	A	Ev	He	
(Yuste, 2004)	I	A	Ev	He	
(Sutherland, 2006)	I	A			

Documento	I E	R A	Ev S	Hi He	O An
(Oller Marcén & Gairín Sallán, 2013)	I	A	Ev	He	

Tabla 101 Tipos de HM identificados en los documentos

Destaquemos alguna información que se lee en la Tabla 101.

Claramente se observa que la gran mayoría de documentos (cincuenta y ocho de sesenta y dos) exhiben una aproximación internalista a la HM, pero en cuatro de ellos hemos identificado simultáneamente tratamientos externalistas; estos últimos se suman a otros cinco con aproximaciones externalistas. Algunos de los asuntos tratados por estos nueve documentos son: un esquema de pensamiento científico –más allá del matemático mismo– para afrontar anomalías (Rusnock & Thagard, 1995), el estudio de manifestaciones culturales griegas de objetos para/proto-matemáticos en disciplinas no matemáticas (Mederos Martín, 2000), una conceptualización metafísica de la idea de magnitud subyacente en una obra matemática (Mueller, 1970), una aproximación filosófica a las ideas de número y magnitud (Dhombres, 1978), ambientes extra-matemáticos de surgimiento de ideas matemáticas (Riddell, 1979), el empleo de una idea matemática en el análisis de la poesía (Waterhouse, 1972), y las interacciones entre el estudio de la naturaleza y unas ideas y lenguaje matemáticos (Álvarez Jiménez, s.f; Palmieri, 2003; Sylla, 2008). Finalmente, señalemos que un documento (De Young, 1984) no tiene clasificación en esta categoría.

Una mirada a la segunda categoría de la Tabla 101 devela que salvo las teorías matemáticas *stricto sensu*, los demás documentos presentan análisis históricos, es decir, ninguno de ellos es un relato histórico.

Al observar la tercera categoría se reconoce que aproximadamente la mitad de los documentos refieren un tratamiento evolutivo de la teoría euclidiana de la proporción, en tanto que los otros exhiben un tratamiento situado; solo un documento (Sutherland, 2006) no se ubica ni como evolutivo ni como situado. En general, los documentos clasificados como evolutivos, tratan la evolución de la teoría (o de parte de esta) entre los hitos señalados; entre tanto los catalogados como situados, estudian la teoría (o parte de esta) en un momento particular, sin fuerte relación con sus antecedentes o con sus apariciones posteriores.

Para el caso de la categoría "Historia / Herencia" se identificó el tratamiento de treinta y ocho documentos en relación con la "Herencia", en tanto que otros dieciocho documentos se identificaron con un tratamiento de “Historia”; el tratamiento de seis documentos (De Morgan, 1836; Glenie, 1777; M. J. M. Hill, 1900; Sutherland, 2006; Vahabzadeh, 1994; Waterhouse, 1972) no se logró identificar con ninguna de las dos opciones. Algunos de los asuntos identificados en los documentos catalogados como “Historia” son: la existencia de una teoría de la proporción, basada en el principio de bisección, poco referida por los historiadores (Knorr, 1978), la existencia de opciones diversas para solucionar una anomalía (Rusnock & Thagard, 1995), la consideración de existencia de teorías incompletas ampliamente validadas (Saïto, 2003), la identificación de falencias e incomprensiones de corpus teóricos consolidados (Gardies, 1988; M. J. M. Hill, 1912a, 1912b, 1928; Rashed & Vahabzadeh, 1999; Vitrac, 1996, 2000, 2002), las motivaciones e impulsos extra-matemáticos a ideas matemáticas (Palmieri, 2001, 2003; Riddell, 1979; Sylla, 2008), la reformulación de historias ya consolidadas (Corry, 1994; De Young, 1984), y los diversos rumbos o tendencias que toma una teoría (Goldstein, 2000; Lamandé, 2013).

Finalmente, respecto de la quinta categoría, se identifican nueve documentos que exhiben tratamientos “originales” de las obras matemáticas; naturalmente allí se encuentran las teorías matemáticas expuestas (De Morgan, 1836; Glenie, 1777; M. J. M. Hill, 1900, 1914), aunque también documentos en los que se cuida por presentar los aspectos matemáticos objeto de discusión de la manera como la presentó el autor en su obra (De Young, 2005; Massa Esteve, 1997, 2003; Riddell, 1979) o con los argumentos fieles del autor de la obra matemática (Corry, 1994). Por otra parte se identifican cinco documentos que exhiben claramente tratamientos de lo histórico desde la perspectiva del científico moderno (Berghout, 1974, 1975; Fowler, 1982b; Martiñón Cejas, 1992; Stein, 1990; Zubieta, 1991). Si bien la gran mayoría de documentos no lograron ser clasificados en las opciones de esta categoría, debemos reconocer que muchos de ellos emplean una simbología o formas de notación modernas para el tratamiento de las razones y proporciones, lo cual, desde nuestra perspectiva, distorsiona los análisis reportados.

4.3.2 ¿Para qué el estudio de la historia de la teoría euclidiana de la proporción?

Recordemos, inicialmente, que cuando discutimos la pregunta sobre el para qué la HM en el CPM identificamos dos grupos de respuestas, uno refería a dotar al profesor de Matemáticas de visiones, en tanto que el otro refería a dotarlo de artefactos para el desempeño docente; el primero tenía cuatro expresiones, en tanto que el segundo tres.

Los encabezados de la Tabla 102[277] refieren a tales expresiones; en esta hemos ubicado cada uno de los sesenta y dos documentos tratados antes y, atendiendo a su contenido, hemos establecido cuáles de estas expresiones podrían favorecerse a través de un trabajo en torno a cada documento.

Documento	VAM	VM	VCM	VOM	MEPM	MEIA	CPP
(Evans, 1927)				VOM			
(Knorr, 1978)				VOM			
(Fowler, 1979)				VOM			
(Fowler, 1981)				VOM			
(Rusnock & Thagard, 1995)	VAM	VM			MEPM		
(Mederos Martín, 2000)		VM	VCM				
(Filep, 2003)				VOM		MEIA	
(Saïto, 2003)		VM					
(Jiménez, 2006)				VOM		MEIA	
(González Urbaneja, 2008)	VAM	VM					
(De Morgan, 1836)			VCM			MEIA	CPP
(M. J. M. Hill, 1900)			VCM			MEIA	CPP
(Heath, 1908)				VOM			CPP
(M. J. M. Hill, 1912a, 1912b)					MEPM		
(M. J. M. Hill, 1914)			VCM			MEIA	CPP
(Fine, 1917)				VOM			
(M. J. M. Hill, 1923)			VCM				
(M. J. M. Hill, 1928)					MEPM		
(Mueller, 1970)	VAM		VCM				
(Berghout, 1974, 1975)				VOM			CPP
(Dhombres, 1978)	VAM						
(Riddell, 1979)	VAM	VM					
(Fowler, 1982b)				VOM			
(Aujac, 1986)				VOM			
(Gardies, 1988)					MEPM		
(Stein, 1990)				VOM			
(Gardies, 1991)				VOM			
(Zubieta, 1991)				VOM			
(Martiñón Cejas, 1992)				VOM			
(Puertas, 1994)				VOM			CPP
(Saïto, 1994a)				VOM			

[277] Las convenciones que se emplean son como sigue:

VAM	Visión de la actividad matemática.
VM	Visión de las Matemáticas.
VCM	Visión del conocimiento matemático.
VOM	Visión de los objetos matemáticos.
MEPM	Mirada epistemológica y del pensamiento matemático.
MEIA	Maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo.
CPP	Competencias personales y profesionales.

Documento	VAM	VM	VCM	VOM	MEPM	MEIA	CPP
(Grattan-Guinness, 1996, 1997)				VOM			
(Vitrac, 1996)			VCM				
(Acerbi, 2003b)				VOM			
(Levi, 2003)				VOM			
(Guacaneme, 2015)				VOM	MEPM	MEIA	
(Waterhouse, 1972)		VM					
(De Young, 1984)		VM					
(Vahabzadeh, 1994)				VOM			
(Rashed & Vahabzadeh, 1999)					MEPM		
(Vitrac, 2000)					MEPM		
(Hogendijk, 2002)				VOM			
(Vitrac, 2002)					MEPM		
(De Young, 2005)	VAM			VOM			
(Glenie, 1777)		VM					CPP
(Drake, 1973)		VM					
(Massa Esteve, 1997)	VAM			VOM			CPP
(Goldstein, 2000)		VM			MEPM		
(Palmieri, 2001)		VM			MEPM		
(Palmieri, 2003)		VM			MEPM		
(Massa Esteve, 2003)	VAM			VOM			CPP
(Sylla, 2008)		VM			MEPM		
(Giusti, 2008)		VM		VOM			
(Lamandé, 2013)		VM		VOM			
(Rommevaux, 2013)		VM					
(Álvarez Jiménez, s.f)		VM		VOM	MEPM		
(Corry, 1994)	VAM						
(Guacaneme, 2012d)		VM					
(Cousquer, 1994)		VM		VOM		MEIA	
(Yuste, 2004)		VM		VOM			
(Sutherland, 2006)		VM					
(Oller Marcén & Gairín Sallán, 2013)		VM		VOM			

Tabla 102 Intenciones formativas identificadas en los documentos

La Tabla 102 ofrece un panorama descriptivo para el conjunto de documentos y para cada una de las siete intenciones formativas establecidas en el marco de referencia; veamos:

En primer lugar, se reconoce que nueve documentos tienen el potencial de aportar a la construcción de “visiones de la actividad matemática”, ello en tanto que todos ellos contienen elementos relacionados con la actividad de creación matemática. Así, por ejemplo, se pueden advertir: diferentes tipos de actividad matemática desplegadas para la solución de anomalías (Rusnock & Thagard, 1995), circunstancias matemáticas y filosóficas subyacentes a la identificación de un problema y a la actividad creativa de su solución (González Urbaneja, 2008), el lugar de la abstracción o generalidad (de la idea de magnitud) en el establecimiento de una teoría (Mueller, 1970), las condiciones que un ambiente intelectual dispone para la creación matemática (Dhombres, 1978), la injerencia de un modelo físico en la intuición geométrica (Riddell, 1979), el lugar que ocupan las representaciones en la consolidación de tradiciones epistémicas (De Young, 2005), el efectivo estímulo que teorías consolidadas pueden hacer a la generación de ideas originales (Corry, 1994; Massa Esteve, 1997, 2003). Asimismo, debemos reconocer que no identificamos documento alguno que abordara asuntos relacionados con los aspectos estéticos ligados a la creación matemática o con los rasgos del carácter humano intrínseco y característico de la actividad matemática, es decir otros aspectos descriptivos de la categoría en cuestión.

En segundo lugar, se verifica que veintidós documentos podrían favorecer la "visión de las Matemáticas". Especialmente trece de ellos tienen el potencial de mostrar el carácter dinámico de las Matemáticas, en tanto que exhiben la transformación de sus objetos en el tiempo y muestran evidencias de que estos se constituyen, modifican o extienden, como respuesta a problemas matemáticos y extra-matemáticos (Cousquer, 1994; De Young, 1984; Giusti, 2008; Glenie, 1777; Goldstein, 2000; Guacaneme, 2012d; Lamandé, 2013; Mederos Martín, 2000; Oller Marcén & Gairín Sallán, 2013; Rommevaux, 2013; Rusnock & Thagard, 1995; Saïto, 2003; Yuste, 2004). Vale la pena resaltar que si bien en este listado de documentos se incluyen los documentos que reportan las historias de la proporción (Cousquer, 1994; Oller Marcén & Gairín Sallán, 2013; Yuste, 2004), también hay otros que contienen incluso análisis históricos situados; es decir que este carácter dinámico no es exclusivo de análisis históricos evolutivos. Por otra parte, dentro del listado de los veintidós documentos identificamos al menos nueve que permiten reconocer vínculos importantes de las Matemáticas con otras disciplinas (Álvarez Jiménez, s.f; Drake, 1973; Mederos Martín, 2000; Palmieri, 2001, 2003; Riddell, 1979; Sutherland, 2006; Sylla, 2008; Waterhouse, 1972), lo cual hace que se constituyan en un referente para cuestionar el escenario auto-referencial que usual y equivocadamente se le adjudica a las Matemáticas. En el grupo de veintidós documentos también incluimos uno que expresa ideas sobre la naturaleza de la Geometría (González Urbaneja, 2008) y, aporta desde la mirada a esta disciplina, elementos a una visión de las Matemáticas. No obstante las anteriores potencialidades señaladas, no identificamos documentos que trataran asuntos que permitan valorar la importancia cultural de las Matemáticas, en tanto que esta constituye parte de la descripción de la categoría en cuestión.

La mirada a la tercera categoría, "visión del conocimiento matemático", arroja siete documentos. Cuatro de ellos permiten reconocer al menos dos presentaciones alternas de la teoría euclidiana de la proporción para favorecer su comprensión (De Morgan, 1836; M. J. M. Hill, 1900, 1914, 1923); en este sentido configuran un potencial escenario de reflexión acerca de la perfectibilidad del conocimiento matemático. Los otros tres documentos refieren asuntos relativos al rigor y la verdad del conocimiento matemático (Mederos Martín, 2000; Mueller, 1970; Vitrac, 1996). Por ejemplo, uno de los autores (Mederos Martín, 2000) argumenta a favor de reconocer a la Geometría y la proporción, como método para revelar la relación entre el todo y las partes, y como vía para procurar conocimiento verdadero; los otros documentos ofrecen una posibilidad de considerar procesos matemáticos (*v.g.*, generalización y conceptualización), como parte del conocimiento geométrico, que condicionan fuertemente el desarrollo teórico mismo.

La cuarta categoría tiene una amplia representación en el corpus documental; en efecto, aproximadamente la mitad de los documentos ha sido clasificada dentro de la categoría "visión del objeto matemático". Recordemos que dentro de esta se incluye: la revelación de asuntos ocultos o no necesariamente usuales de los objetos e ideas matemáticos, la exploración del carácter evolutivo de conceptos y procedimientos, y la identificación de distintos significados y sentidos de los conceptos matemáticos. Al menos ocho documentos revelan asuntos no usuales de los objetos matemáticos de la teoría de la proporción (De Young, 2005; Fowler, 1982b; Gardies, 1991; Guacaneme, 2015; Heath, 1908; Knorr, 1978; Puertas, 1994; Saïto, 1994a). A modo de ejemplo se puede resaltar: la existencia de una aproximación teórica a la proporción basada en el principio de bisección y ligado al método de exhausión (Knorr, 1978); los nexos, no muy explorados, de la división de un segmento en extrema y media razón con varias proposiciones de *Elementos* (Fowler, 1982b), el carácter aditivo (no multiplicativo) de las ideas de razón y proporción en dos antiguas teorías de la razón y la proporción (Guacaneme, 2015); o el lugar de los diagramas geométricos como componentes de una cierta tradición de traducciones de *Elementos* (De Young, 2005). El carácter evolutivo de los objetos matemáticos está representado en cerca de dos decenas de documentos (Álvarez Jiménez, s.f; Aujac, 1986; Cousquer, 1994; Evans, 1927; Filep, 2003; Fowler, 1979, 1981; Giusti, 2008; Hogendijk, 2002; Knorr, 1978; Lamandé, 2013; Levi, 2003; Martiñón Cejas, 1992; Massa Esteve, 1997, 2003; Oller Marcén & Gairín Sallán, 2013; Stein, 1990; Yuste, 2004; Zubieta, 1991); la cantidad de documentos y la variedad en sus planteamientos ofrece un contundente escenario para contrarrestar la creencia usual sobre el carácter estático y acabado de las Matemáticas y de sus objetos (y particularmente, en estos documentos, de las definiciones de los conceptos nucleares de la teoría de la proporción). Ligado a esto último, algunos documentos centran su atención en la trasformación de los significados de tales conceptos, contándose entonces con una interesante y potente polisemia (Acerbi, 2003b; Aujac, 1986; Berghout, 1974, 1975; Evans, 1927; Hogendijk, 2002; Jiménez, 2006; Levi, 2003; Vahabzadeh, 1994). También se ubicaron dos documentos que centran su atención en el estudio del objeto matemático mismo, más que en su evolución (Fine, 1917; Grattan-Guinness, 1996, 1997).

La quinta categoría, “mirada epistemológica y del pensamiento matemático”, tiene su expresión en trece documentos. Once de estos abordan asuntos referidos a los obstáculos y problemas epistemológicos; uno de ellos plantea la problemática epistemológica ligada a la solución de la anomalía de la teoría de la proporción, consustancial a la inconmensurabilidad (Rusnock & Thagard, 1995); los otros abordan anomalías de la teoría euclidiana de la proporción, problemas lógicos u obstáculos para la adquisición o trasmisión de las ideas de esta (Álvarez Jiménez, s.f; Gardies, 1988; Goldstein, 2000; M. J. M. Hill, 1912a, 1912b, 1928; Palmieri, 2001; Rashed & Vahabzadeh, 1999; Sylla, 2008; Vitrac, 2000, 2002). Al menos dos de los documentos discuten asuntos relacionados con el pensamiento proporcional desde un punto de vista histórico (Guacaneme, 2015; Palmieri, 2003) y otro aborda un tratamiento de la proporcionalidad no muy próspero en el tiempo, aunque sí en su momento (Sylla, 2008); a este respecto, recordemos que este tipo de asuntos los postulamos como descriptivos de la categoría en cuestión. Consideramos que los documentos ubicados en esta categoría develan un ámbito de condiciones epistémicas que podrían llegar a explicar los problemas que escolarmente se generan en el tratamiento de la razón y la proporción, por ejemplo, su énfasis en la aproximación aritmética, en detrimento de la aproximación geométrica (no métrica).

Con respecto a la categoría “maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo” se identificaron siete documentos, ninguno de ellos relacionado con las maneras de enseñar. Tres documentos, que contienen propuestas teóricas generadas para mejorar la comprensión de la teoría euclidiana de la proporción (De Morgan, 1836; M. J. M. Hill, 1900, 1914), se pueden considerar como insumos para el aula, o para provocar una reflexión sobre su incorporación en el aula. Otros tres, contienen información que puede constituir elementos de orientación curricular (Filep, 2003; Guacaneme, 2015; Jiménez, 2006). El contenido del documento restante (Cousquer, 1994), además de versar sobre la historia de la proporción, reporta algunas reflexiones para el trabajo escolar.

La séptima y última categoría, “competencias personales y profesionales”, se expresa en nueve documentos cuyo estudio necesariamente incorpora una experiencia de aprendizaje de las Matemáticas, pues estas son parte esencial de los mismos por cuanto exponen teorías matemáticas (Berghout, 1974, 1975; De Morgan, 1836; Glenie, 1777; Heath, 1908; M. J. M. Hill, 1900, 1914; Massa Esteve, 1997, 2003; Puertas, 1994). Tal experiencia no necesariamente tiene la condición de disponer al profesor de los procesos reseñados en el capítulo anterior, cuando describimos la categoría; en otras palabras, los documentos no tienen el valor pedagógico intrínseco para promover experiencias realmente formativas para el profesor de Matemáticas, que trasciendan las experiencias informativas de aprendizaje.

4.4 Síntesis de resultados

Presentamos ahora una síntesis de resultados de las tres secciones anteriores, a partir de los cuales, realizaremos un análisis y presentaremos algunas reflexiones sobre el potencial formativo de la teoría euclidiana de la proporción.

A través del estudio de la teoría euclidiana de la proporción, expuesta en el Libro V de *Elementos*, se ha logrado una visión de esta que se puede sintetizar enunciando varios aspectos, como sigue:

A. La teoría de la proporción del Libro V de *Elementos* constituye un discurso matemático hipotético deductivo (compuesto, en esencia, por dieciocho definiciones y veintisiete propiedades), que versa sobre las magnitudes geométricas generalizadas y sobre un tipo de relación establecida entre los tamaños de estas (siempre que sean homogéneas); este discurso guarda una relativa independencia de los libros que le preceden (los cuales también tratan las magnitudes geométricas y propiedades de las figuras geométricas en el plano) y una muy marcada independencia de una teoría de la proporción para los números (expresada fundamentalmente en el Libro VII). En este sentido, esta teoría trata con la cantidad (no numérica) y, fundamentalmente, con una relación entre cantidades de esta naturaleza; por ello no incorpora referencia a la cantidad numérica y, por tanto, no subyace a ella el problema de la inconmensurabilidad.

B. El estilo retórico es empleado en la formulación de las definiciones, proposiciones y pruebas de las mismas; sin embargo, los textos de las pruebas se acompañan de una nominación de las magnitudes geométricas generalizadas a través de letras griegas en mayúscula y unos diagramas o dibujos. Este estilo impone una exigencia particular a un lector moderno, acostumbrado a un sincretismo simbólico operativo, ausente en la obra euclidiana en cuestión.

C. En tanto teoría de magnitudes geométricas generalizadas se debe entender que un enunciado del tipo “la magnitud AB” o “la magnitud E” no refiere exclusivamente a un segmento (o al tamaño de un segmento). En consecuencia y coherencia con lo anterior, la representación de estas magnitudes en los diagramas (a través de trazos finitos rectilíneos) tampoco debe entenderse como segmento, sino como una representación impropia o no ostensiva de la magnitud generalizada.

D. Las magnitudes generalizadas son objeto de relaciones binarias (*v.g.*, medir, ser medido, comparar), operaciones binarias (suma, diferencia) y operaciones de otro orden (multiplicarse, dividirse).

E. La gran mayoría de los conceptos empleados se definen explícitamente; quizá la excepción más notable sea el concepto de magnitud, seguido de la idea de equimúltiplo.

F. Las definiciones centrales de la teoría –altamente polémicas y con variedad de interpretaciones– son la Definición V. 3, la Definición V. 5 y la Definición V. 7. La Definición V. 3 refiere la idea de razón de dos magnitudes homogéneas, de manera poco precisa; la Definición V. 5 expone las condiciones para que cuatro magnitudes, dos a dos, guarden la misma razón; y la Definición V. 7 presenta las condiciones para que la razón que guarda dos magnitudes sea mayor a la que guardan otras dos. Merecen especial atención las Definiciones V. 9 y V. 10, las cuales refieren a la razón duplicada y triplicada, respectivamente.

G. La enunciación de la Definición V. 5 ha sido objeto de profundos debates que abarcan posturas sobre la predicación en la misma, la ambigüedad de las formas lógicas de su formulación y su asociación con la definición vía cortaduras de los números reales.

H. Todas las proposiciones de la teoría constituyen propiedades deducibles y deducidas lógicamente; así, ninguna puede ser considerada como una construcción o problema de construcción.

I. Las pruebas de las proposiciones proceden prioritariamente a través del estilo directo, aunque hay algunas que acuden a la reducción al absurdo. En cualquier caso, todas participan de la estructura en seis etapas, típica en *Elementos*, a saber: *prótasis*, *ékthesis*, *diorismós*, *kataskeué, apódeixix* y *sympérasma*.

J. Atendiendo al contenido de las proposiciones se pueden generar cinco grupos de estas: las que se refieren a las magnitudes y sus múltiplos, las que aluden a cómo el orden de las magnitudes se transfiere al "orden" de las razones, las que describen cómo relaciones entre razones determinan relaciones u operaciones entre magnitudes, las que versan sobre propiedades de las proporciones (o desproporciones), y la que exhibe una proporción entre una razón y sus equimúltiplos. Vale la pena precisar que no hay propiedades que aludan a operaciones (suma o multiplicación) entre razones.

K. Es probable que las proposiciones 23, 14, 16, 18, 19, 20 y 21 tengan un alto nivel de complejidad lógica, pues involucran en su prueba varias proposiciones, y que las proposiciones 1, 2, 7, 11 y 13 tengan una complejidad lógica baja, en tanto no incorporan proposición alguna en su demostración. Por otra parte se observa que las proposiciones 8, 1 y 11 tienen una alta potencialidad lógica, en tanto intervienen en un número considerable de proposiciones, en tanto que las proposiciones 5, 6, 9, 23, 24 y 25 exhiben una baja potencialidad lógica, ya que no se implican en prueba alguna.

L. En el Libro V se identifican procesos matemáticos de demostración, instanciación y generalización.

Ahora bien, la visión lograda sobre la historia de la razón y la proporción se puede recapitular a través de los siguientes enunciados:

M. El contenido de los documentos sobre la historia de la razón y la proporción determinan seis hitos históricos cronológicamente organizados, a saber: teorías pre-euclidianas, teoría euclidiana, la proporción en la época helenística, las traducciones árabes y latinas, las adaptaciones de la teoría en la Baja Edad Media y el Renacimiento, y la influencia de la teoría de la proporción en la construcción de los reales.

N. Los documentos que definen el hito de teorías pre-euclidianas abordan: la existencia de una teoría pitagórica de la proporción, la emergencia del problema de la inconmensurabilidad de magnitudes, la existencia de una "teoría" de la razón basada en la antanairesis o antifairesis, la existencia de una "teoría" de la razón basada en el principio de la bisección, la concreción de una teoría de la proporción para las razones entre magnitudes geométricas en el Libro V de *Elementos*, y el tratamiento de asuntos de un orden meta-matemático o histórico-epistemológico.

O. Los documentos que definen el hito de teoría euclidiana contienen: las condiciones de emergencia del Libro V, la re-escritura de la teoría euclidiana de la proporción, la traducción comentada de la teoría euclidiana, y el estudio de algunos apartes del Libro V.

P. Los documentos que definen el hito de la proporción en la época helenística tratan en general, asuntos sobre las razones entre números y las proporciones entre estas.

Q. Los documentos que definen el hito de las traducciones árabes y latinas abordan: las precisiones acerca de las versiones de las traducciones de *Elementos* y los comentarios a las mismas, las explicaciones de la Definición V. 5, las interpretaciones de la composición de razones, y los diagramas en las traducciones árabes.

R. Los documentos que definen el hito adaptaciones de la teoría en la Baja Edad Media y el Renacimiento, contienen: la reescritura de los Libros de *Elementos* o la redefinición de conceptos, la extensión del trabajo euclidiano a dominios no matemáticos, y el uso de una propuesta teórica sobre las razones en el estudio de las Matemáticas.

S. Los documentos relativos a la influencia de la teoría de la proporción en la construcción de los reales, discuten si efectivamente esta teoría tuvo repercusiones trascendentes en la concepción y definición de los números reales, principalmente en la definición de Dedekind.

Finalmente, la visión generada al analizar la historia de la teoría euclidiana de la proporción a la luz de las categorías referidas al qué HM en el CPM y para qué la HM en el CPM, se sintetiza en los siguientes enunciados. Para el caso de la pregunta sobre qué tipos de objetos y de HM se identifica en los documentos que:

T. Los asuntos biográficos y cronológicos no son tratados de manera central en los documentos.

U. Las fuentes secundarias son las más abundantes.

V. Los estudios de temáticas específicas relacionadas con la teoría euclidiana de la proporción son los más frecuentes, seguidos de los estudios de teorías de la proporción.

W. El pensamiento matemático relacionado con la teoría euclidiana de la proporción es abordado en solo algunos documentos.

X. La historia de las Matemáticas occidentales es la discutida en los documentos, pudiendo constituir una excepción, dentro de esta, la historia de las Matemáticas árabes.

Y. Algunos asuntos meta-matemáticos y al menos un asunto meta-histórico, son tratados en varios documentos.

Z. La relación entre la HM y lo educativo es abordada en pocos documentos desde dos perspectivas: el establecimiento de teorías para hacer la teoría existente más comprensiva, y la discusión de reflexiones sobre la relación de la teoría con lo educativo.

AA. La aproximación internalista es la prioritaria, pero no exclusivamente, desarrollada en los documentos.

BB. El análisis histórico constituye el enfoque histórico prevalente en los documentos.

CC. Los tratamientos evolutivos y situados son contemplados de manera equitativa en los documentos.

DD. La versión “Herencia” de la HM es mayoritariamente la que se identifica en los documentos, aunque hay varios con un tratamiento vía “Historia”.

EE. El discurso de la mayoría de documentos no se logra catalogar bajo un tratamiento “desde la perspectiva del autor” o “desde la perspectiva del científico moderna”.

Para el caso de la pregunta sobre para qué el estudio de la historia de la teoría euclidiana de la proporción se identifica en los documentos que:

FF. Existen documentos que tienen el potencial de aportar a la construcción de “visiones de la actividad matemática”, particularmente en relación con la actividad de creación matemática; sin embargo, no se identificaron documentos que aborden asuntos relacionados con los aspectos estéticos o el carácter humano de la actividad matemática.

GG. Un importante número de documentos tiene el potencial de favorecer la “visión de las Matemáticas”, específicamente mostrando el carácter dinámico de estas, exhibiendo importantes vínculos de las Matemáticas con otras disciplinas; no obstante lo anterior, no hay documentos que permitan valorar la importancia cultural de las Matemáticas.

HH. La “visión del conocimiento matemático” es potencializada por algunos pocos documentos; la perfectibilidad del conocimiento matemático y asuntos relativos al rigor y la verdad del conocimiento matemático son los objetos de reflexión en aquéllos.

II. La "visión del objeto matemático" es abordada ampliamente en el corpus documental; la revelación de asuntos ocultos o no usuales de los objetos matemáticos, la exploración del carácter evolutivo de conceptos y procedimientos, y la identificación de distintos significados y sentidos de los conceptos matemáticos son los asuntos específicos potencializados por el contenido de los documentos.

JJ. Varios documentos tiene el potencial de aportar a la "mirada epistemológica y del pensamiento matemático", especialmente en lo relativo a los obstáculos y problemas epistemológicos y en menor medida en relación con el pensamiento proporcional.

KK. El contenido de solo algunos documentos tiene el potencial de aportar como "insumos para el aula y el currículo" en tanto pueden provocar una reflexión sobre su incorporación en el aula o constituir elementos de orientación curricular; ninguno relaciona "maneras de enseñar".

LL. El desarrollo de "competencias personales y profesionales" es promovido por algunos documentos; específicamente, algunos exigen y permiten una experiencia de aprendizaje de las Matemáticas, pero ninguno tiene valor pedagógico intrínseco para promover experiencias que trasciendan tal tipo de experiencias.

4.5 Discusión de resultados

Acabamos de sintetizar treinta y ocho resultados; de estos, doce corresponden a aspectos que describen la teoría euclidiana de la proporción, siete describen aspectos de la historia de la razón y la proporción, y de los diecinueve restantes, doce responden a las preguntas sobre el tipo de historia de la razón y la proporción de la que se dispone a favor del CPM y sobre el tipo de tratamiento de la misma, en tanto que siete responden a la pregunta sobre las intenciones formativas que tal historia puede atender. Desarrollaremos ahora cuatro discusiones sobre tales resultados.

4.5.1 El estudio de la teoría contenida en el Libro V de *Elementos* propicia una experiencia de aprendizaje didáctico-matemático *sui generis*

El estudio de una teoría matemática en su formulación original (*i.e.,* sin que medie un proceso de transposición didáctica *stricto sensu*), puede constituir, sin lugar a dudas, una experiencia de aprendizaje de las Matemáticas un tanto *sui generis*[278] en los programas de educación de profesores de Matemáticas. Específicamente, la actividad de estudio de la teoría euclidiana de la proporción contenida en el Libro V de *Elementos*, puede ofrecer una experiencia de aprendizaje de las Matemáticas que, por su independencia de otras teorías y objetos de la obra euclidiana, no hace tan altas exigencias de temas matemáticos previos.

No obstante la ausencia de un entramado de prerrequisitos temáticos, el estudio de la teoría en cuestión enfrenta al aprendiz (futuro profesor o profesor en ejercicio, para nuestros propósitos) a una red de condiciones altamente exigentes y, quizá por lo mismo, potencialmente útiles a favor del CPM. Veamos algunas de estas.

- El objeto de referencia de la teoría son las magnitudes geométricas generalizadas, y no las magnitudes geométricas específicas (*i.e.*, las asociadas a los segmentos, regiones y sólidos). En otras palabras, so pena de ser reduccionistas, el objeto de referencia de la teoría es la abstracción que procede de las magnitudes geométricas específicas. Bajo esta consideración, cualquier alusión a segmentos, regiones o sólidos, será tan solo un caso específico de la generalidad, incluso si esta procede, por ejemplo, para todos los segmentos.
- Ahora bien, el tratamiento que en la teoría se hace de las magnitudes geométricas generalizadas es cuantitativo no numérico y relacional. Por cuanto el aspecto cuantitativo no numérico es un tanto ajeno a la tradición escolar de las Matemáticas –en las que la Aritmética y el Álgebra ostentan una posición privilegiada y extensa, y por tanto igualmente ajeno al conocimiento del profesor de Matemáticas (en formación o ejercicio)–, el estudio de la teoría enfrenta al aprendiz a una idea de cantidad que exige no cuantificarse con números. Si a esto se le agrega la condición relacional subyacente a la teoría (*i.e.*, el establecimiento de relaciones, como la razón, entre magnitudes no necesariamente medibles), la dificultad aumenta. En efecto, ante la ausencia de la cuantificación numérica, se adolece también de una representación de este mismo orden para la razón; en otras palabras, no se puede acudir a las fracciones de reales y mucho menos a los racionales para representar la razón entre dos magnitudes.
- Además de no disponer de un registro de representación numérico, no se dispone de una representación simbólica con carácter operativo, sino sencillamente de un

[278] Calificamos así tal experiencia, aún bajo el conocimiento de que en muchos programas de formación se proponen y desarrollan cursos de Matemáticas, pero estos casi siempre involucran y estás guiados por instrumentos de medicación didáctica (*v.g.*, libros de texto) que incorporan tratamientos y decisiones didácticas.

simbolismo nominal restringido a las magnitudes geométricas generalizadas, que entra en conflicto con el sincretismo simbólico operativo característico de la modernidad. La carencia de registros de representación que trasciendan el estilo retórico de la teoría, se ve disminuido al advertir que las pruebas de las propiedades contienen un registro gráfico para las magnitudes generalizadas; sin embargo, su carácter impropio o no ostensivo (salvo para el caso de los segmentos) impone exigencias adicionales al aprendiz. Ahora bien, al advertir que tal registro gráfico no circunscribe la representación de la razón entre magnitudes, y menos la proporción entre razones, se adiciona una exigencia más, poco usual en Geometría[279].

- A las exigencias que devienen de la disposición o carencia de los registros de representación se suman otras relacionadas con la comprensión de los conceptos centrales de la teoría, explicitados a través de algunas definiciones (Definición V. 3, 5, 7, 9 y 10). Estas exigencias tienen que ver con: la posibilidad de aceptar una definición poco precisa (como lo es la definición de razón de magnitudes homogéneas), como parte de una teoría matemática rigurosa; la dificultad de comprender o, si quiera interpretar, las condiciones para que cuatro magnitudes, dos a dos, guarden la misma razón; aceptar la ambivalencia impuesta por las condiciones para que la razón que guarda dos magnitudes sea mayor a la que guardan otras dos y su uso para probar la desproporción; y, las limitaciones en la interpretación de las ideas de razón duplicada y triplicada, al margen de incluir de manera apócrifa una operatoria entre razones (bien sea multiplicación o composición de estas, o bien de multiplicación de sus magnitudes).
- Exigencias semejantes se imponen en relación con la comprensión de los enunciados de las proposiciones de la teoría, más no así de sus pruebas. En efecto, es usual que una comprensión sustancial del enunciado (*prótasis*) se logre solamente al recurrir a la exposición del mismo (*ékthesis*) y a su determinación o delimitación (*diorismós*), en relación con la lectura del diagrama que los acompaña. Quizá el estilo directo de la mayoría de las pruebas, el carácter sintético del discurso teórico, y la permanencia de una misma estructura demostrativa, alivie el marco de exigencias impuestas para la comprensión de las deducciones lógicas implicadas en las pruebas. También es probable que este alivio se dé por la existencia de procesos matemáticos de generalización, relativamente familiares, y

[279] En (Guacaneme, 2013b) se discute más ampliamente, apoyado en una perspectiva histórica, el asunto de la representación gráfica de la razón entre magnitudes geométricas.

que no se generen mayores inquietudes por los procesos de instanciación implicados.

Bajo este marco de condiciones es apenas natural suponer que el estudio de la teoría de la proporción es altamente exigente y su realización solo se justificaría en tanto ofrezca buenos réditos para el CPM, más allá del conocimiento de las Matemáticas propiamente implicadas en la teoría euclidiana en cuestión. A este respecto consideramos que el mayor valor de tal estudio se obtiene cuando este se acompaña de un trabajo –paralelo o posterior– (desde nuestra perspectiva de naturaleza netamente didáctica) para explicitar, estudiar o reflexionar sobre algunos asuntos, a saber:

- Los niveles de abstracción implicados en la comprensión de una teoría de magnitudes geométricas generalizadas que asume como casos particulares generalidades sobre una magnitud específica.
- El carácter no numérico de la cantidad y su casi total ausencia en la enseñanza y aprendizaje escolar de las Matemáticas. O bien, y en contraste, la excesiva presencia de lo numérico en los currículos de Matemáticas y en las formas de pensamiento matemático en las aulas.
- Las dificultades que la ausencia de registros de representación imponen a la comprensión y, consecuentemente, el papel mediador de las mismas en el aprendizaje o la enseñanza; adicionalmente, el riesgo que se corre al confundir un manejo de la representación con la comprensión de lo representado.
- El hecho de poder construir una teoría (o al menos un discurso hipotético-deductivo) muy robusta (y no por ello completo o absolutamente riguroso) sobre definiciones no precisas o abstrusas.
- La diferencia entre comprender una propiedad y entender su demostración, advirtiendo las interrelaciones posibles entre estas acciones.

Como se puede observar, entre los aspectos señalados no hemos incluido alguno específico sobre el aprendizaje matemático de la teoría misma, lo cual no obedece a que este no se dé. Naturalmente al estudiar la teoría se logra una comprensión de los aspectos matemáticos en ella implicados y, específicamente, de las propiedades que satisfacen las magnitudes geométricas generalizadas, las razones entre estas y las proporciones. Por ejemplo, se logra advertir que existen relaciones para las magnitudes y unas semejantes (pero no las mismas) para las razones y que unas pueden determinar las otras, o que si bien hay operaciones en el dominio de las magnitudes geométricas generalizadas, no las hay para las razones.

El problema con el aprendizaje matemático logrado no es si se genera o no con el estudio de la teoría; la cuestión es si este es pertinente y útil al CPM. Este asunto lo planteamos en una ponencia (Guacaneme, 2012a), bajo el subtítulo "¿La otra cara de la moneda?". Allí manifestamos que podría llegar a existir un halo de frustración o decepción, en tanto que se logran aprendizajes matemáticos de una teoría que no es precisamente la que se enseña en las instituciones educativas. La teoría estudiada en la escuela se corresponde más con una teoría de las razones entre números, mientras que la euclidiana refiere a cantidades no numéricas; la teoría estudiada en la escuela incluye las razones entre magnitudes geométricas heterogéneas y, de manera más amplia, de magnitudes físicas y económicas (entre otras), en tanto que la euclidiana solo admite magnitudes geométricas homogéneas; las funciones de proporcionalidad estudiadas en la escuela incluyen el carácter continuo de las variables implicadas, en tanto que la teoría euclidiana solo admite un tratamiento discreto de las magnitudes geométricas a través de las razones entre estas.

Tal sentimiento de frustración o decepción se matizaría cuando se compare con el aprendizaje logrado a través del trabajo de naturaleza didáctica que se realice a propósito del estudio de la teoría de la proporción, que reportamos antes. Otro factor que confrontaría tal sentimiento se refiere precisamente a la necesidad de conocer otros discursos matemáticos, diferentes a los usuales, para disponer de insumos desde los cuales generar procesos de innovación educativa. En efecto, una manera efectiva de motivar la innovación es incluir en el repertorio de conocimientos del profesor "nuevas" matemáticas, que le proporciones conocimientos de los que no dispone y le brinden oportunidades de incluir estas a través de procesos de transposición didáctica o de aprovechar aspectos de estas para transformar el currículo y sus prácticas de enseñanza o las de aprendizaje de sus estudiantes.

Lo anterior brinda la posibilidad de reflexionar sobre el aprendizaje de las Matemáticas en la educación de un profesor de Matemáticas, entendido como fin o como medio en la formación de profesores. Sin embargo, esta no será objeto de discusión en el presente documento.

4.5.2 El estudio de la historia de la teoría contenida en el Libro V de *Elementos* propicia aprendizajes de orden histórico

Si se lleva a cabo el estudio de la historia de la teoría de la proporción a través de los documentos reseñados, se podrán identificar los seis hitos históricos cronológicamente organizados, reportados allí. Algo similar se obtiene si lo que se hace es estudiar los sesenta y dos documentos que determinamos directamente relacionados con la teoría de la proporción contenida en el Libro V de *Elementos*. Sin embargo, la lectura de alguno de los tres documentos que contienen una versión de la historia de la proporción (Cousquer, 1994; Oller Marcén & Gairín Sallán, 2013; Yuste, 2004) también conduciría a algo similar.

Una lectura alterna a estos hitos permite colegir que la historia de dicha teoría tiene claramente tres instancias temporalmente definidas: la etapa previa de la teoría, la etapa de formulación de la teoría y la etapa posterior de la teoría. Este asunto, que podría parecer un tanto anodino, cobra especial interés desde los enfoques evolucionistas o desde las posturas de que distinguen la "Historia" de la "Herencia" (Grattan-Guinness, 2004a, 2004b), en cuanto captura la dinámica histórica de evolución, es decir exhibe diferentes "estados de ser" de los objetos matemáticos razón y proporción. Lo interesante es que la mirada a la dinámica histórica permite reconocer que la evolución de tales estados de ser no siempre "mejora" al objeto matemático, por ejemplo haciendo más precisa su definición, como es el caso de la razón entre magnitudes.

Ahora bien, al estudiar la etapa previa de la teoría euclidiana de la proporción, se advierte un hecho llamativo: la existencia de varias "teorías" pre-euclidianas, basadas en diversos objetos y enfoques matemáticos, que involucran lo finito o lo infinito, e incluyen cada una diferentes operaciones para las magnitudes. Asimismo, despierta interés el reconocimiento de existencia de múltiples interpretaciones históricas sobre la existencia y autoría de estas teorías, sobre el grado de desarrollo de sus *corpus* teóricos, y sobre las condiciones matemáticas y extra-matemáticas que probablemente promovieron su emergencia; al respecto de este último, es particularmente interesante la discusión acerca de si existió o no una crisis mediada por la identificación de la inconmensurabilidad. La condición de existencia de múltiples interpretaciones deja al descubierto una parte importante de la naturaleza de la HM y es precisamente su carácter hermenéutico. Si bien de una naturaleza un tanto diferente, es igualmente llamativo advertir el uso de la estrategia de reconstitución "antropológica" de la historia de algunas teorías, ante la ausencia de suficiente evidencia de los hechos.

El estudio de la etapa de la formulación de la teoría euclidiana es igualmente sorprendente y enriquecedor. Por ejemplo, es llamativo percibir el esfuerzo de los traductores (Heath, 1908; Puertas, 1994) por ser lo más fieles posibles al contenido de la versión disponible para la traducción y cómo ello implica la explicitación y precisión de detalles conceptuales y contextuales. También es sugerente el nivel de detalle con el que algunos historiadores logran estudiar un fragmento pequeño de la teoría (por ejemplo una definición, una proposición, un estilo de enunciación, el uso de un diagrama, etc.) y cómo la integración de estos minuciosos estudios va configurando una compleja visión de la teoría misma. Este asunto en particular ofrece la posibilidad de reconocer diferentes niveles y alcance en el conocimiento de un objeto matemático, asunto del que no siempre se es suficientemente consciente. No menos sugestivo es el reconocimiento de ingentes esfuerzos de matemáticos de primer orden por reescribir la teoría, con la intención de hacerla más comprensible; esta actividad, aparentemente de responsabilidad de los didactas de las Matemáticas, no solo devela el carácter abstruso de la teoría, sino que también permite apreciar un legítimo interés –dentro de la actividad matemática– por aspectos usualmente considerados extra-matemáticos o extra-teóricos, como lo es la comprensión misma de las Matemáticas.

El estudio de la historia de la etapa posterior a la teoría conlleva la apertura de una ventana a un paisaje extremadamente amplio y diverso. Un sector de ese paisaje deja entrever el papel de la cultura árabe, no solo a favor de preservar el legado de la cultura griega a través de la traducción de *Elementos*, sino, sobre todo, apuntalando las bases y sirviendo de acicate para la posterior producción matemática en los centros de producción académica europeos. Es este el sentido que brindan los estudios de los documentos de la producción árabe, que establecen las precisiones acerca de las versiones de las traducciones de *Elementos*, los comentarios a las mismas, las explicaciones de la Definición V. 5, las interpretaciones de la composición de razones, y los diagramas en las traducciones árabes. Otro sector de tal paisaje muestra el enorme trabajo que le implicó a la humanidad –en general–, y a los intelectuales mismos –en particular–, los intentos de "extender" la teoría para que pudiera ser empleada en dominios no matemáticos; hermoso ejemplo para reconceptualizar y revalorar la idea de aplicación de las Matemáticas. No menos atractivo resulta ser el fragmento del paisaje que refiere el estudio de la discusión de si la teoría euclidiana de la proporción preconfiguró la definición de los reales a través de las cortaduras, asunto discutido ampliamente por los historiadores y desmentido por el mismo autor de las cortaduras a través de su elegante correspondencia con uno de sus pares.

Bajo las anteriores apreciaciones, es natural –acá también– preguntarse por la pertinencia y utilidad de los aprendizajes históricos señalados, a favor del CPM. Esto nos remite de inmediato a una discusión nutrida por los resultados obtenidos respecto a la pregunta del para qué la historia de la teoría euclidiana de la proporción a favor del CPM.

4.5.3 Las intenciones formativas del estudio de la historia de la teoría euclidiana de la proporción

La exploración de los resultados obtenidos a propósito de la pregunta sobre para qué el estudio de la historia de la teoría euclidiana de la proporción brinda un panorama prometedor, en tanto que muestra que las diferentes dimensiones o intencionalidades del estudio de la HM a favor del CPM se abordan, a la vez que explicita carencias específicas en algunas de estas.

En efecto, los resultados permiten observar que el estudio de la historia de la teoría euclidiana de la proporción referida en el Libro V de *Elementos*, tiene el potencial para favorecer la visión de la actividad matemática, la visión de las Matemáticas, la visión del conocimiento matemático y la visión del objeto matemático. Asimismo, se reconoce que este estudio tiene el potencial para beneficiar la construcción de una mirada epistemológica y del pensamiento matemático, para constituirse en fuente de insumos para el aula y el currículo, y para promueve algunas competencias personales y profesionales.

Es de notar que enfatizamos el carácter potencial del estudio de la historia, por cuanto consideramos que es posible estudiar la historia, sin que necesariamente se siga lo referido en las intenciones referidas en el anterior párrafo. Acá también, como en el apartado en el que discutimos el estudio de la teoría euclidiana de la proporción, consideramos que el estudio de la historia de la teoría euclidiana, debe estar acompañada de un trabajo paralelo o posterior –de carácter eminentemente didáctico– que tenga como propósito, generar la discusión y reflexión sobre las visiones y artefactos que subyacen en el discurso histórico, pero que no necesariamente emergen de manera natural de este. Dicho trabajo debe entonces permitir prorrumpir el valor intrínseco de la historia, pues de lo contrario puede permanecer como tesoro oculto, relegando el potencial del discurso histórico a un plano de elegante erudición.

Es papel del formador de profesores, y más precisamente del didacta de la HM, diseñar las estrategias necesarias para que el estudio del contenido de los documentos provenientes de la investigación histórica conlleve efectivamente el desarrollo de aprendizajes estrechamente asociados a la profesión docente, como los reportados en las intenciones en cuestión.

Por otra parte, los resultados evidencian también la ausencia de documentos que permitan una aproximación explícita a los aspectos estéticos o el carácter humano de la actividad matemática, que favorezcan la valoración de la importancia cultural de las

Matemáticas, que ofrezcan información relativa a maneras de enseñar o de incorporar la historia a la enseñanza, o que participen del fortalecimiento y desarrollo de otras competencias personales y profesionales, más allá de las propiciadas por la experiencia de aprendizaje de las Matemáticas contenidas en la teoría misma.

Estas carencias deberían ser comunicadas a la comunidad de investigadores de la HM, como una manera de auspiciar acciones en uno de los sentidos descuidados de la relación HM–CPM (más precisamente el sentido representado por HM ←CPM). Asimismo, estas carencias deberían ser tenidas en cuenta por los formadores de profesores, con el fin de procurar atenderlas con discursos de la HM relacionados con otras temáticas diferentes a la historia de la teoría euclidiana de la proporción. Algunas de estas carencias, particularmente las referidas a maneras de enseñar o de incorporar esta historia a los procesos de enseñanza y aprendizaje escolar de las Matemáticas, deben ser comunicadas y atendidas por la investigación en Educación Matemática.

4.5.4 El panorama del tipo de Historia de las Matemáticas y tratamientos de Historia de las Matemáticas

La visión generada al analizar la historia de la teoría euclidiana de la proporción a la luz de las categorías referidas al qué HM en el CPM describe con suficiencia el tipo de HM y los tratamientos subyacentes a los documentos considerados. Esta descripción nos parece de especial importancia para el formador de profesores que, en el marco de un programa de formación de profesores de Matemáticas, deba encarar el reto de diseñar un curso, unas sesiones de un curso o unas tareas. En efecto, la descripción le permite conocer de forma detallada y organizada el acervo documental potencialmente convertible en objeto de estudio o insumo en la tarea formativa.

Más allá de la funcionalidad específica reseñada antes, consideramos que la identificación del acervo documental y la construcción de descripciones analíticas sobre –y a partir de– su contenido, es una condición *sine qua non* para el desarrollo de procesos de transposición didáctica de la HM, de los cuales –como lo hemos señalado antes– debe ocuparse la Didáctica de la Historia de las Matemáticas. Realizar tales estudios y descripciones deberá favorecer la intervención de la HM en el CPM, pues obedecerá a procesos más sistemáticos y conscientes, tan necesarios para la cualificación y el mejoramiento de la educación de los profesores de Matemáticas.

5 Conclusiones

Inicialmente recordemos que la pregunta de investigación se planteó como sigue: ¿cuál es el potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción, contenida en el Libro V de *Elementos*, en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas?

Además, de acuerdo con lo se estableció en el apartado “Intencionalidad”, del Capítulo 1, dos intenciones del estudio se refieren a:

i. Contar con unas categorías de análisis que favorezcan la caracterización de los documentos resultantes de la investigación histórica sobre la teoría euclidiana de la razón y la proporción.
ii. Analizar los documentos que reportan la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción a la luz de las categorías y develar, en consecuencia, el potencial formativo de tal historia.

Para procurar una respuesta a la pregunta de investigación establecimos una aproximación al *estado del arte* de la reflexión e investigación en torno a la relación “Historia de las Matemáticas – Educación Matemática”, considerando la producción del campo de la Educación Matemática. Esta aproximación nos llevó a reconocer:

a) la existencia de cuatro ámbitos de interpretación de la relación, a saber: la Historia de las Matemáticas en la enseñanza de las Matemáticas, la Historia de las Matemáticas en las investigaciones del campo de la Educación Matemática, la Historia de las Matemáticas en la educación del profesor de Matemáticas y la Historia de la enseñanza de las Matemáticas;
b) la Didáctica de la Historia de las Matemáticas como escenario para el estudio de la relación; y,

c) la exigua atención a los vínculos de la Filosofía de las Matemáticas con la relación.

De esta manera identificamos que la problemática propuesta como objeto de investigación se ubicó particularmente en uno de los cuatro ámbitos: la Historia de las Matemáticas en la educación del profesor de Matemáticas.

A partir de tal estado del arte se exploró la relación "Historia de las Matemáticas – Conocimiento del profesor de Matemáticas". Para ello definimos como preguntas orientadoras las relacionadas con los argumentos que se esgrimen a favor de la integración de la Historia de las Matemáticas en tales procesos, las intenciones que se persiguen con dicha integración, las características de la Historia de las Matemáticas que se vincula a los procesos educativos de los profesores de Matemáticas y las estrategias metodológicas que se han diseñado e implementado para que los profesores de Matemáticas se apropien y usen los discursos históricos.

De esta manera se configuró un marco de referencia para la relación mencionada. Este constituye el marco de categorías de análisis referido en la primera intención investigativa citada al inicio de este capítulo y está definido por las preguntas por qué, para qué, qué y cómo se plantea la relación "Historia de las Matemáticas – Conocimiento del profesor de Matemáticas".

Con relación a por qué se plantea la apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los profesores, se identificaron cuatro respuestas generales, a saber: (i) existencia de académicos o comunidades con formación en Historia de las Matemáticas e interés en el conocimiento del profesor de Matemáticas, (ii) valoración social de la historicidad de las Matemáticas, (iii) la Historia de las Matemáticas constituye una cornucopia de visiones, y (iv) la Historia de las Matemáticas configura una fuente de artefactos.

En relación con la pregunta para qué se procura la apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los profesores, se distinguieron dos grupos de respuestas, que son: (i) para dotar al profesor de visiones pertinentes para su ejercicio profesional (*v.g.*, visión de la actividad matemática, visión de las Matemáticas, visión del conocimiento matemático, y visión de los objetos matemáticos), y (ii) para dotar al profesor de artefactos adecuados para su ejercicio profesional (*v.g.*, mirada epistemológica y del pensamiento matemático, maneras de enseñar e insumos para el aula y el currículo, y competencias personales y profesionales).

Respecto de la pregunta sobre qué tipo de HM debe ser apropiada por un profesor, se identificaron dos perspectivas de respuesta; una de ellas refiere a los objetos de estudio de la Historia de las Matemáticas (*i.e.*, los asuntos que son propuestos para ser estudiados con el fin de favorecer los conocimientos del profesor de Matemáticas) y la otra al tipo de tratamiento de la Historia de las Matemáticas (*i.e.*, los enfoques que podría tener la Historia de las Matemáticas que se ponga en juego en la formación de profesores). Dentro de la primera se reconocen ocho tipos de objeto de estudio (Biografías y cronología; fuentes primarias, secundarias, terciarias; teorías / subdisciplinas / disciplinas; temas / procesos / problemas; pensamiento matemático; Matemáticas hegemónicas / Matemáticas de culturas no hegemónicas; asuntos meta-matemáticos o meta-históricos; y, relación de HM con lo educativo). La segunda identifica cinco tipologías de Historia de las Matemáticas (internalista / externalista; relato / análisis; evolutiva / situada; historia / herencia; original / anacrónico).

Por otra parte, se estudió la teoría euclidiana de la razón y la proporción del Libro V de *Elementos* para obtener una perspectiva de esta. *Grosso modo* esta perspectiva reconoce que la teoría constituye un discurso matemático hipotético deductivo que versa sobre las magnitudes geométricas generalizadas y sobre un tipo de relación establecida entre los tamaños de estas; además trata con la cantidad no numérica y con una relación entre cantidades de esta naturaleza. En su formulación emplea un estilo retórico, el cual se acompaña de una nominación no operativa de las magnitudes y unos diagramas o dibujos que constituyen una representación impropia o no ostensiva de la magnitud generalizada. Sus definiciones centrales son altamente polémicas y admiten variedad de interpretaciones; por ejemplo, la enunciación de la Definición V. 5 ha sido objeto de profundos debates que abarcan posturas sobre la predicación en la misma, la ambigüedad de las formas lógicas de su formulación y su asociación con la definición vía cortaduras de los números reales. Las proposiciones se pueden clasificar en cinco grupos: las que se refieren a las magnitudes y sus múltiplos, las que aluden a cómo el orden de las magnitudes se transfiere al "orden" de las razones, las que describen cómo relaciones entre razones determinan relaciones u operaciones entre magnitudes, las que versan sobre propiedades de las proporciones, y la que exhibe una proporción entre una razón y sus equimúltiplos. Sus pruebas proceden prioritariamente a través del estilo directo, aunque hay algunas que acuden a la reducción al absurdo.

Con este panorama sobre la teoría, establecimos que su estudio puede ofrecer una experiencia de aprendizaje de las Matemáticas que no hace tan altas exigencias de temas matemáticos previos, pero impone unas exigencias especiales pues enfrenta al profesor de Matemáticas a un discurso especial, en tanto: su objeto son las magnitudes geométricas generalizadas, es decir la abstracción que procede de las magnitudes geométricas específicas; el tratamiento es cuantitativo no numérico y relacional, por lo cual no se puede disponer de un registro de representación numérico; no se dispone de una representación simbólica con carácter operativo, aunque sí de un registro gráfico de carácter impropio o no ostensivo para las magnitudes, pero no para sus razones; la comprensión e interpretación de los conceptos centrales de la teoría no es trivial; y la comprensión de los enunciados de las proposiciones de la teoría en general o se logra con el estudio de su enunciado.

Este marco de exigencias constituye una potente base para realizar un trabajo de naturaleza didáctica, para explicitar, estudiar o reflexionar sobre: los niveles de abstracción implicados en la comprensión de una teoría de magnitudes geométricas generalizadas, el carácter no numérico de la cantidad, la excesiva presencia de lo numérico en los currículos de Matemáticas, las dificultades que la ausencia de registros de representación imponen a la comprensión, la posible confusión entre el manejo de la representación con la comprensión de lo representado, el hecho de poder construir una teoría robusta sobre definiciones no precisas o abstrusas, la diferencia entre comprender una propiedad y entender su demostración, advirtiendo las interrelaciones posibles entre estas acciones. Lo anterior constituye una respuesta a la segunda intención recapitulada al inicio de este capítulo.

Asimismo se estudiaron, a modo de recensión, los documentos que versan sobre la historia de la razón y proporción; a través de ello se identificaron seis hitos que se pueden organizar en tres instancias temporalmente definidas: la etapa previa de la teoría, la etapa de formulación de la teoría y la etapa posterior de la teoría.

Al estudiar la etapa previa de la teoría euclidiana de la proporción, se advierte: la existencia de varias “teorías” pre-euclidianas, basadas en diversos objetos y enfoques matemáticos, que involucran lo finito o lo infinito, e incluyen cada una diferentes operaciones para las magnitudes; y, la presencia de múltiples interpretaciones históricas sobre la existencia y autoría de estas teorías, sobre el grado de desarrollo de sus *corpus* teóricos, y sobre las condiciones matemáticas y extra-matemáticas que probablemente promovieron su emergencia. El estudio de la etapa de la formulación de la teoría euclidiana permite percibir: el esfuerzo de los traductores por ser fieles al contenido “original”; el nivel de detalle con el que se estudia un fragmento de la teoría y cómo la integración de estos minuciosos estudios va configurando una compleja visión de la teoría misma; e, ingentes esfuerzos por reescribir la teoría, con la intención de hacerla más comprensible. El estudio de la historia de la etapa posterior a la teoría conlleva reconocer, por ejemplo: el papel de la cultura árabe para apuntalar las bases para la posterior producción matemática en los centros de producción académica europeos; el enorme trabajo que le implicó a la humanidad "extender" la teoría para que pudiera ser empleada en dominios no matemáticos; y, la discusión de si la teoría euclidiana de la proporción preconfiguró la definición de los reales a través de las cortaduras.

La exploración de los resultados obtenidos a propósito de la pregunta sobre para qué el estudio de la historia de la teoría euclidiana de la proporción brinda un panorama prometedor, en tanto que muestra que las diferentes dimensiones o intencionalidades del estudio de la HM a favor del CPM se abordan, a la vez que explicita carencias específicas en algunas de estas.

A partir de esto, se analizó la historia de la teoría euclidiana de la proporción a través de las categorías de análisis para las pregunta qué Historia de las Matemáticas y para qué la Historia de las Matemáticas. El resultado del análisis conduce al reconocimiento de que el estudio de la historia de la teoría euclidiana de la proporción referida en el Libro V de *Elementos*, tiene el potencial para favorecer la visión de la actividad matemática, la visión de las Matemáticas, la visión del conocimiento matemático y la visión del objeto matemático. Asimismo, se reconoce que este estudio tiene el potencial para beneficiar la construcción de una mirada epistemológica y del pensamiento matemático, para constituirse en fuente de insumos para el aula y el currículo, y para promueve algunas competencias personales y profesionales.

Se enfatiza el carácter potencial del estudio de la historia, por cuanto consideramos que es posible estudiar la historia, sin que necesariamente se siga lo referido en las intenciones referidas en el anterior párrafo. Consideramos que el estudio de la historia de la teoría euclidiana, debe estar acompañado de un trabajo de carácter didáctico que tenga como propósito, generar la discusión y reflexión sobre las visiones y artefactos que subyacen en el discurso histórico. Creemos que es papel del didacta de la Historia de las Matemáticas, diseñar las estrategias necesarias para que el estudio del contenido de los documentos conlleve efectivamente el desarrollo de aprendizajes asociados a la profesión docente.

Lo anterior complementa la respuesta asociada a la segunda intención formulada al inicio de este capítulo.

Para finalizar este breve capítulo, debemos señalar que si bien hemos planteado la existencia de la Didáctica de la Historia de las Matemáticas, es necesario acopiar más información investigativa que respalde esta iniciativa. Por otra parte, queda abierto el camino para diseñar, desarrollar y valorar una experiencia de intervención con futuros profesores de Matemáticas o profesores en ejercicio, en torno a la historia de la teoría euclidiana de la proporción, a través de la cual se logre evidencia empírica que respalde los resultados encontrados en esta investigación. Igualmente, entrevemos que los estudios de la relación "Historia de las Matemáticas – Conocimiento del profesor de Matemáticas" pueden aportar a cualificar y mejorar los modelos del conocimiento del profesor que se han propuesto desde la investigación y que no incorporan sustancialmente el componente histórico.

Referencias

Abdeljaouad, M. (2012). Teaching European mathematics in the Ottoman Empire during the eighteenth and nineteenth centuries: between admiration and rejection. *ZDM, 44*(4), 483-498. doi: 10.1007/s11858-012-0381-6

Acerbi, F. (2003a). Drowning by Multiples. Remarks on the Fifth Book of Euclid's Elements, with Special Emphasis on Prop. 8. *Archive for History of Exact Sciences, 57*(3), 175-242.

Acerbi, F. (2003b). Drowning by Multiples: Remarks on the Fifth Book of Euclid's Elements, with Special Emphasis on Prop.8. *Archive for History of Exact Sciences, 57*(3), 175. doi: 10.1007/s00407-002-0061-y

Alpaslan, M., Işıksal, M., & Haser, Ç. (2014). Pre-service Mathematics Teachers' Knowledge of History of Mathematics and Their Attitudes and Beliefs Towards Using History of Mathematics in Mathematics Education. *Science & Education, 23*(1), 159-183. doi: 10.1007/s11191-013-9650-1

Alsina Català, C. (2010). *El club de la hipotenusa. Un paseo por la Historia de las Matemáticas a través de sus anécdotas más divertidas*. México, D.F.: Ediciones Culturales Paidós, S.A.

Álvarez Jiménez, C. (s.f). *Razones y variaciones. El papel de la teoría de proporciones en el estudio galileano del movimiento*. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UNAM. México, D. F.

Allen, H. D. (2000). Gauss. [Book Review]. *Mathematics Teacher, 93*(8), 726.

An, S., Kulm, G., & Wu, Z. (2004). The Pedagogical Content Knowledge of Middle School, Mathematics Teachers in China and the U.S. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(2), 145-172.

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 8*(1), 30-46.

Aranda Ballesteros, F. D., & Gómez Lara, M. (2011). Algunos hechos históricos en la resolución de problemas, sobre el origen del cálculo integral. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 155-164.

Arboleda, L. C. (1984). Historia y enseñanza de las matemáticas. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 1*(2), 167-194.

Arcavi, A. (1991). The experience of history in mathematics education: Two benefits of using history. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 11.

Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1982). Maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 3*(1), 30-37.

Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1987). History of Mathematics for teachers: the case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 7*(2), 18-23.

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 111-129.

Askew, M. (2008). Mathematical Discipline Knowledge Requeriments for Prospective Primary Teachers, and the Structure and Teaching Approaches of Programs Designed to Develop that Knowledge. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (Vol. 1, pp. 13-35). Rotterdam: Sense Publishers.

Aujac, G. (1986). Le rapport di isou (Euclide V, definition 17): Definition, utilisation, transmission. *Historia Mathematica, 13*(4), 370-386.

Bagni, G. T. (2004). Prime numbers are infinitely many: Four proofs from history for mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 21-36.

Bagni, G. T. (2008). A Theorem and Its Different Proofs: History, Mathematics Education, and the Semiotic-Cultural Perspective. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8*(3), 217-232.

Ball, D. L. (1988). The Subject Matter Preparation of Prospective Mathematics Teachers: Challenging the Myths: National Center for Research on Teacher Education, 116 Erickson Hall, College of Education, Michigan State University, East Lansing, MI 48824-1034.

Barabash, M., & Guberman-Glebov, R. (2004). Learning-and-teaching project in the history of mathematics for pre-service teachers: Educational and multicultural enrichment of their academic curriculum. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 73-88.

Barbin, É. (1991). The experience of history in mathematics education: The Reading of original texts: how and why to introduce a historical perspective. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 12-13.

Barbin, É. (1996). The role of problems in the history of mathematics and mathematics teaching. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 17-25). Washington: Mathematical Association of America.

Barbin, É. (2000). The Historicity of the Notion of What is Obvious in Geometry. In V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 89-98). Washington: Mathematical Association of America.

Barbin, É. (2007). On the argument of simplicity in Elements and schoolbooks of Geometry. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 225-242.

Barbin, É., Bagni, G., Grugnetti, L., Kronfellner, M., Lakoma, E., & Menghini, M. (2000). Integrating history: research perspectives In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 63-90). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Barbin, É., & Bénard, D. (Eds.). (2007). *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigueurs, erreurs, raisonnements*. Clermont-Ferrand: Institut National de Recherche Pédagogique Université Blaise-Pascal de Clermont-Ferrand (IREM).

Barbin, É., Stehlikova, N., & Tzanakis, C. (Eds.). (2008). *Proceedings of the 5th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*. Prague: Vydavatelsky servis, Plzeñ.

Bardin, L. (1986). *Análisis de contenido*: Ediciones Akal.

Barnett, J., Lodder, J., & Pengelley, D. J. (2014). The Pedagogy of Primary Historical Sources in Mathematics: Classroom Practice Meets Theoretical Frameworks. *Science & Education, 23*(1), 7-27. doi: 10.1007/s11191-013-9618-1

Barón Bocanegra, O., & Barragán Sánchez, P. J. (2013). *Una teoría antigua vista con los ojos de hoy: influencia sobre el profesor de Matemáticas.* Licenciatura en Matemáticas Trabajo de grado no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Barrow-Green, J. (1998). History of mathematics: resources on the World Wide Web. *Mathematics in School, 27*(4), 16-22.

Barry, D. T. (2000). Mathematics in search of history. *Mathematics Teacher, 93*(8), 647-650.

Bartolini Bussi, M., & Maschietto, M. (2008). Machines as Tools in Teacher Education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (Vol. 2, pp. 183-208). Rotterdam: Sense Publishers.

Baumgart, J. K. (1994). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Álgebra* (H. H. Domingues, Trans. Vol. 4). Sao Paulo: Atual Editora Ltda.

Baumgart, J. K., Deal, D. E., Vogeli, B. R., & Hallerberg, A. E. (1969). Preface *Historical Topics for the Mathematics Classroom. Thirty-first Yearbook* (pp. ix-xiv). Washington, D.C.: National Council of Teacher of Mathematics.

Becker, O. (1933). Eudoxus-Studien I: Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Phyik B. II* (pp. 311-330): Springer- Verlag. (Reprinted from: Jean Christianidis, ed. Classics in the history of Greek Mathematics, Boston Studies in the Philosophie of Science, vol. 240, Dordrecht/Boston: 2004, 191–209).

Belisario, A., & González, F. E. (2012). Historia Social de la Educación Matemática en Iberoamérica. Historia de la Matemática, Educación Matemática e Investigación en Educación Matemática. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 31*, 161-182.

Berghout, R. F. (1974). The Historical Development of Magnitudes, Ratios and Proportions. *Australian Mathematics Teacher, 30*(5), 184-196.

Berghout, R. F. (1975). The Historical Development of Magnitudes, Ratios and Proportions. *Australian Mathematics Teacher, 31*(2), 66-76.

Berlinghoff, W. P., & Gouvêa, F. Q. (2004). *Math through the Ages. A Gentle History for Teacher and Others* (Expanded Edition ed.). Washington & Farmington: Oxton House Piblishers & The Mathematical Association of America.

Bero, P. (1996). Pupils' perception of the continuum In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 303-307). Washington: Mathematical Association of America.

Biard, J. (2003). Mathématiques et philosophie dans les "Questions" de Blaise de Parme sur le "Traité des rapports" de Thomas Bradwardine. *Revue d'histoire des sciences, 56*(2), 383-400. doi: 10.2307/23634023

Bishop, A. J. (2001). Lo que una perspectiva cultural nos cuenta sobre la historia de las matemáticas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 26*, 61-72.

Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2014). Obstacles and Affordances for Integer Reasoning: An Analysis of Children's Thinking and the History of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(1), 19-61.

Bkouche, R. (1997). Epistémologie, histoire et enseignement de mathématiques. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(1), 34-42.

Bkouche, R. (2000). Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science. *Repères - IREM, 39*, 35-59.

Blanco, L. (2004). Problem Solving and the Initial Practical and Theoretical Education of Teachers in Spain. *Mathematics Teacher Education and Development, 6*, 31-42.

Blanton, M. L. (2002). Using an undergraduate geometry course to challenge pre-service teachers' notions of discourse. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(2), 117-152.

Boero, P. (1989). Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 2*, 17-28.

Boero, P., & Guala, E. (2008). Development of Mathematical Knowledge and Beliefs of Teachers: The Role of Cultural Analysis of the Content to be Taught. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (Vol. 1, pp. 223-244). Rotterdam: Sense Publishers.

Bongiovanni, V. (2005). As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido "a teoria das proporções e o método de exaustão". *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática 2*, 91-110.

Bonsangue, M. V. (2000). A mathematical mystery tour. [Book Review]. *Mathematics Teacher, 93*(8), 726.

Bos, H. J. M. (1984). Mathematics and its social context; a dialogue in the staff room, with historical episodes. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 4*(3), 2-9.

Boyer, C. B. (1993). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Cálculo* (H. H. Domingues, Trans. Vol. 6). Sao Paulo: Atual Editora Ltda.

Bradwardine, T., & Crosby, H. L. (1955). *Thomas of Bradwardine, his Tractatus de proportionibus; its significance for the development of mathematical physics*. Madison,: University of Wisconsin Press.

Bradwardine, T., Rommevaux, S., & Oresme, N. (2009). *Traité des rapports entre les rapidités dans les mouvements*. Paris: Les Belles lettres.

Brentjes, S. (2001). Two comments on Euclid's Elements? On the relation between the Arabic text attributed to al-Nayrızı and the Latin text ascribed to Anaritius. *Centaurus, 43*(1), 17-55. doi: 10.1034/j.1600-0498.2001.t01-1-430102.x

Brentjes, S. (2008). Elements: Reception of Euclid's Elements in the Islamic World. In H. Selin (Ed.), *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures* (pp. 741-743): Springer Netherlands.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? Primera Parte. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 8*(3), 259-268.

Brown, D. (2003). The School of Pythagoras. *Mathematics in School, 32*(1), 29-34.

Brown, G. (1991). The experience of history in mathematics education: Integrating the history and philosophy of math into core curriculum math courses from a cultural and humanistic viewpoint. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 13-14.

Bruckheimer, M., & Arcavi, A. (2000). Mathematics and its History: An Educational Partnership. In V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 135-146). Washington: Mathematical Association of America.

Buendia Abalos, G., & Montiel Espinosa, G. (2011). From History to Research in Mathematics Education: Socio-Epistemological Elements for Trigonometric Functions. In V. J. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (1 ed., Vol. 78, pp. 67-82): Mathematical Association of America.

Buendia, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periodico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(2), 227-252.

Buendía, G. (2008). Historia y Pedagogía de las Matemáticas (HMP 2008). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20*(3), 125-127.

Burn, B. (2003). The hyperbola: some 17th century arguments. *Mathematics in School, 32*(1), 27-28.

Burn, R. P. (1998a). Is the number line full? *Mathematics in School, 27*(4), 55.

Burn, R. P. (1998b). Napier's logarithms. *Mathematics in School, 27*(4), 32-33.

Busard, H. L. L. (1996). Einiges über die Handschrift Leiden 399,1 und die arabisch-lateinische Ü bersetzung von Gerhard von Cremona. In J. Dauben, M. Folkerts, E. Knobloch & H. Wussing (Eds.), *History of Mathematics: States of the Art* (pp. 173-205). San Diego: Academic Press.

Byers, V. (1982). Why study the history of mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 13*(1), 59 - 66.

Cable, J. (2014). La Meme Chose: How Mathematics Can Explain the Thinking of Children and the Thinking of Children Can Illuminate Mathematical Philosophy. *Science & Education, 23*(1), 223-240. doi: 10.1007/s11191-013-9628-z

Cajori, F. (1928). Ciruelo on the Names "Arithmetical" and "Geometrical" Proportions and Progressions. *Isis, 10*(2), 363-366.

Calinger, R. (Ed.). (1996). *Vita mathematica. Historical research and integration with teaching*. [Washington, D.C.]: Mathematical Association of America.

Camp, D. R. (2000). Benoit Mandelbrot: the Euclid of fractal geometry. *Mathematics Teacher, 93*(8), 708-712.

Campistrous, L. A., López Fernández, J. M., & Rizo Cabrera, C. (2011). Historia y didáctica: el caso del escrito de L'Hôpital Analyse des Infiniment Petits pour L'intelligence Des lignes Courbes. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 51-64.

Campos, A. (1994a). *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá.

Campos, A. (1994b). *Introducción a la Lógica y la Geometría griegas anteriores a Euclides*. Bogotá.

Cantoral, R., Fasanelli, F., Garciadiego, A., Stein, B., & Tzanakis, C. (Eds.). (2008). *Proceedings of HPM 2008, The satellite meeting of ICME 11*. Mexico City: CDROM.

Cardeñoso, J. M., Flores, P., & Azcárate, C. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación. In P. Gómez & L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Granada: Universidad de Granada.

Carss, M. (Ed.). (1986). *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education*. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

Carvalho, J. B. P., & Dassie, B. A. (2012). The history of mathematics education in Brazil. *ZDM, 44*(4), 499-511. doi: 10.1007/s11858-012-0439-5

Castañeda, A. (2002). Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológíca *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 5*(1), 27-44.

Caveing, M. (1994). La proportionnalité des grandeurs dans la doctrine de la nature d'Aristote. *Revue d'histoire des sciences, 47*(2), 163-188.

CBMS. (2001). *The Mathematical Education of Teachers*: American Mathematical Society - Mathematical Association of America.

CBMS. (2012). *The Mathematical Education of Teachers II*: American Mathematical Society - Mathematical Association of America.

Celeyrette, J. (2008). Bradwardine'S Rule: A Mathematical Law? In W. Laird & S. Roux (Eds.), *Mechanics and Natural Philosophy Before the Scientific Revolution* (Vol. 254, pp. 51-66): Springer Netherlands.

Celeyrette, J., & Mazet, E. (2003). Le mouvement du point de vue de la cause et le mouvement du point de vue de l'effet dans le "Traité des rapports" d'Albert de Saxe. *Revue d'histoire des sciences, 56*(2), 419-437. doi: 10.2307/23634025

Clark, K. M. (2011). Reflections and Revision: Evolving Conceptions of a Using History Course. In V. J. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (1 ed., Vol. 78, pp. 211-220): Mathematical Association of America.

Clark, K. M. (2012). History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics, 81*(1), 67-84. doi: 10.1007/s10649-011-9361-y

Clark, K. M. (2014). History of Mathematics in Mathematics Teacher Education. In R. M. Matthews (Ed.), *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching* (pp. 755-791). Dordrecht: Springer Netherlands.

Cooper, M. (1992). Who Named the Radian? *The Mathematical Gazette, 76*(475), 100-101.

Cordero, F., & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. (Spanish). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Corry, L. (1994). La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 10*(1), 1-24.

Cortez Godinez, R. A., Ponce Ocegueda, C. E., Flores Robles, J. F., Muñoz Carrillo, S., & Reynaga Luna, C. M. (2009). Historia, Matemáticas y Profesores en la UAN. In P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 22, pp. 1529-1533). México, D.F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cousquer, É. (1994, 27-28 mai). *De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels.* Paper presented at the 10ème colloque Inter-IREM d'épistémologie & d'histoire des mathématiques. La mémoire des nombres, Université de Caen - Cherbourg.

Craik, A. D. D. (2009). A proportional view: The mathematics of James Glenie (1750-1817). *Historia Mathematica, 36*(3), 247-272.

Crilly, T. (1992). A Gemstone in Matrix Algebra. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 182-188.

Curchin, L., & Fischler, R. (1981). Hero of Alexandria's Numerical Treatment of Division in Extreme and Mean Ratio and Its Implications. *Phoenix, 35*(2), 129-133. doi: 10.2307/1087332

Chan, Y.-C., & Siu, M.-K. (2012). Facing the change and meeting the challenge: mathematics curriculum of Tongwen Guan in China in the second half of the nineteenth century. *ZDM, 44*(4), 461-472. doi: 10.1007/s11858-012-0427-9

Charalambous, C., Panaoura, A., & Philippou, G. (2009). Using the history of mathematics to induce changes in preservice teachers' beliefs and attitudes: insights from evaluating a teacher education program. *Educational Studies in Mathematics, 71*(2), 161-180.

Charbonneau, L., & Fernández, S. (1998). History of Mathematics and the Teaching of Mathematics. In C. Alsina, J. M. Álvarez, M. Niss, A. Pérez, L. Rico & A. Sfard (Eds.), *Proceedings of 8th International Congress of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 339). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Charette, R. J. (2004). Integrating the history of mathematics in the teaching of mathematics: A possible link between Pythagoras and King Tut. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 115-124.

Chassapis, D. (2007). Integrating the Philosophy of Mathematics in Teacher Training Courses *Philosophical Dimensions in Mathematics Education* (pp. 61-79).

Chassapis, D., & Kotsakosta, M. (2003). Crossing the Bridges of Konigsberg in a Primary Mathematics Classroom. *Mathematics in School, 32*(1), 11-13.

Chechile, R. A. (2006). From calculus to computers: Using the last 200 years of mathematics history in the classroom. *Journal of Mathematical Psychology, 50*(6), 584-584.

Chelma, K. (2012). *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*. New York: Cambridge University Press.

Chevallard, Y., & Joshua, M. A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique. La notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3*(1), 159-239.

Chinnappan, M. (2003). Schema Construction among Pre-Service Teachers and the Use of IT in Mathematics Teaching: A Case Study. *Mathematics Teacher Education and Development, 5*, 32-44.

Chinnappan, M., & Lawson, M. J. (2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 197-221.

Christianidis, J. (1998). Une interpretation byzantine de Diophante. *Historia Mathematica, 25*(1), 22-28.

D'Ambrosio, U., & Lázsló, F. (1988). International Study Group on the relations between History and Pedagogy of Mathematics (HPM). In A. Hirst & K. Hirst (Eds.), *Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education* (pp. 389-391). Budapest: János Bolyai Mathematical Society.

D'Ambrosio, U. (2009). Some Reflections on Education, Mathematics, and Mathematics Education. In R. Even & D. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 239-244). New York: Springer Science+Business Media.

d'Enfert, R. (2012). Mathematics teaching in French écoles normales primaires, 1830–1848: social and cultural challenges to the training of primary school teachers. *ZDM, 44*(4), 513-524. doi: 10.1007/s11858-012-0416-z da Ponte, J. P., Oliveira, H., & Varandas, J. M. (2002). Development of pre-service mathematics teachers' professional knowledge and identity in working with information and communication technology. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(2), 93-115.

Darden, L. (1991). *Theory Change in Science: Strategies from Mendelian Genetics*. New York: Oxford University Press.

Davis, B. (1999). Basic irony: Examining the foundations of school mathematics with preservice teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(1), 25-48.

Davitt, R. M. (2000). The evolutionary character of mathematics. *Mathematics Teacher, 93*(8), 692-694.

De Groot, J. (2000). Aspects of Aristotelian statics in Galileo's dynamics. *Studies In History and Philosophy of Science Part A, 31*(4), 645-664.

de la Fuente Martínez, C. (2011). Historia de las matemáticas e investigaciones matemáticas en secundaria. Algunos fundamentos y ejemplos para la clase. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 133-151.

de la Torre, A. (1997). *Anotaciones a una lectura de Arquímedes*. Medellín: Universidad de Antioquia.

De Morgan, A. (1836). *The connexion of number and magnitude: an attempt to explain the fifth book of Euclid*. London: Taylor and Walton.

de Parme, B. (2005). *Questiones circa Tractatum Proportionum Magistri Thome Braduardini*. Paris: Vrin.

De Young, G. (1984). The Arabic textual traditions of Euclid's elements. *Historia Mathematica, 11*(2), 147-160.

De Young, G. (1992). Ishaq ibn Hunayn, Hunayn ibn Ishaq, and the third Arabic translation of Euclid's Elements. *Historia Mathematica, 19*(2), 188-199.

De Young, G. (1995). Euclidean geometry in the mathematical tradition of Islamic India. *Historia Mathematica, 22*(2), 138-153.

De Young, G. (2005). Diagrams in the Arabic Euclidean tradition: A preliminary assessment. *Historia Mathematica, 32*(2), 129–179.

Deakin, M. (2001). Using History to teach mathematics. *ZDM, 33*(5), 137-138.

del Río Sánchez, J. (1997). Historia de la Matemática: implicaciones didácticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 26*, 33-38.

Despeaux, S. E. (2014). Collective Research Projects in the History of Mathematics Classroom. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 24*(8), 684-697. doi: 10.1080/10511970.2014.905810

Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire*. Paris: CEDIC/FERNAND NATHAN.

Dhombres, J., & Giusti, E. (1989). Ratio La theorie des proportions de l'antiquite au XIXeme siecle : Trento, Italia, 9-13 Janvier 1989. *Historia Mathematica, 16*(1), 88-89.

Dhombres, J., & Giusti, E. (1990). Colloque: Ratio--La theorie des proportions de l'Antiquite au XIXeme siecle : Centro Internazionale per la Ricerca Matematica, Trento, 9-13 janvier 1989. *Historia Mathematica, 17*(1), 73-75.

Díaz Fernández, L. M., & Moreno Escobar, K. L. (2012). *Caracterización de la régula falsa como método de solución de ecuaciones de primer grado* Licenciatura en Matemáticas Trabajo de grado no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Dimitric, R. M. (2001). Using less calculus in teaching calculus: an historical approach. *Mathematics Magazine, 74*(3), 201-211.

Downes, S. (1997). Women mathematicians--male mathematics: a history of contradiction? *Mathematics in School, 26*(3), 26-27. doi: 10.2307/30215286

Drake, S. (1973). Medieval Ratio Theory vs Compound Medicines in the Origins of Bradwardine's Rule. *Isis, 64*(1), 67-77. doi: 10.2307/229870

Duckworth, G. E. (1962). *Structural Patterns and Proportions in Vergil's Aeneid: A Study in Mathematical Composition*: University of Michigan Press.

Dummett, M. (1991). *Frege. Philosophy of Mathematics*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Eagle, R. (1998). A typical slice. *Mathematics in School, 27*(4), 37-39.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education* (1st Edition ed.): Routledge.

Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in School, 27*(4), 25-31.

Ernest, P. (Ed.). (1994). *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective* (Vol. 3). London: The Falmer Press.

Estepa Castro, A., Gea Serrano, M. M., Cañadas de la Fuente, G. R., & Contreras García, J. M. (2012). Algunas notas históricas sobre la correlación y regresión y su uso en el aula. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 81*, 5-14.

Euser, M. (2000). Pythagorean Triangles and Musical Proportions. *Nexus Network Journal, 2*(1-2), 33-40. doi: 10.1007/s00004-999-0006-8

Evans, G. (1927). The Greek Idea of Proportion *The American Mathematical Monthly, 34*(7), 354-357.

Even, R. (1999). The Development of Teacher Leaders and Inservice Teacher Educators. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(1), 3-24.

Even, R., & Ball, D. L. (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study* Springer.

Eves, H. (1994). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Geometría* (H. H. Domingues, Trans. Vol. 3). Sao Paulo: Atual Editora Ltda.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 66*(1), 83-106.

Fauvel, J. (1991a). Editorial. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 2.

Fauvel, J. (1991b). Using History in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 3-6.

Fauvel, J. (1992). Mathematical People: John Fauvel. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 199-203.

Fauvel, J. (1998). Algorithms in the pre-calculus classroom: who was Newton-Raphson? *Mathematics in School, 27*(4), 45-47.

Fauvel, J., Cousquer, É., Furinghetti, F., Heiede, T., Lit, C., Smid, H., . . . Tzanakis, C. (2000). Bibliography for further work in the area In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 371-418). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (1997a). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics. *ZDM, 29*(4), 138-140.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (1997b). The role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics: Discussion Document for an ICMI Study (1997-2000). *Mathematics in School, 26*(3), 10-11. doi: 10.2307/30215282

Fauvel, J., & van Maanen, J. (1997c). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics: Discussion Document for an ICMI Study (1997–2000). *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 255-259.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Fenaroli, G., Furinghetti, F., & Somaglia, A. (2014). Rethinking Mathematical Concepts with the Lens of the History of Mathematics: An Experiment with Prospective Secondary Teachers. *Science & Education, 23*(1), 185-203. doi: 10.1007/s11191-013-9651-0

Fernandez, E. (1994). A Kinder, Gentler Socrates: Conveying New Images of Mathematics Dialogue. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 14*(3), 43-47.

Fernández Fernández, S. (1988). La proporción y la Historia de las Matemáticas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 18*, 45-49.

Fernández Fernández, S. (2001). La historia de las matemáticas en el aula. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 26*, 9-27.

Fernández González, M., & Rondero Guerrero, C. (2004). El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(2), 145-156.

Ferrari, M., y Farfán, R.M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logaritmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 309-354.

Fett, B. (2006). An In-depth Investigation of the Divine Ratio. *Montana Mathematics Enthusiast, 3*(2), 157-175.

Filep, L. (1999). Pythagorean side and diagonal numbers. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 15*, 1-7.

Filep, L. (2003). Proportion Theory in Greek Mathematics. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 19*, 167-174.

Filep, L. (2004). *How the Greeks might have discovered and aproximate irrational numbers*. Paper presented at the 3rd Conference on History of Mathematics and Teaching of Mathematics, Miskolc.

Fine, H. (1917). Ratio, Proportion and Measurement in the Elements of Euclid. *The Annals of Mathematics, Second Series, 19*(1), 70-76.

Fiss, A. (2014). Cultivating Parabolas in the Parlor Garden: Reconciling Mathematics Education and Feminine Ideals in Nineteenth-Century America. *Science & Education, 23*(1), 241-250. doi: 10.1007/s11191-013-9638-x

Foley, G. D. (2000). Notable mathematicians. [Book Review]. *Mathematics Teacher, 93*(8), 726-728.

Fowler, D. H. (1979). Ratio in Early Greek Mathematics. *Bulletin (New Series) of the Amrican Mathematical Society, 1*(6), 807-846.

Fowler, D. H. (1980). Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio. *Archive for History of Exact Sciences, 22*(1), 5-36.

Fowler, D. H. (1981). Anthyphairetic ratio and Eudoxan proportion. *Archive for History of Exact Sciences, 24*(2), 69-72.

Fowler, D. H. (1982a). Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio part 2: Sides and diameters. *Archive for History of Exact Sciences, 26*(3), 193-209.

Fowler, D. H. (1982b). A generalization of the golden section. *Fibonacci Quart, 20*(2), 146-158.

Fowler, D. H. (1991). The experience of history in mathematics education: Perils and pitfalls of history. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 15-16.

Fowler, D. H. (1992). A Final-Year University Course on the History of Mathematics: Actively Confronting the Past. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 46-48.

Fowler, D. H. (1999). *The Mathematics of Plato' Academy: A New Reconstruction* (2 ed.). Oxford Oxford University Press.

Fowler, D. H., & Rawlins, D. (1983). Eratosthenes' Ratio for the Obliquity of the Ecliptic. *Isis, 74*(4), 556-562. doi: 10.2307/232212

François, K., & Van Bendegem, J. P. (Eds.). (2007). *Philosophical Dimensions in Mathematics Education* (Vol. 42): Springer.

French, D. (1997). New sins for old sines. *Mathematics in School, 26*(3), 23-25. doi: 10.2307/30215285

Freudenthal, H. (1981). Should a Mathematics Teacher Know Something about the History of Mathematics? *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 2*(1), 30-33.

Fried, M. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education, 10*(4), 391-408.

Fried, M. (2007). Didactics and History of Mathematics: Knowledge and Self-Knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 203-223.

Frykholm, J. A. (1999). The Impact of Reform: Challenges for Mathematics Teacher Preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*(1), 79-105.

Führer, L. (1991). Historical stories in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 24-31.

Führer, L. (1992). Historical Stories in the Mathematics Classroom. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 127-138.

Fung, C.-I. (2004). How history fuels teaching for mathematising: Some personal reflections. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 125-146.

Furinghetti, F. (1992). The Ancients and the Approximated Calculation: Some Examples and Suggestions for the Classroom. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 139-142.

Furinghetti, F. (1997). History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies in Linking Different Domains. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(1), 55-61.

Furinghetti, F. (2000). The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 43-51.

Furinghetti, F. (2004). History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 1-20.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 131-143.

Furinghetti, F., & Barnett, C. (1998). Teacher Education Around the World. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(3), 341-356.

Furinghetti, F., & Giacardi, L. (2012). Secondary school mathematics teachers and their training in pre- and post-unity Italy (1810–1920). *ZDM, 44*(4), 537-550. doi: 10.1007/s11858-012-0396-z

Furinghetti, F., Kaijer, S., & Vretblad, A. (Eds.). (2004). *Proceedings of the HPM 2004: History and Pedagogy of Mathematics ICME 10 Satellite Meeting and 4th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*. Uppsala: Uppsala University.

Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). History as a Crossroads of Mathematical Culture and Educational Needs in the Classroom. *Mathematics in School, 32*(1), 37-41.

Furinghetti, F., & Somaglia, A. (1998). History of mathematics in school across disciplines. *Mathematics in School, 27*(4), 48-51.

Gagatsis, A., & Thomaidis, I. (1993). Le concept de valeur absolue, une étude multidimensionnelle. *PLOT, 67*, 12-16.

Gálvez Socarrás, A. M., & Maldonado Guinea, A. F. (2012). *El papel de la historia de la Aritmética en un curso de Didáctica para la formación inicial de profesores.* Maestría en Docencia de la Matemática Tesis no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Gandon, S. (2009). La théorie des rapports chez Augustus De Morgan. *Revue d'histoire des sciences, 62*(1), 285-311. doi: 10.2307/23634494

Gardies, J.-L. (1988). *L'Héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Un essai de reconstitution*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Gardies, J.-L. (1991). La proposition 14 du livre V dans l'économie des "Eléments" d'Euclide. *Revue d'histoire des sciences, 44*(3/4), 457-467. doi: 10.2307/23632874

Gardies, J.-L. (1997). *L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Gardies, J.-L. (2004). *Du mode d'existence des objects de la mathématique*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Gardiner, T. (1992a). Once upon a Time. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 143-150.

Gardiner, T. (1992b). Rigorous Thinking and the Use of Instruments. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 179-181.

Gardner, J. H. (1991). How Fast Does the Wind Travel?;: History in the Primary Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 17-20.

Gazit, A. (2013). What do mathematics teachers and teacher trainees know about the history of mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(4), 501-512. doi: 10.1080/0020739x.2012.742151

Giusti, E. (2008). La théorie des proportions au XVe siécle: entre philologie et mathématiques. In P. Radelet-de Grave (Ed.), *Liber Amicorum Jean Dhombres* (pp. 173-193). Louvain-la-Neuve: Breplos Publisher.

Glenie, J. (1777). The General Mathematical Laws Which Regulate and Extend Proportion Universally; Or, a Method of Comparing Magnitudes of Any Kind Together, in All the Possible Degrees of Increase and Decrease. By James Glenie, A. M. and Lieutenant in the Royal Regiment of Artillery. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 67*(ArticleType: research-article / Full publication date: 1777 /), 450-457. doi: 10.2307/106247

Goldstein, J. A. (2000). A Matter of Great Magnitude: The Conflict over Arithmetization in 16th-, 17th-, and 18th-Century English Editions of Euclid's Elements Books I Through VI (1561-1795). *Historia Mathematica, 27*(1), 36-53.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 9-22.

González Astudillo, M. T. (2011). Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de L'Hôpital. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 83-97.

González Urbaneja, P. M. (1991). Historia de la matemática, integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 9*(3), 28 21-289.

González Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*(45), 17-28.

González Urbaneja, P. M. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. La teoría de la proporción y el método de exhaución. *Sigma*(33), 101-129.

Goulding, M., Hatch, G., & Rodd, M. (2003). Undergraduate mathematics experience: Its significance in secondary mathematics teacher preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(4), 361-393.

Grant, E. (1960). Nicole Oresme and His De Proportionibus Proportionum. *Isis, 51*(3), 293-314. doi: 10.2307/226509

Grant, E. (1972). Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions. A treatise on the uniformity and difformity of intensities known as `tractatus de configurationibus qualitatum et motuum' : Marshall Clagett (ed. and tr.), edited with an introduction, English translation and commentary by Marshall Clagett. University of Wisconsin Press: Madison, Milwaukee, 1968; and London, 1969. xiii+713pp. [pound sign]7.75. *Studies In History and Philosophy of Science Part A, 3*(2), 167-182.

Grant, E. (1975). Nicole Oresme and the commensurability or incommensurability of the celestial motions. *Archive for History of Exact Sciences, 1*(4), 420-458.

Grattan-Guinness, I. (1978). On the relevance of the history of mathematics to mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 9*(3), 275 - 285.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them? *Historia Mathematica, 23*(4), 355-375.

Grattan-Guinness, I. (1997). Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid'sElements: How Did He Handle Them?: Volume 23, Number 4 (1996), pages 355-375. *Historia Mathematica, 24*(2), 213-213.

Grattan-Guinness, I. (2004a). History or Heritage? An Important Distinction in Mathematics and for Mathematics Education. *American Mathematical Monthly, 111*(1), 1-12.

Grattan-Guinness, I. (2004b). The mathematics of the past: Distinguishing its history from our heritage. *Historia Mathematica, 31*(2), 163–185.

Gravemeijer, K. (2008). RME Theory and Mathematics Teacher Education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (Vol. 2, pp. 283-302). Rotterdam: Sense Publishers.

Gray, S. B. (2000). Mathematics in the age of Jane Austen: essential skills of 1800. *Mathematics Teacher, 93*(8), 670-679.

Griesel, H. (2007). Reform of the construction of the number system with reference to Gottlob Frege. *ZDM, 39*(1), 31-38.

Grosholz, E. (1987). Some uses of proportion in Newton's principia, book I: A case study in applied mathematics. *Studies In History and Philosophy of Science Part A, 18*(2), 209-220.

Grossman, P. L. (1990). *The Making of a Teacher. Teacher Knowledge and Teacher Education*. New York Teachers College, Columbia University. .

Groth, R. E. (2005/2006). Analysis of an Online Case Discussion about Teaching Stochastics. *Mathematics Teacher Education and Development, 7*, 53–71.

Grugnetti, L. (2000). The History of Mathematics and its Influence on Pedagogical Problems. In V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 29-35). Washington: Mathematical Association of America.

Guacaneme, E. A. (2000). ¿Es posible "sumar" razones? *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 5*(3), 284-289.

Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.* Magister en Educación - Énfasis en Educación Matemática Tesis no publicada, Universidad del Valle, Cali.

Guacaneme, E. A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en los textos escolares de matemáticas. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 7*(1), 3-42.

Guacaneme, E. A. (2003). Estudio de la variación conjunta en la identificación de funciones. In G. Pentagogía (Ed.), *Matemática educativa: Fundamentos de la matemática universitaria* (pp. 129-136). Bogotá: Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería.

Guacaneme, E. A. (2006). *El conocimiento histórico en la formación integral de un profesor de matemáticas: Estudio del caso de la proporcionalidad*. Anteproyecto.

Guacaneme, E. A. (2007a). *La Historia de las matemáticas y el conocimiento histórico de las Matemáticas* Ensayo no publicado. Universidad del Valle.

Guacaneme, E. A. (2007b). *La razón y la proporción en la Historia de las Matemáticas*. Paper presented at the XVIII Encuentro de Geometría y sus aplicaciones y VI Encuentro de Aritmética, Bogotá, Colombia.

Guacaneme, E. A. (2009). *Dificultades para precisar el conocimientos disciplinar del profesor de matemáticas*. Ensayo.

Guacaneme, E. A. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista Virtual Educyt, 2*, 136-148.

Guacaneme, E. A. (2011). *La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones*. Paper presented at the XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife - Brasil.

Guacaneme, E. A. (2012a). Aspectos de la teoría euclidiana de la proporción que favorecen la educación del profesor de Matemáticas. In L. Sosa Moguel, E. Aparicio Landa & F. M. Rodríguez Vásquez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Desarrollo de la Matemática Educativa y los Cimates* (pp. 3-11). México, D. F.: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Guacaneme, E. A. (2012b). *La educación del profesor como campo de investigación*. Paper presented at the X Encuentro de Matemáticas Aplicada & VII Encuentro de Estadística, San José de Cúcuta.

Guacaneme, E. A. (2012c). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. In O. L. León (Ed.), *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (pp. 99-135). Bogotá: Fondo de Publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Guacaneme, E. A. (2012d). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor? *Revista TED. Tecné, Episteme y Didaxis, 31*, 113-131.

Guacaneme, E. A. (2013a). Conflictos para precisar el conocimiento disciplinar del profesor de Matemáticas. In C. Dolores Flores, M. d. S. García González, J. A. Hernández Sánchez & L. Sosa Guerrero (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 77-95). Chilpancingo, Guerrero: Ediciones Díaz de Santos, S. A.

Guacaneme, E. A. (2013b). Tres ejemplos para discutir la existencia de objetos geométricos. In P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 23-34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Guacaneme, E. A. (2015). ¿Versiones históricas no multiplicativas de la proporcionalidad? In P. R. Scott, Á. Ruiz & S. González (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2015* (Vol. 17: Talleres y minicursos, pp. 380-390). Tuxtla Gutiérrez (México): Comité Interamericano de Educación Matemática.

Guacaneme, E. A., Andrade, L., Perry, P., & Fernández, F. (2003). ¿Confía en sus conocimientos geométricos para construir figuras semejantes? In P. Perry, E. A. Guacaneme, F. Fernández & L. Andrade (Eds.), *Transformar la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer* (pp. 55-92). Bogotá: una empresa docente.

Guacaneme, E. A., Ángel, J. L., & Bello, J. H. (2013). *Una experiencia de formación en "Historia de las Matemáticas en la educación en Matemáticas".* Paper presented at the I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe, Santo Domingo, República Dominicana.

Guacaneme, E. A., & Mora, L. C. (2012a). *El campo "Educación del profesor de Matemáticas"*. Ensayo no publicado. Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Guacaneme, E. A., & Mora, L. C. (2012b). *La educación del profesor de Matemáticas como campo de investigación*. Paper presented at the Primer Simposio Internacional de Educación en competencias docentes, Bogotá, D.C. .

Gulikers, I., & Blom, K. (2001). `A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 223-258.

Gundlach, B. H. (1994). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Números e numerais* (H. H. Domingues, Trans. Vol. 1). Sao Paulo: Atual Editora Ltda.

Guyot, T., Cerizola, N., & Giordano, V. (1993). Matemática e Historia: Una articulación para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 11*(Número Extra), 329-330.

Hadley, J., & Singmaster, D. (1992). Problems to Sharpen the Young. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 102-126.

Heath, T. L. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vol. II. Books III-IX). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Heeffer, A. (2007). Learning Concepts Through the History of Mathematics *Philosophical Dimensions in Mathematics Education* (pp. 83-103).

Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative Numbers: Obstacles in Their Evolution from Intuitive to Intellectual Constructs. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(1), 26-32.

Heiede, T. (1992). Why Teach History of Mathematics? *The Mathematical Gazette, 76*(475), 151-157.

Heiede, T. (1996). History of mathematics and the teacher. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 231-243). Washington: Mathematical Association of America.

Helfgott, M. (1995). Improved teaching of the Calculus through the use of historical materials. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. J. Katz (Eds.), *Learn from the Masters!* (pp. 135-144). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Helfgott, M. (2004). Two examples from the natural sciences and their relationship to the history and pedagogy of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 147-166.

Henry, M. (2000). Evolution and Prospects of Preservice Secondary Mathematics Teacher Education in France. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(3), 271-279.

Hickman, F., & Kapadia, R. (1983). A History of Mathematics course for teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(6), 753 - 761.

Hill, H. c., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. [Feature]. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hill, M. J. M. (1900). *The contents on the fifth and sixth books of Euclid*. London: Cambridge University Press Warehouse.

Hill, M. J. M. (1912a). The Mathematical Association. London Branch. Presidential Address on the Theory of Proportion. *The Mathematical Gazette, 6*(99), 324-332. doi: 10.2307/3605021

Hill, M. J. M. (1912b). Presidential Address on the Theory of Proportion. *The Mathematical Gazette, 6*(100), 360-368.

Hill, M. J. M. (1914). *The Theory of Proportion*. London: Constable and Company Ltd.

Hill, M. J. M. (1923). A Critical Account of Euclid's Exposition of the Theory of Proportion in the Fifth Book of the "Elements". *The Mathematical Gazette, 11*(162), 213-220.

Hill, M. J. M. (1928). The Logical Eye and the Mathematical Eye. Their Outlook on Euclid's Theory of Proportion. Presidential Address to the Mathematical Association, 1928. *The Mathematical Gazette, 14*(193), 36-56.

Hitchcock, G. (1997). Teaching the Negatives, 1870-1970: A Medley of Models. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(1), 17-25, 42.

Hogendijk, J. P. (2002). Anthyphairetic Ratio Theory in Medieval lslamic Mathematics. In Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts & B. van Dalen (Eds.), *From China to*

Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas (pp. 187-202). Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Horn, J., Zamierowski, A., & Barger, R. (2000). Correspondence from mathematicians. *Mathematics Teacher, 93*(8), 688-691.

Horng, W.-S., & Lin, F. L. (Eds.). (2000). *Proceedings of the HPM 2000 Conference History in mathematics education. Challenges for a new millennium*. Taipei: National Taiwan Normal University.

Howson, A. G. (Ed.). (1973). *Developments in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education*. Exeter: Cambridge University Press.

Høyrup, J. (2006). Reviews: Busard, H. L. L., Campanus of Novara and Euclid's Elements (Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 2005), 2 vols. 768 pp. *Centaurus, 48*(4), 329-330. doi: 10.1111/j.1600-0498.2006.00051.x

Høyrup, J. (2007). The roles of Mesopotamian bronze age mathematics tool for state formation and administration – carrier of teachers' professional intellectual autonomy. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 257-271.

Huisjes, J., & Langeland, J. (1992). Wat deed een Egyptenaar 4000 jaar geleden met een differentiaalvergelijking? *Nieuwe wiskrant, 11*(4), 32-35.

Isaac, I., Ram, V. M., & Richards, A. (1996). *A historical approach to developing the cultural significance of mathematics amongst first year preservice primary school teachers.* Paper presented at the HEM Meeting, Braga, Portugal.

Isaac, I., Ram, V. M., & Richards, A. (2000). A Historical Approach to Developing the Cultural Significance of Mathematics Among First Year Pre-Service Primary School Teachers. In V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 123-128). Washington: Mathematical Association of America.

J. (1920). Review: The Theory of Proportion. *Isis, 3*(2), 307. doi: 10.2307/224031

Jahnke, H. N. (1996). Mathematikgeschichte für Lehrer: Gründe und Beispiele. *Mathematische Semesterberichte, 43*, 21-46.

Jankvist, U. T. (2009a). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261.

Jankvist, U. T. (2009b). On empirical research in the field of using History in Mathematics Education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(1), 67-101.

Jankvist, U. T., & Iversen, S. M. (2014). 'Whys' and 'Hows' of Using Philosophy in Mathematics Education. *Science & Education, 23*(1), 205-222. doi: 10.1007/s11191-013-9616-3

Jardine, D., & Shell-Gellasch, A. (Eds.). (2011). *Mathematical Time Capsules. Historical Modules for the Mathematics Classroom*: The Mathematical Association of America.

Jaworski, B., & Wood, T. (Eds.). (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional.* (Vol. 4). Rotterdam: Sense Publishers.

Jiménez, D. (2006). ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, XIII*(1), 87-103.

Joseph, G. G. (1997). What is a square root? A study of geometrical representation in different mathematical traditions. *Mathematics in School, 26*(3), 4-9. doi: 10.2307/30215281

Kahan, J. A., Cooper, D. A., & Bethea, K. A. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: A framework for research applied to a study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(3), 223-252.

Kappraff, J. (2000). The Arithmetic of Nicomachus of Gerasa and its Applications to Systems of Proportion. *Nexus Network Journal, 2*(1-2), 41-56. doi: 10.1007/s00004-999-0007-7

Karp, A. (2012). Soviet mathematics education between 1918 and 1931: a time of radical reforms. *ZDM, 44*(4), 551-561. doi: 10.1007/s11858-012-0430-1

Karp, A., & Schubring, G. (Eds.). (2014). *Handbook on the History of Mathematics Education* New York: Springer.

Katz, V. J. (1986). Using History in Teaching Mathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 6*(3), 13-19.

Katz, V. J. (1993). Using the history of calculus to teach calculus. *Science & Education, 2*(3), 243-249.

Katz, V. J. (1997). Some Ideas on the Use of History in the Teaching of Mathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(1), 62-63.

Katz, V. J. (2000a). The nothing that is. [Book Review]. *Mathematics Teacher, 93*(8), 728.

Katz, V. J. (Ed.). (2000b). *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*: The Mathematical Association of America.

Katz, V. J., & Barton, B. (2007). Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 185-201.

Katz, V. J., Jankvist, U. T., Fried, M. N., & Rowlands, S. (2014). Special Issue on History and Philosophy of Mathematics in Mathematics Education. *Science & Education, 23*(1), 1-6. doi: 10.1007/s11191-013-9660-z

Katz, V. J., & Michalowicz, K. D. (Eds.). (2004). *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics*. Washington: Mathematical Association of America.

Katz, V. J., & Tzanakis, C. (Eds.). (2011). *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*: Mathematical Association of America.

Kellogg, A. (2005). *Integration of the History of Mathematics Into the Elementary Classroom.* Southern Connecticut State University.

Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM, 44*(4), 563-571. doi: 10.1007/s11858-012-0393-2

Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2009). Integrating history and philosophy in mathematics education at university level through problem-oriented project work. *ZDM, 41*(1-2), 87-103.

Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 327-349. doi: 10.1007/s10649-011-9352-z

Kjeldsen, T. H., & Petersen, P. H. (2014). Bridging History of the Concept of Function with Learning of Mathematics: Students' Meta-Discursive Rules, Concept Formation and Historical Awareness. *Science & Education, 23*(1), 29-45. doi: 10.1007/s11191-013-9641-2

Klein, J. (1968). *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra* (E. Brann, Trans.). New York: Dover Publications, Inc.

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: a historical perspective. [Feature]. *Mathematics Magazine, 64*, 291-314.

Kleiner, I. (1996). A history-of-mathematics course for teachers, based on great quotations In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 261-268). Washington: Mathematical Association of America.

Kleiner, I. (1998). A historically focused course in abstract algebra. *Mathematics Magazine, 71*(2), 105-111.

Knoebel, A., Lodder, J., Laubenbacher, R. C., & Pengelley, D. J. (2007). *Mathematical Masterpieces: Further Chronicles by the Explorers*. New York: Springer.

Knorr, W. R. (1975). *The evolution of the Euclidean Elements. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*. Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A.: D. Reidel Publishing Company.

Knorr, W. R. (1978). Archimedes and the Pre-Euclidean Proportion Theory. *Archives internationales d'histoire des sciences, 28*, 183-244.

Knorr, W. R. (1992). De exhaución a cortaduras: primeras etapas de la teoría griega de las proporciones. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 8*, 1-12.

Knorr, W. R. (2001). The impact of modern mathematics on ancent mathematics. *Revue d'histoire des mathématiques, 7*(1), 121-135. doi: 1262-022X / 1777-568X

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88.

Kool, M. (1992). Dust Clouds from the Sixteenth Century. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 90-96.

Kool, M. (2003). An extra student in your classroom: How the history of mathematics can enrich interactive mathematical discussions at primary school. *Mathematics in School, 32*(1), 19-22.

Krainer, K., & Wood, T. (Eds.). (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Participants in Mathematics Teacher Education: Individuals, Teams, Communities and Networks.* (Vol. 3). Rotterdam: Sense Publishers.

Kronfellner, M. (1996). The history of the concept of function and some implications for classroom teaching. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 317-320). Washington: Mathematical Association of America.

Kronfellner, M., Tzanakis, C., & Barbin, É. (Eds.). (2011). *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the 6th European Summer University* (Firts ed.). Vienna: Verlag Holzhausen GmbH.

Lagarto, M. J., Viera, A., & Veloso, E. (Eds.). (1996). *Proceedings of the 2nd European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education and the ICME 8 Satellite Meeting of HPM*. Braga: Portuguese Association of the Teachers of Mathematics & Department of Mathematics, University of Minho.

Lalande, F., Jaboeuf, F., & Nouazé, Y. (Eds.). (1995). *Actes de la première Université d' Été Européenne sur l' Histoire et Épistémologie dans l' Éducation Mathématique*. Montpelier: IREM de Montpellier, Université Montpellier II.

Lamandé, P. (2013). Quelques conceptions de la théorie des proportions dans des traités de la seconde moitié du dix septième siècle. *Archive for History of Exact Sciences, 67*(6), 595-636. doi: 10.1007/s00407-013-0120-6

Larsen, M. E. (1984). On the Possibility of a Pre-Euclidean Theory of Proportions. *Centaurus, 27*(1), 1-25. doi: 10.1111/j.1600-0498.1984.tb00752.x

Lasher, P. (2000). Georg Cantor. [Book Review]. *Mathematics Teacher, 93*(8), 726.

Laubenbacher, R. C., & Pengelley, D. J. (1996). Mathematical masterpieces: teaching with original sources In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 257-260). Washington: Mathematical Association of America.

Laubenbacher, R. C., & Pengelley, D. J. (1999). *Mathematical Expeditions: Chronicles by the Explorers*. New York: Springer.

Lee, H. S. (2005). Facilitating students' problem solving in a technological context: Prospective teachers' learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 223-254.

Leikin, R. (2008). Teams of Prospective Mathematics Teachers: Multiple Problems and Multiple Solutions. In K. Krainer & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Participants in Mathematics Teacher Education: Individuals, Teams, Communities and Networks* (Vol. 3, pp. 63-88). Rotterdam: Sense Publishers.

Leikin, R., & Winicki-Landman, G. (2001). Defining as a Vehicle for Professional Development of Secondary School Mathematics Teachers. *Mathematics Teacher Education and Development, 3*, 62-73.

Levi, B. (2003). *Leyendo a Euclides* (Tercera ed.). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Li, S., Huang, R., & Shin, H. (2008). Discipline Knowledge Preparation for Prospective Secondary Mathematics Teachers: An East Asian Perspective. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (Vol. 1, pp. 63-86). Rotterdam: Sense Publishers.

Lightner, J. E. (2000). Mathematicians are human too. *Mathematics Teacher, 93*(8), 696-699.

Lingard, D. (2000). The History of Mathematics: An Essential Component of the Mathematics Curriculum At All Levels. *Australian Mathematics Teacher, 56*(1), 40-44.

Lit, C.-K., Siu, M.-K., & Wong, N.-Y. (2001). The use of History in the Teaching of Mathematics: Theory, Practice, and Evaluation of Effectiveness. *Education Journal, 29*(1), 17-31.

Loats, J., White, D., & Rubino, C. (2014). History of Mathematics: Three Activities to Use with Undergraduate Students and In-service Teachers. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 24*(8), 698-709. doi: 10.1080/10511970.2014.900157

Mackinnon, N. (1992a). Homage to Babylonia. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 158-178.

Mackinnon, N. (1992b). Newton's Teaser. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 2-27.

Maher, P. (1998). From al-jabr to algebra. *Mathematics in School, 27*(4), 14-15.

Manrique García, J. F., & Triana Yaya, J. A. (2013). *El papel de la historia del Álgebra en un curso de Didáctica para la formación inicial de profesores.* Maestría en Docencia de la Matemática Tesis no publicada, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Markowsky, G. (1992). Misconceptions about the Golden Ratio. *The College Mathematics Journal, 23*(1), 2-19. doi: 10.2307/2686193

Marshall, G. L., & Rich, B. S. (2000). The role of history in a mathematics class. *Mathematics Teacher, 93*(8), 704-706.

Martiñón Cejas, A. (1992). La teoría de las proporciones en los Elementos de Euclides *Actas del Seminario "Orotava" de Historia de la Ciencia. Historia de la Geometría Griega* (Vol. 1, Año I). Canarias: Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias. Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa. Ediciones Educativas Canarias.

Martiñón Cejas, A. (2001). Abstracción máxima y aplicaciones universales: las matemáticas del siglo XX. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 26*, 50-60.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(3), 243-267.

Massa Esteve, M. R. (1997). Mengoli on "Quasi Proportions". *Historia Mathematica, 24*(3), 257-280.

Massa Esteve, M. R. (2003). La théorie euclidienne des proportions dans les "Geometriæ speciosæ elementa" (1659) de Pietro Mengoli. *Revue d'histoire des sciences, 56*(2), 457-474. doi: 10.2307/23634027

Mathews, G. B. (1915). Review: The Theory of Proportion. *The Mathematical Gazette, 8*(117), 87-89. doi: 10.2307/3604056

Matthews, R. M. (Ed.). (2014). *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*. Dordrecht: Springer Netherlands.

McComas, K. K. (2000). Felix Klein and the NCTM's standards: a mathematician considers mathematics education. *Mathematics Teacher, 93*(8), 714-717.

McDowell, G., & Sokolik, M. (1993). *The Data of Euclides*. Baltimore, MD: Union Square Press.

McDuffie, A. R. (2004). Mathematics teaching as a deliberate practice: An investigation of elementary pre-service teachers' reflective thinking during student teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(1), 33-61.

Meavilla Seguí, V., & Oller Marcén, A. M. (2013). Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 82*, 89-100.

Mederos Martín, C. (2000). *Eudoxo y la Matemática.* Paper presented at the Actas del Seminario "Orotava" de historia de la ciencia. Ciencia y Cultura el la Grecia Antigua, Clásica y Helenística. Actas años VI y VII.

Mendell, H. (2007). Two Traces of Two-Step Eudoxan Proportion Theory in Aristotle: a Tale of Definitions in Aristotle, with a Moral. *Archive for History of Exact Sciences, 61*(1), 3-37.

Miguel, A., & Miorim, M. Â. (2011). *História na educação matemática - Propostas e desafios* (2a ed.). Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Mitrović, B., & Djordjević, I. (1990). Palladio's Theory of Proportions and the Second Book of the "Quattro Libri dell'Architettura". *Journal of the Society of Architectural Historians, 49*(3), 279-292. doi: 10.2307/990519

Monk, M., & Osborne, J. (1997). Placing the history and philosophy of science on the curriculum: a model for the development of pedagogy. *Science education, 81*, 405-424.

Montesinos Sirera, J. L. (2000). *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*. Madrid: Editorial Síntesis, S.A.

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificacion del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 219-235.

Mora, L. C., & Guacaneme, E. A. (2014). *La Historia de las Matemáticas como organizador curricular a favor del Conocimiento Didáctico del Contenido*. Paper presented at the XII Coloquio Regional de Matemáticas y II Simposio de Estadística, San Juan de Pasto. Documento no publicado retrieved from

Mora, L. C., Jiménez, W. A., & Guacaneme, E. A. (2014). *Unidades de análisis para identificar la relación "conocimiento histórico - conocimiento didáctico del contenido"*. Paper presented at the 28 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME-28), Barranquilla, Colombia. Documento no publicado retrieved from

Morley, A. (1982). Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 2*(3), 46.

Morris, H. (2001). Issues raised by testing trainee primary teachers' mathematical knowledge Mathematics. *Mathematics Teacher Education and Development, 3*, 37-47.

Mosvold, R., Jakobsen, A., & Jankvist, U. T. (2014). How Mathematical Knowledge for Teaching May Profit from the Study of History of Mathematics. *Science & Education, 23*(1), 47-60. doi: 10.1007/s11191-013-9612-7

Mueller, I. (1970). Homogeneity in Eudoxus's theory of proportion. *Archive for History of Exact Sciences, 7*(1), 1-6.

Muir, T., & Beswick, K. (2007). Stimulating Reflection on Practice: Using the Supportive Classroom Reflection Process. *Mathematics Teacher Education and Development, 8*, 74-93.

NCTM. (1969). *Historical Topics for the Mathematics Classroom. Thirty-first Yearbook*. Washington, D.C.: National Council of Teacher of Mathematics.

Neubrand, M., Seago, N., Agudelo-Valderrama, C., DeBlois, L., Leikin, R., & Wood, T. (2009). The Balance of Teacher Knowledge: Mathematics and Pedagogy. In R. Even & D. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 211-225). New York: Springer Science+Business Media.

Nomdedeu, X. (2001). Matemáticas cotidianas a través de historias cotidianas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 26*, 29-35.

Ofir, R. (1991). Historical Happenings in the Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 21-23.

Ofir, R., & Arcavi, A. (1992). Word Problems and Equations: An Historical Activity for the Algebra Classroom. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 69-84.

Oliver, J. (1997). Calculations in medieval Europe. *Mathematics in School, 26*(3), 12-14. doi: 10.2307/30215283

Oliver, J. (2003a). Fractions at the Dawn of History: How did the Babylonians Cope with Fractions? *Mathematics in School, 32*(1), 17-18.

Oliver, J. (2003b). Fractions in Ancient Egyptian Times. *Mathematics in School, 32*(1), 14-16.

Oller Marcén, A. M., & Gairín Sallán, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. [Article]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(3), 317-338. doi: 10.12802/relime.13.1632

Oresme, N., & Grant, E. (1966). *De proportionibus proportionum, and Ad pauca respicientes*. Madison,: University of Wisconsin Press.

Otero, D. E. (1999). Calculus from an historical perspective: A corse for humanities students. *PRIMUS: PROBLEMS, RESOURCES, AND ISSUES IN MATHEMATICS UNDERGRADUATE STUDIES, 9*(1), 56-72.

Otte, M. (2007). Mathematical history, philosophy and education. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 243-255.

Palmieri, P. (2001). The Obscurity of the Equimultiples. *Archive for History of Exact Sciences, 55*(6), 555-597.

Palmieri, P. (2003). Mental models in Galileo's early mathematization of nature. *Studies In History and Philosophy of Science Part A, 34*(2), 229-264.

Panagiotou, E. (2014). A Voyage of Mathematical and Cultural Awareness for Students of Upper Secondary School. *Science & Education, 23*(1), 79-123. doi: 10.1007/s11191-013-9653-y

Papadopoulos, I. (2014). How Archimedes Helped Students to Unravel the Mystery of the Magical Number Pi. *Science & Education, 23*(1), 61-77. doi: 10.1007/s11191-013-9643-0

Parameswaran, S. (1992). Whish's Showroom Revisited. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 28-36.

Parra Buitrago, E. Y., & Vargas Solano, E. S. (2012). *¿Puede la conmensurabilidad cerrar el cerco a la inconmensurabilidad?* Licenciatura en Matemáticas Trabajo de grado no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Peralta, J. (2011). La creación de la Real Sociedad Matemática Española: una mirada a nuestra matemática de aquella época. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 65-81.

Perry, P., Guacaneme, E. A., Andrade, L., & Fernández, F. (Eds.). (2003). *Transformar la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer*. Bogotá: una empresa docente.

Picado, M., & Rico, L. (2011). La selección de textos en una investigación histórica en Educación Matemática. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 99-112.

Piccolo, D. (2008). Views of Content and Pedagogical Knowledges for Teaching Mathematics. [Feature]. *School Science and Mathematics, 108*(2), 46-48.

Pinto Sosa, J. E., & González Astudillo, M. T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática, 20*(3), 83-100.

Ponza, M. V. (1998). A role for the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics: an Argentinian experience. *Mathematics in School, 27*(4), 10-13.

Potari, D. (2001). Primary Mathematics Teacher Education in Greece: Reality and Vision. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(1), 81-89.

Poulos, A. (1986). The history of mathematics and its importance for secondary school inservice teachers' training. *Contemporary education, 29*, 35-42.

Povey, H. (2014). 'Walking in a Foreign and Unknown Landscape': Studying the History of Mathematics in Initial Teacher Education. *Science & Education, 23*(1), 143-157. doi: 10.1007/s11191-013-9617-2

Pritchard, C. (1992). The Contributions of Four Scots to the Early Development of Statistics. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 61-68.

Puertas, M. L. (1991). *Euclides. Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos. Libros V-IX*. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Puertas, M. L. (1996). *Euclides. Elementos. Libros X-XIII*. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Quintero, A. L., Molavoque, M. J., & Guacaneme, E. A. (2011). *Diferencias entre semejanza y proporcionalidad geométrica desde una perspectiva histórica*. Paper presented at the IV Encuentro de programas de formación inicial de profesores de Matemáticas

& V Seminario de Matemática Educativa. Fundamentos de la Matemática Universitaria, Bogotá, Escuela Colombiana de Ingeniería "Julio Garavito".

Quintero, A. L., Molavoque, M. J., & Guacaneme, E. A. (2012). Diferencia entre semejanza y proporcionalidad geométrica desde una perspectiva histórica. *Revista de ciencias 16*, 75-85.

Quirós Bajo, E. (2011). Thales de Mileto y la medición de las pirámides de Egipto. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 127-131.

Radelet-de-Grave, P., & Brichard, C. (Eds.). (2001). *Proceedings of the 3rd European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*. Leuven and Louvain-la-Neuve: Université Catholique de Louvain.

Radford, L. (1995). Before the Other Unknowns Were Invented: Didactic Inquiries on the Methods and Problems of Mediaeval Italian Algebra. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 15*(3), 28-38.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(1), 26-33.

Radford, L., Bartolini Bussi, M., Bekken, O., Boero, P., Dorier, J.-L., Katz, V. J., . . . Vasco, C. E. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 143-170). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L., Furinghetti, F., & Katz, V. J. (2007). Introduction The topos of meaning or the encounter between past and present. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 107-110.

Radford, L., & Guérette, G. (2000). Second Degree Equations in the Classroom: A Babylonian Approach. In V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 69-75). Washington: Mathematical Association of America.

Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and Meaning as Sensuous, Visual, Historical forms of Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 145-164.

Ransom, P. (1992). A Historical Approach to Maximum and Minimum Problems. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 85-89.

Ransom, P. (2003). The framework for teaching dialling. *Mathematics in School, 32*(1), 23-26.

Rashed, R., & Vahabzadeh, B. (1999). *Al-Khayyam Mathématicien*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rauff, J. V. (1992). Augustus De Morgan on the Teaching of Mathematics. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 97-99.

Rawlins, D. (1982). Eratosthenes' Geodesy Unraveled: Was There a High-Accuracy Hellenistic Astronomy? *Isis, 73*(2), 259-265. doi: doi:10.1086/352973

Rice, A. (1998). A Platonic stimulation: doubling the square or Why do I teach maths? *Mathematics in School, 27*(4), 23-24.

Rickey, V. F. (1995). My favorite ways of using History in teaching Calculus. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. J. Katz (Eds.), *Learn from the Masters!* (pp. 123-134). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Riddell, R. C. (1979). Eudoxan mathematics and the Eudoxan spheres. *Archive for History of Exact Sciences, 20*(1), 1-19.

Robson, E. (1998). Counting in cuneiform. *Mathematics in School, 27*(4), 2-9.

Rogers, L. (1991). History of Mathematics: Resources for Teachers. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 48-52.

Rogers, L. (2011). Mapping Our Heritage to the Curriculum: Historical and Pedagogical Strategies for the Professional Development of Teachers. In V. J. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (1 ed., Vol. 78, pp. 221-230): Mathematical Association of America.

Rojas Hernández, J. P. (2012). *Notaciones originales versus notaciones escolares: el caso de la derivada.* Licenciatura en Matemáticas Trabajo de grado no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Rommevaux, S. (2003). L'irrationalité de la diagonale et du côté d'un même carré dans les "Questions" de Blaise de Parme sur le "Traité des rapports" de Bradwardine. *Revue d'histoire des sciences, 56*(2), 401-418. doi: 10.2307/23634024

Rommevaux, S. (2013). A treatise on proportion in the tradition of Thomas Bradwardine: The De proportionibus libri duo (1528) of Jean Fernel. *Historia Mathematica, 40*(2), 164-182. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.hm.2013.01.001

Ross, S. C. (2000). Euler. [Book Review]. *Mathematics Teacher, 93*(8), 726.

Rothman, P. (1997). Meditations on women in the history of mathematics. *Mathematics in School, 26*(3), 28-31. doi: 10.2307/30215287

Rowe, D. E. (1996). New trends and old images in the history of mathematics In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 3-16). Washington: Mathematical Association of America.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 225-281.

Rubenstein, R. N., & Schwartz, R. K. (2000). Word histories: melding mathematics and meanings. *Mathematics Teacher, 93*(8), 664-669.

Ruiz Silva, A. (2006). Texto, testimonio y metatexto. El análisis de contenido en la investigación en educación. In A. Jiménez Becerra & A. Torres Castillo (Eds.), *La práctica investigativa en Ciencias Sociales* (pp. 43-59). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Ruiz Zúñiga, Á. (1997). Las posibilidades de la Historia en la Educación Matemática. Una visión filosófica. *Comité Interamericano de Educación Matemática. Boletín Informativo, 5*(2), 1-7.

Ruiz Zúñiga, Á. (2015). Initial and Continuous Mathematics Teacher Preparation in Colombia, Costa Rica, the Dominican Republic and Venezuela *CANP National Report Series* (Vol. 2): ICMI.

Rupérez Padrón, J. A., & García Déniz, M. (2001). El Juego de la oca. Historia de un juego y sus posibilidades didácticas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 26*, 37-48.

Rusnock, P., & Thagard, P. (1995). Strategies for Conceptual Change: Ratio and Proportion in Classical Greek Mathematics. *Studies In History and Philosophy of Science Part A, 26*(1), 107-131.

Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Barbin, É., Arcavi, A., Brown, G., & Fowler, D. H. (1991). The Experience of History in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 7-16.

Saïto, K. (1994a). Débat. Proposition 14 of Book V of the "Elements" — A Proposition that remained a Local Lemma. *Revue d'histoire des sciences, 47*(2), 273-282. doi: 10.2307/23633239

Saïto, K. (1994b). Euclides Reformatus: La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana, Enrico Giusti, Turin (Bollati Boringhieri), 1993, pp. xii + 348, Lit. 70,000. *Historia Mathematica, 21*(4), 465-468.

Saïto, K. (2003). Phantom Theories of pre-Eudoxean Proportion. *Science in Context, 16(03), 331-347, 16*(3), 331-347. doi: 10.1017/S0269889703000838

Salinas-Herrera, J., Adamuz-Povedano, N., & Jiménez-Fanjul, N. (2011). Una experiencia de aula utilizando la historia de las matemáticas. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 113-126.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 5*(4), 129-145.

Sánchez, V., & Llinares, S. (2003). Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(1), 5-25.

Sawyer, W. (1997). Mathematics as history. *Mathematics in School, 26*(3), 2-3. doi: 10.2307/30215280

Scriba, C. J. (1983). Die Rolle der Geschichte der Mathematik in der Ausbildung von Schüler und Lehrer. *Jahresbericht der Deutsche Mathematiker Verein, 85*, 113-128.

Schubring, G. (2012a). Antagonisms between German states regarding the status of mathematics teaching during the 19th century: processes of reconciling them. *ZDM, 44*(4), 525-535. doi: 10.1007/s11858-012-0407-0

Schubring, G. (2012b). *Os números negativos. Exemplos de obstáculos epistemológicos?* Rio de Janeiro: LICM-UFRJ.

Schubring, G., Cousquer, É., Fung, C.-i., El Idrissi, A., Gispert, H., Torkil, H., . . . Weeks, C. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 91-142). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Schubring, G., Furinghetti, F., & Siu, M.-K. (2012). Introduction: the history of mathematics teaching. Indicators for modernization processes in societies. *ZDM, 44*(4), 457-459. doi: 10.1007/s11858-012-0445-7

Schubring, G., & Sekiguchi, Y. (2008). TSG 29: The history of the teaching and the learning of mathematics. In M. Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on*

Mathematical Education (pp. 422-425): IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, Denmark.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hierbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operation in the middle grades* (pp. 41-52): National Council of Teacher of Mathematics.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(1), 15-39.

Shell-Gellasch, A. (Ed.). (2006). *Hands on History. A Resource for Teaching Mathematics*: The Mathematical Association of America.

Shell-Gellasch, A., & Jardine, D. (Eds.). (2005). *From Calculus to Computers: Using the Last 200 Years of Mathematics History in the Classroom*. Washington: Mathematical Association of America.

Shenitzer, A. (1995). A Topics Course in Mathematics. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. J. Katz (Eds.), *Learn from the Masters!* (pp. 283-295). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Shiqi, L., Rongjin, H., & Hyunyong, S. (2008). Discipline Knowledge Preparation for Prospective Secondary Mathematics Teacher. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (Vol. 1, pp. 63-86). Rotterdam / Taipei: Sense Publishers.

Shirley, L. H. (2000). A visit from Pythagoras--using costumes in the classroom. *Mathematics Teacher, 93*(8), 652-655.

Shotsberger, P. G. (2000). Kepler and Wiles: models of perseverance. *Mathematics Teacher, 93*(8), 680-681.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching. Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Shulman, L. S. (2001). Conocimiento y enseñanza. *Estudios Públicos, 83*, 163-196.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*(4), 371-397.

Sierra Vázquez, M. (2000). El papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*(43-44), 93-96.

Sierra Vázquez, M., & López Esteban, C. (2011). Margarita Comas (1892-1973) y su aportación a la Educación Matemática. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 23-37.

Silverman, J., & Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(6), 499-511.

Simonson, S. (2000a). The mathematics of Levi ben Gershon. *Mathematics Teacher, 93*(8), 659-663.

Simonson, S. (2000b). The missing problems of Gersonides—A critical edition, I. *Historia Mathematica, 27*(3), 243–302.

Simonson, S. (2000c). The missing problems of Gersonides—A critical edition, II. *Historia Mathematica, 27*(4), 384–431.

Singh, S. (2003). The History of Cryptography. *Mathematics in School, 32*(1), 2-6.

Siu, M.-K. (2000). The ABCD of Using History of Mathematics in the (Undergraduate) Classroom. In V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 3-9). Washington: Mathematical Association of America.

Siu, M.-K., & Tzanakis, C. (2004). History of Mathematics in Classroom Teaching - Appetizer? Main course? Or Dessert? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), v-x.

Siu, M.-K., & Tzanakis, C. (2008). TSG 17: The role of the history of mathematics in mathematics education. In M. Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education* (pp. 363-367): IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, Denmark.

Smestad, B. (2011a). History of mathematics for primary school teacher education, or, can you do something even if you can't do much? In V. J. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (Vol. 78, pp. 201-210): Mathematical Association of America.

Smestad, B. (2011b). Teachers' Conceptions of History of Mathematics. In V. J. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (1 ed., Vol. 78, pp. 231-240): Mathematical Association of America.

Smith, D. W. (2000). From the top of the mountain. *Mathematics Teacher, 93*(8), 700-703.

Smith, J. D. (1992). The Remarkable Ibn al-Haytham. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 189-198.

Soanes, K. (2008). Elementary Mathematics Pedagogical Content Knowledge: Powerful Ideas for Teachers. *Teaching Children Mathematics, 15*(3), 192-192.

Speranza, F. (1996). Perché l'epistemologia e la storia nella formazione degli insegnanti? *Università e scuola (Periodico Concird), 1/R*, 70-72.

Sriraman, B. (2009). Mathematical paradoxes as pathways into beliefs and polymathy: an experimental inquiry. *ZDM, 41*(1-2), 29-38.

Sriraman, B. (Ed.). (2012). *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education* (Vol. Monograph 12): IAP/Information Age Pub.

Stacey, K. (2008). Mathematics for Secondary Teaching. Four Components of Discipline Knowledge for a Changing Teacher Workforce. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (Vol. 1, pp. 87-113). Rotterdam: Sense Publishers.

Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K., & Bana, J. (2001). Preservice Teachers' Knowledge of Difficulties in Decimal Numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(3), 205-225.

Stein, H. (1990). Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. . *Synthese, 84*, 163-211.

Sterenberg, G. (2008). Investigating teachers' images of mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(2), 89-105.

Suárez Alemán, C.-O. (2011). Orígenes y Evolución del Teorema de Rolle. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(1), 39-50.

Suárez Alemán, C. O. (2003). Aplicaciones de la historia de las matemáticas. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 19*(2), 259-285.

Sullivan, P., & Wood, T. (Eds.). (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development.* (Vol. 1). Rotterdam: Sense Publishers.

Sutherland, D. C. (2006). Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportions. *Journal of the History of Philosophy, 44*(4), 533-558.

Swetz, F. J. (1989). Using problems from the history of mathematics in classroom instruction. *Mathematics Teacher, 82*, 370-377.

Swetz, F. J. (1995a). To know and to teach: Mathematical pedagogy from a historical context. *Educational Studies in Mathematics, 29*(1), 73-88.

Swetz, F. J. (1995b). Using problems from the History of Mathematics in classroom instruction. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. J. Katz (Eds.), *Learn from the Masters!* (pp. 25-38). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Swetz, F. J. (2000). Problem Solving from the History of Mathematics. In V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 59-65). Washington: Mathematical Association of America.

Swetz, F. J., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B., & Katz, V. J. (Eds.). (1995). *Learn from the Masters!* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Sylla, E. D. (2007). Questiones circa Tractatum Proportionum Magistri Thome Braduardini By Blaise de Parme; edited by Joel Biard and Sabine Rommevaux. Textes Philosophiques du Moyen Age XXII. Paris (Vrin). 2005. *Historia Mathematica, 34*(2), 227-229.

Sylla, E. D. (2008). The Origin and Fate of Thomas Bradwardine'S De Proportionibus Velocitatum in Motibus in Relation to the History of Mathematics. In W. Laird & S. Roux (Eds.), *Mechanics and Natural Philosophy Before the Scientific Revolution* (Vol. 254, pp. 67-119): Springer Netherlands.

Szabó, Á. (1978). *The Beginnings of Greek Mathematics*. Dordrecht, Hollland / Boston, U.S.A.: D. Reidel Publishing Company.

Taani, O. (2014). Multiple Paths to Mathematics Practice in Al-Kashi's Key to Arithmetic. *Science & Education, 23*(1), 125-141. doi: 10.1007/s11191-013-9636-z

Tahta, D. (1992). On the Geometry of the Sriyantra. *The Mathematical Gazette, 76*(475), 49-60.

Taimina, D. (2004). History of mathematics in digital kinematic mechanism collection. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 89-102.

Tattersall, J. J., & McMurran, S. L. (2004). Using the educational times in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 103-114.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M). Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics. Conceptual Framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R., . . . Reckase, M. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Taverner, S. (1997). Name how many mathematicians! *Mathematics in School, 26*(3), 35. doi: 10.2307/30215289

Thomaidis, Y. (1991). Historical Digressions in Greek Geometry Lessons. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 37-43.

Thomaidis, Y., & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical “parallelism” revisited: historical evolution and students’ conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 165-183.

Thorup, A. (1992). A pre-euclidean theory of proportions. *Archive for History of Exact Sciences, 45*(1), 1-16.

Tillema, E. (2005). Chinese Algebra: Using Historical Problems to Think About Current Curricula. *Mathematics Teacher, 99*(4), 238-245.

Tirosh, D., & Wood, T. (Eds.). (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education.* (Vol. 2). Rotterdam: Sense Publishers.

Toerner, G., & Arzarello, F. (2012). Grading Mathematics Education Research Journals. *Europen Mathematical Society Newsletter, 86*, 52-54.

Torres, L. A., & Guacaneme, E. A. (2011a). *Aproximación a las estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas* Paper presented at the XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas, Bucaramanga.

Torres, L. A., & Guacaneme, E. A. (2011b). *Caracterización de las estrategias curriculares de formación en historia de las matemáticas en programas de formación inicial de profesores de matemáticas*. Paper presented at the IV Encuentro de programas de formación inicial de profesores de Matemáticas & V Seminario de Matemática Educativa. Fundamentos de la Matemática Universitaria, Bogotá, Escuela Colombiana de Ingeniería "Julio Garavito".

Torres, L. A., Guacaneme, E. A., & Arboleda, L. C. (2014). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología, 16*(2), 203-224.

Tosh, N. (2006). Science, truth and history, Part I. Historiography, relativism and the Sociology of Scientific Knowledge. *Studies In History and Philosophy of Science Part A, 37*(4), 675-701.

Toumasis, C. (1995). Let's put history into our mathematics classrooms. *Mathematics in School, 24*, 18-19.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sá, C., Isoda, M., Lit, C.-K., Niss, M., . . . Siu, M.-K. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the Close Historial Development of Mathematics and Physics in Mathematics Education: Some Methodological and Epistemological Remarks. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 20*(1), 44-55.

Ueno, K. (2012). Mathematics teaching before and after the Meiji Restoration. *ZDM, 44*(4), 473-481. doi: 10.1007/s11858-012-0443-9

Vahabzadeh, B. (1994). Two Commentaries on Euclid's Definition of Proportional Magnitudes. *Arabic Sciences and Philosophy, 4*(01), 181-198. doi: doi:10.1017/S0957423900001892

Van Brummelen, G. R. (1998). Jamshid al-Kashi: calculating genius. *Mathematics in School, 27*(4), 40-44.

Van Brummelen, G. R. (2003). Catch a Falling Star: Meteors in 10th Century Persia. *Mathematics in School, 32*(1), 7-9.

van Maanen, J. (1991). L'Hopital's Weight Problem. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 44-47.

van Maanen, J. (1992). Teaching Geometry to 11 Year Old "Medieval Lawyers". *The Mathematical Gazette, 76*(475), 37-45.

van Maanen, J. (1997). New Maths May Profit from Old Methods. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(2), 39-46.

van Maanen, J. (1998). Old maths never dies. *Mathematics in School, 27*(4), 52-54.

van Maanen, J. (2004a). History of Mathematics at ICME 9. In H. Fujita, Y. Hashimoto, B. R. Hodgson, P. Y. Lee, S. Lerman & T. Sawada (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education* (pp. 379): Springer Science + Business Media, Inc.

van Maanen, J. (2004b). The Role of History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics: Presentation of the ICMI Study and the Study Book. In H. Fujita, Y. Hashimoto, B. R. Hodgson, P. Y. Lee, S. Lerman & T. Sawada (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education* (pp. 374-377): Springer Science + Business Media, Inc.

van Maanen, J., Horng, W. S., Nagaoka, R., Fauvel, J., Yamamoto, S., & Niss, M. (2004). WGA 13: History and Culture in mathematics Education. In H. Fujita, Y. Hashimoto, B. R. Hodgson, P. Y. Lee, S. Lerman & T. Sawada (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education* (pp. 287-291): Springer Science + Business Media, Inc.

Vardi, I. (1999). What is ancient mathematics? *Mathematical Intelligencer, 21*(3), 38-47.

Vasco, C. E. (1994). La educación matemática: una disciplina en formación. *Matemáticas. Enseñanza Universitaria, 3*(2), 59-75.

Vasco, C. E. (2002). *Siete tensiones irresolubles en la articulación de la historia de las matemáticas con la enseñanza de las matemáticas*. Paper presented at the Primera Escuela Latinoamericana de Historia y Epistemología de las Matemáticas - ELHEM 1, Cali, Colombia.

Velázquez, F. (2001). Introducción. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 26*, 5-8.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology in Education, 10*(1), 77-101.

Vitrac, B. (1996). La Définition V. 8 des Eléments d'Euclide*. *Centaurus, 38*(2-3), 97-121. doi: 10.1111/j.1600-0498.1996.tb00607.x

Vitrac, B. (2000). ‘Umar al Khayyam et Eutocius: Les antécédents grecs du troisième chapitre du commentaire Sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide. *Fahrang. Quarterly Journal of Humanities & Cultural Studies, 12*, 51-105.

Vitrac, B. (2002). ‘Umar al Khayyam et l'anthyphérèse: Étude du deuxième Livre de son commentaire Sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide. *Fahrang. Quarterly Journal of Humanities & Cultural Studies, 14*, 137-192.

Waldegg, G. (1997). Histoire, épistémologie et méthodologie dans la recherche en didactique. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 17*(1), 43-46.

Waldegg, G. (2004). Problem solving, collaborative learning and history of mathematics: Experiences in training in-service teachers. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 63-71.

Waterhouse, W. C. (1972). Extreme and Mean Ratio in Vergil? *Phoenix, 26*(4), 369-376. doi: 10.2307/1087596

Watson, J., Beswick, K., Caney, A., & Skalicky, J. (2005/2006). Profiling Teacher Change Resulting from a Professional Learning Program in Middle School Numeracy. *Mathematics Teacher Education and Development, 7*, 3-17.

Watson, J. M. (2001). Profiling Teachers' Competence and Confidence to Teach Particular Mathematics Topics: the Case of Chance and Data. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(4), 305-337.

Weeks, C. (1998). Ptolemy's theorem. *Mathematics in School, 27*(4), 34-36.

Weeks, C. (2003a). The Rise and Fall of the Decimal Point. *Mathematics in School, 32*(1), 35-36.

Weeks, C. (2003b). Stories. *Mathematics in School, 32*(1), 43-46.

Wilson, P. S., & Chauvot, J. B. (2000). Who? How? What? A strategy for using history to teach mathematics. *Mathematics Teacher, 93*(8), 642-645.

Winicki, G. (2000). The Analysis of Regula Falsi as an Instance for Professional Development of Elementary School Teachers. In V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 129-133). Washington: Mathematical Association of America.

Yazo Chipatecua, S. M., & Poveda Córdoba, J. (2012). *Derivadas de funciones polinómicas sin el uso del límite: el método de Descartes y Hudde.* Licenciatura en Matemáticas Trabajo de grado no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Yuste, P. (2004). Razón y proporcionalidad en la Geometría euclídea. *Revista Española de Física, 18*(1), 59-63.

Zafra Granados, E. L. (2012). *¿Euclides es a proporción como Dedekind es a cortaduras?* Licenciatura en Matemáticas Trabajo de grado no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Zaslavsky, C. (1991). World Cultures in the Mathematics Class. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 32-36.

Zevenbergen, R. (2004). Study Groups as a Tool for Enhancing Preservice Students' Content Knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development, 6*, 3-18.

Zormbala, K., & Tzanakis, C. (2004). The concept of the plane in geometry: Elements of the historical evolution inherent in modern views. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3*(1-2), 37-61.

Zubieta, F. (1991). La definición de proporción de Eudoxio. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 7*, 477-486.

Zweng, M., Green, T., Kilpatrick, J., Pollak, H., & Suydam, M. (Eds.). (1983). *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. Berkeley: Birkhäuser Boston, Inc.,.