DOCTORADO INTERINSTITUCIONAL EN EDUCACIÓN

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica

Gilberto Obando Zapata

Universidad del Valle

Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica

Tesis presentada por:

Gilberto Obando Zapata

Para optar por el título de Doctor en Educación

Directores:
Dr. Carlos Eduardo Vasco U.
Dr. Luis Carlos Arboleda A.

DOCTORADO INTERINSTITUCIONAL EN EDUCACIÓN

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

Mayo de 2015

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

DOCTORADO EN EDUCACION

AREA EDUCACIÓN MATEMATICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

FECHA DE LA SUSTENTACION: Santiago de Cali, 12 de Diciembre de 2014

ESTUDIANTE: GILBERTO DE JESÚS OBANDO ZAPATA - CODIGO: 0605679

TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

"SISTEMA DE PRÁCTICAS MATEMÁTICAS EN RELACIÓN CON LAS RAZONES, LAS PROPORCIONES Y LA PROPORCIONALIDAD EN LOS GRADOS 3 Y 4 DE UNA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DE LA EDUCACIÓN BÁSICA"

DIRECTOR DE TESIS: Profesores CARLOS EDUARDO VASCO URIBE
LUIS CARLOS ARBOLEDA APARICIO

EVALUADORES: Dr. JUAN DÍAZ GODINO
Dra. ELONOR CAMARGO URIBE
Dra. MARTHA ISABEL FANDIÑO PINILLA

COMENTARIOS DE LOS JURADOS: DISTINCIÓN LAUREADA

APROBADO X
APLAZADO
RECHAZADO

Prof. JAIME HUMBERTO LEIVA DEANTONIO
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. CARLOS E. VASCO URIBE
Director de Tesis

Prof. LUIS CARLOS ARBOLEDA A.
Director de Tesis

Prof. JUAN DÍAZ GODINO
Jurado Evaluador

Prof. ELONOR CAMARGO URIBE
Jurado Evaluador

Prof. MARTHA I. FANDIÑO PINILLA
Jurado Evaluador

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE DIÁLOGOS

A MI FAMILIA,

Que pacientemente ha sabido tolerar mis largas ausencias, (no tanto de cuerpo, sino de alma y espíritu) y que me han acompañado y esperado en este duro caminar,

A MIS TUTORES,

Que sin su sabiduría y apoyo constante esta empresa no hubiera llegado a feliz término,

A MIS COLEGAS Y AMIGOS

Para los cuales solo hay voces de agradecimiento por todo lo compartido: las discusiones, aportes, etc., son muestra de lo que significa trabajo en equipo.

Resumen

La presente tesis se enmarca en el campo del *razonamiento proporcional*, e indaga por el lugar de las razones, proporciones y proporcionalidad (RPP) en las prácticas matemáticas institucionalizadas en dos grupos de estudiantes de la Educación Básica primaria (a saber, estudiantes de los grados 3o y 4o de una institución educativa de la ciudad de Cali), por el estatus epistemológico de los objetos de conocimiento RPP, y por el sistema de prácticas que permiten su constitución como objetos de conocimiento, para lo cual se plantearon dos propósitos: (1) caracterizar los sistemas de prácticas matemáticas de dos grupos de estudiantes de los grados 3o y 4o de la Educación Básica primaria, con respecto a los objetos de conocimiento matemático razón, proporción y proporcionalidad; (ii) indagar por las configuraciones epistémicas para dichos sistemas de prácticas matemáticas.

Para desarrollar lograr lo anterior, la tesis se soportó sobre elementos de la teoría de la actividad y de la filosofía de la práctica, estudiando los procesos de constitución del conocimiento matemático en el marco de una dialéctica entre lo individual y lo social, dialéctica mediada por tales sistemas de prácticas. Además, desde el punto de vista metodológico, la investigación se organizó en dos etapas: (i) un proceso de participación en las clases de matemáticas de estudiantes de tercero y cuarto de primaria de una institución educativa de la ciudad de Cali; (ii) un estudio histórico-epistemológico de prácticas matemáticas en épocas y lugares diferentes.

Los principales hallazgos de la tesis se pueden resumir en los siguientes términos:

I. El lugar central de las magnitudes y la medición de cantidades de magnitud en los procesos de estudio de razones, proporciones y proporcionalidad, y de la noción de razón como uno de los fundamentos en las conceptualizaciones relativas a lo multiplicativo y los números racionales.

II. Una reconceptualización de las nociones de razón, proporción y proporcionalidad a partir de principios presentes en los procesos de constitución histórico-epistemológica de dichos objetos, recuperando el carácter geométrico de la razón y su función epistémica con respecto a las cantidades que pone en relación:

   a. La razón como medida relativa, si se define entre dos cantidades homogéneas, o como relativización a la unidad, si se define entre dos cantidades heterogéneas
   b. La razón como relator o como operador (cuando la razón se define entre cantidades homogéneas) o la razón como correlator o transformador (cuando se establece entre familias de cantidades, no necesariamente homogéneas).

Palabras Clave: Razón, proporción, proporcionalidad, razonamiento proporcional, educación matemática, pensamiento numérico.

0 Introducción

La presente tesis se enmarca en lo que en didáctica de las matemáticas se ha dado en llamar el *razonamiento proporcional*, el cual se ha posicionado como un campo privilegiado para las investigaciones en virtud de su importancia, no solo para las matemáticas que se enseñan en la escuela, sino también por su relación con otras disciplinas escolares e, incluso, por su lugar en la comprensión de una gran diversidad de situaciones de la vida diaria. Esta importancia también se ha visto reflejada en la cantidad de investigaciones realizadas en los últimos 50 años, las cuales, desde los trabajos pioneros de Piaget e Inhelder (1958) sobre el razonamiento formal de los adolescentes, hasta la gran diversidad de líneas de investigación que se pueden identificar actualmente (de orden cognitivo, didáctico, curricular, epistemológico, etc.), han permitido logros importantes no solo en la comprensión de las problemáticas relacionadas con el aprendizaje o la enseñanza de razones, proporciones, proporcionalidad, números racionales, etc., sino también en la consolidación del campo de la educación matemática tal como lo conocemos hoy (ver Capítulo 1 para detalles).

En contraste con esta importancia relativa y con los logros alcanzados con la investigación realizada, es común encontrar que los procesos de conceptualización de dichos aspectos en los ámbitos escolares no alcanzan los niveles de desempeño esperados en los estudiantes. Prueba de ello son los resultados de las evaluaciones de competencias que se hacen en Colombia (pruebas Saber en 3º, 5º y 7º grado, Saber Once, antes ICFES, y Saber Pro, antes ECAES), o en las internacionales (como las pruebas TIMSS o las PISA de las cuales también participa nuestro país). Todas ellas coinciden en afirmar que cuando se trata de enfrentar problemas que impliquen el análisis e interpretación de información, o combinar diferentes procedimientos, los niveles de desempeño de los estudiantes están muy por debajo de lo esperado. Esto muestra, entonces, que el impacto de la investigación en los entornos educativos no es del todo satisfactorio, y que es necesaria la investigación que permita la comprensión de nuevos escenarios para el conjunto de problemáticas asociadas al aprendizaje o la enseñanza de los objetos de conocimiento *razón*, *proporción* y *proporcionalidad* (RPP). En particular, Lamon (2007) manifiesta que es necesario desarrollar investigación empírica y teórica que permita ver la potencia de las estructuras y mecanismos elementales (investigación en los primeros años de la Educación Básica) y, a largo plazo, sobre la base de análisis matemáticos profundos, cómo a partir de estas se da paso a formas más sofisticadas de pensamiento. Es en este campo, entonces, en donde se posiciona la investigación que da soporte a esta tesis. Se trata de indagar por el lugar de las RPP en las prácticas matemáticas institucionalizadas en dos grupos de estudiantes de la Educación Básica primaria (a saber, estudiantes de los grados 3º y 4º de una institución educativa de la ciudad de Cali), por el estatus epistemológico de los objetos de conocimiento RPP, y por el sistema de prácticas que permiten su constitución como objetos de conocimiento.

Así entonces, la investigación se planteó dos grandes propósitos. En primer lugar, caracterizar los sistemas de prácticas matemáticas de dos grupos de estudiantes de los grados 3º y 4º de la Educación Básica primaria, con respecto a los objetos de conocimiento matemático *razón*, *proporción* y *proporcionalidad* y, en segundo lugar, indagar por las configuraciones epistémicas para dichos sistemas de prácticas matemáticas.

Para abordar estos propósitos, sobre la base de un soporte brindado por algunos elementos de la teoría de la actividad y de la filosofía de la práctica, se estudian los procesos de constitución del conocimiento matemático en el marco de una dialéctica entre lo individual y lo social, dialéctica mediada por sistemas de prácticas institucionalizadas (ver Capítulo 2 para detalles).

Teniendo en cuenta el punto de vista de Bourdieu a este respecto, se entiende entonces por *sistema de prácticas* al conjunto de condiciones socialmente objetivadas (cristalizadas en los elementos de la cultura de una época y lugar) que orientan, delimitan, y restringen las formas de hacer (y de pensar) de los individuos adscritos a una institución específica, pero a la vez, el conjunto de posiciones subjetivas que orientan la manera como el individuo actualiza su acción de acuerdo con las condiciones institucionales. Esta actualización que ordena las prácticas en función de las condiciones institucionales demarcadas por el sistema de prácticas al cual se adscriben, que organiza y da forma a las acciones de los individuos (su actividad), que las ordena en función de la orientación objetiva de la acción y del posicionamiento subjetivo con respecto a tal orientación, es lo que se puede llamar *una práctica actuada*, la actividad práctica concreta, o simplemente (donde no haya lugar a confusión) *una práctica.*

Además, desde esta perspectiva, se entiende *una configuración epistémica* como aquello que da forma a la organización de la práctica, esto es, la *episteme* que hace posible la existencia de una práctica matemática determinada, episteme en la forma de saber aceptable (por ejemplo, en una práctica de aula), que tiene que ser sometida a una estrategia, a una acción, que tiene que ser organizada en un proceso estudio. La configuración epistémica es entonces saber apropiado, modalidad de apropiación de un contenido, de unas técnicas, de unos saberes, y por ende, permite ordenar los recursos institucionales disponibles para el individuo (simbólicos, conceptuales, ideológicos, metodológicos, etc.) de una cierta manera; orientar el campo de problemas en una dirección específica; reconocer ciertas técnicas o formas de heurísticas y no otras; que acepta ciertas formas de razonar o enunciar, descartando otras, etc.

Con las anteriores ideas en mente, el desarrollo metodológico de la investigación es organizado en dos etapas (no necesariamente separadas linealmente en el tiempo): la primera, un proceso de participación en las clases de matemáticas de estudiantes de tercero y cuarto de primaria de una institución educativa de la ciudad de Cali, y la segunda, un estudio histórico-epistemológico de prácticas matemáticas en épocas y lugares diferentes. La primera etapa caracteriza las prácticas matemáticas de dichos estudiantes en el marco de su acción conjunta y en relación con sus maestros, acción mediada por las tareas que se les proponen en el aula de clase (ver Capítulos 5 y 6 para detalles); la segunda etapa caracteriza los procesos epistémicos en la constitución de los objetos de conocimiento *razón*, *proporción* y *proporcionalidad*, y con el fin de ampliar el marco desde el cual interpretar las prácticas matemáticas de los estudiantes en el aula de clase (ver Capítulo 4 para detalles).

Estos estudios permitieron identificar elementos característicos de las prácticas matemáticas y sus configuraciones epistémicas, en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad, que se pueden resumir en los siguientes términos (ver Capítulo 7 para detalles):

I. Se resalta el lugar central de las magnitudes y la medición de cantidades de magnitud en los procesos de estudio de razones, proporciones y proporcionalidad, y por ende, de la noción de razón como uno de los fundamentos detrás de las conceptualizaciones relativas a lo multiplicativo y los números racionales. De esta manera se muestra que la aritmética escolar tiene un soporte importante en una teoría de las magnitudes y en los procesos de medición de cantidades.

II. Se logra una reconceptualización de las nociones de *razón*, *proporción* y *proporcionalidad* a partir de principios presentes en los procesos de constitución histórico-epistemológica de dichos objetos, principios que quizás por los movimientos propios de la formalización de las matemáticas actuales han sido ocultados, no solo para la matemática como disciplina científica, sino para la escuela misma. Estos principios recuperan el carácter geométrico de la razón (eclipsado por la mirada escolar centrada fundamentalmente en las razones entre números naturales), mostrando, de un lado, que lo aritmético o geométrico son casos particulares de la razón homogénea entre cantidades de una misma magnitud, y de otro, que la razón cumple una función epistémica importante con respecto a las cantidades que pone en relación y frente al problema que se está resolviendo.

III. Sobre la base de lo anterior se logra una reconstrucción del lugar de los sistemas de representación, y de las operaciones que se pueden realizar con ellos, en el proceso de constitución de la razón como cantidad y, por ende, en la constitución de los números racionales.

IV. Todo lo anterior abre una nueva posibilidad de comprensión de los problemas multiplicativos que orientan los procesos de estudio de los estudiantes con respecto a las razones, las proporciones y la proporcionalidad.

De esta manera, se logra identificar una noción de razón con un sentido preciso en relación con las magnitudes y sus cantidades (entre dos de las cuales se define):

- La razón como medida relativa, si se define entre dos cantidades homogéneas, o como relativización a la unidad, si se define entre dos cantidades heterogéneas;
- Su función con respecto a esas cantidades, esto es, la razón como relator o como operador (cuando la razón se define entre cantidades homogéneas) o la razón como correlator o transformador (cuando se establece entre familias de cantidades, no necesariamente homogéneas).

Sobre lo anterior se identifican ciertos tipos de problemas multiplicativos elementales en las situaciones que implican el cálculo de una cuarta proporcional o matematizar una proporcionalidad directa, y además, se identifican dos caminos (si bien al parecer disyuntos, en todo caso complementarios) para organizar los procesos de estudio de las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los contextos escolares: uno que busca consolidar una teoría explicita de razones y proporciones, y otro que toma como base la estudio de la linealidad.

Por supuesto, estas conceptualizaciones sobre la *razón*, la *proporción* y la *proporcionalidad* dejan líneas abiertas en lo que tiene que ver con los procesos de estudio de la proporcionalidad en contextos escolares, y en lo relativo al aprendizaje de las operaciones multiplicativas entre números racionales.

1 *Razones, Proporciones, Proporcionalidad: múltiples miradas a sus procesos de enseñanza y de aprendizaje*[1]

1.1 Introducción

Razones, proporciones y proporcionalidad (en adelante RPP) han sido ampliamente problematizadas, no sólo en relación con los procesos de aprendizaje y los procesos de enseñanza, sino también en lo que tiene que ver con los aspectos epistemológicos y/o cognitivos en busca de una mejor comprensión de su lugar como objetos de conocimiento. Desde la década de los años 60, con los trabajos de Piaget sobre el razonamiento formal de los adolescentes (Piaget & Inhelder, 1958), hasta nuestros días, con una gran diversidad de líneas de investigación de orden cognitivo, didáctico, epistemológico, etc., la preocupación por las dificultades relacionadas con la enseñanza o el aprendizaje de estos objetos de conocimiento sigue teniendo vigencia. De esta manera, si bien se reconocen importantes avances en lo relativo a la investigación en didáctica de las matemáticas, también se reconoce que el impacto en los entornos educativos no es del todo satisfactorio, y que es necesario realizar más investigación didáctica que permita nuevos marcos comprensivos para el conjunto de problemáticas asociadas al aprendizaje o a la enseñanza de tales objetos de conocimiento.

En ese orden de ideas este capítulo se divide en tres secciones. En la primera, y de manera sintética se presenta un recorrido por cerca de 50 años de investigación sobre los aspectos cognitivos, matemáticos, epistemológicos y didácticos relativos a los procesos de aprendizaje o de enseñanza de razones, proporciones, proporcionalidad, números

[1] De este capítulo se elaboró una versión como artículo publicado en la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa ver Obando, Vasco y Arboleda (ver, Obando, Vasco, & Arboleda, 2014).

racionales, y en general, de lo que en el campo se ha dado en llamar razonamiento proporcional, o razonamiento multiplicativo. Este recorrido se organiza en tres momentos que identifican los énfasis en la investigación que han caracterizado diferentes épocas en el desarrollo de la educación matemática en sí misma. No se pretende una reseña exhaustiva de todas las investigaciones realizadas en estos 50 años, sino más bien una selección de trabajos relevantes[2] y una presentación sintética de los principales aportes al desarrollo del campo. En la segunda, se presentan unas formulaciones generales sobre los procesos de enseñanza de las RPP en el sistema educativo colombiano, al igual que una serie de consideraciones sobre los resultados de los estudiantes colombianos en ciertos tipos de pruebas estandarizadas (nacionales e internacionales), mostrando la relevancia curricular de los objetos de conocimiento relacionados con las RPP, pero a su vez, identificando que efectivamente esas problemáticas (ampliamente documentadas en contextos nacionales e internacionales) sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las RPP no son ajenos al sistema educativo colombiano. En la parte final, y con base en las consideraciones realizadas en las dos secciones previas, se realiza la presentación del problema de investigación.

1.2 Sobre la investigación en el campo

1.2.1 Un primer momento: los procesos cognitivos

Se puede afirmar que los trabajos pioneros alrededor del razonamiento proporcional estuvieron centrados en los aspectos cognitivos, es decir, en el desarrollo del pensamiento alrededor de la proporcionalidad. Este enfoque tiene mucho que ver, en sus orígenes, con los trabajos de Piaget sobre el desarrollo del pensamiento lógico (Piaget & Inhelder, 1958), en los que se resalta la importancia del razonamiento proporcional en la constitución de las operaciones formales del pensamiento. Piaget muestra cómo esta forma de razonamiento marca el cambio desde el estadio de las operaciones concretas hacia las operaciones formales, en tanto permite en los sujetos la capacidad del manejo simultáneo de clases

[2] Selección realizada en función de las metas propuestas en la investigación que da origen a este documento, y que por tanto, con toda seguridad, dejan de lado trabajos importantes.

(multiplicación de clases)[3] y la constitución del grupo INRC.[4] Lo anterior implica la coordinación de las inversiones (cancelación de las operaciones) con las reciprocidades (compensación de las relaciones) propias de todos los procesos de equilibrio necesarios en la comprensión de la proporcionalidad, en tanto que $I \cdot N = R \cdot C$. Esta última igualdad muestra la invariancia de un producto lógico que hace a esta estructura ideal para describir las formas de razonamiento propias de la proporcionalidad (en términos lógicos, como lo hiciera Russell en su momento). En este sentido, se tienen como punto de partida aquellos procesos de pensamiento que relacionan dos variables a partir de esquemas de coordinación, compensación y conservación, hasta el reconocimiento sistemático de los patrones de variación en una de las variables con respecto a los patrones de variación de las otras y, por ende, del reconocimiento de la correlación entre variables. Por lo tanto, para Piaget, la comprensión de la proporción implica tanto un aspecto lógico como uno matemático: *en el aspecto lógico*, la proporción es un esquema que establece relaciones entre relaciones (una razón se presenta como una relación entre dos variables, y la proporción como una relación de equivalencia entre dos razones) y, por ende, implica el recurso a una lógica de segundo orden y a cuantificadores sobre las variables; *en el aspecto matemático*, la comprensión de las compensaciones cuantitativas en forma de equivalencias (coordinación de los procesos de covariación entre variables y sus respectivas compensaciones) para que conserven invariante un cociente o un producto (si $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$, entonces $xy' = x'y$).[5] Este fue el punto de partida para numerosas investigaciones que durante las siguientes décadas buscaron una

[3] Coordinación de los cambios en dos o más variables de tal forma que aumentos o transformaciones en una de ellas se sigue de cambios en la otra, de tal forma que el efecto total del cambio en las variables mantiene invariante un determinado fenómeno en el evento o situación estudiada. Esta invariancia es inicialmente cualitativa (a partir de formulaciones proposicionales que manifiestan la manera como los procesos de variación garantizan la invariancia en el fenómeno observado), y posteriormente, cuantitativa a través de la constancia de un producto o de un cociente entre los valores numéricos de las variables en estudio (al menos para la proporcionalidad directa o inversa, ampliamente estudiadas por Piaget).

[4] Para Piaget, sobre las 16 operaciones (lógicas) binarias definibles sobre un conjunto de objetos, operan un conjunto de cuatro transformaciones (acciones sobre las operaciones): la Idéntica (*I*), que transforma una operación sobre si misma; la Negación (*N*), la cual anula los efectos de una operación; la Recíproca (*R*), que anula los efectos de una operación por compensación de las diferencias; y la Correlativa (*C*), que anula el efecto de la operación, pero combinando la negación con la reciprocidad ($N \cdot R = C$). Así, el grupo *INRC* es equivalente a las proporciones lógicas $\frac{Ix}{Cx} = \frac{Rx}{Nx}$ o $\frac{Rx}{Ix} = \frac{Cx}{Nx}$, donde x es la operación transformada por *I*, *N*, *R* o *C*. (Para detalles sober el grupo INRC ver Vasco, 1989)

[5] Los principios de compensación, lógicos o matemáticos, son claves pues ellos determinan la enunciación de proposiciones que definen la ley o principio sobre el cual se fundamenta la correlación (lineal) entre variables, y por ende, la relación de proporcionalidad entre variables

caracterización más fina y detallada de cómo se construye en los sujetos el razonamiento proporcional y, por esta vía, entender qué pasa en la escuela con el desarrollo de estos procesos cognitivos, y sobre todo, si era posible enseñarlos directamente o no.

Hacia los años 80 se produce un giro importante en el desarrollo de las investigaciones sobre el razonamiento proporcional, pues como lo manifiesta Noelting (1980), se recibe un notable impulso desde la educación matemática, en particular, por los trabajos de Hans Freudenthal (1983). Este giro hace que, sin dejar el foco de los procesos cognitivos, se empiece a mirar el problema del desarrollo del razonamiento proporcional desde la óptica de la escuela. Es decir, teniendo ya una caracterización del razonamiento proporcional desde una perspectiva cognitiva, el problema es ahora cómo enseñar dicho razonamiento en la escuela, cómo lograr que la escuela favorezca unos procesos de enseñanza orientados a la constitución de tal forma de razonamiento.

Así pues, sobre la base de las etapas propuestas por Piaget e Inhelder para el desarrollo del pensamiento proporcional, se analizan posibles secuencias de enseñanza en la escuela y, reconociendo la complejidad del campo, se edifican nuevas líneas de investigación en busca de la comprensión de los factores asociados (Karplus, Pulos, & Stage, 1983; Noelting, 1980; Pulos & Tourniaire, 1985; Tourniaire, 1986). Se indagan, por ejemplo, los tipos de estrategias elementales en el desarrollo del razonamiento proporcional (acumulaciones coordinadas, valor unitario, comparación de razones, razones intensivas, razones escalares, estrategias erróneas, estrategias de retroceso); los tipos de situaciones que implican razonamiento proporcional (problemas de tasas o de mezclas, de conceptos matemáticos o de otras ciencias, por ejemplo, la física o situaciones de la vida diaria); las variables de tarea centradas en el estudiante (edad, estadio de desarrollo, capacidad mental o M-capacidad, estilo cognitivo, inteligencia, género, actitudes, y habilidades) o en la situación (en las variables estructurales: razones enteras o no, lugar de la incógnita en la proporción, complejidad numérica; o en las variables de contexto: tipos de situación, tipo de magnitud,[6] familiaridad con la situación, uso de materiales manipulativos).

Las investigaciones en este periodo permitieron identificar una serie de elementos importantes para la comprensión de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en

[6] En el inicio del capítulo 5 se hacen una serie de precisiones sobre las cantidades, las magnitudes, así como de sus procesos de medición. En los capítulos 1 al 4 no se hace uso de estos elementos conceptuales y notacionales, pues en dichos capítulos se citan muchos autores que no refieren las magnitudes o sus cantidades en el sentido propuesto en dicho capítulo, y por lo tanto, esta forma especial de entender y referir a las magnitudes y sus cantidades, solo aplicará para lo presentado en los capítulos 5 al 7.

contextos escolares. Sin embargo, se les puede reclamar que no realizaron un cuestionamiento al conocimiento matemático que se enseña en la escuela sobre las RPP, al asumir que las dificultades de los maestros para enseñar, y de los alumnos para aprender, podían ser tratadas en su totalidad a partir de los avances en la comprensión de los procesos del desarrollo cognitivo y en la comprensión de los fenómenos ligados a las condiciones de contexto.

1.2.2 Un segundo momento: la estructura matemática

En los años 90 se produce un nuevo giro: las investigaciones que se desarrollan alrededor del razonamiento proporcional, además de las variables de orden cognitivo, entran a considerar otras de orden epistémico relacionadas con la estructura, la organización y la naturaleza del conocimiento matemático en juego.

Este cambio tiene que ver con los desarrollos que se logran en la didáctica de las matemáticas a lo largo de la década de los 80, los cuales, en general, llaman la atención sobre el hecho de que cualquier intento de problematización didáctica en la escuela tiene que considerar el conocimiento matemático como una variable fundamental dentro del proceso, y estas consideraciones, como se expresó antes, no habían sido tratadas de manera sistemática en los años anteriores. Así entonces, se integran en los análisis didácticos, además de las consideraciones cognitivas y de contexto, otras de orden epistemológico, de tal forma que ahora los problemas sobre la enseñanza y el aprendizaje en la escuela se consideran de manera más integral.[7]

Se pueden citar trabajos importantes en esta línea de desarrollo, pero en particular los libros *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (Hiebert & Behr, 1988); *Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (Guershon & Confrey, 1994) y los capítulos 13 y 14 del *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Grouws, 1992) influyeron decisivamente en el desarrollo del campo. Estas publicaciones

[7] Dos vías diferentes fueron determinantes en esta nueva mirada sobre el razonamiento proporcional. Una de ellas, desde una perspectiva epistemológica, destaca los trabajos de Guy Brousseau sobre su teoría de las situaciones didácticas y de Yves Chevallard sobre la transposición didáctica. La otra, desde una perspectiva cognitiva, destaca los trabajos de Thomas Kieren sobre los procesos de aprendizaje de los números racionales basados en su noción de constructo matemático, y *The Rational Number Project*, coordinado por de los profesores Merlyn J. Behr, Richard Lesh, Thomas Post, entre otros, quienes han realizado importantes aportes a las investigaciones sobre los números racionales. Este proyecto, iniciado en 1979, sigue en plena actividad y su producción se puede consultar en el sitio web http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/default.html.

no solo resumen rigurosa y sistemáticamente la investigación que se había realizado en los años anteriores sobre el razonamiento proporcional (y en general sobre la educación matemática), sino que proponen nuevas líneas de desarrollo al involucrar el conocimiento matemático como una variable clave.

En general, se pueden describir los aportes de este periodo en los siguientes términos:

(a) *Comprensión de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de los números racionales:*[8] Se logra una caracterización de tales procesos y la elaboración de una tipología de las situaciones relativas a la construcción de la unidad, al tipo de magnitud y a la cuantificación de las magnitudes (Behr, Harel, & Post, 1992; Behr, Khoury, Harel, Post, & Lesh, 1997; Kieren, 1988; Ohlsson, 1988).

(b) *Comprensión del razonamiento proporcional en los procesos de aprendizaje en los niños en edad escolar*: Se caracterizan elementos fundamentales para la comprensión de los procesos de aprendizaje de las estructuras multiplicativas en los niños en edad escolar a partir de conceptos claves como razón y proporción, variación y covariación, en tanto sus estrechas relaciones con la multiplicación, la división y las magnitudes, (Confrey & Smith, 1994; Confrey & Smith, 1995; Harel, Behr, Lesh, & Post, 1994; Hart, 1988; Lamon, 1994; Lesh, Post, & Behr, 1988; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2000; Steffe, 1994).

(c) *Caracterización de la aritmética de las cantidades:* se reconoce que los procesos aritméticos implicados en la escuela, aditivos o multiplicativos, requieren tanto de operar aritméticamente sobre los números (que representan las medidas de las cantidades), como también sobre las cantidades y las magnitudes a las que pertenecen (la construcción de diferentes tipos de magnitud), convocando entonces consideraciones cognitivas y didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de los números y las magnitudes (Schwartz, 1988).

(d) *Caracterización de la estructura cognitiva y didáctica del pensamiento multiplicativo:* A partir de nuevos enfoques en lo que se denominó el razonamiento proporcional en edades tempranas (Kaput & West, 1994; Spinillo & Bryant, 1991, 1999) se identificaron: (1) los tipos de procesos de compensación, tanto aditivas como multiplicativas, que son

[8] En particular, en este campo de investigación se pueden mencionar trabajos realizados en Colombia, tales como las tesis de maestría tituladas *La enseñanza de los números racionales a partir de las relaciones parte todo* de Gilberto Obando Zapata (1999, 2003) y *Una propuesta multirregistro para la conceptualización inicial de las fracciones* de Teresa Pontón Ladino (2008), ambas realizadas en la Universidad del Valle.

precursores del razonamiento proporcional, (2) la importancia de la coordinación de los procesos de variación entre espacios de medida (a partir de los procedimientos escalares o funcionales) para el desarrollo de los conceptos propios de la proporcionalidad directa, y, (3) la necesidad de incluir el papel de las distintas formas de representación en los análisis sobre la construcción de dicha forma de razonamiento.

(e) *Caracterización de Campo Conceptual de las Estructuras Multiplicativas*: se asume que la construcción de los conocimientos relativos a la multiplicación y la división se da un proceso complejo que implica, (1) la coordinación con otros tipos de conceptos interrelacionados, (2) la coordinación de tipos de situaciones relacionadas con los tipos de conceptos y tipos de procedimientos asociados a los tipos de situaciones y (3) el uso de diferentes formas de representación implicadas en la construcción de los invariantes operatorios relativos a los conceptos (Vergnaud, 1988, 1991, 1994).[9]

Más recientemente se pueden reseñar nuevos aportes en estos mismos campos.[10]

Aportes relativos a los procesos implicados en la comprensión de los números racionales.

(a) *La razón como función.* Se comprende la razón como una función entre dos magnitudes y la proporcionalidad es vista como una propiedad caracterizada por la linealidad, bien implícitamente a través de los procedimientos escalares, o explícitamente a través de los procedimientos funcionales[11] (Fernández & Puig, 2002; Gómez, 2007).

(b) *Las fracciones en relación con las medidas de magnitudes (intensivas o extensivas).* Se presenta una comprensión de la fracción basada en la medida de magnitudes, lo que permitió concebirla no tanto como un operador que cuenta partes de un todo, sino como una relación que cuantifica la medida relativa entre la parte y el todo. Esto es, la fracción $\frac{1}{n}$ se define a partir de la relación *n*-veces, y la fracción $\frac{m}{n}$ a partir de la composición multiplicativa de la fracción $\frac{1}{n}$ (Confrey, Maloney, Nguyen, Mojica, & Myers, 2009;

9 Es importante notar que en esta misma línea de las estructuras, en Colombia se publicó el libro *Estructuras Aritméticas Elementales y su Modelización* (Castro, Rico, & Castro, 1995), el cual presenta una revisión profunda de los aspectos didácticos y cognitivos que deben ser considerados al momento de la enseñanza en la escuela del número, las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas.

10 Por ejemplo, son de destacar los números 2 y 3, del volumen 22 de la revista *The Journal of Mathematical Behavior*, en el 2003; el capítulo escrito por Susan Lamon en el *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* editado por Frank K. Lester; el libro titulado *Children's Fractional Knowledge*, editado por Leslie P. Steffe y John Olive en el 2010 o el libro *Las Fracciones: aspectos conceptuales y didácticos* de Martha Isabel Fandiño (2009).

11 Estos trabajos profundizan en la propuesta fenomenológica sobre las fracciones, las razones y la proporcionalidad (Freudenthal, 1983, en especial los capítulos 5 y 6).

Obando, 2003; Thompson & Saldanha, 2003).[12] Esto también plantea una estrecha relación entre los racionales y las estructuras multiplicativas (Gómez & Contreras, 2009; Thompson & Saldanha, 2003).

(c) *El aprendizaje de los números racionales y el desarrollo del razonamiento proporcional.*[13] Se asume la noción de razón como estructurante de los procesos de constitución del número racional (Cortina & Zúñiga, 2008; Lamon, 2012), y el razonamiento proporcional es identificado como la base de los invariantes que caracterizan las covariaciones ligadas por una proporcionalidad directa (Fernández & Llinares, 2010; Fernández, Llinares, Dooren, De Bock, & Verschafel, 2010; Pitta-Pantazi & Christou, 2009). Esto marca igualmente una nueva mirada al lugar de las cantidades intensivas en el aprendizaje de los racionales y en el desarrollo del razonamiento proporcional (Howe, Nunes, & Bryant, 2010, 2011; Nunes & Bryant, 2008; Nunes, Desli, & Bell, 2003).

(d) *El aprendizaje de los números racionales y su relación con la medida de magnitudes.* En el aprendizaje de los números racionales, y en el marco de la teoría de las situaciones didácticas, se reconoce el papel fundamental de la medida de magnitudes y de las representaciones de los mismos en forma de notación fraccionaria o decimal (Brousseau, Brousseau, & Warfield, 2004, 2007, 2008; Roditi, 2007).[14] En particular, se asume que la razón es el concepto central para comprender las fracciones, los decimales y los porcentajes, bien a partir de las diferentes experiencias de los estudiantes (Ben-Chaim, Keret, & Ilany, 2012; van Galen *et al.*, 2008), bien en el marco de una construcción relativa a la multiplicación y la división a través de situaciones de ampliación, reducción, repetición y partición (Lachance & Confrey, 2002). Confrey y Carrejo (2005) proponen comprender la razón como el invariante en una serie de cantidades proporcionales entre sí, y la fracción como emergente de la razón cuando se elige una cantidad arbitraria como unidad, y las demás cantidades son comparadas con respecto a esta cantidad. Así, razones y fracciones, desde el punto de vista

[12] Ver Fandiño (2009) para una síntesis sobre las diferentes aproximaciones didácticas, cognitivas y matemáticas a la enseñanza o aprendizaje de las fracciones.

[13] En general, estas propuestas sobre los números racionales asumen sin mayores críticas las conceptualizaciones desarrolladas por autores como Kieren (1980, 1988) o Lesh y colaboradores (Behr *et al.*, 1992; Lesh *et al.*, 1988), sobre los constructos de medida, rata, cociente, operador, razón, entre otros.

[14] Los artículos de Brousseau y otros del 2004, 2007 y 2008, fueron publicados como parte de un libro (ver Brousseau, Brousseau, & Warfield, 2013).

epistemológico, son complementarias y su aprendizaje está fuertemente ligado al aprendizaje de la multiplicación y la división.

(e) *Campos de investigación y trayectorias de aprendizaje*. Confrey *et al*. (2009) identifican siete grandes campos de investigación[15] a partir de los cuales organizar diferentes trayectorias de aprendizaje, entre las que se pueden enunciar:[16] repartos equitativos, que van desde las particiones y los conteos múltiples hasta la multiplicación y la división; las fracciones, desde la medida y las relaciones parte todo hasta la notación decimal con sus respectivas operaciones; razones, ratas[17] y proporciones, que van desde las razones como relaciones entre cantidades hasta las relaciones multiplicativas; áreas y volúmenes; semejanza y escalas. A la forma como se organizan estas trayectorias de aprendizaje se les podría señalar una falta de claridad en la presentación de la relación entre las razones, las proporciones y la proporcionalidad con las relaciones y funciones lineales (proporcionalidad directa), y en la distinción de los criterios matemáticos, representacionales o de contexto en las definiciones de los aspectos conceptuales relativos a las RPP.

(f) *Las fracciones como un proceso de acomodación de los esquemas de conteo* (Steffe, 2010a, 2010b). Se asume la construcción del conocimiento relativo a las fracciones como un proceso de acomodación de los esquemas de conteo a partir de la construcción de

[15] A saber, (1) *Repartos equitativos y partición en partes iguales* como la base cognitiva para la comprensión de las multiplicación, la división, las ratas y las fracciones; (2) *la multiplicación y la división*, derivada de los repartos equitativos y las particiones en partes iguales y coordinadas con el conteo (y las correspondencias uno a varios y varios a varios); (3) *las razones* (entendidas como relación, como operador, y como fracción-medida), (4) *las proporciones y las ratas*; (5) *las fracciones*, entendidas en su dimensión de operador sobre cantidades, pero a la vez, como relaciones parte-todo, en donde la relación *n-ésima* parte es comprendida como una relación primitiva; *áreas y volúmenes*; *semejanzas y escalas*; y *decimales y porcentajes* (Confrey & Maloney, 2008; Confrey *et al*., 2009).

[16] La cual definen como "una descripción soportada empíricamente, basada en la investigación, que ordena la red de experiencias que pueden encontrar los estudiantes a través de la instrucción (es decir, actividades, tareas, herramientas, formas de interacción y métodos de evaluación), para pasar de ideas informales, a través de sucesivos ajustes de la representación, la articulación y la reflexión, hacia conceptos cada vez más complejos en el tiempo" (Confrey *et al*., 2009, p. 346)

[17] De acuerdo con el Diccionario de la RAE, "rata" (Del lat. *rata parte*, *rata ratione*, *pro rata*) significa parte proporcional, variación por unidad de tiempo. En inglés se diferencia "ratio" y "rate" que son traducidos en este documento como "razón" y "rata" respectivamente. Así entonces, por lo general, "rata" ("rate") hace referencia a aquellos casos en los que la razón se establece entre magnitudes de diferente naturaleza, y "razón" ("ratio") a los casos en los que la razón se establece entre cantidades de la misma naturaleza, aunque en español "razón" se usa en ambos casos sin hacer la distinción. Si es necesario, se suelen utilizar las expresiones "razón heterogénea" y "razón homogénea".

unidades compuestas[18] y esquemas de fracciones[19] que permiten comparar las unidades compuestas como partes de un todo (relaciones parte todo) y la iteración de tales unidades compuestas para la constitución de fracciones no unitarias (propias e impropias). Es importante resaltar que esta aproximación no se centra en un tratamiento de las magnitudes sino en los procesos de contar, en la conformación de tipos de unidad, y en la comparación entre dichos tipos de unidad. De esta manera, Steffe rescata los aspectos aritméticos de las fracciones, pero pareciera no centrar su atención explícitamente en la relación de las fracciones ni con las razones ni con sus diferentes formas de representación, en particular, con la notación decimal.

Aportes con respecto al razonamiento proporcional

En lo relativo al razonamiento proporcional se destacan varias líneas de acción. Unas que buscan una precisión en el significado del término, y otras que indagan por los problemas didácticos o cognitivos relacionados con el desarrollo del razonamiento proporcional.

Así entonces, como se expresó anteriormente, de un lado, se identifica la importancia del conocimiento sobre los números racionales para el desarrollo del conjunto de habilidades necesarias en el razonamiento proporcional: la unitización,[20] la variación de cantidades, el pensamiento relativo[21] y la coordinación de conteos iterados crecientes y decrecientes (Pantziarra & Pitta-Pantazi, 2005; Pitta-Pantazi & Christou, 2009). De otro lado, se logra una mejor precisión sobre el significado del término: se pasa de comprender el razonamiento proporcional como la habilidad para utilizar significativamente conceptos propios de las razones y las proporciones en la solución de situaciones típicas de proporcionalidad directa (fundamentalmente situaciones de cálculo de una cuarta proporcional), a definir aspectos cognitivos y metacognitivos implicados en este tipo de

---

[18] *Partición en partes iguales* –unitización; *particiones simultáneas*; *splitting* –composición de la partición y la iteración; *equiparticiones* para números conectados –dividir varias unidades ya divididas; *splitting* –para números conectados; *partición distributiva* –partir partes de una partición para componer multiplicativamente dichas particiones.

[19] *Fracción unitaria* –a partir de la relación parte todo; *composición de fracciones unitarias* –repetición de una fracción unitaria, pero sin superar la unidad; *composición de fracciones* –fracciones de fracciones; *iteración de fracciones* –sucesiones de fracciones homogéneas que pueden incluso superar la unidad; *unidad fraccional* –una fracción unitaria que mide a otras no unitarias; *fracciones iguales*.

[20] Proceso cognitivo por medio del cual, dada una cantidad, se re-estructura en unidades de otro tamaño haciendo más fácil su manipulación en las operaciones dadas (Lamon, 2007).

[21] Definida como la función cognitiva relacionada con la habilidad para analizar cambios de las cantidades en términos relativos (Pantziarra & Pitta-Pantazi, 2005, citando a Lamon 1999).

razonamiento (Modestou & Gagatsis, 2009, 2010). En particular, estos últimos autores critican las tendencias en años anteriores para analizar el razonamiento proporcional en los niños en edad escolar, afirmando que en general trataban de mirar la capacidad para tal forma de razonamiento en función de las habilidades de los niños para resolver problemas de cuarta proporcional, pero que muchos estudiantes tienen éxito en este tipo de tareas porque han aprendido a aplicar el algoritmo de la regla de tres al margen de un razonamiento efectivamente en términos de lo proporcional, lo que los lleva incluso a aplicar el modelo de la linealidad en situaciones en las que no es viable. Proponen entonces analizar el razonamiento proporcional en los niños a partir de tres ejes:

- *Razonamiento por analogía*: capacidad de los estudiantes para identificar regularidades en las variaciones entre variables, generalizar dichos patrones, o aplicarlos en situaciones que presentan estructura similar.

- *Solucionar problemas rutinarios de proporcionalidad*: conjunto de habilidades que deben desarrollar los estudiantes para la solución de las situaciones típicas del cálculo de una cuarta proporcional.

- *Conciencia metacognitiva de la linealidad*: capacidad de los estudiantes para analizar los procesos de variación entre variables, y determinar cuándo dicho proceso se puede o no modelar por una proporcionalidad directa.

En relación a las indagaciones por los problemas didácticos en los aprendizajes relativos a la proporcionalidad, se pude citar la línea que trata con la sobre-generalización de la linealidad. En breve, esta línea, que tomó gran fuerza en los últimos 10 años, documentó una tendencia generalizada de los estudiantes para aplicar modelos lineales (en general el uso de la regla de tres) en situaciones en donde no eran aplicables, encontrando esta situación en todos los años de la Educación Básica y media, aumentando con la escolaridad, y extendiéndose incluso a otros campos de la matemática y de otras ciencias (De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschafel, 2002; Van Dooren, De Bock, Gillard, & Verschaffel, 2009; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005; Van Dooren, De Bock, Hessels, & Verschaffel, 2004). La búsqueda de las causas de esta tendencia a la sobre-generalización llegó incluso a proponer la existencia de un obstáculo epistemológico: el obstáculo epistemológico de la linealidad en tanto la linealidad es un modelo fácilmente generalizable, que funciona bien en muchas situaciones de la vida cotidiana, pero que a lo largo de los años se hace incluso resistente a los procesos de enseñanza (Modestou, Elia, Gagatsis, & Spanoudis, 2008; Modestou & Gagatsis, 2007, 2009).

Sin embargo, otros trabajos en esta línea muestran una interpretación alterna: más que un obstáculo epistemológico, la sobre-generalización de la linealidad podría ser el resultado de un obstáculo didáctico, pues si se tiene en cuenta que en la escolaridad básica los problemas de cuarta proporcional son prácticamente el único modelo de situación al que se enfrentan los estudiantes, y que la regla de tres es el procedimiento por excelencia para solucionar tales situaciones, entonces el obstáculo se produciría por efectos de la enseñanza, y no tanto por la naturaleza implícita de los objetos de conocimiento.[22] Si este es el caso, entonces sería necesario que la enseñanza escolar proponga a los estudiantes situaciones en donde se modelen matemáticamente situaciones de covariaciones lineales y no lineales, de tal forma que efectivamente desarrollen, a la par de los conceptos, la capacidad para describir, interpretar, predecir, y explicar situaciones de diferente tipo (De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschafel, 2007; Fernández & Llinares, 2012; Fernández *et al.*, 2010; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2011; Van Dooren *et al.*, 2005; Van Dooren *et al.*, 2004).

Así pues, si se entiende el razonamiento proporcional en un sentido más amplio, ligado al reconocimiento de las variables, de las relaciones entre las variables y de los invariantes operatorios que ligan dicho proceso de variación, entonces se tendría que concluir que, efectivamente, los estudiantes no tienen los conceptos propios de la linealidad, y que es precisamente esa falta de conocimiento, y no un conocimiento resistente al cambio, lo que los lleva a aplicar la linealidad fuera de su campo de validez. Adicionalmente, se podría argumentar que los modelos lineales pueden ser una forma natural de organización del pensamiento, una primera aproximación en la comprensión de situaciones o fenómenos más complejos y, por lo tanto, más que un obstáculo epistemológico, es una forma alternativa

[22] Por ejemplo, se encontró que: (*a*) la estructura lingüística de las situaciones influía en la elección del método de cálculo por parte de los alumnos (es decir, se aplica regla de tres a todo enunciado que tenga una estructura lingüística de cuatro cantidades, tres conocidas y una desconocida); (*b*) los modelos lineales son prácticamente los únicos a los que se enfrentan los estudiantes durante los primeros años de la Educación Básica, y que la regla de tres es casi de forma exclusiva el único método de cálculo (De Bock, Verschafel, & Janssens, 2002; Van Dooren & De Bock, 2008); (*c*) el tipo de número (que las razones sean enteras o no) y la naturaleza de las cantidades (discretas o continuas) influye en el razonamiento proporcional de los estudiantes (Fernández & Llinares, 2008; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock, & Verschafel, 2009).

de organización del pensamiento.

Aportes sobre la comprensión de lo multiplicativo en edades tempranas

Estos trabajos permiten reconocer la importancia de los conteos múltiples y las correspondencias uno a varios, o varios a varios, (y, por ende, a la formación de unidades compuestas y la coordinación de dos o más conteos iterados) en la comprensión de las situaciones multiplicativas. Esto implica entonces ver la multiplicación desde la perspectiva de la proporcionalidad directa y las variaciones lineales (Botero, 2006; Bryant & Nunes, 2009; Nunes, 2010a, 2010b); también se muestra que los aprendizajes de necesarios en el campo de las estructuras multiplicativas[23] están estrechamente ligado a los procesos de conteo centrados en el tratamiento de las cantidades y, unido a dicho tratamiento, los problemas multiplicativos como problemas de cambio de unidad (Iannece, Mellone, & Tortora, 2010; Rojas *et al.*, 2011). También se pueden destacar trabajos que, desde el aprendizaje de la multiplicación y la división, analizan el aprendizaje de las fracciones en edades tempranas de la escolaridad básica (Mamede, 2010; Mamede & Nunes, 2008). Estos trabajos muestran que los niños en edades de 6 y 7 años tienen una serie de conocimientos informales sobre las fracciones que pueden utilizarse con éxito en situaciones de relación parte-todo relativas a la multiplicación y a la división y, por ende, para iniciar el aprendizaje formal de los números racionales.

1.2.3 Un tercer momento: lo antropológico y lo semiótico

En la primera mitad de la década de los 90 se difunden ampliamente dos enfoques teóricos que, si bien corresponden a tradiciones investigativas diferentes, cada uno a su modo ha proporcionado nuevas formas (metodológicas y conceptuales) de abordar la investigación en didáctica de las matemáticas.

En primer lugar, en el marco de la denominada "Teoría Antropológica de lo Didáctico" (TAD), razones, proporciones, proporcionalidad y números racionales se comprenden en términos de Organizaciones Matemáticas complejas definidas por tipos de situaciones, prácticas matemáticas, técnicas, tecnologías y teorías, estructuradas alrededor de praxeologías institucionalmente situadas (localizadas en tiempos y espacios específicos y

[23] En adelante, en algunas ocasiones se usará la expresión "lo multiplicativo" (por facilidad en la redacción del documento) para referir ese complejo campo conceptual de las estructuras multiplicativas, que incluye conceptos, procedimientos, problemas, representaciones, etc., relativas a las multiplicaciones, las divisiones, la proporcionalidad, etc.

con respecto a cierto tipo de ideología culturalmente compartida). Diferentes trabajos se han realizado bajo el enfoque de la TAD para el caso de la proporcionalidad (ver por ejemplo, Bosch, 1994; García, 2005; Hersant, 2001).

En líneas generales, los trabajos de Bosch y García muestran un conjunto de problemáticas, desde el punto de vista del saber de referencia, que pueden ser la causa de la falta de comprensión de los estudiantes con respecto a la proporcionalidad en la Educación Básica:

(1) La homogeneidad de la propuesta de la enseñanza clásica de la proporcionalidad, que centra su estudio en los ámbitos puramente numéricos, separándola de las relaciones funcionales y de otras áreas del currículo en donde la proporcionalidad podría funcionar como una herramienta potente en la solución de los problemas propuestos.

(2) Si bien se identifican elementos praxeológicos relacionados con la proporcionalidad directa, inversa y compuesta, estos no se integran en praxeologías globales con mayor coherencia teórica;[24] esto es, se conservan como fragmentos praxeológicos aislados, y con un bajo nivel de algebrización, y esta última es precisamente la que aportaría los elementos teórico-tecnológicos necesarios para la integración en praxeologías globales más estructuradas (Bolea, Bosch, & Gascon, 2001; Bosch, García, Gascón, & Higueras, 2006; García, Gascón, Higueras, & Bosch, 2006).

Por su parte, y desde un punto de vista epistemológico, Hersant (2001) muestra que es necesario diferenciar dos tipos de teorías sobre las cuales estructurar los diferentes tipos de tarea relativos a la proporcionalidad. Una de ellas permite describir la proporcionalidad en términos de razones y proporciones (perspectiva aritmética), y la otra, en términos de funciones lineales (perspectiva algebraica). Sin entrar en detalles, ambas perspectivas tienen profundas raíces de orden histórico-epistemológico: una comprensión de la proporcionalidad a partir de la teoría de las razones y las proporciones, sin una referencia

[24] Estudios de textos escolares (García, 2005; Lundberg, 2011) concluyen que los contenidos temáticos relativos a las razones, las proporciones y la proporcionalidad se encuentran en capítulos con pocas o escasas conexiones entre sí (incluso en temáticas aisladas relacionadas con la medida, las semejanzas, los porcentajes, las funciones, la solución de ecuaciones, etc.), separando los contextos aritméticos, geométricos y algebraicos. Conclusiones similares se pueden leer en Guacaneme (2002; 2001) en donde se concluye que el estudio de la proporcionalidad en los libros de texto tiene un lugar difuso en tanto se presenta en el marco de diferentes temáticas poco relacionadas entre sí (por ejemplo, con una relación exigua con las cantidades de magnitud y sus procesos de variación) y la relación entre proporción y proporcionalidad casi no existe. Adicionalmente muestra que el tratamiento de las razones es fundamentalmente aritmético, lo que las confunde con los números y las separa del tratamiento de las magnitudes.

explícita a la teoría de la medida, y por tanto, al margen de cualquier tratamiento numérico, se encuentra en el libro V de los elementos de Euclides.[25] Con el desarrollo del álgebra y, posteriormente, con el de una teoría de los números reales, se da un paso hacia la interpretación de la proporcionalidad en términos de aplicaciones lineales. Sin embargo, la autora critica el hecho de que los modelos de aproximación que tiene la escuela hoy en día privilegien la aproximación numérica sobre la algebraica (Hersant, 2005). Adicionalmente, la autora crítica la caracterización realizada por Bosch y Chevallard sobre los tipos de tareas relacionadas con las praxeologías relativas a la proporcionalidad. En sus palabras, “distinguir los géneros de tareas ‘calcular’, ‘comparar’, ‘identificar’, ‘representar’, ‘asociar’ no nos parece apropiado aquí, pues de vez en cuando un género de tareas comprende un solo tipo de tareas (por ejemplo ‘identificar’)” (Hersant, 2001, p. 52). Así, para la autora, la tipología de “géneros de tarea” debe descansar más sobre las cantidades implicadas en la situación y, por ende, sobre la naturaleza de las relaciones entre ellas. Por su parte, los tipos de tareas se deben definir en términos de las acciones que realizan los individuos, tomando en consideración los tipos de cálculo (por ejemplo, calcular: una cuarta proporcional, un porcentaje, un coeficiente de proporcionalidad; comparar: dos coeficientes de proporcionalidad, dos razones; aplicar: una fórmula, un teorema), los registros en que se presenta la situación (reconocer el carácter lineal de una aplicación, interpretar un coeficiente de proporcionalidad, asociar dos representaciones de una aplicación lineal, representar una aplicación lineal) y, por ende, los procesos de tratamiento o conversión necesarios.

A partir de la perspectiva de las representaciones semióticas (Adjiage, 1999, 2005, 2007; Adjiage & Pluvinage, 2007), se puede rescatar el reconocimiento de que, si bien las distintas temáticas sobre razones, proporciones y proporcionalidad abandonaron sus referentes desde las magnitudes para centrarse en los aspectos puramente numéricos (quizás por el influjo de las matemáticas modernas en los años 70), en la actualidad aparece de nuevo, en el campo de la educación matemática, un llamado a centrar el estudio de las mismas a partir de las magnitudes, en particular, con respecto al dominio de las razones.

[25] En Euclides no existe un concepto de número como medida. Es decir, como “forma única de la magnitud”. Esto solo se logra después de Descartes, quien dota la clase abstracta de magnitudes de una estructura algebraica. Por ejemplo, la doble escritura permite distinguir en una misma proporción (teorema de Tales) magnitudes dadas de parámetros y magnitudes desconocidas, lo cual será un paso clave en la construcción de la ecuación algebraica. Desde el punto de vista histórico, la proporcionalidad numérica emerge como condición de posibilidad del álgebra. Ver capítulo 4 para una ampliación de estas ideas.

Estos autores también critican la clasificación clásica de Kieren (1980, 1988) en los subconstructos de los números racionales (cociente, medida, número racional y operador multiplicativo), en tanto se mezclan aspectos matemáticos y de contexto (situaciones físico-empíricas) para realizar tal clasificación. Finalmente, proponen que en los procesos implicados en el aprendizaje de las razones y la proporcionalidad se les debe prestar atención a los sistemas de representación para las razones, y de manera particular, a la representación en forma de fracciones o en la notación decimal. Así, los autores llaman la atención sobre la necesidad de separar, de un lado, los aspectos representacionales (lo que de hecho implica una distinción de los objetos de conocimiento implicados) relacionados con el aprendizaje de las razones y la proporcionalidad y, de otro lado, los aspectos relacionados con las situaciones físico-empíricas.

De esta manera, su trabajo sugiere proponer a los estudiantes diferentes tipos de situaciones físico-empíricas[26] a partir de diferentes marcos representacionales[27] buscando no solamente la integración al interior de dichos marcos representacionales y situacionales, sino entre los distintos marcos, para de esta manera tener perspectivas más amplias con las cuales comprender los aspectos matemáticos relacionados con las razones (relación multiplicativa entre dos cantidades físicas), las proporciones y la proporcionalidad (relación lineal entre dos cantidades variables). Este punto de vista resalta la importancia de relacionar los aprendizajes de las razones, las proporciones y la proporcionalidad con los aprendizajes de los números racionales, en el marco de diferentes tipos de situaciones, y conjugando diferentes marcos representacionales. Lo anterior permite, además, una clara diferenciación entre los aspectos matemáticos, los representacionales y los situacionales (Adjiage, 2005).

Este tipo de trabajos representan un giro importante en la investigación en didáctica, pues en aquellas investigaciones centradas en los aspectos cognitivos del desarrollo del pensamiento matemático, las variables de orden contextual no se consideraban como componentes estructurales del desarrollo, sino tan solo como catalizadores de dichos procesos, y las formas de representación no se consideraban en su perspectiva semiótico-cultural, la cual permite verlas como algo más que una externalización de los procesos

[26] Proponen seis tipos de situaciones físico-empíricas: razones entre dos cantidades heterogéneas, medida, mezcla, frecuencia, dilataciones y cambio de unidad.

[27] Marcos representacionales lineales, bidimensionales, notación fraccionaria, notación decimal (Adjiage, 1999; Deliyiani, Panaoura, Elia, & Gagatsis, 2008).

mentales del individuo, para considerarlas ahora como parte integral del pensamiento; más aún, como los instrumentos privilegiados del pensamiento.

1.3 Una mirada a los contextos escolares locales

Cómo se puede ver de la sección precedente, el campo relacionado con las *razones, las proporciones y la proporcionalidad*, ha sido ampliamente investigado desde diferentes puntos de vista (cognitivos, epistemológicos, didácticos, matemáticos), lo que permite concluir su importancia para el desarrollo mismo de la didáctica de las matemáticas. Esta importancia también se ve reflejada en los currículos de matemáticas que organizan los procesos de estudio de los estudiantes en edad escolar y, como se verá a continuación, *razones, proporciones y proporcionalidad* no solo ocupan un lugar importante en el currículo de matemáticas propuesto e implementado en el país, sino también en los procesos de evaluación estandarizada que se realizan periódicamente con el fin de evaluar el desempeño de los estudiantes colombianos.

1.3.1 Razones, proporciones y proporcionalidad en el currículo nacional

La aritmética en la Educación Básica de nuestro sistema educativo, al menos desde la Renovación Curricular,[28] ha sido organizada a partir de la perspectiva de los Sistemas Numéricos (Vasco, 1994b, 1994c, 1994d). Esta perspectiva recibe un nuevo impulso en los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998) al expresar que el desarrollo de Pensamiento Numérico es el nuevo énfasis sobre el cual se debe realizar el estudio de los Sistemas Numéricos. De esta manera se afirma la necesidad de situarse en un contexto amplio en el cual, desde el estudio profundo de los Sistemas Numéricos, se desarrollen habilidades para comprender los números, usarlos en métodos cualitativos o cuantitativos, realizar estimaciones, aproximaciones, y

[28] La Renovación Curricular fue un movimiento de reforma de los currículos obligatorios para la Educación Básica que se adelantó orientada por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia de 1976 a 1993. Después de seis años de diseño y experimentación, el llamado "Nuevo Currículo de Matemáticas" para la Educación Básica Primaria se estableció para todo el país, junto con los de otras áreas, por el Decreto 1002 de 1984. Los programas de secundaria (grados 6 a 9) se diseñaron y probaron pero no se extendieron a nivel nacional. Esta reforma buscaba fundamentar el currículo de matemáticas de la educación básica y media bajo la perspectiva del enfoque de sistemas. Fue, por así decirlo, la respuesta nacional al movimiento mundial en contra de las matemáticas modernas pues consideraba que los conjuntos eran solo el sustrato de los sistemas en tanto que sus operaciones (dinámica) y relaciones (estructura) no eran reductibles a los conjuntos (ver Vasco, 1990).

en general, utilizar los números como herramientas para procesar, interpretar y comunicar información. Esta mirada sobre el currículo es reafirmada en el documento *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 2006) en donde se amplían los horizontes conceptuales presentados en los lineamientos curriculares, y se proponen en forma de estándares, las competencias básicas en matemáticas que deben alcanzar todos los estudiantes del sistema educativo colombiano.

En este marco propuesto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), las RPP se identifican como objetos de conocimiento que deben ser tratados en diferentes grados de la Educación Básica y media, en una propuesta que las integra bajo la perspectiva del campo conceptual de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1988, 1991, 1994, 2009). Una lectura detallada de *Lineamientos* y *Estándares* permite proponer que las RPP se encuentran vinculadas a través de una red conceptual como la mostrada en la figura 1.

Cómo se puede ver en esta red conceptual, las RPP ocupan un lugar importante en la

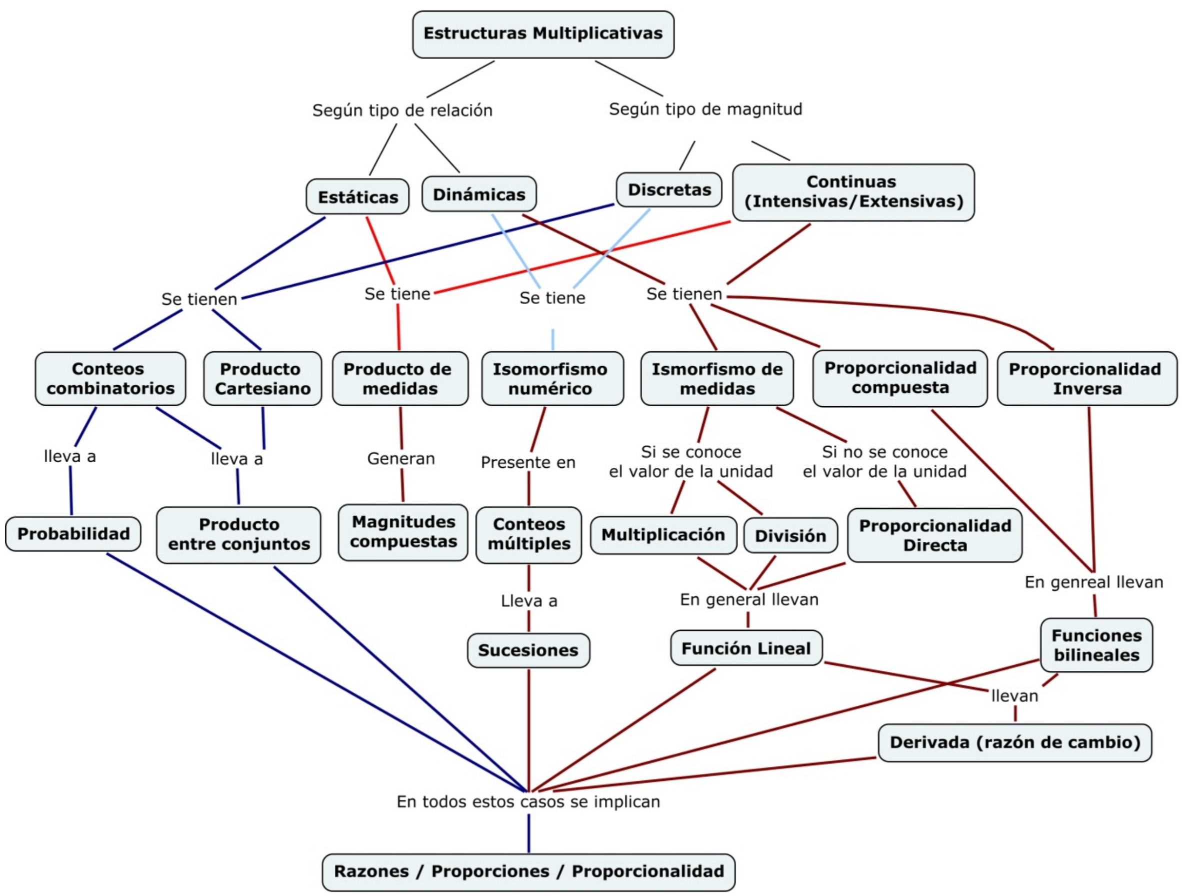


Figura 1. *Red conceptual para las razones, proporciones y proporcionalidad en Lineamientos y Estándares.*

organización curricular del sistema educativo colombiano,[29] toda vez que se inicia desde la Educación Básica (con los primeros aprendizajes sobre la multiplicación) y se extiende hasta finales de la Educación Media (con el trabajo propio del cálculo sobre funciones), y además, conectan los diferentes tipos de pensamiento (al menos de manera directa toca con lo numérico, lo variacional y lo métrico).

1.3.2 Razones, proporciones y proporcionalidad en la evaluación estandarizada

Ahora bien, los anteriores planteamientos oficiales sobre la necesidad e importancia de un tratamiento detallado y estructural con respecto a las razones, las proporciones y la proporcionalidad, contrasta con los resultados de los estudiantes en algunas pruebas que se han realizado en el país para medir el nivel de aprovechamiento en matemáticas: evaluación SABER y la evaluación TIMSS.

La evaluación SABER, realizada en los grados 3º y 5º de la Educación Básica, muestra que en general los estudiantes colombianos presentan un alto rendimiento cuando se trata de efectuar los algoritmos de las operaciones básicas (estudiantes clasificados en el nivel b), siendo mejores los resultados en los algoritmos de la suma y la multiplicación, y ligeramente menores en

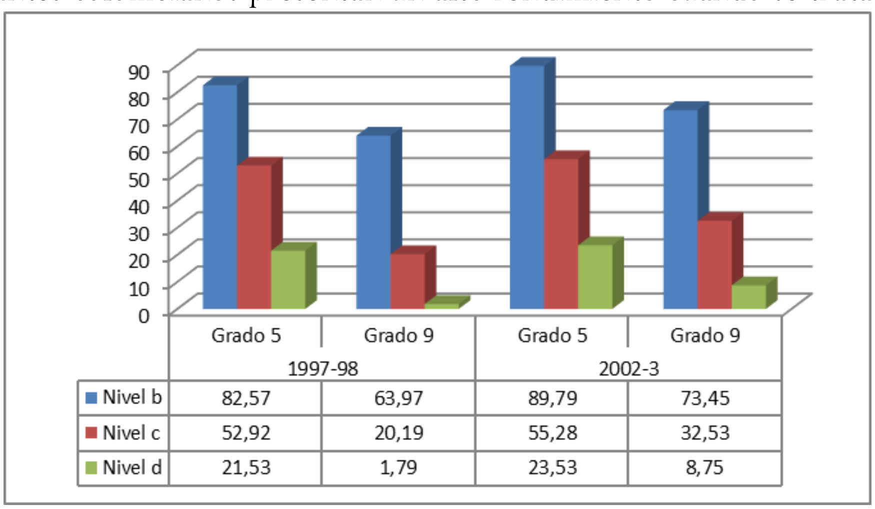


Figura 2. *Desempeño en pruebas SABER los años 1997-98 y 2002-03*
(*Fuente:* tablas publicadas en la página del ICFES, en la actualidad fuera de línea).

[29] Se puede afirmar que esta es una importancia reconocida también a nivel internacional. El estudio TIMSS 2007 (Martin, Mullis, & Foy, 2008; Mullis *et al*., 2008a, 2008b; TIMSS, 2009), realizado sobre los grados 4º y 7º de los sistemas educativos de cerca de 60 países participantes, mostró que en todos los países evaluados estos objetos de conocimiento están presentes, no solo en los currículos propuestos (políticas educativas oficiales de cada país), sino también en los implementados (manifiesto en lo que los profesores enseñan en sus aulas de clase) y aprendidos (lo que los alumnos manifiestan como contenidos aprendidos). Esta importancia igualmente se puede ver en el reporte de investigación de Ponte y Marques (2005), donde comparan textos de 4 países (España, Portugal, Brasil y Estados Unidos) en relación al tratamiento dado a las proporciones, concluyendo una notable similitud en los textos analizados de los cuatro países: organización de los temas, estrategias pedagógicas y niveles de complejidad cognitiva. Ideas similares se pueden encontrar en Adjiage y Pluvinage (2007) en relación al currículo de matemáticas francés, donde el tratamiento de las razones y las proporciones se localiza en los grados 6º y 7º.

los algoritmos de la resta y la división; pero este porcentaje decrece rápidamente cuando los estudiantes se ven enfrentados a la solución de problemas complejos no rutinarios (estudiantes clasificados en los niveles c o d). La situación se torna más crítica con los problemas del tipo razonamiento multiplicativo o que impliquen la concatenación de dos o más operaciones, pues en estos casos los niveles de rendimiento son muy bajos. La figura 2 y la figura 3 son evidencia de las anteriores afirmaciones.

De otra parte, las pruebas TIMSS muestran situaciones similares. Así por ejemplo, en las pruebas realizadas en el año 1995 (Díaz, Álvarez, Torres, & Guacaneme, 1997) los estudiantes de grado 7º de Colombia tienen un rendimiento del 26.8% frente a un 49.8% de los estudiantes de grado 7º internacionales. Así mismo, los estudiantes de grado 8º de Colombia presentan un rendimiento del 30.3%, frente a un rendimiento del 55.6% de los estudiantes internacionales del mismo grado. Para la aplicación del año 2007 (Martin *et al.*, 2008) la situación no varió de manera significativa: solo el 31% alcanzó un nivel mínimo, 9% un nivel medio, 2% nivel alto, y 0% nivel avanzado, evidenciando que cerca del 60% de los estudiantes no alcanzó el nivel mínimo esperado. Estos resultados muestran que existe un gran desfase entre este currículo propuesto y el logrado por los alumnos.[30]

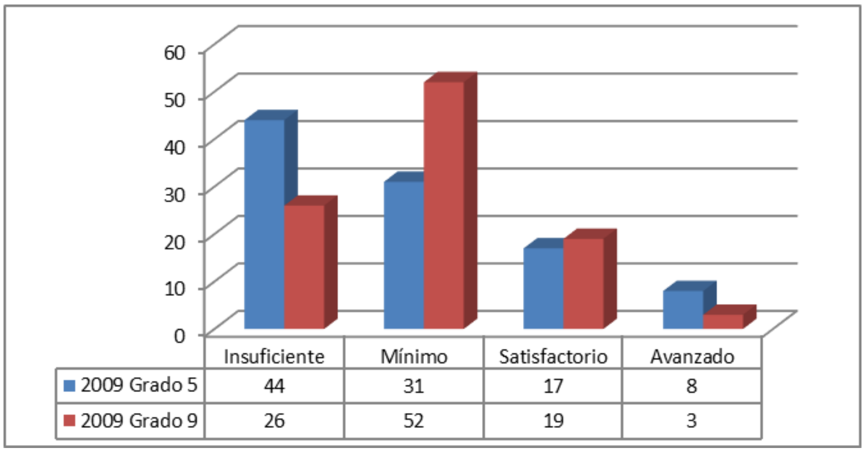


Figura 3. Desempeño en pruebas SABER, año 2009
(*Fuente*: publicación resultados pruebas SABER (ICFES, 2010))

Una mirada más cercana a los resultados muestra, en ambos años de aplicación de las pruebas, que los temas relativos a las razones, las proporciones y la proporcionalidad, son difíciles para los estudiantes de todas las latitudes, pero en todo caso, más difíciles para los

[30] Es importante aclarar que en Colombia, a diferencia de otros países latinoamericanos, no hay currículo oficial propuesto, sino solo lineamientos generales y estándares de competencia como referentes curriculares de orden nacional. Estos referentes curriculares son utilizados para elaborar las pruebas nacionales estandarizadas, pero también son utilizados en forma autónoma por la Instituciones Educativas, y con respecto al Proyecto Educativo Institucional que se haya fijado cada una. Esta tarea de elaborar currículos propios para cada plantel y para el grupo poblacional que atiende no se ha realizado seriamente en la mayoría de las instituciones, no es viable comparar directamente el currículo propuesto y el logrado.

colombianos. Así por ejemplo, en la prueba del 2007, a los estudiantes de grado 4º se les realizaron preguntas como las siguientes:

- "Dos niños están corriendo. Por cada 2 km que Fred recorre, Alan recorre 3 km. Si Fred recorre 3 km, ¿cuánta distancia recorre Alan?" (TIMSS, 2009, p. 48)
- "Ana usa una regla para obtener sus números a partir de los números de María, tal como se muestra en la siguiente tabla.

Números de María	Números de Ana
1	3
2	6
4	12
6	18

¿Cuál es la regla que Ana usó para obtener sus números?" (TIMSS, 2009, p. 51)

Para la primera pregunta, sólo el 10% de los estudiantes nacionales evaluados respondieron correctamente (frente a un 27% del promedio internacional) mientras que en la segunda sólo el 2% de los nacionales la responden correctamente (frente a un 26% del promedio internacional).[31] Situación similar se puede afirmar para el caso del grado 8º donde las preguntas sobre el uso de las razones, la aplicación de las fracciones para resolver una determinada situación o el cálculo de porcentajes en situaciones de descuentos sobre precios, presentaron desempeños significativamente bajos en todos los estudiantes evaluados, siendo mucho más bajo el desempeño de los estudiantes nacionales (no sobra decir que los asuntos relativos a las razones, las proporciones y proporcionalidad son el punto más crítico de los aspectos evaluados).[32] Además, tanto en la prueba del 1995 como del 2007, se destaca que la utilización de procedimientos de rutina (cálculo con fracciones, uso de la regla de tres, algoritmos de la multiplicación y división) presenta promedios que, siendo bajos con respecto a los promedios internaciones, son comparables con ellos.

[31] Es importante notar que para esta segunda pregunta los autores asumen que la respuesta correcta es la relación funcional $y = 3x$ (donde x e y representan los números de Ana y María respectivamente), pero una mirada detallada de la tabla muestra que pueden existir otras formas de establecer la relación entre los números de cada columna, como por ejemplo, que la suma de dos números consecutivos en una misma columna da el siguiente número en dicha columna, (y para el caso de la primera casilla de cada columna, la suma de ese número consigo mismo, da el segundo número de dicha columna), en una especie de sucesión similar a la de los números de Fibonacci. Al asumir una única posibilidad como respuesta correcta los autores no toman en consideración esta diversidad de posibilidades, y ahí puede residir la dificultad de la pregunta para los estudiantes.

[32] Situaciones similar se puede afirmar con las preguntas de la prueba del 1995 que se corresponden con las razones, las proporciones y la proporcionalidad, donde por ejemplo, preguntas por la comparación de fracciones, o por las operaciones con fracciones o razones, muestran un promedio de respuesta correcta por debajo del 20% frente a un 40% en el promedio internacional (Díaz, Álvarez, Torres, & Guacaneme, 1997).

Lo anterior permite realizar una afirmación sobre lo que aprenden los estudiantes colombianos con respecto a la proporcionalidad: la enseñanza de la proporcionalidad se centra en procesos algorítmicos (fundamentalmente la regla de tres) sin que sean explícitas las relaciones de covariación entre magnitudes y, por ende, el uso significativo de las razones y proporciones que se exige en este tipo de situaciones de proporcionalidad directa.

Los resultados del TIMSS con respecto al bajo desempeño de los estudiantes en el tema de la proporcionalidad son coherentes con los resultados de la investigación de García y Serrano (1999) realizada con estudiantes colombianos. Las autoras muestran que en el campo de la enseñanza de la proporcionalidad, en nuestro sistema educativo, aún subsisten dificultades. Las autoras muestran que la organización curricular relativa a la enseñanza de la aritmética en la Educación Básica es descontextualizada, y por lo tanto, la solución de problemas no juega un papel de mediador en la construcción del conocimiento por parte de los alumnos. Las dificultades de los alumnos se encuentran en "función de la estructura característica de los enunciados, la estructura semántica de la proporcionalidad y los procesos cuantitativos de solución" (García & Serrano, 1999, p. 38).

A nivel internacional, autores como Vergnaud (1988, 1991, 1994, 2009), Lesh *et al.* (1988), Adjiage y Pluvinage (2007), muestran como los alumnos no alcanzan niveles apropiados de aprendizaje en estas temáticas a través de su ciclo escolar.[33] Estos autores encontraron que en problemas de proporción simple hay un alto índice de éxito, pero en problemas más complejos de proporcionalidad múltiple o inversa, o en contextos numéricos como las fracciones, los resultados de los alumnos disminuyen significativamente. Entre las posibles causas de esta disminución, Vergnaud plantea una fundamental: la construcción del campo conceptual de las estructuras multiplicativas tarda un largo periodo de tiempo y, en general, los maestros desconocen los problemas asociados a su construcción.

Así pues, los párrafos previos nos muestran, de un lado, la valoración que a nivel curricular tienen, internacionalmente, ejes temáticos en torno a las razones, las proporciones y la proporcionalidad, pero de otro, como estos ejes temáticos continúan siendo un problema complejo en relación con los procesos de aprendizaje, y con los de enseñanza.

[33] Estudios comparativos, como por ejemplo el TIMSS 2007, muestran que la participación de los países no mejora sustancialmente de un año a otro (Martin *et al.*, 2008). Similares conclusiones muestra un estudio para el caso del Reino Unido (Hodgen, Kuchemann, Brown, & Coe, 2010).

1.4 A manera de conclusión: descripción del campo problemático

En términos generales, y a partir de lo expresado en las dos secciones anteriores, se puede decir que la investigación reportada en esta tesis se enmarca en lo que en didáctica de las matemáticas se ha dado en llamar el *razonamiento proporcional*, el cual se ha posicionado como un campo privilegiado para las investigaciones en virtud de su importancia para las matemáticas que se enseñan en la escuela, en tanto pone en relación diferentes ámbitos de la matemáticas escolares a partir de una estructura compleja que liga conceptos, situaciones, formas de representación y procedimientos de naturaleza diversa, tales como la multiplicación, la división, la razón, la proporción, la proporcionalidad, la función lineal, etc.; pero también es un campo privilegiado por su lugar en la comprensión de una gran diversidad de situaciones de la vida diaria: la lectura e interpretación de mapas y maquetas a escala, los cálculos al comprar para determinar el producto más económico, el comportamiento de las cuentas de cobro de los servicios públicos, etc.

En contraste con esta importancia relativa, como se mostró para el caso del sistema educativo colombiano, es común encontrar que los desempeños de los estudiantes en los ámbitos escolares no alcanzan los niveles esperados. La persistencia de estas dificultades podría interpretarse no tanto como un fracaso en la investigación realizada hasta ahora, sino como una muestra de la complejidad subyacente a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las razones, las proporciones y la proporcionalidad. Esta complejidad se evidencia en la diversidad de marcos conceptuales elaborados para intentar comprender los conceptos, las situaciones y los procedimientos relacionados con los objetos de conocimiento matemático razón, proporción y proporcionalidad y, además, en la falta de claridad sobre las orientaciones de los procesos escolares que pueden sugerirse a los docentes. Esto ha sido reconocido por diferentes autores en distintos momentos (Karplus *et al.*, 1983; Koellner-Clark & Lesh, 2003; Lamon, 2007), al expresar que, a pesar del cúmulo de investigaciones, es necesario más investigación sobre cómo los chicos y chicas piensan proporcionalmente, de tal manera que sirva como base para orientar los procesos de instrucción. Dicho de otra manera, a pesar de la marcada importancia del razonamiento proporcional y de existir caracterizaciones bien definidas de los aspectos cognitivos del desarrollo de este tipo de razonamiento en los niños, niñas y jóvenes, aún hace falta más investigación que permita profundizar en los fundamentos didácticos sobre los cuales elaborar propuestas relacionadas con los procesos de enseñanza y, por supuesto, del aprendizaje de dichos conceptos.

Así, en palabras de Susan Lamon (2007), es necesario desarrollar investigación empírica y teórica que permita ver la potencia de las estructuras y mecanismos elementales (investigación en los primeros años de la Educación Básica) y, a largo plazo, sobre la base de análisis matemáticos profundos, cómo desde éstas se da paso a formas más sofisticadas de pensamiento. También es necesario un trabajo que, además de los cuestionamientos didácticos centrados en los aspectos cognitivos propios del razonamiento proporcional, o de los aspectos matemáticos y de contexto ligados a dicho desarrollo, establezca un nuevo nivel de análisis relacionado con la forma de organización escolar de dicho conocimiento.

Sin embargo, a pesar de los aportes que van apareciendo en la literatura más reciente (Ben-Chaim *et al.*, 2012; Bryant & Nunes, 2009; Howe *et al.*, 2010, 2011; Lamon, 2012; Nunes & Bryant, 2008; Pontón, 2008, 2012; Steffe, 2010a), se puede decir que algunos cuestionamientos como los siguientes son aún problemas didácticos abiertos:

1. Comprender mejor las filiaciones y las rupturas, las líneas de continuidad o los saltos cualitativos en el pensamiento entre lo aditivo y lo multiplicativo, de tal forma que los procesos escolares se puedan orientar a potenciar la transformación cualitativa de los razonamientos aditivos hacia los razonamientos multiplicativos. Por ejemplo, preguntas como las siguientes son temas abiertos de investigación: ¿Pueden los enfoques no aritmetizados (construidos sobre las magnitudes o las funciones, en particular las lineales) contribuir a un mejor paso de lo aditivo a lo multiplicativo? ¿Qué tipos de relaciones lógicas (procesos de unitización, relaciones de equidiferencia o de equicociencia, coordinación de conteos iterados, etc.) están en la base de la construcción de las nociones de razón, de proporción y de proporcionalidad, y hasta dónde estas relaciones son construcciones nuevas o generalizaciones sobre procesos aditivos? ¿El conocimiento informal construido por el niño en su vida cotidiana y relativo a las razones, las proporciones y la proporcionalidad (como las particiones, reparticiones, comparaciones, relativizaciones, etc.) qué lugar tiene en la construcción de los objetos de conocimiento formalizados propuestos en la institución escolar?
2. En consonancia con lo anterior, intentar comprender mejor cómo se establecen las relaciones de continuidad y de ruptura desde los primeros aprendizajes propios de las estructuras multiplicativas (multiplicación, división, fracción, razón, etc.) hasta la

comprensión de los números racionales y las relaciones lineales y no lineales, y el lugar que en dichos procesos pueden tener las diferentes praxis matemáticas en torno a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. Por ejemplo, las preguntas por las praxeologías propias de los números racionales, esto es, por sus tipos de situación y actividad; por las estructuras matemáticas que soportan tales praxis y, sobre todo, por las líneas de continuidad o ruptura de una praxeología a otra (por ejemplo, ¿los racionales como *cocientes indicados*, o como *parejas ordenadas*, o como *operadores* permiten transiciones fluidas de una forma de interpretación a otra, o son construcciones independientes que implican rupturas en la forma como se piensan los racionales desde una forma de organización matemática a otra?) son interrogantes que aún requieren de más investigación. En particular, es necesaria investigación que permita la comprensión del desarrollo de las magnitudes, sus cantidades y sus medidas (no tanto desde un punto de vista cognitivo, sino didáctico, físico y matemático), en relación al impacto de éstas en la construcción de los números racionales, y en general, de la totalidad de las matemáticas que se enseñan y aprenden en la escuela (Lamon, 2007).

3. Comprender mejor el papel (líneas de continuidad y de rupturas del proceso) de los diferentes tipos de proporcionalidad en particular, y de correlación en general, en la construcción del concepto de función, incluso de funciones no polinomiales (trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc.). A este respecto se pueden plantear preguntas de investigación como las siguientes: ¿Cuáles son los procesos y procedimientos implicados en la construcción de las biyecciones que caracterizan las covariaciones lineales entre dos o más sistemas de cantidades, característicos de ciertos tipos de situaciones? Si se tiene en cuenta que en la construcción de los isomorfismos de medidas las aproximaciones basadas en procedimientos escalares ($f(x+y)=f(x)+f(y)$, o $f(\alpha\cdot x)=\alpha\cdot f(x)$) o las basadas en procedimientos funcionales ($f(x)=k\cdot x$) responden a dos fenomenologías distintas (Freudenthal, 1983), entonces ¿se presenta continuidad o ruptura de una aproximación a la otra, o por el contrario, son procesos constructivos paralelos?

Si bien problemáticas como las anteriores siguen siendo líneas abiertas, es necesario reconocer que en los últimos años se han realizado aportes importantes en consolidar líneas de investigación sobre la base de cuestionar la manera como están estructurados los procesos de enseñanza de las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los contextos escolares. (Adjiage & Pluvinage, 2007; Bolea *et al.*, 2001; Bosch, 1994; Comin, 2002; García, 2005; Hersant, 2001; Hersant & Perrin-Glorian, 2005). La búsqueda de esos marcos comprensivos se han mostrado las debilidades de la organización matemática que tienen las propuestas curriculares actuales para la enseñanza de las razones, las proporciones y la proporcionalidad; ante todo, muestran que es posible una organización matemática distinta, que si bien se puede apartar de la estructura formal actualmente reconocida como tal en el marco de la disciplina matemática, podría permitir a los estudiantes recorrer caminos epistémicos centrados en el tipo de actividad matemática necesaria para la construcción de sentidos y significados relativos al tema de estudio en cuestión. De esta manera, se evidencia la necesidad de construir nuevos tipos de análisis de los procesos escolares de tal forma que en ellos se separen los análisis epistemológicos (orientados a la estructura matemática de la situación), los análisis cognitivos (orientados a las prácticas de los individuos), y los análisis instrumentales (orientados a las técnicas utilizables en función de los instrumentos disponibles).[34]

Así pues, en el marco anteriormente expuesto, el problema de investigación que orientó el trabajo realizado pretende contribuir al estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos de conocimiento matemático razón, proporción y proporcionalidad localizando este campo de indagación en la franja escolar de los grados 3º y 4º de la Educación Básica.[35] Además, dado el carácter institucional del conocimiento, este campo problemático se localizó más específicamente en una institución educativa de la

[34] Tanto los criterios representacionales mencionados en el literal e) de la sección 1.3.2.1 (p. 14) como las observaciones de Gagatsis y sus colegas (pp. 20 y ss.), de Hersant (p. 24 y ss) y de Adjiage y Pluvinage (pp. 25-26) sobre los marcos representacionales muestran que las investigaciones futuras sobre RPP serán más productivas en la medida en que profundicen en la dimensión semiótica. Esta dimensión estaba ya prefigurada desde los años ochenta en los "juegos de marcos" ("jeux de cadres") de Régine Douady (Douady, 1986) y en las "representaciones múltiples" de Jim Kaput (Balacheff & Kaput, 1996; Goldin & Kaput, 1996; Kaput, 1998). Sin embargo, estas ideas no se refinaron suficientemente hasta que, a mediados de los noventa, Raymond Duval formuló las distinciones precisas entre registros semióticos de representación y las representaciones semióticas (RS) producidas desde cada registro, así como entre el tratamiento de las RS dentro de un mismo registro y su conversión de un registro a otro. Por ello, sea en la dirección de Duval (2004b) y su enfoque noético-semiótico, o en la de Godino, Batanero y Font (2007) y su enfoque onto-semiótico, o en el enfoque semiótico-cultural de Radford (Radford, 2006, 2013; Roth & Radford, 2011), o en el enfoque de la semiótica peirceana de Sáenz-Ludlow (2006, 2007) en sus juegos de interpretación, no es ya posible soslayar en la investigación en los objetos RPP, o en otros aspectos de la didáctica de las matemáticas, la unidad intrínseca entre "semiosis y pensamiento humano", como lo expresa el título del libro ya clásico de Raymond Duval.

[35] En este sentido, de los tres grupos de problemas abiertos enunciados en las páginas anteriores, se puede decir que el problema se enmarca fundamentalmente en el primero de ellos. Esto en tanto indaga precisamente por esos momentos del proceso de estudio de los estudiantes en los que desde la institución escolar inicia el estudio formal de todo lo relativo a las estructuras multiplicativas.

ciudad capital del Departamento del Valle, Cali, Colombia.[36]

Para caracterizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de tales objetos en su contexto específico de escolaridad se examinan los sistemas de prácticas matemáticas y el tipo de configuraciones epistémicas que están en la base de tales sistemas de práctica.

En este orden de ideas, el trabajo se orientó a partir de las siguientes preguntas de investigación con respecto a los objetos de conocimiento matemático razón, proporción, proporcionalidad, y para el caso de las clases de matemática de los grados 3º y 4º de una institución educativa de la ciudad de Cali:

1. ¿Qué sistemas de prácticas matemáticas están presentes en las clases de matemáticas de los grados terceo y cuarto de la institución escolar estudiada?
2. ¿Qué configuraciones epistémicas sustentan tales sistemas de prácticas?

1.4.1 Objetivos

El trabajo se orientó por los siguientes objetivos, con relación a los objetos de conocimiento matemático de razón, proporción y proporcionalidad, en las clases de matemáticas de los grados 3º y 4º de una institución educativa de la ciudad de Cali.

Objetivos Generales.

1. Caracterizar los sistemas de prácticas matemáticas institucionalizadas con respecto a los objetos de conocimiento matemático en cuestión.
2. Indagar por las configuraciones epistémicas que sustentan dichos sistemas de práctica matemática.

Objetivos Específicos.

1. Identificar las técnicas e instrumentos disponibles institucionalmente en el marco de los sistemas de prácticas analizados, y caracterizar las formas de mediación que posibilitan.
2. Caracterizar los tipos de situaciones y las familias de actividad que organizan y orientan la actividad matemática en la institución educativa analizada.
3. Describir las formas de discursividad características de tales sistemas de

[36] Por motivos de protección de la identidad de las personas participantes en el presente estudio, no se publica el nombre de la institución educativa.

prácticas institucionales.

4. Caracterizar los objetos y los conceptos que se pueden inferir como constituyentes de, o emergentes de, los sistemas de prácticas analizadas.
5. Identificar la forma, los principios organizativos de objetos, conceptos, enunciados, tipos de situación, familias de actividad, técnicas e instrumentos, relativos a tales sistemas de prácticas.

2 Filosofía, Matemáticas y Educación: una perspectiva Histórico-Cultural en Educación Matemática[37]

2.1 Introducción

La educación matemática, en su proceso de consolidación, ha transitado por diferentes caminos teóricos, algunos complementarios, otros excluyentes, pero en todo caso, fundamentados en procesos interdisciplinares que muestran su complejidad,[38] al punto que se considera hoy en día un campo de investigación y prácticas en construcción, un cruce de caminos de diferentes enfoques teóricos y metodológicos (Clements, Bishop, Keitel-Kreidt, Kilpatrick, & Leung, 2013; D'Amore, 2005; Sriraman & English, 2010). Aun con el riesgo de simplificar la complejidad de la discusión, puede decirse que estos enfoques se despliegan entre el individualismo (monismo epistémico y cognitivo), y las posturas de corte dialógico en donde lo cognitivo y lo epistemológico son explicados como procesos eminentemente culturales.

Siendo conscientes de las tensiones generadas en este debate de lo individual o lo social en relación con los procesos de constitución del conocimiento, en este capítulo, sobre la base de planteamientos que provienen de la teoría de la actividad y de una filosofía de la práctica, se busca argumentar en favor de cuestiones relativas tanto al conocimiento matemático como a su aprendizaje, mostrando que lo individual y lo social (lo institucional) son polos de una tensión dialéctica movilizada a partir de los sistemas de prácticas, históricamente constituidos y contextualmente situados, que cruzan toda actividad humana. Como lo manifestó John Dewey, se trata de reconocer que la construcción de la experiencia humana no es sólo el producto de la acción mental del individuo, sino también

[37] De este capítulo se elaboró una versión como artículo que ha sido aprobado para su publicación en la Revista Científica de la Universidad Distrital (número 20, diciembre de 2014).

[38] A propósito de esta interdisciplinariedad, ver Vasco (1994e).

el resultado de los procesos sociales subyacentes a las relaciones humanas:

> …vivimos, del nacimiento hasta la muerte, en un mundo de personas y cosas, que en gran medida son lo que son por lo que se ha hecho y transmitido en las actividades humanas previas. Cuando se pasa por alto este hecho, la experiencia se trata como si fuera alguna cosa exclusivamente dentro del cuerpo y la mente de un individuo. No debería ser necesario decir que la experiencia no se produce en un vacío. Hay fuentes fuera de un individuo que dan lugar a la experiencia… (Dewey, 1960, p. 43).

Estas fuentes externas provienen de la cultura en la forma de los sistemas de prácticas institucionalizadas que reglan las formas de acción de los individuos (acción orientada a una finalidad, acción con otros), y que a su vez posicionan al individuo frente a esa acción conjunta (*habitus*, en el sentido de Bourdieu). El desarrollo debe entonces entenderse en función de la experiencia humana como un proceso mediado culturalmente (Rogoff, 2003), institucionalmente situado en contextos específicos de práctica (las acciones de los individuos y el contexto para la acción forman una unidad inseparable), y cognitivamente distribuido (en los otros, los instrumentos, los entornos sociales y naturales) (Cole & Wertsch, 1996).

2.2 Fundamentos filosóficos: epistemología y ontología de los objetos de conocimiento matemático

2.2.1 Objetos y conceptos matemáticos: síntesis de la acción humana

Hablar sobre objetos o conceptos es un asunto espinoso con multiplicidad de miradas a través del tiempo (la filosofía de las matemáticas, o el estudio de los aspectos cognitivos del aprendizaje de las matemáticas se han dado grandes aportes al respecto). Así pues, conscientes de la complejidad subyacente a estas discusiones, pero a su vez, de la necesidad de una delimitación del campo de discusión, es necesario un intento de clarificar unas ideas al respecto, sobre todo porque para los procesos escolares, hablar de conceptos y de objetos remite no solo a los aspectos filosóficos del tema, sino también a los asuntos psicológicos del proceso de formación de conceptos en el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, en este momento se restringe la discusión a los objetos y conceptos matemáticos, e incluso en este ámbito de la filosofía de las matemáticas, a una mirada sobre los mismos (una posible entre otras) desde la filosofía de la práctica.

Sobre los objetos matemáticos

Restivo y Collins (2010) afirman que "los objetos con los que tratan las matemáticas modernas…son *reales* en el siguiente sentido. Ellos no son *cosas*,…, ellos son, por el contrario, las operaciones, las actividades que los matemáticos pueden realizar." (p. 11, énfasis en el original).

> Los objetos matemáticos provienen, no de la abstracción de objetos reales mediante la descripción de sus características principales, sino de un proceso de *objetivación de procedimientos*. No provienen de una realidad exterior, independiente del hombre, representando la esencia desprovista de impurezas materiales, sino que ellos formalizan la acción humana" (Giusti, 2000, pp. 25-26, énfasis en el orginal).[39]

Esto es, los objetos matemáticos antes que ser abstracciones sobre otros objetos son abstracciones sobre la acción, con y sobre tales objetos (si se quiere de nivel previo).[40] El objeto sintetiza un campo complejo de experiencias, es la percepción de un conjunto complejo de operaciones y relaciones que se tematizan[41] a partir de la experiencia vivida. En esta relación de los objetos con la experiencia humana, éstos también son síntesis de las formas de relación de los sujetos con el resto del mundo que nos rodea. Así por ejemplo, el número como objeto de conocimiento en los griegos, o el número en la época moderna, es diferente no solo porque el moderno sea más abstracto que el antiguo. Lo es también porque en uno y otro momento están sintetizando diversas formas de relación con el mundo, que se expresan no tanto por la necesidad lógica de la abstracción, como por las relaciones cambiantes del hombre con el mundo: el desarrollo del comercio al finalizar la edad media, el interés de la iglesia católica en el estudio de las ciencias (podría decirse, la determinación

[39] La sección 4.3 (capítulo 4) muestra un análisis detallado sobre estos procesos de idealización de procedimientos que permiten la constitución de la noción moderna de número real, en el marco de diferentes tematizaciones de la noción de razón y la constitución de un estatus operatorio para éstas a partir de ciertas formas de notación (fracciones). Esta idealización relacionada con los procesos simbólicos opera en un cambio de la ontología desde las matemáticas griegas a las matemáticas modernas (Klein, 1992): simbolizar no es solo poner en un signo lo que antes estaba en las palabras; el signo no solo se pone en el lugar del objeto representado, sino que al operar con el signo, al pensar a través del signo, en última instancia, el objeto es lo que se puede hacer con él, lo que se puede pensar y decir a través de ese signo. Dicho en otras palabras, en la medida que se puede operar con el signo, se hace en sí mismo objeto matemático.

[40] Esta idea de abstracción sobre la acción es muy cercana al concepto de "abstracción reflexionante" de Piaget, entendiendo que la internalización de la acción permite la constitución de nuevas estructuras sobre la base de las ya constituidas. Así, la abstracción no solo internaliza los esquemas lógicos de la acción, sino la estructura global de la acción, subsumiendo los sustratos previos (estructura de otras formas de acción) en las estructuras de nivel superior.

[41] "Según Jean Cavaillès, quien introdujo el término para distinguir la edificación lógica de las teorías de una simple generalización, la tematización es el proceso por el cual una operación que previamente se ha realizado sobre un campo de objetos, es objeto de una segunda operación, la cual se vuelve a su vez objeto de una tercera operación, y así sucesivamente." (Arboleda, 2011, p. 33).

de la fecha del nacimiento y muerte de Jesús y la fijación anual de la fecha de Pascua, así como más tarde, la búsqueda de pruebas científicas de la existencia de Dios), el influjo de la cultura árabe (vía por la cual llegan a Europa los legados de las matemáticas hindúes y chinas), el advenimiento de la era industrial con nuevos ideales de hombre, etc., constituyeron un conjunto de condiciones en los que las relaciones del hombre con el mundo, a través de las matemáticas como actividad, transformaron no solo a las matemáticas (sus objetos, sus técnicas, sus enunciados, etc.), sino también a esas formas de relación con el mundo. En ese mundo cambiante de la actividad humana, la ontología de los objetos matemáticos cambió radicalmente: de ser el objeto ideal existente como abstracción, como idealización de las formas del mundo (en los griegos), o de ser formas divinas legadas por los dioses (como posiblemente lo fue en el antiguo Egipto), a un objeto que toma materialidad en el signo y en la estructura operatoria de lo que se puede hacer con él.[42] Ese es el eterno ciclo creativo, en donde nuevos objetos emergen como formas idealizadas de patrones de actividad sobre los objetos culturalmente ya constituidos. Estas formas idealizadas, estos patrones de actividad se fijan en el signo que, a partir de ese momento, es la forma objetivada del objeto de conocimiento constituido.

Esta constitución de objetos es lo que Radford (2003, 2009, 2013) denomina *objetivación*, entendida esta como un proceso social activo y creativo de construcción de sentidos y significados (para los objetos de conocimiento) relativos a las formas culturales de hacer y de pensar (conocimiento matemático). Estos sentidos y significados descansan no sólo en el cuerpo de conocimientos estructurados formalmente (conceptos, objetos, axiomas, teoremas, etc.), sino también, en las acciones (gestos, técnicas, modos de hacer),

[42] Así por ejemplo, las letras usadas por Vieta para denotar las incógnitas, y el carácter operatorio con que son investidas, hacen del álgebra en Vieta algo más que un conjunto de reglas para operar con variables y números: el álgebra, como teoría generalizada de las proporciones (las ecuaciones del álgebra, en palabras de Vieta, no son más que la solución de una proporción, así como la proporción es la construcción de una ecuación) se hace aplicable tanto a las magnitudes geométricas como a los números, y por ende, la letra que representa la incógnita, al poderse operar con ella es investida con el carácter de cantidad, de número generalizado, es por así decirlo, el nacimiento del concepto moderno de número (Klein, 1992). Sin embargo, quizás por la necesidad de la enseñanza de las nuevas técnicas matemáticas, quizás por la economía de pensamiento que implicaban el uso de las nuevas técnicas algebraicas en la solución de los viejos problemas, quizás por el poder de su aplicación a problemas nuevos, quizás por la elaboración de una idea de número ya no asociada a la idea de razón, sino a la idea de medida, o quizás por el surgimiento de nuevos objetos, como por ejemplo, los conjuntos, quizás por todo eso, y por otras cosas más, las ecuaciones del álgebra terminan olvidando las razones y proporciones de las cuales tuvieron su origen en un momento dado, para constituirse en objetos independientes que amplifican las capacidades operatorias de los sujetos que las usan. Así pues, las ecuaciones, que en su momento fueron una forma de tratar con las razones y las proporciones, ahora se hacen en objetos independientes de ellas.

en los medios para dichas acciones (signos, instrumentos, etc.), en las formas de razonamiento y de enunciación (géneros discursivos, si se quiere en términos bajtinianos) aceptadas como válidas y, en general, en el conjunto de ideologías[43] que permiten ciertas formas de significación con respecto a los objetos de conocimiento.[44] Esta superestructura simbólica, como dice Radford (2008, 2009), conforma el espacio simbólico de los *medios semióticos de objetivación*, que la cultura pone a disposición de los individuos para su posicionamiento ante el mundo, para la constitución de su experiencia matemática.

Sobre los conceptos matemáticos

La formación de conceptos[45] es un proceso de gran complejidad y su estudio es importante para el trabajo escolar, pues en última instancia, el problema del aprendizaje de cualquier ciencia es el de la constitución de un cuerpo conceptual en el curso de la actividad de los individuos. Esta constitución trasciende la asociación mecánica de la palabra con el objeto pues implica el uso funcional de signos e instrumentos como medios para fijar la atención, orientar la acción, identificar rasgos, analizarlos y elaborar las síntesis (Vygotsky, 1993, 1994). Se puede entonces proponer que detrás de la formación del concepto no solo está la conexión del objeto con la palabra, con su significado, sino que el concepto sintetiza el conjunto de operaciones (mentales) que permiten la abstracción de los atributos del objeto que son resaltados. Dicho de otra manera, el proceso de formación de un concepto implica un proceso de generalización de atributos, pero sobre todo, la síntesis de dichos atributos en una nueva unidad, el concepto formado.[46]

---

43 Para Bajtín, la ideología es conciencia social constituida por la interiorización del signo, es decir, la ideología es un "sistema de ideas socialmente determinado, como sistema de valores y puntos de vista" (Silvestri & Blanck, 1993, p. 56).

44 Los medios semióticos de objetivación serían entonces todo ese conjunto de recursos (instrumentos) culturales que, en el marco de actuaciones específicas, permite a los individuos la toma de conciencia de los objetos, fijar la atención, realizar sus actos intencionales, orientar sus acciones hacia el objeto de la misma (es decir, realizar la actividad). El carácter cultural de los mismos se evidencia en que: (1) sintetizan, encapsulan, procesos socialmente construidos y los hacen comunicables a generaciones posteriores; (2) a través de su uso, los individuos aprenden el conocimiento contenido, cristalizado, en ellos; y (3) constituyen formas culturales de significación que determinan formas específicas de ver, y de hacer, las matemáticas.

45 El estudio de los conceptos desde la psicología ha tenido diferentes aproximaciones, donde las diferencias se dan en función del modelo teórico desde el cual se analiza el funcionamiento de la mente humana (procesamiento de la información, conocimiento de dominio específico, modularidad de la mente, entre otras). Sin embargo, en general se puede decir que todos son intentos por comprender los mecanismos de que dispone la mente humana para la constitución de conceptos y su función en la psique humana.

46 Es importante resaltar que desde la perspectiva de Vygotsky (1993) la generalización es algo más que identificar los rasgos comunes a una clase de objetos. Ésta es ante todo el proceso mediante el cual esos atributos identificados como comunes se constituyen, se sintetizan en una nueva unidad. Con sus palabras, una cosa es identificar todos los atributos comunes a una clase objetos y otra la designación de dichos

El proceso de formación de conceptos, de acuerdo con Vygotsky (1993, 1994), tiene entonces una base firme en la acciones de individuo, y por tanto, para su formación, de nuevo un punto crucial lo determinan, de un lado, el tipo de problemas al que se enfrenta el individuo, cuya solución implica la construcción del concepto en cuestión, y de otro, los instrumentos disponibles para la acción y que median en el proceso de construcción.

Finalmente, resta decir que, desde el punto de vista de Vygotsky, la formación de los conceptos matemáticos se enmarca en la formación de conceptos científicos,[47] lo que implica que estos deben ser considerados como pertenecientes a una red sistémica, esto es, que el proceso de formación de conceptos matemáticos implica el posicionamiento de los nuevos conceptos en el marco de una red compleja de conceptos del objeto, y de conceptos de relación con otros objetos. Así pues, el proceso de formación de conceptos matemáticos es sistémico en tanto se da en relación a unos objetos de conocimiento, en función de unas acciones sobre dichos objetos, a partir de unos instrumentos para la acción, y fundamentado en toda una red de relaciones entre objetos y conceptos, que en general, determinan el conjunto de operaciones posibles del pensamiento con el concepto. Es precisamente en esta inserción de los conceptos científicos en una red sistémica con otros objetos y conceptos, donde la enseñanza se torna en fundamental:

> Los conceptos científicos, con sus actitudes totalmente distintas hacia el objeto, mediados a través de otros conceptos con su sistema jerárquico interno de relaciones mutuas, constituyen la esfera en que la toma de conciencia de los conceptos, es decir, su generalización y dominio, surgen, al parecer, en primer lugar [a través de la enseñanza]. Una vez que la estructura de la generalización ha surgido en una esfera del pensamiento, se transfiere después, como cualquier estructura, como un determinado principio de actividad, sin necesidad de aprendizaje alguno, a todas las restantes esferas del pensamiento y de los conceptos. De este modo, *la toma de conciencia viene por la puerta de los conceptos científicos*. (Vygotsky, 1993, pp. 214-215).

atributos a través de una palabra, pues este acto de designación crea una etiqueta que los constituye efectivamente en una unidad.

[47] Para Vygotsky, la formación de conceptos científicos era diferente de la formación de conceptos cotidianos, aunque el desarrollo de los unos tiene implicaciones en el desarrollo de los otros. La principal diferencia radica en que los conceptos cotidianos no se soportan sobre una red sistémica de conocimientos, lo que les da un carácter inestable, cambiantes, y sobre todo, susceptibles de contradicciones, según los marcos de acción.

2.3 Lo histórico–cultural:[48] fundamentos semiótico-cognitivos

2.3.1 Mediación y cultura: construcción semiótica de la conciencia

Vygotsky introduce claramente elementos de orden cultural en el estudio del desarrollo humano, estudiándolo a partir de dos grupos de fenómenos, totalmente interconectados, aunque perfectamente diferenciados. De un lado, los relacionados con el dominio de los medios externos de desarrollo cultural: el lenguaje, la escritura, el cálculo, el dibujo, etc. De otro, el de las *funciones psíquicas superiores*[49] tales como la percepción, la atención voluntaria, la memoria lógica, la formación de conceptos, el lenguaje oral, el lenguaje escrito, etc. El estudio de estos dos grupos de fenómenos pone de manifiesto la tesis central de la teoría vygotskiana: la conciencia, la experiencia humana, como expresión de su conducta, tiene naturaleza doble: se desarrolla en el plano de la cultura, de sucesos históricamente constituidos, y en el plano interno de la construcción de los esquemas cognitivos. Es en esto que se basa el principio de *internalización*: la reconstrucción interna, por parte del individuo, de los planos sociales en las funciones psicológicas superiores. No es una simple copia de la realidad exterior en la mente de las personas, es un proceso reconstructivo en el que la constitución de esa realidad exterior en el plano cognitivo modifica la cognición misma del individuo.

El signo es el medio a través del cual se realiza este proceso en tanto que, de un lado, todo signo es una construcción cultural, y de otro, la acción humana a través del signo le permite al individuo apropiarse de ese legado cultural presente en él (formas de hacer –

[48] Autores como (Cole, 1999a, 1999b; Cole & Wertsch, 1996; Daniels, 2003, 2008a; Lave, 1991; Wertsch, 1988) proponen llamar histórico-críticos, o histórico culturales, a los enfoques que, sobre la base de los aportes de Vygotsky, Leontiev, Luria, entre otros, buscan una comprensión del desarrollo humano en función de reconocer y estructurar las conexiones íntimas entre la acción humana y el entorno dentro del cual se desarrollan dichas acciones, conexiones que se elaboran sobre la base de la mediación de los artefactos culturales, los cuales son, por naturaleza, institucionalmente situados e históricamente constituidos.

[49] Para Vygotsky, las funciones psicológicas superiores son ante todo construcciones sociales que luego a través del proceso de interiorización se convierten en medios del individuo para controlarse a sí mismo. Es decir, las funciones psicológicas superiores pertenecerían al desarrollo social. "El desarrollo natural produce funciones con formas primarias, mientras que el desarrollo cultural transforma los procesos elementales en procesos superiores. Es la transformación de los procesos elementales en superiores lo que Vygotsky tiene en mente cuando se refiere a la naturaleza cambiante del desarrollo." (Wertsch, 1988, p. 41). Vygotsky desarrolló cuatro criterios para distinguir las funciones psicológicas elementales de las superiores: "(1) el paso del control del entorno al individuo, es decir la emergencia en la regulación voluntaria; (2) el surgimiento de la realización consciente de los procesos psicológicos; (3) los orígenes sociales y la naturaleza social de las funciones psicológicas superiores y (4) el uso de signos como mediadores de las funciones psicológicas superiores." (Wertsch, 1988, p. 42)

operaciones– y de pensar cristalizadas en él), y al hacer esto, el individuo constituye su conciencia posicionándolo frente a su hacer y a su saber. Así, los signos, son entonces el conjunto de elementos que, a través de la actividad de los individuos, les permite reconstruir para sí lo que la humanidad ha construido en su cultura.

De esta manera, el signo no solo es una marca, una huella dejada sobre un medio o soporte, sino que el signo lo es en tanto que en relación con esa marca; a esa huella, a ese gesto –como diría Radford (2006, 2008, 2013)– se han cristalizado un conjunto de significados, de patrones de actividad de los sujetos, haciendo entonces de este signo una construcción cultural con capacidad para orientar la acción de los individuos. Se puede decir que la marca, la huella, el gesto son cada uno de ellos portadores de unas formas de acción, de unos significados del objeto, y por ende, nos permiten, por así decirlo, tener una impresión sensorial del objeto en sí mismo. La multiplicidad de estas miradas sobre el objeto, de formas de acción con el objeto, de significados para el objeto, permiten nuevas elaboraciones sobre el objeto en sí mismo, como especies de síntesis que permiten constituir nuevos niveles de relación sobre tal multiplicidad, nuevas formas de pensamiento elaboradas sobre una red más compleja de conceptos. Todo esto permite entonces la emergencia de nuevas formas de acción en relación con esa construcción cultural que es el objeto de conocimiento. Este el sentido en el que Vygotsky se refiere a la *función instrumental del signo*; esto es, relacionados con algún tipo de operación psicológica (memorizar, recordar, informar, elegir, calcular, etc.), los signos son los instrumentos de la actividad humana (es este caso, actividad psicológica), los medios para la ejecución de las acciones cognitivas necesarias en los procesos de constitución de la conciencia como fenómeno cultural.[50]

2.3.2 Actividad y mediación: acción instrumentada, acción con el otro

Así pues, el concepto de actividad emerge, en la teoría vygotskiana, como un principio explicativo que permite comprender cómo la cultura permea el proceso de constitución de

[50] Nuestro sistema de numeración decimal es un buen ejemplo de la función instrumental del signo: cuando pensamos en el número 20, lo pensamos en base 10. Nuestra cognición no puede pensar el número por fuera de ese sistema cultural llamado el Sistema de Numeración Decimal, el cual sintetiza diversidad de prácticas constituidas en épocas y lugares diferentes, que se impuso en el pensamiento occidental, incluso en contra de las personas mismas, motivado por diversidad de ideales (no solo matemáticos sino también políticos, como por ejemplo, los ideales de igualdad y justicia derivados de la Revolución Francesa), y que hoy en día nos impone una visión del mundo.

la conciencia humana. Para Vygotsky, es la "actividad humana concreta histórica la que constituye el generador detrás de los fenómenos de la conciencia" (Kozulin, 2003, p. 102). El desarrollo se debe considerar como resultado de las acciones culturalmente significativas y no sólo como un fenómeno biológico.[51]

> ...la cultura origina formas especiales de conducta, modifica la actividad de las funciones psíquicas, edifica nuevos niveles en el sistema de comportamiento humano del desarrollo... En el proceso de desarrollo histórico, el hombre social modifica los modos y procedimientos de su conducta, transforma sus inclinaciones naturales y funciones, elabora y crea nuevas formas de comportamiento específicamente culturales. (Vygotsky, 1995, p. 34).

Cultura y desarrollo se co-determinan: cuando el individuo actúa sobre el entorno para transformarlo en busca de bienestar, ese medio transformado genera nuevas condiciones para el desarrollo del individuo. Es decir, los individuos al transformar las condiciones de vida por nuestras acciones, "generan nuevas condiciones para nuestro pensamiento futuro, tanto para los otros como para nosotros mismos" (Hegedus & Moreno-Armella, 2011).

La historia filosófica de las prácticas matemáticas nos enseña que estas formas ideales de actividad (constituidas como objetos culturales) son intrínsecas al campo de las prácticas (en la dialéctica sujeto-objeto) y escapan tanto a las visiones ingenuas del conocimiento en tanto reflejo de la realidad, como al determinismo de los intereses, representaciones o puntos de vista individuales sobre el conocimiento y la práctica científica.

Dialéctica sujeto-objeto: acción mediada instrumentalmente

La idea de mediación (instrumental) de Vygotsky, o como lo han llamado los teóricos actuales, la acción mediada, es base fundamental para dar cuenta del carácter eminentemente situado (histórica y culturalmente) de la acción del individuo (ver figura 4).

En este modelo, S representa un sujeto, M los instrumentos (artefactos, signos, símbolos, textos, fórmulas, medios gráfico-simbólicos, explicaciones de otros, etc.) y O el *objeto/motivo* de la actividad.[52] La línea $S_{\mathrm{t(n)}}O$ representa formas de relación natural entre

---

[51] Para Vygotsky, el desarrollo biológico determinó, en el proceso filogenético, condiciones específicas para el desarrollo de la conducta humana, pero ese mismo desarrollo filogenético muestra que, sobre la base de dicho desarrollo biológico, se edificaron las condiciones para el desarrollo histórico del ser humano: el desarrollo de las herramientas hacen cambiar las funciones adaptativas humanas y las formas de relación entre unos y otros. De esta manera, la transformación del medio por parte del hombre determinó condiciones específicas para la evolución de la especie humana. Los primeros homínidos, al moldear el ambiente, moldearon condiciones para el desarrollo de psiquis.

[52] Siguiendo a Roth y Radford (2011) se usa la expresión *objeto/motivo*, y no simplemente objeto, para referir el objeto de la actividad como una construcción cultural que orienta, que canaliza la acción del individuo sobre los objetos del mundo, y de esta manera, la palabra *objeto* se usa en el sentido usual: aquello que en

el sujeto y el *objeto/motivo* (sin mediación), mientras que la línea $S_{t(n)}MO$, las interacciones entre el sujeto y el *objeto/motivo* mediadas instrumentalmente. El subíndice "t(n)" bajo la letra "*S*" indica un estado específico en un tiempo t dado, de modo que $S_{t(n)}$ será el estado del conocimiento del sujeto *S* en un tiempo t(n) dado, y $O_{St(n)}$ es el *objeto/motivo* representado por el sujeto, en el tiempo t(n), vía los medios de mediación, mientras que $O_{t(n)}$ es el *objeto/motivo* en sí mismo en dicho tiempo t(n) (por lo general, el objeto, como construcción social, no coincide con la representación que el sujeto se hace de dicho objeto, la cual depende de las formas de mediación en el sujeto). Finalmente, $S_{t(n+1)}$ es el estado de conocimiento del sujeto en un tiempo posterior a su acción sobre el objeto/motivo *O*.

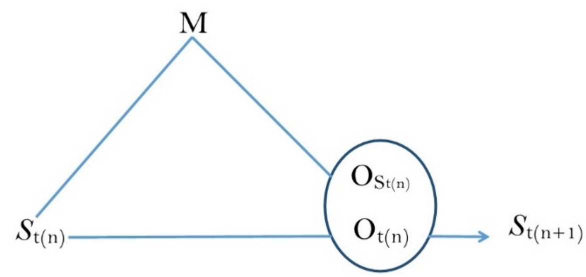


Figura 4. *Modelo de la estructura de mediación en Vygotsky. (Fuente:* Elaboración propia a partir de Kuutti y Engeström (2006), p. 45)

A esta perspectiva vygotskiana se le han criticado aspectos tales como: (a) su idea de mediación semiótica, que separa dos procesos de mediación (interna y externa) a través de dos tipos de instrumentos (signos y artefactos) y pone el peso de la mediación cognitiva sobre los signos, dejando por fuera toda una serie de instrumentos para la acción que también inciden en la formación misma de la conciencia (en tanto construcciones culturales) (b) no mostrar de manera explícita otras formas de mediación entre en el sujeto y el objeto, no presente en los signos o artefactos como instrumentos de mediación, como son las formas de acción social. Parafraseando a Engeström (1999) el modelo triangular da la impresión de que el sujeto actúa en solitario en relación con el objeto/motivo de su actividad, y no muestra las interacciones de los otros con ese mismo objeto/motivo, con el sujeto mismo. Dicho de otra forma, no muestra que la acción del sujeto está inmersa en un complejo sistema de actividades, en el cual las re-presentaciones del sujeto sobre su objeto/motivo de la actividad hacen parte de un sistema estructurado de percepciones y cogniciones pertinentes en el marco de las condiciones institucionales que delimitan las prácticas de los individuos.

la dualidad sujeto-objeto, denota la realidad objetiva, lo que se antepone al sujeto, si se quiere, las cosas existentes. Sobre la necesidad de esta doble distinción ver Roth y Radford (2011) o Kaptelinin (2005).

De esta manera, se hace necesario ampliar la noción de mediación instrumental para poder dar cuenta de los fenómenos mediacionales que no quedan atrapados en la mediación a través de los signos. Esto igualmente implica un cambio en la unidad de análisis: de la actividad del individuo, a la actividad conjunta, mostrando con fuerza el planteamiento de Leontiev de que las acciones de los individuos siempre están inmersas en sistemas de actividades a través de la inter-acción con los otros.

Dialéctica sujeto-objeto: acción mediada socialmente

Como se expresó antes, la actividad se define en relación *al conjunto de acciones socialmente dirigidas (orientadas) con el objetivo de alcanzar un fin.* Debido a esta orientación hacia una finalidad, la actividad es de naturaleza social, y es la vía por la que el hombre ejerce control sobre sí mismo, y sobre los demás. La actividad teje un complejo de relaciones entre las personas en el curso de su acción objetiva y en el marco de sistemas de prácticas relativas a un mismo campo.

La actividad tiene como principales elementos constitutivos el *objeto/motivo*, las *acciones*, y las *operaciones*.

Figura 5. *Estructura de la actividad humana según Leontiev.*
(*Fuente:* elaboración propia a partir de Daniels (2003), p. 127)

El *objeto/motivo* de la actividad, aquello hacia lo que se orientan objetivamente las acciones humanas, tiene una doble finalidad: externamente, orientando y dirigiendo el curso mismo de la actividad, e internamente, como representación mental en el sujeto, lo cual permite al hombre reflexionar sobre la actividad misma, y si es del caso, transformarla (Kaptelinin, 2005; Leontiev, 1978). De esta manera, la orientación de la actividad por el objeto/motivo permite la transformación mutua del uno sobre el otro (sujeto y objeto), en una doble dimensión que proyecta el objeto sobre la mente de los sujetos, pero que a la vez proyecta la mente de los individuos sobre los objetos de la realidad objetiva (Kaptelinin, 2005). Es decir, la actividad, en la dialéctica entre el acto físico y la representación mental, hace posible la anticipación de la acción (por parte de los sujetos actuantes) a partir de un proceso estructurado de planificación.

Las *acciones* son el conjunto de procesos por medio de los cuales los individuos planifican (representan mentalmente dice Leontiev) la finalidad a lograr, y cuyo fruto de la puesta en escena es el cumplimiento de la meta propuesta. La finalidad orienta la intención de la acción. De esta manera, acciones y finalidades están estrechamente unidas. Las finalidades se dan arbitrariamente en el desarrollo de circunstancias objetivas. Su delimitación y toma de conciencia no es ni automática ni instantánea, sino un proceso de prueba a través de la acción.

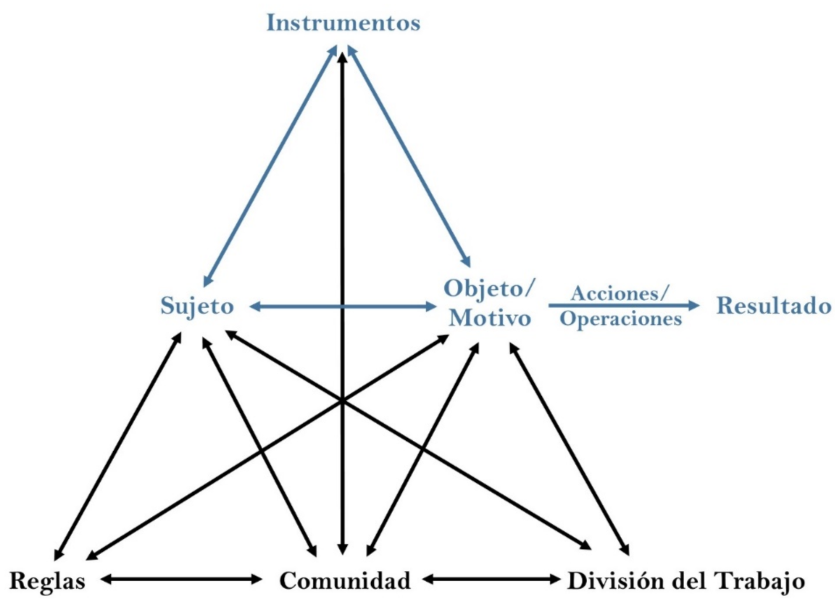


Figura 6. *Modelo de la estructura de la mediación en Leontiev.*
(Fuente: Elaboración propia a partir de Kuutti y Engeström (2006), p. 45)

Pero las acciones, además de la intención, aquello hacia lo que se orientan, comportan el cómo lograrlas, es decir, el conjunto de procesos a partir de los cuales se hace concreta la acción. Leontiev llamó a estos procesos las *operaciones* de la actividad. Las operaciones no están determinadas por la acción en sí misma sino por las condiciones (*objetivo-objeto*) para ser realizadas.

Autores contemporáneos (Cole, 1999a; Engeström, 1999, 2009; Kuutti & Engeström, 2006) encuentran en los planteamientos de Leontiev tres elementos nuevos en la noción de mediación: la división social del trabajo, las relaciones con la comunidad, y las reglas o convenciones para la acción. Se amplía el horizonte de la idea de mediación más allá de mediación instrumental, al incluir elementos que permiten comprender la acción del sujeto en el marco de formas sociales más complejas (ver figura 6).

En este modelo, *la división social del trabajo* implica que en el curso de la actividad, por lo general, lo que hace un individuo es solo parte de un conjunto de acciones con otros, y por lo tanto, la distribución de las tareas delimita las relaciones de poder y el posicionamiento de unos frente a otros. *La comunidad* permite comprender los procesos de colaboración entre los diferentes individuos involucrados en la actividad (prácticas sociales que permiten las interacciones entre los individuos). *Las reglas* se refieren a ese conjunto de normas, explícitas e implícitas, que regulan las acciones de los individuos en el seno de una comunidad (códigos de comportamiento, normas que orientan la acción, etc.).

Este nuevo modelo expande el triángulo inicial para abarcar las dimensiones sociales y colaborativas de la actividad (reglas, comunidad), al igual que incluir las relaciones de poder que se dan en las mismas (división social del trabajo). Las flechas entrantes y salientes de cada uno de los puntos, indican que se trata de un modelo sistémico (aunque algunas de las interacciones sean difíciles de identificar) lo que indica que cada nodo media entre los demás, y todos conjuntamente en la relación *sujeto–objeto/motivo* de la actividad.[53] Igualmente, el sujeto tiene que ser visto como un individuo en comunidad, y por tanto, la acción que conecta el *objeto/motivo* de la actividad con el resultado es en realidad un cúmulo de acciones que marchan en paralelo para poder llegar a la meta.[54]

2.3.3 Acción instrumentada: cognición distribuida

Como se puede ver en las secciones anteriores, la actividad práctica orientada a un fin es objeto de diferentes formas de mediación, una de las cuales se da a través de los instrumentos con los cuales se configura la acción. Los instrumentos, a la vez que síntesis sociales de los procesos de inter-acción, son mediadores en la forma como los individuos se

[53] Así por ejemplo, la mediación entre el sujeto y el objeto/motivo no solo está determinada por los instrumentos disponibles, sino también por las relaciones de ese sujeto con su comunidad, por la relación de poder que le imprime su lugar en el trabajo, por las reglas de acción acordadas.

[54] En los últimos años la teoría de actividad ha sufrido cambios sobre la base de reconceptualizar algunas de las nociones clásicas. En relación al *objeto/motivo* de la actividad, se ha interpretado este como una dimensión sin límites precisos, compartido por varios sujetos, y por ende abierto a la interpretación que cada uno pueda dar del mismo. En este sentido el *objeto/motivo* es un campo de posibilidades, continuamente abierto a la transformación, y por ende, con potencial transformador del sujeto. En relación al sujeto, se introduce en los análisis de la actividad, las dimensiones propias de la subjetividad (emociones, identidad, moral, etc.). De esta manera se constituye una nueva generación en la teoría de la actividad, la cual busca interconectar diferentes sistemas de actividad sobre la base de los fragmentos de objetos compartidos, y desde el reconocimiento de los aspectos propios de las subjetividades implicadas (Engeström, 2009). Autores como Roth y Radford (2011) o Kaptelinin (2005), manifiestan una aspecto fundamental de esta tercera generación de la teoría de la actividad: a diferencia de las anteriores, se orienta a la comprensión y transformación de las prácticas organizacionales, y como tal, es más apropiada para el análisis de los procesos macros que se viven en el seno de procesos productivos y organizacional de las instituciones, que para comprender los procesos específicos del desarrollo de los individuos en dichas instituciones. Es por este tipo de razones que Roth y Radford (2011) proponen usar los lentes de la primera y segunda generación como marcos de análisis para comprender los procesos de constitución de conocimiento en el aula de clase.

apropian de dichas construcciones sociales (entre ellas, el conocimiento). La acción del hombre a través de instrumentos —la actividad— comporta, por ese hombre, apropiarse de la experiencia de la práctica social, la cual, hecha conciencia en el hombre, se constituye en conocimiento (Leontiev, 1978).

Para Leontiev, el instrumento es a la vez el objeto con el que el hombre realiza la acción laboral, pero también, el objeto social que sintetiza unos modos de acción socialmente elaborados. El instrumento es el conjunto complejo de métodos y operaciones socialmente elaboradas y cristalizadas en él.[55] Es una construcción social (material y simbólica), y por tanto una abstracción, una generalización de las acciones culturales cristalizadas en su estructura (Leontiev, 1978).

Alex Kozulin retoma la noción de instrumento psicológico de Vygotsky, y lo redefine alrededor de conceptos más amplios: signos, símbolos, textos, fórmulas, medios gráfico-simbólicos. En sus palabras, “Los instrumentos psicológicos son los recursos simbólicos que ayudan a los individuos a dominar sus propias funciones psicológicas "naturales"...” (Kozulin, 2000, p. 15). Decía Dewey que cuando el niño aprende a hablar, no solo tiene nuevas necesidades y deseos, también se le abren nuevas posibilidades para un saber subsiguiente (Dewey, 1960). El lenguaje, construcción social por excelencia, como instrumento, transforma radicalmente la cognición misma. Estos recursos simbólicos son construcciones culturales, elaboraciones de la humanidad en las que se cristaliza el conocimiento acumulado de una generación a otra, y que no es transmisible genéticamente de un individuo a otro.

Rabardel (2003, 2005) y Rabardel y Bourmaud (2005), amplían el campo de conceptualización del instrumento, mostrando que todo instrumento (físico o simbólico) comporta el doble papel de mediación: tiene un soporte material que media las actividades físicas humanas, y a la vez, tiene un componente simbólico que media en el desarrollo cognitivo de los individuos. Esto implica que cualquier instrumento físico es a la vez instrumento psicológico en tanto que desde el conocimiento histórico-cultural depositado en él emerge su capacidad como mediador cognitivo. En ese sentido, los instrumentos no son sólo prótesis que amplifican las capacidades humanas para hacer cosas. Son verdaderas extensiones del cuerpo y de la mente, que extienden la cognición humana más allá del

[55] En este sentido, instrumento es diferente de artefacto, y esta diferenciación está en la línea de los planteamientos de Rabardel, Trouche, entre otros (Gueudet & Trouche, 2012; Rabardel, 2003, 2005; Rabardel & Bourmaud, 2005; Trouche, 2002).

cuerpo, distribuyéndola en los instrumentos para la acción, en los otros con los cuales se configura la *co-acción*.

De esta manera, la construcción del instrumento por parte del hombre se hace indisociable con el desarrollo mismo de las acciones prácticas humanas, en tanto toda acción es mediada por el uso de un instrumento (físico o simbólico). El individuo, en el curso de su actividad, *co-actúa* con el instrumento, y en el desarrollo de esta *co-acción*, se modifican mutuamente (Hegedus & Moreno-Armella, 2010; Moreno-Armella & Hegedus, 2009). Este proceso de co-acción se ha denominado la génesis instrumental, entendida en un doble movimiento: el primero, en relación al proceso mediante el cual los instrumentos son incorporados al sistema de actividades de los individuos dando forma a su acción, y donde la apropiación del instrumento es contextualmente situada dentro de un determinado entorno y con respecto a él (*instrumentación*), y el segundo, en función de la manera como la evolución y desarrollo de las formas de acción instrumentada de los individuos, y las condiciones de entorno dentro de las cuales se desarrollan tales acciones, afectan al instrumento mismo (*instrumentalización*). [56]

2.4 Sistema de prácticas: los niveles individual y social del conocimiento

2.4.1 Objetivación-subjetivación del ser

De lo dicho en las secciones anteriores se puede ver que la noción de actividad es una categoría filosófica que "refleja la relación del sujeto humano como ser social hacia la realidad externa, relación mediatizada por el proceso de transformación y cambio de esta realidad" (Davidov, 1988, p. 11). Esta categoría se erige como "…la abstracción teórica de toda práctica humana universal, que tiene un carácter histórico-social…" (Davidov, 1988, p. 27). Se puede entonces entender la actividad como el conjunto de acciones desarrolladas por los seres humanos, acciones socialmente orientadas a un fin (*intencional*) (Leontiev, 1978; Ricoeur, 2001). Esta orientación intencional es regulada por la adscripción a un sistema de prácticas en un campo de experiencias determinado. El sistema de prácticas

[56] Esta manera de presentar la génesis instrumental difiere de los planteamientos de autores como Trouche y Rabardel entre otros, que siguen el denominado enfoque instrumental (Gueudet & Trouche, 2012; Rabardel, 2003, 2005; Rabardel & Bourmaud, 2005; Trouche, 2002).

orienta objetivamente la acción del individuo hacia objetos específicos de su campo de experiencias, en función del carácter re-flexivo de las acciones humanas. La *re-flexión*, siguiendo a Radford (2006, 2008), es la dialéctica entre una realidad (constituida histórica y culturalmente) y un sujeto que a través de sus acciones refracta y modifica dicha realidad, pero que además, se vuelve sobre sí mismo para construir un cambio de estructura en su existencia. La reflexión es la forma por medio de la cual el individuo refracta sobre sí mismo, a través de su acción, el conjunto de instrumentos que la cultura pone a su disposición, lo cual significa que la acción del individuo no es pasiva frente a los instrumentos sino que, en su acción reflexiva, los transforma, los re-significa. Esta autonomía del sujeto en el campo, en términos de capacidad reflexiva sobre su actividad práctica, es lo que puede llamarse la *subjetividad*: "La subjetividad aparece como forma de participación y contribución a la práctica social, de cambio y de avance, y así, como la forma en que las realizaciones prácticas de los humanos son conducidas hacia sí mismos, hacia otras personas, hacia su mundo" (Stetsenko, 2005, p. 82). Pertenecen al dominio de la subjetividad los ideales, conductas y valores a los que apela el sujeto para darle sentido a su propia práctica (Ver por ejemplo, Detlefsen (2005) sobre los ideales en matemáticas en el siglo XIX). La subjetivación es entonces el proceso por medio del cual el individuo se constituye como ser en función de su acción reflexiva y su posicionamiento frente al mundo. A partir de la subjetivación el individuo participa en los entornos de la actividad práctica, y por ende, habita las instituciones, las hace vivir en la revisión y transformación continua de dichos sistemas de prácticas (Bourdieu, 2007).

2.4.2 Sobre la noción de institución

Lo institucional denota entonces ese espacio simbólico (con límites más o menos definidos) de prácticas compartidas por un colectivo de individuos, los practicantes en esa comunidad, espacio donde se comparte, se negocia, se actúa con los otros (y donde también se excluye), en donde resuenan las voces presentes de muchos otros y las voces pasadas que han constituido la memoria cultural de la comunidad. Lo institucional es entonces todo ese sistema, o superestructura simbólica, que permite que el individuo sea *un ser en y desde la cultura* a través de su acción en y con otros.

El término *institucional* hace notar que cuando se despliega una práctica en las matemáticas o con ellas, esta se hace bajo unas condiciones específicas que le dan las marcas propias de un momento, época y lugar (maneras de hacer, de pensar, de relacionarse con y a través de las matemáticas, fines, medios, utilidad, etc.), que imprimen a la acción del individuo unas condiciones que él comparte con otros individuos. Esto implica que los individuos, en un marco institucional (es decir, en la adscripción a una comunidad específica), viven en unas formas específicas de sensibilidad, comparten formas de acción, estructuran unas maneras propias de ver y actuar en y con el mundo, y por ende, construyen para sí, subjetivan, el ideal de vida compartido por la comunidad (el sujeto se subjetiva en lo social de una comunidad). Lo institucional genera sistemas de prácticas que disponen al individuo en un conjunto de formas de acción socialmente constituidas.

2.4.3 Sobre la noción de individuo

Lo individual es la inscripción del *ser* en ese capital simbólico construido por la comunidad: el individuo *es*, en tanto es reconocido por otros, en oposición a otros (lo comunal se constituye sobre la base de las subjetividades de los individuos). El individuo se hace en la medida que se inscribe en ese conjunto de prácticas socialmente compartidas, y esa inscripción se da a partir del aprendizaje.[57] Aprender, siguiendo a Radford (2008, 2010), se puede llamar *la subjetivación del saber*: apropiarse del legado cultural institucionalizado en la comunidad, hacer objeto aquellas estructuras idealizadas en la cultura, constituirse como individuo en el seno de una comunidad y a través de la acción reflexiva con y sobre las prácticas socialmente compartidas. Aprender es también un proceso semiótico cultural de objetivación de ciertos saberes, un proceso reflexivo de transformación de las prácticas matemáticas que lo lleva a hacerse críticamente consciente de una forma codificada de pensar y de hacer (Radford, 2013). A través del aprendizaje a partir de su propia práctica el individuo se posiciona con respecto a los otros, a la cultura.[58]

Es así entonces que la *participación* de las personas en los sistemas de prácticas institucionalizadas es la única forma de garantizar aprendizaje. La participación, en tanto

[57] Precisamente debido a esta relación con el aprendizaje es que se genera el rechazo o exclusión de los individuos que no logran los aprendizajes deseados desde el punto de vista institucional. En esta exclusión de los individuos por parte de las instituciones reside una de las fuentes de violencia simbólica más marcada en las instituciones educativas.

[58] En palabras de Nemirovsky (2009), aprender una ciencia (y en general cualquier proceso de aprendizaje), es algo más que apropiarse de formas de enunciar o de razonar: es hacerse hábil en el conjunto de prácticas científicas institucionalmente situadas a través del conjunto de valores que las adscriben a una comunidad en particular.

que no es imitación irreflexiva,[59] ni tampoco copia pasiva de las prácticas ya establecidas, es la fusión entre el sujeto que reflexiona en y sobre los patrones de actividad culturalmente constituidos (Radford, 2006) con los sistemas de prácticas institucionalizados. Esos "patrones fijos de actividad humana reflexiva incrustados en el mundo siempre cambiante de las prácticas sociales mediadas por artefactos" (Radford, 2008, p. 222) son los objetos de conocimiento. La *institucionalización* de estos patrones implica una *generalización* (al menos dentro de los límites demarcados por la institucionalidad de la comunidad) de aquello que en un primer momento es una forma de acción individual validada o sancionada por la comunidad (esta es la manera como las comunidades aprenden de sus individuos). Este proceso de fijar un patrón de actividad en el conjunto de prácticas socialmente compartidas en la comunidad es lo que podríamos llamar la *idealización de los objetos de conocimiento*. Esta institucionalización (por consenso, por autoridad, por eficiencia, por economía, etc.) se da en los instrumentos, en los signos, en las narrativas, en los textos, en las técnicas, en los gestos, en los hábitos, etc., en fin, en todo el conjunto de medios culturales de objetivación propios de la comunidad, los cuales serán aprendidos por los individuos, la *socialización*, y eventualmente transformados por ellos, en el ciclo continuo que lleva el conocimiento desde lo institucional a lo individual y de regreso.

2.4.4 Sistema de prácticas

Un sistema de prácticas, siguiendo a Bourdieu (Bourdieu, 1977, 2007; Bourdieu & Johnson, 1998), son las estructuras objetivas (en los elementos de la cultura), las condiciones objetivadas socialmente que orientan, delimitan y restringen las formas de hacer (y de pensar) de los individuos adscritos a una institución específica, pero a la vez, en tanto la adscripción institucional de la acción del individuo no es una imitación ciega o repetición mecánica, son también las posiciones subjetivas que condicionan la manera como el individuo actualiza su acción en un aquí y un ahora. Estas estructuras objetivas permiten el mínimo de acuerdos posibles para la movilización de la actividad de los individuos, y generan, por tanto, una disposición en los sujetos, unas formas de sensibilidad para la

[59] Vygotsky (1993) señala que la imitación que el niño hace del comportamiento adulto es un factor fundamental en el proceso de aprendizaje, pero que esta imitación no es una réplica del pensamiento adulto por parte del niño, sino que es toda una reelaboración de los patrones del pensamiento del adulto en el marco de las formas de acción propias del pensamiento del niño. De esta manera, la imitación es una muestra clara de la colaboración adulto niño, y a pesar de ser dos formas de acción distinta, al dar la apariencia de que adulto y niño hacen lo mismo, establece canales de comunicación claros entre ambos.

orientación objetiva de su acción. Esta disposición del individuo en el campo del sistema de prácticas se ve en la forma "esquemas generativos" (socialmente objetivados) de acciones y comportamientos, en las formas de sensibilidad (socialmente compartidas) que orientan la acción del individuo cuando éste despliega su actividad en el marco de los acuerdos mínimos posibles determinados por las estructuras objetivas en el sistema de prácticas. Por su parte, el posicionamiento subjetivo permite al sujeto "ver" la ocasión para la acción, imprimir un enfoque o forma específica a su actividad, hacer de su actividad un objeto de reflexión. Esto es, el posicionamiento es la manera como el individuo orienta su acción (enfoque específico de su actividad, posibilidades de ver la ocasión para la acción) en el marco de las disposiciones del campo (en el sentido de Bourdieu). Es en el marco de esta tensión continua entre el conjunto de restricciones que un sistema de prácticas impone al individuo, y el posicionamiento subjetivo en la práctica actuada, en donde el individuo como tal toma distancia en un acto de creación (libertad creativa en el marco de las condiciones del campo de prácticas) que le permite reflexionar sobre su acción, transformarla, construir conocimiento.

De acuerdo a lo dicho en el párrafo anterior, podemos entonces hablar del sistema de prácticas como estructurado y estructurante. El sistema de prácticas es estructurante en tanto tales esquemas generativos de la práctica son estructuras que movilizan los pensamientos, percepciones y acciones del agente. Pero a su vez, los individuos, a través de su reflexión, en el curso histórico de su acción, dan una forma determinada al conjunto de relaciones sociales, culturales y cognitivas, y por lo tanto, dan estructura al sistema de prácticas.

En adelante, referiremos como "sistema de prácticas" a ese conjunto o matriz de condiciones sociales e individuales que hacen posible en los individuos la orientación objetiva de la acción y el posicionamiento frente a ella (noción de práctica en el sentido de Bourdieu), y como "práctica actuada", "actividad práctica" o simplemente "práctica" (cuando no se preste a confusión) a la actividad humana particular, que se da dentro de, a partir de, esa matriz determinada por un sistema de prácticas, y no a la matriz en sí misma.

2.5 Sistema de prácticas matemáticas

Para el caso de las matemáticas, esa matriz que hace posible la actividad matemática puede encontrarse aun en las demostraciones aparentemente más formales: esas cadenas de proposiciones, deducibles unas de otras desde los axiomas, cristalizan diversidad de formas de acción, que no necesariamente provienen de las matemáticas, no siempre en continuidad temporal unas de otras, incluso, algunas en oposición a otras. Los objetos de conocimiento matemático están en los signos que los representan, en los enunciados que describen sus propiedades y que los ponen en relación con otros objetos de conocimiento, en los discursos que las personas hacemos sobre ellos, en sí, en los sistemas de práctica matemática desde los cuales emergen.

2.5.1 Configuración epistémica

Todo sistema de prácticas, desde el punto de vista institucional, descansa sobre un conjunto de valores y visiones que demarcan las fronteras dentro de las cuales se desarrollan los episodios particulares de la investigación matemática en épocas y lugares específicos. Estos valores y visiones dan una estructura, brindan una forma de organización propia o característica de la actividad práctica de una comunidad en el momento histórico particular. Esta forma particular de organización de la práctica se evidencia en la manera cómo se relacionan las técnicas disponibles, en los tópicos de investigación, en los problemas que se consideran como relevantes, en las orientaciones heurísticas, etc. Así pues, eso que da forma a la organización de la práctica constituye lo que Moritz Epple (2004) denominó una *configuración epistémica*, esto es, la episteme que hace posible la existencia de una forma de actividad matemática en un momento histórico específico: que reconoce su campo de problemas de una determinada manera, que reconoce ciertas técnicas o formas de heurísticas y no otras, que reconoce formas de razonar o enunciar específicas, etc. Esta episteme se presenta entonces en la forma de un saber aceptable (por ejemplo, en una práctica de aula), que tiene que ser sometida a una estrategia, a una acción, que tiene que ser organizada en procesos de estudio. La configuración epistémica es entonces modalidad de apropiación de un contenido, de unas técnicas, de unos saberes. Esta organización es un movimiento, es una dinámica de apropiación y de organización movida por una intención (por ejemplo la intención del profesor para que el alumno aprenda un determinado conocimiento), y por ende, permite que en el proceso de estudio ingrese una determinada forma de vivir ese saber, forma relativa a la subjetividad del estudiante, a la subjetividad del maestro. No hay una configuración epistémica dada en sí misma, sino mediada través de un proceso de estudio, y en consecuencia, un análisis de configuración de epistémica es entonces una forma de ver, de comprender la práctica matemática en un momento histórico determinado.

Godino y colaboradores (Godino & Font, 2007) introducen la noción de *configuración epistémica* de manera similar, con la ventaja de aplicar sus análisis no al ámbito de la investigación matemática, sino a los fenómenos de constitución de conocimiento matemático en contextos escolares. En su perspectiva, una configuración epistémica refiere a la estructura de objetos y sus respectivos sistemas de significados, al conjunto de elementos inmediatos al entorno del aula de clase, sus formas de organización, sus formas de significación. De esta forma la atención se fija en el proceso vivido por el saber escolar (su tiempo y espacio), en sus sentidos y significados, y para los fines de un análisis micro-didáctico detallado, el estudio de las configuraciones epistémicas centra la mirada en el cómo se constituyen los sistemas de práctica matemática en el aula de clase, en la forma cómo se estructuran los sentidos y significados de los elementos que la constituyen y que se construyen a partir de la práctica actuada, y por ende, de los sentidos y significados para los objetos de conocimiento matemático desde el punto de vista del saber institucionalizado, para diferenciarlo del conocimiento como fue apropiado por el alumno.

Así entonces, la noción de configuración epistémica brinda una lente para analizar una práctica matemática a partir de la manera como: (a) los instrumentos y técnicas institucionales orientan la acción del individuo, (b) los individuos se aproximan a los problemas que orientan su acción en esos marcos institucionales, y (c) los individuos (e instituciones) constituyen los sentidos y significados propios de la práctica.

2.5.2 Práctica matemática

Al decir "práctica matemática" se quiere referir al conjunto de acciones de los individuos (en sus relaciones entre sí, y con el medio) que, en el curso de su actividad matemática, orientan sus procesos de objetivación y subjetivación tanto de la cantidad y la forma (por ejemplo, medir, contar, comprar, vender, intercambiar, construir, fabricar, estimar, describir, localizar, etc.), como de la variación de una u otra (movimiento, cambio, comparación, transformación, etc.).[60] Estas acciones son mediadas a partir del conjunto de

[60] Desde el punto de vista epistemológico, esta forma de comprender las prácticas matemáticas se evidencia en la distinción griega entre la aritmética y la geometría (cantidad y forma desde el punto de vista estático), y de estas dos con la música y la astronomía (la cantidad y la forma en movimiento).

recursos culturales disponibles (medios semióticos de objetivación), a saber, los instrumentos, las técnicas, los discursos, los conceptos, los objetos de conocimiento, los problemas. Este conjunto de recursos se organizan de una forma particular, se combinan de una manera específica, interactúan unos con otros, en función la episteme desde son vistos, organizados, estructurados.

De acuerdo con lo anterior, una práctica matemática, se pueden caracterizar a partir de: *los objetos de conocimiento* con, y sobre los cuales se actúa, *los conceptos* que se enuncian sobre tales objetos, *los instrumentos* para la acción, *los procedimientos* que permiten tales instrumentos, *los problemas* que orientan objetivamente la acción de los individuos, *las formas de discursividad* que permiten poner el hacer en el lenguaje (formas de decir, de escribir, de comunicar), y finalmente, a partir de la *configuración epistémica* que permiten la toma de decisiones sobre el hacer (cosmovisiones, valoraciones sobre las matemáticas, fines de las matemáticas, posturas filosófica y ontológicas).[61]

Los elementos antes enunciados no sólo permiten caracterizar un sistema de prácticas, sino que en el curso de la actividad matemática que permiten son emergentes de la práctica actuada en la medida que se forman, se transforman, se sustituyen (Kitcher, 1984). En este sentido, dichos elementos no son estáticos sino que cambian en el tiempo, y este cambio determina la constitución de nuevo conocimiento matemático.[62]

Los problemas por resolver

En general, los problemas por resolver son esos campos válidos de indagación y de cuyo tratamiento emerge el conocimiento matemático objeto de estudio. El análisis de los problemas en términos de las prácticas matemáticas es importante en tanto se puede comprender cómo en las situaciones[63] que éstos propician se articulan los objetos de

---

61 Esta idea de práctica matemática, en esencia, recoge los elementos básicos descritos por Kitcher (1984), Ferreirós (2010), Godino, Batanero, y Font (2008), Godino y Font (2007), D'Amore y Godino (2007) ampliando algunos de los sentidos propuestos por estos autores, e introduciendo nuevos elementos de análisis.

62 Es el caso, por ejemplo, de las transformaciones en las prácticas matemáticas propias de Newton y Leibniz con respecto al cálculo infinitesimal, hasta llegar a las técnicas modernas del cálculo diferencial que conocemos hoy en día: no sólo se transformaron las técnicas –la plena justificación de las operaciones con los infinitesimales en el capítulo 2 del *Cours D'Analyse* de Cauchy (1821), que justifica bajo qué circunstancias son lo suficientemente pequeñas como para considerarse cero, y bajo qué circunstancias realizar la división por ellas sin que surja la contradicción de la división por cero– sino que nuevos objetos matemáticos emergieron en el desarrollo de tales transformaciones –el límite como algo con lo que se puede operar, y del cual se pueden definir propiedades (Carnot, 1797; Cauchy, 1821).

63 La situación se entiende como un espacio (simbólico) emergente de la interacción entre los individuos a partir del problema que orienta su actividad, emergencia que se da al actualizar en sus prácticas todo el

conocimiento que problematizan, las técnicas e instrumentos disponibles para su tratamiento, y en general, los objetos y conceptos que se movilizan en los discursos que se constituyen en relación con la solución de tales problemas.

Para dar cuenta de lo anterior, y apoyados en Rabardel y Bourmaud (2005), se pude proponer una forma de analizar los problemas desde dos perspectivas: (1) *tipos de tareas*, refiriendo a un conjunto de problemas agrupados en función de unas características lo suficientemente cercanas para que la actividad de los sujetos se desarrolle con cierto nivel de estabilidad y (2) *familias de actividad*, refiriendo características específicas de las prácticas (matemáticas) que despliegan los individuos al enfrentar los problemas. Estas dos perspectivas de análisis se muestran como un instrumento importante para el análisis de los problemas implicados en una práctica matemática, en tanto permiten diferenciar los aspectos propiamente estructurales del problema por resolver, de los que atañen con las formas de actuación del individuo al enfrentarse con el mismo.[64] Dicho de otra forma, los problemas se pueden mirar en función de dos principios que responden, uno, a la estructura de los mismos, y otro, a la forma de la actividad de los individuos que los enfrentan.

La estructura apunta a identificar en los problemas las cantidades o las formas involucradas (continuas o discretas), las representaciones y las cuantificaciones de las mismas (procesos de medición, simbolización, graficación, etc.), las acciones sobre estas (agregar-desagregar, agrandar-achicar, transformar, etc.), las relaciones entre ellas (comparación por cociente o por diferencia, covariación), y su estatus lógico (lo dado o lo desconocido).[65]

Por su parte, las formas de actividad apuntan a identificar la estructura de la acción que el sujeto configura en función de los instrumentos disponibles. Por ejemplo, calcular, explicar, justificar, formular, representar, modelar, aplicar (Giaquinto, 2005).

Formas de discursividad

Desde una perspectiva bajtiniana, las prácticas sociales y culturales se significan (se

---

acervo cultural del que disponen para enfrentar el problema en busca de su solución, y por ende, constituir un posicionamiento sobre el mismo.

64 En relación con los tipos de problemas de razón, proporción, proporcionalidad, número racional, en el capítulo 1 se muestran diferentes tipologías, las cuales mezclan criterios ligados a la actividad de los estudiantes con los relativos al análisis relacional de las cantidades involucradas en la situación, generando, como se mostró en dicho capítulo, tipologías con categorías que generan exclusiones o contradicciones problemáticas para comprender la acción didáctica en el aula de clase.

65 Lo anterior sin demeritar la posibilidad de incluir otros tipos de criterios ligados a variables de tipo lingüístico, como la estructura enunciativa.

hacen signo) a través del lenguaje. Pero a la inversa, es el lenguaje el mecanismo fundamental para la constitución de tales prácticas. En este sentido, el lenguaje cumple una doble función: es el instrumento fundamental en la construcción de la conciencia humana individual, pero a la vez, determina el desarrollo social del hombre. "…Con la ayuda del lenguaje se crean y se forman los sistemas ideológicos, la ciencia, el arte, la moral, el derecho, y al mismo tiempo crea y forma la conciencia de cada hombre." (Bajtín, 1993, p. 242). Dicho de otra forma, todo sistema de prácticas está en estrecha conexión con el uso social de la lengua, que es a su vez, un uso individual de parte de cada enunciador.

Es más, a cada forma de práctica se le corresponden formas específicas de uso, o mejor, esferas distintas del uso de la lengua. Estas esferas de uso de la lengua, estas prácticas sociales del uso, toman forma a través del enunciado. La unidad básica, el enunciado (que fusiona contenido temático, estilo y construcción composicional) está indisolublemente unido a una esfera de comunicación: "… todo enunciado tomado aisladamente es, por supuesto, individual, pero cada esfera dada del uso de la lengua elabora sus tipos relativamente estables de enunciados, a los que denominaremos géneros discursivos." (Bajtin, 1990, p. 248). Así, "… los géneros discursivos son especies de esquemas…que orientan la construcción de formas típicas de enunciados donde se dibujan, se *muestran simulacros del mundo* relacionados con los grandes dominios de la actividad." (Martínez, 2005, p. 14, énfasis en el original). El género discursivo[66] es una especie de "práctica social discursiva, mediada por un contrato de comunicación e intercambio verbal" (Calderón, 2003) entre dos interlocutores ligados por una situación de comunicación específica.

Finalmente, los actos enunciativos propios de las prácticas sociales y humanas tienen sentido en el marco del desarrollo de procesos discursivos.

> La discursividad puede entenderse como la característica particular que define la comunicación social como actividad verbal. [esto significa que] 1) Se trata de una actividad humana de tipo semiótico y de naturaleza verbal… 2) Esta actividad permite la configuración de sujetos discursivos; … 3) La actividad discursiva es realizada en la cotidianidad por sujetos de habla o enunciadores, quienes desarrollan e interiorizan su experiencia discursiva en los procesos de constante interacción con los enunciados individuales ajenos. (Calderón, 2003).

De esta forma, el sujeto asume un papel dialógico ante los demás, es la suma de la

[66] "la teoría bajtiniana propone que el género discursivo es expresión verbal, relativamente estable, cuya unidad es el enunciado, que estructura un tipo temático, un tipo composicional y un tipo estilístico; además, que está determinado por la situación discursiva, la posición social, la relación entre los participantes y la entonación discursiva." (Calderón, 2003).

multitud de voces (pasadas y presentes), y su voz es la réplica a otras voces.

La elaboración de formas discursivas es fundamental en el desarrollo de las matemáticas. A través de éstas, el lenguaje se extiende más allá de los límites de la acción física, como se puede ver, por ejemplo, en la teoría de los números reales. [67] El objeto número real, como objeto abstracto no estaba presente en los griegos: se desarrolló a través de un lenguaje que hizo posible la extensión de las operaciones a aquellos ámbitos que superaban los límites de lo físico (los números complejos, los irracionales, etc.). Se puede hablar entonces de una doble funcionalidad del lenguaje en la actividad matemática: es el vehículo para realizar las operaciones matemáticas, pero también el medio para expresarlas (Kitcher, 1984).

Instrumentos y procedimientos

Como se expresó antes, los instrumentos son ese conjunto de recursos simbólicos (signos, símbolos, textos, fórmulas, medios gráfico-simbólicos, artefactos, software, gestos, etc.) que constituyen los medios para la acción matemática.

> Desde el punto de vista de la cultura, los estudiantes son provistos con un lenguaje matemático: significados, conexiones, estrategias; artefactos: tales como diagramas, gráficas, instrumentos físicos (reglas, calculadoras) y como leerlos; y métodos, brindados tanto por los profesores como por sus pares…Esos son los instrumentos con los cuales los estudiantes piensan y hablan matemáticamente. (Lerman, 2001, p. 107).

Además, los instrumentos con los cuales se realiza la actividad matemática en el aula de clase modifican sustancialmente la naturaleza de dicha actividad, en tanto cristalizan en su estructura ciertas formas de relación que pueden ser puestas en analogía con formas de relación entre conceptos y objetos matemáticos, en lo que Radford ha llamado *el campo simbólico del artefacto*, y que les da la capacidad de ser portadores del conocimiento, y por ende, de generar procesos de aprendizaje cuando son usados en el curso de la actividad de las personas. Igualmente este potencial del instrumento para incorporar conocimiento es lo que le da la posibilidad de estar en permanente desarrollo (incorporando las modificaciones que le hacen los individuos a través de su uso), generando lo que Moreno y Hegedus (2010; 2009) han denominado la *zona de desarrollo próximo del instrumento*,

[67] Desde los griegos hasta antes de Cantor y Dedekind, la teoría de los números reales fundamentó su desarrollo sobre la medición, sobre la conmensurabilidad e inconmensurabilidad, sobre el concepto de razón, pero finalmente, con el desarrollo de una teoría sobre el continuo numérico, el concepto de número se separa del referente geométrico, y de ahí en adelante la relación se invierte: ahora la teoría sobre los reales permite explicar la medida, las razones.

refiriéndose a ese potencial de uso del instrumento, que lo pone, en la relación mediadora entre el individuo y su actividad, más allá de los fines para los que ha sido utilizado previamente.

Objetos y conceptos

En general, y retomando las ideas planteadas anteriormente, los objetos de conocimiento matemático son construcciones simbólicas (constituidas históricamente) y, por lo tanto, sólo son accesible a través del signo (ecuaciones, gráficas, gestos, etc.), de los procedimientos configurados sobre tales signos (construcciones, algoritmos, etc.) y de los conceptos elaborados en relación con signos e instrumentos (definiciones, proposiciones, enunciados, etc.). Podría decirse que los objetos de las matemáticas, contrario a los objetos físicos que se pueden señalar con el índice, que se pueden ver en un lugar determinado, están en los signos, en los procedimientos con tales signos, en los conceptos que describen sus propiedades y que los relacionan con otros objetos y conceptos (ver sección 2.2.1).

Así por ejemplo, la definición de parábola como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo dado, y una recta fija dada, o como el conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen una función de la forma $y = Ax^2$ sintetizan cada una un conjunto de formas de acción matemática que los diferencia (las relaciones con otros conceptos y objetos que se realzan, los problemas que se resuelven en cada caso, con que técnicas, con qué instrumentos, con respecto a que discursos, etc.), diferencias que, como construcciones culturales, muestran dos formas de objetividad, dos maneras distintas de "ver" algo que "existe" bajo esas (entre otras posibles) formas de objetividad. Podría decirse que cada definición expresa un concepto distinto de parábola, cada uno es portador de una forma de objetividad específica. Así entonces, los diferentes conceptos sobre un objeto, al ser portadores de formas de objetividad diferentes, plantean un problema central para el aprendizaje: el paso de las formas de acción presentes en uno de los conceptos a las formas de acción presentes en el otro concepto.[68]

La multiplicidad de conceptos sobre los objetos, de formas de acción con el objeto, de significados para el objeto, permiten nuevas elaboraciones sobre el objeto en sí mismo, como especies de síntesis que permiten ampliar sus diferentes significados, construir nuevas

[68] Vygotsky llamó la atención que este tipo de pasos están relacionados con la posibilidad de establecer la equivalencia entre los diferentes conceptos que refieren a un mismo objeto, y esto no se da de manera instantánea por el solo hecho de conocer las definiciones (Vygotsky, 1993).

formas de representación, nuevos procedimientos, nuevos conceptos sobre el objeto, es si, nuevas formas de acción y pensamiento relativos a esa construcción cultural que es el objeto de conocimiento.

2.6 A manera de síntesis

En suma, al proponer la dialéctica entre lo individual y lo social, dialéctica mediada por las prácticas sociales, en palabras de Cobb (2006), de lo que se trata es de investigar la *persona-individual-en-la-práctica-cultural*. Se plantea entonces no una separación entre los aspectos individuales o sociales en la construcción de conocimiento, sino que, por el contrario, lo individual y lo social se constituyen uno al otro dialécticamente.

La teoría de la actividad entrega entonces una serie de instrumentos para la comprensión de esa dialéctica entre lo individual y lo social. La noción de *mediación instrumental*, o mejor aún, de *acción mediada instrumentalmente*, entendiendo el instrumento en el sentido amplio de los *medios culturales de objetivación*, es una lente potente para comprender la manera en que la cultura media en los procesos de constitución del conocimiento y de la conciencia humana. De manera similar, la acción del sujeto en el marco de la actividad colectiva, la orientación social de la acción sobre un objetivo, la planeación de la acción, la ejecución de la misma, y el uso de los instrumentos para la acción permiten comprender cómo los procesos sociales se constituyen en procesos mentales. Pero de otro lado, la *subjetivación* del ser, presente en los mecanismos de regulación de la participación (en las prácticas sociales) por parte del sujeto, en su reflexión sobre la acción, en su orientación hacia el objeto de la actividad produciendo nuevos objetos/motivos para la acción, creando o transformando los instrumentos, produciendo nuevos sentidos y significados para el sistema de prácticas, muestran el retorno del sujeto sobre el mundo social y cultural. "…la subjetividad humana, al retornar sobre el mundo a través de la actividad, inevitablemente cambia al mundo, posiciona al sujeto en sí mismo frente a la realidad material de las prácticas humanas en sus formas objetivas reificadas [en los instrumentos y los objetos de la actividad]" (Stetsenko, 2005, p. 83).

Al aplicar estas ideas sobre la actividad, se puede proponer, al menos para las prácticas matemáticas, que la actividad consiste en acciones orientadas a la solución de problemas. Los instrumentos son fundamentalmente de orden semiótico: el lenguaje natural, las notaciones algebraicas, las gráficas cartesianas, las figuras geométricas, etc. Por su parte, las operaciones consisten de todos los procesos, formas de hacer matemáticas, construidos históricamente por la humanidad, y que se han cristalizado en los diferentes sistemas de representación que se usan en las matemáticas (los registros algebraicos, las representaciones cartesianas, las figuras geométricas, etc.). Los procesos de instrumentación e instrumentalización (el movimiento continuo entre lo individual y lo social) muestran la manera como avanza el conocimiento matemático (es el caso, por ejemplo, de la emergencia de los procesos algebraicos sobre los aritméticos, lo cual implica una profunda transformación en la actividad matemática de las personas).

Tal noción de práctica no es estática, sino que es institucionalmente situada, semióticamente mediada e históricamente constituida, a la vez que dinámicamente transformada en el tiempo. El carácter institucional de la práctica se evidencia en los tipos de restricciones sobre el lenguaje y sobre las técnicas que el campo impone a los individuos insertos en el seno de una comunidad específica (es el caso, por ejemplo, de los intuicionistas frente a los formalistas en los albores del siglo XX). El carácter individual se evidencia en el posicionamiento del individuo frente al sistema de prácticas (en la acción reflexiva sobre su práctica) y por ende en los procesos creativos del individuo (libertad creativa en el marco de las reglas definidas por el campo). En ese movimiento individual-social, las prácticas se transforman: emergen nuevas técnicas, nuevos objetos, nuevos conceptos, nuevos discurso, en fin, nuevas condiciones para acción.

En este marco, el aprendizaje debe ser entendido como un proceso de transformación constante del individuo (transformación de las prácticas), en el contexto de un ordenamiento (disposición) delimitado por los sistemas de prácticas socialmente objetivados que orientan la actividad de los sujetos, y de un posicionamiento personal, determinado por su propia subjetividad, frente a dichos sistemas de actividad.

3 Consideraciones sobre el método

3.1 Ámbito general del estudio

La investigación realizada en el marco de la presente tesis tiene su foco en los sistemas de prácticas (Godino *et al.*, 2008) constituidos institucionalmente en relación con ciertos objetos de conocimiento matemático (razones, proporciones, proporcionalidad), prácticas instrumentalmente mediadas (Rabardel, 2003, 2005; Trouche, 2002), cultural e históricamente situadas (Vygotski, 1995; Wertsch, 1988). La teoría de la actividad es el marco desde el cual se comprenden tales sistemas, y por lo tanto, en consonancia con sus planteamientos, bajo un enfoque de investigación cualitativa, se observaron y caracterizaron los sistemas de prácticas propios de la actividad matemática de dos grupos de estudiantes en contextos específicos, a saber, las clases de matemáticas de los grados 3 y 4 de una institución educativa de la ciudad de Cali (Colombia).[69] En estas clases de matemáticas, la mirada se centró en los sistemas de práctica constituidos alrededor de los objetos de conocimiento razón, proporción y proporcionalidad, buscando caracterizar la estructura de tales sistemas de práctica, es decir, sus *configuraciones epistémicas* (Godino *et al.*, 2008; Godino & Font, 2007).

Cuando se asume la teoría de la actividad como marco teórico y metodológico para el desarrollo de una investigación, el principal reto afrontado desde el punto de vista epistemológico, como lo plantea Daniels (2008b), es el de comprender la construcción social de la conciencia humana (para el caso, la constitución de conocimiento matemático), sin abandonar la comprensión de la acción del individuo autónomo creador (que incluso se separa de la unidad social que lo constituye como tal). El individuo no actúa en, o influenciado por el contexto. El contexto, la situación, emerge de la acción (mediada) del

[69] Por acuerdo explícito con las autoridades administrativas de esta institución se omiten descripciones particulares específicas de la misma de manera que se garantice su anonimato.

individuo en el marco de sistemas de prácticas específicas. Pero a su vez, una mirada por las prácticas no es solo una guía que orienta el proceso de indagación, sino que aquellas son el constituyente primario de la naturaleza de la realidad estudiada.

En virtud de lo anterior, Daniels (2008b) plantea la necesidad de fundamentar la investigación sobre métodos que permitan una mirada cercana de la acción de los individuos (situaciones micro-sociales), pero sin separarla de las condiciones sociales en las que la práctica misma es actuada. Una posibilidad de conjugar el ámbito social sin abandonar lo individual, se puede proponer con Saxe (2004), quien sostiene la necesidad de definir unidades analíticas que permitan explicar las interrelaciones entre los procesos históricos y los del desarrollo en la construcción micro-, socio- y ontogenética del conocimiento: "El individuo, como actor participante, es constructor de las continuidades y discontinuidades en las formas de funcionamiento del conocimiento, no solo en el desarrollo del individuo, sino en la historia social de su comunidad" (Saxe, 2004, p. 261). Estas unidades analíticas se encuentran en el estudio de los sistemas de prácticas humanas, prácticas que son el escenario de la dialéctica entre las formas de acción efectivamente actuadas por los individuos (posicionamiento subjetivo), y las disposiciones objetivas sociales institucionalmente constituidas (Bourdieu, 2007), dialéctica que permite captar el papel activo del sujeto en los procesos de constitución del conocimiento, pero a la vez, explicar las condiciones objetivas de tal constitución sin negar la necesidad del mundo social. Así entonces, como se enunció en el capítulo anterior, el estudio de las prácticas matemáticas de los estudiantes en contextos específicos del aula de clase se realizó a partir de los problemas que se debían resolver (objeto de la actividad), de los instrumentos que orientaron su acción hacia la solución de dichos problemas (mediación instrumental) y de los objetos y conceptos que constituyeron, y se constituyeron en, el curso de la acción. De esta manera se buscó tener una lente que permitiera comprender al individuo en función de los instrumentos culturales a partir de los cuales configura su acción, y explicar el vínculo entre su acción y el contexto institucional (cultural e histórico) desde el cual se configura tal acción.

3.2 Delimitación del campo de análisis

Como lo manifiesta Chaiklin (2011), el estudio de las prácticas se puede hacer al menos en tres sentidos: como práctica ideal (indagando por las formas de acción de los individuos constituidas en las tradiciones institucionales), como práctica específica (en relación con la producción de objetos que satisfacen necesidades generalizadas en comunidades específicas) y como práctica concreta (con respecto a relación a las condiciones histórico-culturales específicas de la producción de los objetos que satisfacen las necesidades y que actualizan la práctica en tiempo y lugar determinado). En este último sentido se estudiaron las prácticas matemáticas de los estudiantes: se analizaron las formas de acción de los estudiantes en las clases de matemáticas de los grados 3º y 4º de una institución educativa, prácticas relativas a los procesos de constitución de los objetos de conocimiento *razón, proporción y proporcionalidad*.

Pero una práctica concreta en el aula de clase implica al menos la confluencia de dos sistemas de prácticas, el de los estudiantes y el de los maestros, que se co-determinan uno al otro.[70] Estos dos sistemas se encuentran sometidos a tensiones que actúan unas a un nivel macro-social (por ejemplo, alrededor de los administradores locales, las asociaciones de padres de familia, las políticas públicas, etc.), y otras a un nivel micro-social, con respecto a las formas de acción conjunta de los estudiantes entre sí, y de éstos con el maestro (ver figura 7). Por el interés de la tesis en investigar sistemas de práctica relacionados con ciertos objetos de conocimiento, es en este nivel micro en el cual se centra el foco del estudio. Pero incluso a este nivel micro, es necesario una delimitación adicional: el foco fundamental es el sistema de prácticas del estudiante, por supuesto, sin perder de vista que comprender este sistema no puede darse al margen del sistema de prácticas del maestro, lo que implica necesariamente una referencia a la actividad del maestro, más con fines descriptivos que analíticos[71] y, por ende, como una referencia necesaria para comprender el sistema de prácticas de los estudiantes en su complejidad interna, y en sus interrelaciones con los otros sistemas presentes en el aula.

Adicional a lo anterior, y como se puede observar de la figura 7, dado que estos dos sistemas de actividad tienen su punto de encuentro a través de las tareas que el maestro diseña para la enseñanza de ciertos objetos de conocimiento, y el estudiante las realiza

[70] La actividad del maestro determina condiciones iniciales (y por qué no, de frontera) para el desarrollo de la actividad del estudiante, pero a su vez, la actividad matemática de este último es determinante en las decisiones que debe tomar el maestro en el desarrollo de su actividad.

[71] No se pretendía medir las transformaciones cualitativas y/o cuantitativas de los procesos académicos y metodológicos de la actividad de los docentes de matemática de la institución.

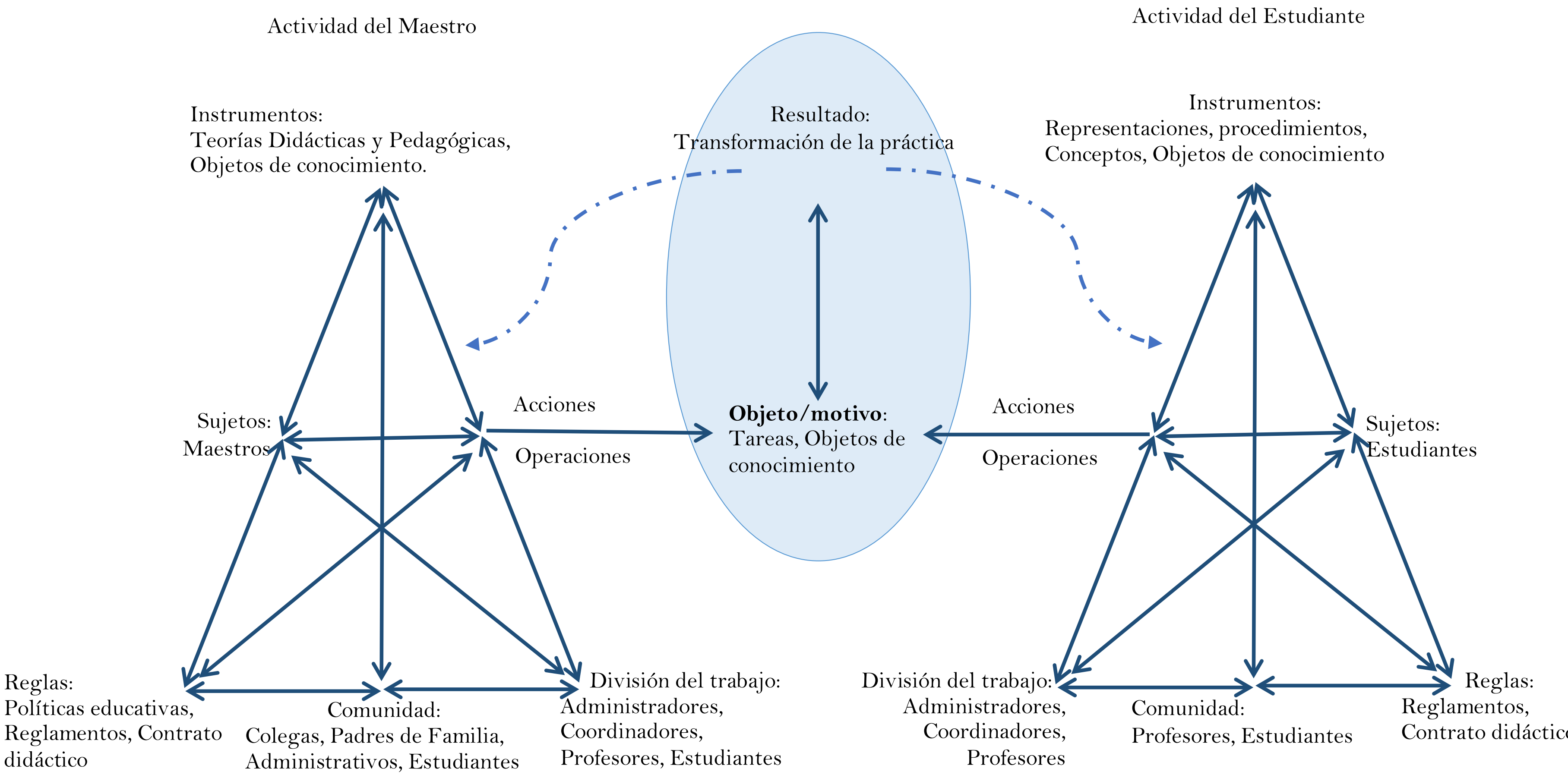


Figura 7. *Sistemas de actividad en el aula de clase.*

buscando aprender sobre dichos objetos de conocimiento, entonces la acción mediada de los estudiantes al enfrentar las tareas propuestas por el profesor fue el punto central de análisis, pero a la vez, debido a que las tareas fijan las condiciones institucionales (epistemológicas, cognitivas, didácticas) dentro de las cuales se desarrollaron dichas prácticas, para una mejor comprensión de las mismas fue necesario tener como telón de fondo un análisis de las formas de regulación que ellas imponen a las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Es necesario aclarar que en el contexto de esta investigación, las tareas son comprendidas en relación con unos sujetos en el acto educativo (estudiantes y maestros) y en función de un tiempo y de un espacio escolar, como una forma de organizar los recursos institucionales (materiales, tiempos, espacios, objetos de conocimiento, etc.); de orientar las acciones intencionadas de tales sujetos (orientación hacia el objeto de estudio); de organizar las formas de mediación para tales acciones intencionadas, y de canalizar las inter-acciones entre estudiantes, y de éstos con los maestros.[72] Es decir, las tareas son formas de organizar la actividad educativa o actividad de enseñanza (del lado maestro) y la actividad de estudio[73] (del lado del estudiante), en función de un conjunto de metas, objetivos, acciones, operaciones, que si bien no son coincidentes, confluyen en un mismo escenario: el aula de clase. Las acciones/operaciones (instrumentalmente mediadas y cultural e históricamente situadas) de los sujetos sobre las tareas (del maestro para su diseño, del estudiante en su proceso de estudio), hacen que sobre ellas se reflejen, a la vez que se edifican, las diferentes configuraciones (epistémicas, cognitivas) que posibilitan las trayectorias didácticas de los estudiantes en sus respectivos procesos de estudio.

Así pues, el análisis de la actividad matemática de los estudiantes a propósito de las tareas diseñadas por los docentes es el foco donde centrar la mirada con el fin de lograr el estudio de los sistemas de prácticas matemáticas y sus respectivas configuraciones epistémicas (ver figura 8). En esta figura se describe de manera esquemática cómo es que

[72] Esta manera de comprender la tarea contrasta con la forma como el término es usualmente entendido (al menos en Colombia), el cual, por lo general refiere al trabajo que el maestro deja al estudiante para que sea realizado en la casa, una vez finalizada la jornada escolar.

[73] Como define Davidov la actividad del niño una vez que este ingresa al sistema escolar. "En el proceso de estudio, como actividad rectora en la edad escolar inicial, los niños reproducen no sólo los conocimientos y habilidades correspondientes a los fundamentos de las formas de la conciencia social arriba señaladas, sino también las capacidades, surgidas históricamente, que están en la base de la conciencia y el pensamiento teóricos: la reflexión, el análisis, el experimento mental" (Davidov, 1988, p. 158). Davidov llama entonces la atención que no debe confundirse la actividad de estudio con el aprendizaje, pues este se da en el niño a partir de multiplicidad de actividades, y la actividad de estudio escolar es aquella que se enfoca en el estudio de los conocimientos teóricos, lo que le da una forma y estructura particular que la diferencia ampliamente de otras formas de actividad.

las tareas al orientar la acciones de los estudiantes, permiten el análisis de los sistemas de práctica matemática presentes en el aula de clase: sobre la base del conjunto de condiciones institucionales (configuraciones epistémicas institucionales), se diseña una primera tarea (que refleja ese conjunto de sentidos y significados institucionales que se esperan sean aprendidos por los estudiantes), y sobre la cual se realiza un análisis desde el punto de vista de la práctica matemática actuada por los estudiantes, para luego, sobre la base de este análisis, y en relación al conjunto de configuraciones (institucionales y personales), diseñar una nueva tarea, realizar nuevamente el proceso de análisis de la práctica matemática

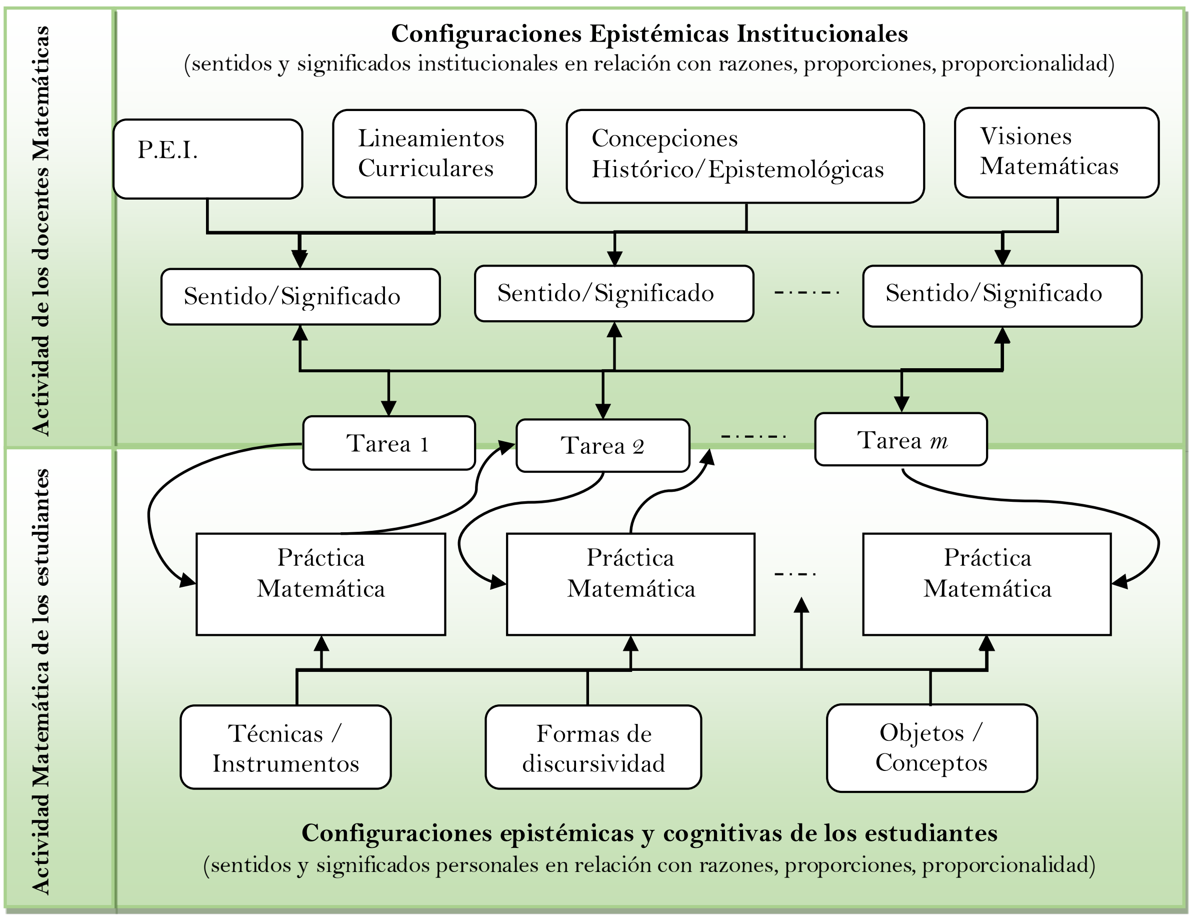


Figura 8. *Representación de los dos niveles de observación y participación en el aula de clase.*

desplegada por los estudiantes, y así sucesivamente. Ese diálogo constante entre las condiciones institucionales, y la actividad matemática de los estudiantes, propiciado por las tareas, es el que permite una caracterización de las prácticas matemáticas de los estudiantes en función de las técnicas e instrumentos para la acción, de las formas de discursividad, y de los objetos y conceptos que se constituyen, y constituyen, la práctica misma.

Pero un análisis de la actividad matemática de los estudiantes a través de la acción mediada al enfrentar las tareas propuestas en el aula de clase no es suficiente, pues como se expresó en párrafos iniciales, esta acción mediada es situada cultural e históricamente. Para dar cuenta de ese carácter histórico de las prácticas matemáticas, el punto de mira del trabajo investigativo también indagó por los procesos epistémicos en la constitución de los objetos de conocimiento *razón, proporción y proporcionalidad*, pero no tanto para dar cuenta de su estructura formalizada como los conocemos hoy en día, sino para indagar por sus procesos de constitución a lo largo del tiempo. Dado que los objetos de conocimiento (en general, los objetos de la actividad) condensan históricamente los sistemas de práctica desde los cuales emergen como síntesis de la acción (y también como instrumentos que median dicha acción), entonces su estado actual en el marco de una teoría formalizada es sólo una forma posible de ser, entre otras posibles, y el análisis histórico epistemológico puede sacar a luz esas formas de acción cristalizadas y sedimentadas como capas ocultas de su constitución histórica. Se trató de buscar en la historia y en la epistemología de las matemáticas aquellos elementos que fueron dando forma a prácticas matemáticas, incluso olvidadas hoy en día, que pudieran dar elementos de referencia para comprender mejor el sistema de prácticas matemáticas de los estudiantes de la institución estudiada (igualmente de los docentes, pero eso tipo de análisis no es el objeto de estudio de esta investigación).

Así pues, y como se ampliará en lo que sigue, el desarrollo metodológico de la investigación implicó dos etapas: la primera, un proceso[74] de participación en las clases de matemáticas de los estudiantes para observar su actividad matemática, y la segunda, un estudio epistemológico de la constitución histórica de los objetos de conocimiento razón, proporción y proporcionalidad.[75] Describir estas etapas como primera y segunda es sólo una necesidad analítica, pues ambas se realizaron en paralelo, y los métodos, instrumentos analíticos y hallazgos realizados en una de ellas incidieron en el proceso desarrollado en la otra. Si se quisieran representar estos dos momentos metodológicos en el gráfico de la figura 7, podría decirse que el momento de la participación en las actividades en el aula de clase estaría en el centro de la figura, del lado de la relación del estudiante con el objeto/motivo de la actividad, mientras que el segundo momento del estudio histórico

[74] Esto no quiere decir que éstos sean los dos únicos procesos observables en el contexto del desarrollo de la actividad de maestros y estudiantes en una clase de matemáticas (también podrían serlo las actividades extra-clase de maestros y estudiantes).

[75] Este segundo proceso permitió desencadenar un trabajo colaborativo con los maestros de la institución participante, pues con ellos se discutían continuamente todos esos elementos que fundamentan la configuración epistémica que servía de base para las propuestas de trabajo que se llevaban al aula de clase.

epistemológico se localiza en la parte superior, del lado de los instrumentos de la actividad (del docente y del estudiante), y ambos momentos intentan configurar una mejor comprensión del proceso de transformación de la práctica (el aprendizaje) de los estudiantes, la parte sombreada del centro de la figura.

Esta apuesta por dos focos de análisis en el complejo de los sistemas de prácticas que confluyen en el aula de clase deja por fuera otros puntos de anclaje no menos importantes, pero esta decisión metodológica no solo simplificó relativamente la tarea de investigación, sino que el proceso mismo mostró que fueron potentes herramientas analíticas en la caracterización del sistema de práctica matemática de los estudiantes y en la comprensión de las configuraciones epistémicas (y cognitivas) posibles en el aprendizaje de los objetos de conocimiento razón, proporción y proporcionalidad.

3.3 Primer foco: estudiar las prácticas matemáticas en el aula de clase

3.3.1 Consideraciones generales sobre la institución y los estudiantes participantes

La escogencia de la institución obedeció a que la misma ha construido a lo largo de los últimos años una historia académica y curricular que, orientada a la búsqueda de un Proyecto Pedagógico Institucional (PEI), pone en el centro de la organización del trabajo de aula la formulación de proyectos integradores alrededor de núcleos problemáticos a varias disciplinas escolares. En particular, para el caso del área de matemáticas, su organización académica y administrativa facilita procesos de recuperación, año tras año, de su historia académica (a través de seguimiento y sistematización de experiencias pedagógicas) y, por ende, de la cualificación de sus acciones pedagógicas.[76] Esta forma de trabajo del área de matemáticas de la institución le ha permitido organizar los procesos escolares a partir de definir una interpretación particular de los Lineamientos Curriculares y de los Estándares Básicos de Competencias publicados por el Ministerio de Educación Nacional, MEN (1998, 2006), y asumir el trabajo en el aula de clase bajo la perspectiva de

[76] Esto implica que la institución tiene un conjunto de tareas (o banco de tareas) que se usan aña a año según el trabajo de los estudiantes, pero a su vez, producto de ese trabajo las tareas se van rediseñando paulatinamente según van surgiendo observaciones de parte de los profesores, bien cuando analizan los fundamentos de dichas tareas, bien cuando confrontan lo que los estudiantes efectivamente hacen con lo que se esperaba que hicieran.

las situaciones problema (Obando & Múnera, 2003). Dicha organización académica hace de la institución un lugar interesante de observación, toda vez que a lo largo de los años ha identificado organizadores para su currículo (pedagógicos, didácticos, matemáticos) que van marcando formas específicas de interpretación del hacer matemático en el aula.

Dado que en esta institución tienen tres grupos de estudiantes por cada grado de escolaridad, y cada grupo es en promedio de 25 estudiantes, organizados en cinco equipos de trabajo (los estudiantes se sientan en mesas con cuatro o cinco sillas cada una), entonces se participó en el trabajo de un grupo de cada nivel de escolaridad, y al interior de cada grupo, dependiendo de las condiciones impuestas por las tareas, se interactuaba, o bien con la clase en su totalidad, o bien con los diferentes equipos de trabajo. En condiciones específicas del desarrollo del trabajo se realizaron sesiones de trabajo individual con algunos estudiantes.

Conjuntamente con la maestra y el equipo de docentes del área de matemáticas se seleccionaron las tareas a partir de las cuales estudiar las prácticas matemáticas de los estudiantes: en el grado 3º, aquellas con las que se inicia el estudio de la multiplicación, y para el grado 4º, las que estaban orientadas al aprendizaje de las fracciones. Las tareas del grado 3 se pueden consultar en el anexo 6 y las tareas del grado 4 en el anexo 7. Si bien el investigador participaba de las clases en las que los estudiantes trabajaban alrededor de estas tareas, la conducción general de la clase era responsabilidad de la maestra de matemáticas de estos grados, y las tareas se realizaron en el marco de las condiciones de tiempo y organización dispuestas por la institución.

Las actividades de participación en la institución educativa se realizaron en dos años lectivos consecutivos: 2008-2009 y 2009-2010 lo que permitió estudiar la actividad matemática de los estudiantes bajo el mismo conjunto de tareas, en dos grupos diferentes de estudiantes, lo que brindó posibilidades de confrontar y validar los análisis sobre las formas de actividad desplegadas por parte de los estudiantes tanto en épocas diferentes, como en individuos diferentes. Es importante aclarar que con el cambio de año lectivo del 2008-2009 al 2009-2010, el grupo de estudiantes que durante el 2008-2009 cursaban el grado 3º, pasaron al grado 4º, y con ellos se continuó el trabajo, por supuesto, aplicando las tareas que la institución tenía planeadas para estudiantes de dicho nivel educativo. Al grado 3º ingresaron en el año lectivo 2009-2010, estudiantes que antes estaban en el grado 2º, y por lo tanto este grupo se puede decir que fue nuevo en el proceso. Por el contrario, el grupo de estudiantes que en el año lectivo 2008-2209 cursaba el grado 4º al pasar al grado 5º, si bien se continuo participando de la clases de estos estudiantes, su actividad matemática no fue documentada, y por lo tanto, el mismo no es reportado como parte de la investigación que da origen a esta tesis.

3.3.2 El compromiso del investigador

Cómo lo plantea (Chaiklin, 2013), la investigación educativa sobre las prácticas educativas se desarrolla en el marco de condiciones y relaciones específicas entre los investigadores, las instituciones, las disciplinas, etc., y por ende, responde a una compleja red de expectativas e intereses, en las que investigador y practicantes (sin bien conservan roles distintos con respecto a la práctica educativa) comparten el mismo objeto: el conocimiento producto de la actividad educativa. La investigación y el desarrollo de las prácticas educativas están entonces entretejidas en un continuo en donde el conocimiento producido (bien sea en el proceso investigativo o en el curso de las prácticas investigadas) transforma tanto a los practicantes (transformación de las prácticas) como al investigador (transformación de la investigación). En este marco, el investigador no es un observador externo que, como dice Bourdieu (2007), "juega un juego buscando la oportunidad para salir para contarlo" (p. 57); él está efectivamente vinculado al sistema de prácticas que investiga, y antes que intentar suspender o suprimir los efectos de su participación en las prácticas observadas, debe "considerar su participación como parte del proceso de describir [comprender] las prácticas" (Bourdieu, 2007, p. 60). El investigador no es un observador pasivo de las prácticas educativas, es participante de ellas para poder comprenderlas, e incluso, para transformarlas. "…puesto que el investigador está inserto en un conjunto de relaciones prácticas [con la práctica investigada], incluso antes de iniciar la investigación misma, es necesario actuar sobre esas relaciones como parte del proceso para llegar a comprenderlas" (Chaiklin, 2011, p. 240). Pero al participar de las prácticas, se transforma como investigador, como sujeto que investiga. El mismo Chaiklin (2011) afirma, que más que una investigación sobre las prácticas educativas, se debería hablar de una investigación para el desarrollo de las prácticas (aunque él lo plantea en un sentido más amplio, pues en su visión este proceso de transformación de las prácticas no puede ser el objeto de una sola investigación, sino de una trayectoria de investigación que articule trabajos a diferentes niveles).

Así entonces, la participación del autor de la tesis en el sistema de prácticas institucionales se dio a varios niveles:

(1) En las reuniones de los docentes en donde se realizaban las planeaciones del trabajo institucional (por lo general dos horas a la semana, y con la participación del Jefe del área de matemáticas del colegio, las docentes de los grados 3º, 4º y 5º, y un grupo de estudiantes universitarios que realizaron su práctica pedagógica en esta institución). En estas reuniones se discutían las tareas,[77] se analizaba el trabajo de los estudiantes al enfrentar la tarea, y con base en el contraste entre lo pensado como el objeto de estudio en la tarea, y lo efectivamente actuado por los estudiantes, se proponían nuevas tareas, se rediseñaban unas, se desechaban otras, etc. Todo lo anterior también conducía a una reconceptualización de los fundamentos pedagógicos y didácticos que soportaba la propuesta curricular de la institución. Esto es, si bien el punto de partida era el conjunto de tareas diseñadas por los maestros de la institución, la participación del investigador en las reuniones del área de matemáticas, en dónde se discutían tanto los fundamentos de las tareas, como los resultados del trabajo de los alumnos con dichas tareas (en lo que podríamos llamar un proceso de estudio institucional del lado de la actividad del maestro), contribuyó en los procesos de trasformación de dichas tareas, que como se anotó ante, es algo natural en esta institución.

(2) En el trabajo de aula en las clases de matemáticas, en donde se interactuaba con los estudiantes: se les hacían preguntas, se les solicitaba ampliar sus argumentos, se les ofrecía una explicación, etc. Es importante notar que los estudiantes eran conocedores de que la presencia del autor de la tesis en el aula de clase obedecía a unos intereses particulares orientados a estudiar lo que ellos hacían, y cómo lo hacían en la clase de matemáticas, pero a su vez, ellos veían en el investigador alguien que, como la profesora de la clase, podía apoyar su trabajo. Esto generó condiciones de cercanía y amplias posibilidades de interacción con los estudiantes en el curso de su actividad matemática al realizar las tareas propuestas.

Esta forma de participación de la vida institucional brindó mejor conocimiento de los estudiantes, de los maestros, de las tareas y, por ende, mejores herramientas para la comprensión de las prácticas matemáticas de los estudiantes al tener más cercanía con su

[77] El origen de estas tareas es diverso, pero en su mayoría son adaptaciones que han realizado los maestros de esta institución de tareas publicadas en diferentes tipos de trabajos: libros especializados, tesis o trabajos de grado, sitios web, etc.

hacer.

3.3.3 Fuentes documentales

Para el estudio de la actividad matemática de los estudiantes se dispuso de varias fuentes documentales. La primera, los textos escritos en donde consignaban lo trabajado en las tareas que se les proponía. La segunda, las grabaciones de audio o video realizadas en donde se registraban los periodos de interacción entre estudiantes o de estos con la profesora o el investigador (que como se expresó antes, para los estudiantes era como otro profesor). Otras fuentes (que podríamos denominar secundarias por no estar relacionadas de manera directa con el objeto central de la investigación, pero que dan luces importantes para comprender las prácticas de los estudiantes) son las guías de trabajo en las que se presentan las tareas a los estudiantes y los documentos institucionales (plan de área, PEI y planeaciones curriculares).

Los textos escritos de los estudiantes

Se entiende por texto escrito la producción que los estudiantes plasman en sus cuadernos de notas, y que muestran los procedimientos matemáticos que realizan en el desarrollo de una determinada tarea. Éstos permiten de forma primaria ver los instrumentos usados y las técnicas asociadas a tales instrumentos, y por esta vía, son el primer punto de acceso a los sentidos y significados constituidos por los estudiantes. El análisis del texto escrito de los estudiantes permite identificar características fundamentales de su actividad matemática: formas de representación (instrumentos), técnicas asociadas a tales formas de representación, y por supuesto, los procesos de objetivación de los objetos de conocimiento bajo estudio.

Grabaciones de audio o video

Estas permiten completar el sentido y significado que los estudiantes dan a la actividad matemática realizada. Esto es importante en tanto el significado de la experiencia del estudiante no queda capturado directamente en la producción escrita:

- En primer lugar, muchas veces lo que un estudiante hace sólo queda plasmado parcialmente en su texto escrito: los fragmentos de su producción escrita van acompañados de una serie de afirmaciones verbales que completan el sentido de lo que consigna en su hoja de trabajo, o incluso de acciones asociadas a movimientos corporales.

- En segundo lugar, cuando se hace necesaria una intervención que oriente la actividad del estudiante en una cierta dirección, es el dialogo profesor-estudiante (o a veces estudiante-estudiante) con todas sus interacciones orales y gestuales el que marca de manera definitiva el curso de lo que el estudiante hace o dice, y esto no queda necesariamente plasmado en la producción escrita del estudiante.
- En tercer lugar, hay ocasiones en que la actividad matemática se desarrolla fundamentalmente en forma oral y gestual (como por ejemplo, en una socialización de los resultados de solucionar un problema), y los registros audiovisuales son la única forma de capturar estos procesos de interacción.

De esta manera, las grabaciones de audio y video permitieron, además de profundizar sobre las técnicas e instrumentos (sus sentidos y significados) recuperar la palabra (y el gesto) como base fundamental en la actividad matemática del estudiante, y de esa forma, poner el acento sobre otros dos elementos fundamentales: qué se enuncia, y cómo se enuncia. Es importante notar que no se trata de un proceso de análisis del discurso detallado, sino que, textos escritos, enunciados verbales y acciones instrumentadas se analizaron como sistemas culturales de significación (Radford, 2006, 2008) disponibles para los estudiantes, con los cuales desarrollan su actividad matemática, y, a través de las interrelaciones entre estos sistemas, elabora los sentidos y significados propios de su experiencia matemática.

Las guías de trabajo para los estudiantes

Las guías de trabajo para los estudiantes (diseñadas por los maestros y maestras de la institución) permiten identificar el tipo de actividad planificada institucionalmente (qué instrumentos se espera use el estudiante, qué tipos de técnicas podría desplegar, qué tipos de sentidos y significados podría construir). A través de estas producciones escritas de los maestros se pueden rastrear las formas de organización institucional relativas a *las razones, proporciones y proporcionalidad*: la tipología de situaciones y familias de actividad; las configuraciones de objetos y conceptos que se espera constituyan los estudiantes (configuraciones epistémicas y cognitivas); las técnicas y procedimientos que se espera desplieguen los estudiantes; las formas discursivas institucionales (es decir, a través de las guías de trabajo para los estudiantes se tiene la fuente documental clave para el análisis de las configuraciones epistémicas planificadas institucionalmente, y que se toman como referencia para orientar el trabajo con los estudiantes).

3.3.4 Las unidades de análisis y el proceso de codificación

Daniels (2008b) propone que para identificar las unidades de análisis apropiadas es necesario examinar las actividades críticas (aquella que permite responder la pregunta en cuestión y que ayudan a encontrar las implicaciones sistémicas entre las diferentes formas de mediación presentes en el sistema de actividades estudiado) relacionadas con el sistema de actividades que se investiga.[78] Así entonces, las unidades de análisis deben estar orientadas a la comprensión de la acción mediada, a capturar los procesos multi-mediacionales (agentes que actúan con sus instrumentos culturales) y a comprender las acciones orientadas al objeto (vínculos entre acción y contexto, institucional, cultural e histórico) en toda actividad humana (Daniels, 2008b; Smagorinsky, 2011). Así entonces, las unidades de análisis se definieron a través de las tareas que los estudiantes realizaban en su actividad diaria de clase. Dado que las tareas tenían una duración variable en el tiempo, entonces la clase de matemáticas fue la unidad de análisis fundamental.

Así pues, estas unidades de análisis definidas por la clase, fueron analizadas desde tres puntos de vista: el de los instrumentos que median la actividad matemática de los estudiantes; el de los objetos y conceptos objetivados en el curso de la actividad matemática misma; y el de los procedimientos que dan forma a las acciones de los estudiante. Estos fueron los tres grandes lentes a partir de los cuales hacer una primera mirada a las diferentes fuentes documentales con el fin de hacer una primera organización de la información. Dicho de otra forma, Instrumentos, Objetos y Conceptos, y Procedimientos,[79] fueron las categorías primarias (a-priori) a partir de las cuales realizar una primera organización de la información recogida: se identificaron y escanearon, de las producciones

[78] Este proceso de análisis de un sistema de actividades específico hace que el sistema mismo se redibuje constantemente en la medida que se hace el análisis de los datos. En este sentido, Valsiner (2009) plantea que las unidades de análisis son siempre abiertas y no finalizadas, y definidas en parte por los intereses del o los investigadores, en parte por el objeto de estudio y en parte por la audiencia a la cual está dirigida la investigación.

[79] Inicialmente se tenía a las tareas como otra unidad de análisis general a partir de la cual hacer ese primer barrido de las fuentes documentales, pero al hacer el trabajo se encontró que esta separación de la información por las tareas no aportaba elementos que permitieran una mejor caracterización del sistema de prácticas matemáticas de los estudiantes.

escritas de los estudiantes, todos aquellos fragmentos que pudieran dar cuenta de alguna forma de presentación de estas unidades de análisis generales. Una búsqueda similar se hizo con los audios y videos, marcando y transcribiendo los segmentos de éstos que dieran cuenta de estas unidades de análisis. A medida que se hacía el proceso de digitalización y codificación, se elaboraban comentarios a los fragmentos de información codificados, los cuales contenían un análisis preliminar del contenido, a la vez que reunían las notas de campo del investigador.

A partir de esta primera codificación general de la información, se procedió a un segundo nivel de codificación más fina, buscando elementos comunes, interrelaciones e implicaciones entre los datos procesados a través de las distintas fuentes, y entre datos de una misma fuente, lo que permitió entonces generar al interior de cada categoría otros niveles (hasta tres niveles en algunos casos), que permitieron entonces una mejor comprensión de las prácticas matemáticas de los estudiantes observados en esta investigación. A partir de este punto emergió un nuevo sistema de categorías que permitió un análisis detallado de la información disponible, y del cual surgieron elementos teóricos que permitieron la comprensión de la práctica matemática de los estudiantes. Este segundo nivel de codificación permitió entonces identificar cómo ciertos instrumentos, mediando la acción de los estudiantes, acción orientada al objeto, posibilitaron la objetivación de ciertos conceptos y objetos de conocimiento. Dicho de otra manera, estos niveles más finos de codificación permitieron dar cuenta de los instrumentos, de la mediación en la acción de los estudiantes en su práctica matemática, y de los procesos de objetivación alcanzados a través de estas formas de acción mediada instrumentalmente, y situadas institucional e históricamente. La estructura de la codificación final se puede ver en el anexo 4.

Dado que el objetivo central de la investigación es el análisis de la práctica matemática de los estudiantes, entonces la presentación de los resultados no se realiza analizando categoría por categoría (descomposición del todo en sus elementos constituyentes, lo que implicaría ir en contra de los supuestos metodológicos básicos de la teoría de la actividad), sino que con base en esta codificación se redactaron dos narrativas definidas en relación con unas tematizaciones que describen comprensivamente el sistema de prácticas de los estudiantes, dando cuenta de la manera como instrumentos, procedimientos, objetos y conceptos dan forma a ciertas configuraciones (epistémicas y cognitivas) en el proceso de estudio definido por las tareas propuestas a los estudiantes. Estas narrativas se presentan en los capítulos 5 y 6.

3.3.5 Confiabilidad, validez e integridad de los datos

Tiempo para la recolección de la información

Si bien no existe un consenso sobre cuál debe ser el tiempo ideal para un buen proceso de recolección de la información, esta investigación se realizó a lo largo de dos años lectivos consecutivos (año lectivo 2008/2009 y año lectivo 2009/2010). De esta manera, al participar de las actividades de los docentes y estudiantes en dos momentos diferentes, se logró no solo ampliar la base documental, sino también, tener mejores elementos para confrontar hipótesis de trabajo, validar las ideas elaboradas de un momento a otro, encontrar nuevas ideas, y en general, una renovación constante de los elementos conceptuales y metodológicos del trabajo realizado.

Dado que el foco de la investigación fue las prácticas matemáticas de individuos en contextos culturales e institucionales específicos, entonces el cambio de estudiantes de un año lectivo a otro no es problemático para la investigación pues la mirada no es sobre los procesos cognitivos de los individuos (aprendizajes alcanzados) sino sobre los sistemas de prácticas en su conjunto, su organización, su estructura. Por el contrario, al identificar que grupos diferentes de individuos, bajo condiciones institucionales similares (no idénticas, porque el proceso de participación del investigador en la comunidad cambia las condiciones institucionales de un año a otro) tienen formas de organización similar en sus sistemas de práctica matemática, entonces se dispone de elementos que aumentan la confianza en las inferencias formuladas a partir de los datos.

Triangulación de la información

Como se expresó antes, se dispuso de diferentes fuentes de información: las notas de los estudiantes en su cuaderno, audios grabados al momento de realizar su trabajo en el aula de clase y videos de algunas situaciones o de entrevistas a estudiantes en condiciones especiales fuera del aula (además de toda la documentación escrita de organización y planeación de la actividad de enseñanza de las matemáticas por parte de los maestros). En primera instancia el proceso de codificación se realizó sobre las copias de las producciones de los estudiantes, y luego sobre los audios, y finalmente sobre los videos. De esta forma, los hallazgos realizados en una de las fuentes se contrastaban con los resultados obtenidos en otra de las fuentes, lo que permitía realimentación continua de una fuente de información sobre la otra.

Además de la triangulación de fuentes se realizaron procesos de triangulación de investigadores, pues como se verá más adelante, se adelantó un proceso de codificación colaborativa que permitió una contrastación y validación continua de las ideas que se constituían en el proceso mismo

Consolidación de bases de datos

Toda la información del proyecto se digitalizó y con la ayuda del software Nvivo® se organizó en una base de datos estructurada a partir del proceso de codificación realizado. Esta base de datos permite entradas por grado de escolaridad (3º o 4º), por tipo de medio (imágenes de los cuadernos, audios o videos) y, por supuesto, a partir de las familias de códigos definidos. La primera versión de la base de datos se elaboró con la versión 8.0 de dicho *software*, y la versión definitiva se elaboró con la versión 10.0, la cual integra herramientas más potentes para el análisis de archivos en formato PDF.

Codificación Colaborativa

La integridad de la codificación realizada es uno de los temas más delicados en la investigación cualitativa. La codificación se realizó a través de la discusión colaborativa con pares (Smagorinsky, 2011)[80] en donde las discrepancias se resolvían a través de la discusión. Se trató de un proceso en donde la codificación se discutía colaborativamente con otros colegas del equipo de investigación, que para el caso, fueron los tutores de la tesis, y otros colegas de grupo de investigación, fundamentalmente, dos estudiantes de maestría cuyas tesis estaban bajo la tutoría de la investigación origen de esta tesis.[81] De esta manera, los elementos teóricos y metodológicos del proceso de investigación no sólo se validaron en la discusión con otros colegas, sino que al aplicarlos a otros corpus de datos de investigaciones similares, que compartían en común los mismos objetos de estudio, apoyaron los hallazgos principales (podría decirse que se trató de investigaciones complementarias con el proceso central adelantado en la tesis, y que de alguna manera contribuyeron al logro de los

---

[80] "La codificación colaborativa tiene potencial porque cada decisión es el resultado de una discusión seria sobre cada fragmento de la información" (Smagorinsky, 2011, p. 253)

[81] Las dos tesis son: *Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes: una posible forma para comprender la construcción de dichos objetos matemáticos*, del estudiante Eruin Alonso Sánchez, en el 2011 y *Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional*, de la estudiante Monly Catherine Torres Jaramillo, en el 2013.

objetivos centrales de la tesis). Esto permitió identificar fortalezas y debilidades en el tratamiento de la información realizado, identificando ideas potentes para el análisis, afinando las existentes, rechazando algunos aspectos del trabajo, e incluso, identificando ideas nuevas.

Otra forma de validación fue a partir de la presentación de los avances parciales del proceso tanto en seminarios internos en el grupo de investigación, como en eventos en educación matemática de carácter nacional e internacional, y publicaciones arbitradas de artículos donde se reportan avances parciales del proceso de investigación.[82] Es otra forma de discusión entre pares, solo que ahora a partir de procesos que no son continuos en el tiempo, pero que permiten discutir los resultados parciales con público diverso –incluso ajeno al proceso de investigación, lo que redundó en retroalimentaciones importantes para el trabajo mismo.

3.4 Sobre el análisis de configuraciones epistémicas

El segundo proceso trató sobre la documentación por parte del investigador (y la discusión con los docentes de la institución) de los sistemas de significados institucionales pretendidos para los objetos de estudio (razones, proporciones, proporcionalidad) en relación con los posibles aprendizajes de los estudiantes. Para esto, entonces, se hizo necesaria una caracterización desde el punto de vista de las matemáticas formalizadas (aceptadas culturalmente como conocimiento matemático científico), en relación con referencias de corte histórico-epistemológico de los procesos constitutivos de tales objetos de conocimiento. Se trató de ver, en diferentes momentos del desarrollo histórico de las matemáticas, *los tipos de problemas* que se enfrentaban, las *formas de representación* y las *técnicas instrumentadas* relacionadas con esas formas de representación. De esta forma se logró caracterizar algunos elementos claves en la constitución de los sistemas de práctica

[82] Entre los principales eventos, nacionales e internacionales, en los que se participó se pueden mencionar: curso corto en el XVII Congreso Colombiano de Matemáticas (Colombia, 2009); curso corto y conferencia en el XXXIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística (Colombia, 2010); Curso corto en el X Simposio de Educación Matemática (Argentina, 2010), y taller en la 26 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Brasil, 2012). También habría que mencionar tres publicaciones en medios especializados: una en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol 26 (junio de 2013), otra publicada en la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME (Marzo de 2014), y la última aprobada para publicación en la Revista Científica de la Universidad Distrital (Diciembre de 2014).

matemática, a partir de los cuales se identificaron formas de actividad matemática y se reunieron elementos para la comprensión de la actividad matemática de los estudiantes en el aula de clase.

Esta parte del trabajo se puede denominar como un estudio documental, que intenta comprender la manera como razones, proporciones y proporcionalidad han vivido en el seno de diferentes culturas, en épocas y lugares diversos y cómo es que dichos objetos de conocimiento matemático fueron usados, comprendidos, organizados en unos sistemas de prácticas locales, pero igualmente, cómo, a pesar de estas diferencias, conservaron ciertos elementos estructurales que hacen posible su puesta en diálogo, su comunicación de un sistema a otro, su transformación, su síntesis en nuevos sistemas más globales y, a la vez, más potentes.

3.4.1 Segundo foco: estudio histórico de prácticas matemáticas

Fracciones, números racionales, razones, proporciones, proporcionalidad son conceptos que han estado presentes desde épocas muy antiguas en las prácticas matemáticas de diferentes culturas, tanto en Occidente como en Oriente. Esto se evidencia, por ejemplo, en los tipos de problema y en las técnicas de solución con que fueron enfrentados dichos problemas. Pero identificar prácticas matemáticas con estos objetos de conocimiento matemático, y sobre ellos, en contextos socioculturales diversos, separados temporal e históricamente, lleva a pensar en una idea tentadora: los objetos de conocimiento matemático son transculturales, universales e independientes de las personas que piensan sobre la matemáticas, que las usan en su actividad diaria. Pero una visión así sobre el conocimiento matemático es insostenible hoy en día: existe un consenso generalizado sobre el reconocimiento de las matemáticas como una forma de actividad humana, y por ende, el conocimiento matemático sólo tiene sentido desde ese conjunto de prácticas que él articula, pero a la vez, de las cuales emerge.

Azzouni (2006) muestra que esta aparente unicidad de los objetos de conocimiento matemático no puede explicarse acudiendo sólo a argumentos basados en la organización interna de la disciplina (su estructura axiomática deductiva), pues esto entraría en contradicción con el carácter situado de toda práctica matemática. También muestra que no son suficientes argumentos de orden sociológico, como por ejemplo, las relaciones de poder entre grupos y personas, o las valoraciones de ciertas formas de conocimiento sobre otras,[83] pues esto no explicaría por qué en otras formas de actividad humana, sometidas a las mismas de condiciones y restricciones sociales, se ha presentado la diversidad y no la homogeneidad. Con críticas como las anteriores, el autor formula una hipótesis para explicar dicha homogeneidad en los objetos de conocimiento matemático: esta homogeneidad se debe a formas estructurales de la actividad matemática que garantizan cierta estabilidad en las prácticas matemáticas, y que las fijan en el marco de la actividad de los seres humanos, a pesar de las diferencias contextuales en las que se desarrollan estas prácticas.

Así pues, esta parte del trabajo se fundamentó en la idea de que la actividad matemática de los individuos en diferentes épocas y lugares tiene una estructura (forma de organización lógica) que se fija en los patrones de la actividad (prácticas matemáticas específicas) que despliegan los individuos en una marco institucional determinado, y busca en la historia y epistemología, como se expresó líneas atrás, las formas de ser de esos objetos de conocimiento en el marco de sistemas de actividad específico. Como lo plantean Jankvist y Kjeldsen, se trata de

> Tomar la práctica de los matemáticos como punto de partida para la historia de las matemáticas, con el fin de comprender cómo las matemáticas han sido practicadas y comprendidas, cómo el conocimiento matemático ha sido producido a través del tiempo en diferentes lugares, en diferentes culturas y en diferentes contextos intelectuales, así como tales comprensiones y producciones han cambiado, localiza la historia de las matemáticas en un lugar y en un medio intelectual. Una aproximación tal involucra estudiar episodios concretos de la historia de las matemáticas para obtener luces en asuntos tales como: por qué los matemáticos se preguntaron las cuestiones que trataron, porque ellos tratan los problemas de la manera como lo hicieron, qué tipo de pruebas o argumentos daban, y cómo éstos fueron percibidas o recibidas dentro de la comunidad matemática de momento, por qué ellos introdujeron ciertos objetos matemáticos, definiciones y áreas de investigación etc.; y cómo todo lo anterior influencia desarrollos futuros en las matemáticas así como cambios en las percepciones sobre las matemáticas. (Jankvist & Kjeldsen, 2010, p. 836)

Así entonces, a través de los documentos analizados se estudiaron diferentes sistemas de práctica, buscando no un desarrollo cronológico o internalista de dichos objetos de conocimiento, sino para estudiar sistemas de actividad, es decir, identificar los tipos de problemas que se resolvían, los instrumentos y las técnicas para resolver tales problemas, y los objetos y conceptos constituidos en tales sistemas de prácticas –en línea con los

[83] Las cuales en un momento determinado favorecen una forma específica de práctica matemática, impidiendo el desarrollo de otras prácticas que se consideran desviadas (desde la perspectiva de las condiciones hegemónicas).

planteamientos de Ferreirós (2010) o Kitcher (1984) sobre las prácticas matemáticas,[84] y la manera como todos estos elementos en su conjunto, en las personas y en las comunidades, toman forma en, a la vez que moldean, la acción matemática específica de las personas –en la dirección de Jankvist y Kjeldsen (2010) o Epple (2004) sobre la noción de configuración epistémica.[85]

En ese sentido, no se trató de una mirada cronológica del desarrollo histórico-epistemológico de dichos objetos de conocimiento matemático, sino más bien de un análisis que ve a través de los objetos de conocimiento y de las prácticas constituidas sobre ellos, que los proyecta atrás y adelante en el tiempo, los traslada de época y lugar, buscando con eso formas de actividad matemática, quizás perdidas para nuestra cultura matemática actual, pero que pueden ser útiles para orientar los procesos de aprendizaje de los estudiantes en los contextos escolares. Siguiendo a Mosvold, Jakobsen, y Jankvist (2014), se realiza este estudio buscando elementos que ayuden a los docentes y al investigador a: (1) orientar los procesos de estudio de los estudiantes, (2) como instrumento para mejorar la comprensión de los objetos de conocimiento que se pretende enseñar, y (3) para tener mejores elementos en la comprensión de lo que hacen los estudiantes. Con esto no se espera que haya un paralelismo entre el desarrollo histórico y el proceso de aprendizaje de estudiante, sino que por el contrario se espera "lograr una manera productiva de aprender a escuchar a los estudiantes" (Clark, 2012, p. 70), o como dice Vasco (1995), nos enseña a identificar sobre la base de los acontecimientos del ayer, fuentes heurísticas para planificar los eventos de aprendizaje de las escuelas del mañana.

3.4.2 Épocas y lugares estudiados

Dado que la cultura matemática en la cual vivimos es de alguna manera heredera de la tradición constituida en la Europa de finales de la Edad Media en adelante, pero, a su vez, esta cultura matemática europea se fundamenta sobre raíces que provienen tanto de la matemática griega del periodo clásico, como de las matemáticas Indo-Arábigas de los

[84] En estos autores, las prácticas matemáticas caracterizan la actividad matemática de las personas de una época y lugar en función de la manera como interrelacionan diversidad de lenguajes (lenguaje natural, expresiones técnicas, medios simbólicos, etc.), de formas de enunciar (proposiciones, teoremas, afirmaciones, etc.), de métodos y formas de razonamiento, y de problemas por resolver.

[85] En estos autores las configuraciones epistémicas refieren al conjunto de recursos intelectuales disponibles en un episodio histórico específico, y que determinan el curso de la actividad matemática de un matemático o grupo de matemáticos en esa época y lugar.

primeros siglos de la Edad Media, entonces, éstas fueron épocas y culturas casi que obligadas en las que había que indagar por la forma de presentación de razones, proporciones y proporcionalidad en sus sistemas de actividad matemática.

Pero al indagar sobre los sistemas de actividad matemática relativos a razones, proporciones y proporcionalidad de estas épocas y lugares, nos encontramos que las matemáticas griegas eran a su vez herederas de tradiciones provenientes de la cultura matemática egipcia y babilonia, y que la tradición de la matemática hindú tenía a su vez fuertes nexos con las matemática de la China antigua. Por lo tanto, fue necesario ampliar la base temporal y espacial del estudio, cobijando las matemáticas del antiguo Egipto, la cultura mesopotámica, y la antigua China.

Así entonces, donde fue posible, se identificaron autores u obras que se pudieran considerar paradigmáticos o representativos[86] de la cultura matemática de dichas épocas y lugares (por ejemplo, la obra de Euclides o Arquímedes, para la cultura griega) o autores especializados[87] que hubieran realizado estudios detallados de las matemáticas de un periodo específico en alguna de estas culturas (por ejemplo, Eleanor Robson para la matemática en la cultura babilónica). La consulta a los autores especializados permitió identificar potenciales autores y obras paradigmáticas de épocas y lugares. Cuando fue posible conseguir dichas obras, la consulta de la fuente original ayudó a confrontar lo analizado por los autores especializados.

No se incluyeron estudios de las culturas americanas de la época precolombina, no sólo por falta de tiempo para abarcarlas, sino también por la falta de acceso a fuentes documentales sobre las matemáticas de dichas culturas, y –aunque desafortunado– porque las matemáticas de estos pueblos amerindios no han tenido influencia notoria en la matemática que se enseña en nuestras instituciones escolares.

3.4.3 Las fuentes documentales

Las fuentes documentales se pueden clasificar como primarias o secundarias. Entendemos por fuentes documentales primarias aquellas que se corresponden con obras publicadas por autores de la época y lugar en estudio, y secundarias a las que se

[86] Un autor u obra se considera paradigmática en una época y lugar, si a juicio de los expertos, las matemáticas de dicha época y lugar están moldeadas a partir de lo expresado por dicho autor u obra.

[87] Un autor se considera especializados si se pueden identificar publicaciones (libros y artículos) que muestren continuidad en dicho campo de estudio.

corresponden o que son traducciones modernas (al inglés o español) de dichas obras clásicas, o que son compilaciones analíticas realizadas por autores modernos sobre las matemáticas de una época y lugar determinado.

Las fuentes primarias

Muchas de las fuentes primarias fueron recuperadas a través de proyectos de virtualización de obras con valor histórico, entre los que se pueden citar, DML: Digital Mathematics Library,[88] The Cornell University Historical Mathematics Monographs,[89] Gallica, Biblioteca nacional de Francia,[90] Internet Archive,[91] The University of Michigan Historical Mathematics Collection,[92] Google Books,[93] sin contar las publicaciones de colecciones especializadas de editoriales de reconocido prestigio (entre otras, Springer, Oxford University, Routledge, Cambridge University Press) accesibles a partir los servicios de biblioteca de la Universidad de Antioquia.

Las fuentes secundarias

Las fuentes secundarias fueron de dos tipos: traducciones al inglés, francés o español de textos clásicos publicados en idiomas diferentes; artículos publicados en revistas especializadas en historia de las matemáticas; o libros publicados por autores especializados en ciertos momentos de una determinada cultura.

Algunos de los documentos consultados fueron traducciones (al inglés o al francés) de textos escritos originalmente en otros idiomas como el griego, el latín, el árabe, entre otros (no conocidos por el autor de la tesis). En algunos casos, los textos originales (en latín y árabe) que sirvieron de base para tales traducciones (al inglés y el francés) fueron a su vez traducciones de textos en otros idiomas (algunos ya perdidos). Esto se puede catalogar como una dificultad en el acceso a las fuentes, pero, donde fue posible, esta dificultad se compensó con la consulta de versiones del mismo texto traducidas por diferentes autores o en diferentes idiomas, o consultando textos de diferentes autores de la misma época y lugar. De esta manera se logró tener un sentido más completo del sistema de prácticas

[88] Acceso libre desde: http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rehmann/DML/dml_links.html
[89] Acceso libre desde: http://digital.library.cornell.edu/m/math/index.php
[90] Acceso libre desde: http://gallica.bnf.fr/?lang=ES
[91] Acceso libre desde: http://archive.org/
[92] Acceso libre desde: http://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/
[93] Proyecto de Google y Microsoft para la digitalización de textos históricos cuyos derechos de autor ya se han constituido de dominio público

matemáticas que se cristalizan a través de dichas obras.

Esta fuentes documentales de segundo orden fueron claves para compensar el acceso a las fuentes originales, pues, por ejemplo, algunos de los documentos más antiguos que han sobrevivido hasta nuestros días (como las tablillas de arcilla de los babilonios) son en esencia una larga lista de problemas con sus soluciones (que ilustran el método para solucionar dicho problema y con escasas o ninguna explicación sobre el fundamento de dicho cálculo),[94] y en estos casos, estos autores especializados abren una ventana para ver ese mundo, que si bien es visto a través de sus ojos, permanecería oculto a los nuestros si no fuera por su trabajo.

3.4.4 El tratamiento de las fuentes

A través de las diferentes fuentes documentales se analizaron los tipos de situaciones en las que los objetos razón, proporción, o proporcionalidad eran aquello hacia donde se orientaba la actividad, o eran instrumentos para la actividad misma. Se indagó por las formas de mediación instrumental que permitían poner estos objetos en el centro de la actividad, y por las formas de objetividad logradas en el marco de dichos sistemas de actividad.

Por supuesto, dependiendo de la época y lugar, las palabras razón, proporción, proporcionalidad, no están, o ni siquiera existen; por lo tanto lo que se buscaba no eran las palabras, sino si en esas diferentes épocas y lugares se configuraban unos sistemas de práctica en los que se pudieran identificar unas acciones mediadas por unos objetos cuya función fuera identificable con las formas de acción mediada de aquellas culturas en las que sí estaban presentes estas palabras para nombrar tales objetos de mediación. Se analizó entonces la estructura de la actividad mediada por tales objetos, y se demarcaron trazas comunes a dichas formas de actividad. Así entonces, se identificaron ideas relacionadas con la cantidad, su representación, la operación con las cantidades a través de dichas formas de representación, y la relación de todo lo anterior con los problemas que se debían resolver; estos fueron principios claves para encontrar esas caracterizaciones de las prácticas matemáticas relativas a las razones, las proporciones y la proporcionalidad. Nótese que principios similares fueron igualmente puestos en juego en el análisis de los sistemas de

---

[94] Quizás por ser textos orientados a la enseñanza, lo que supone estaban acompañados de una fuerte tradición oral (sin contar que en ocasiones se trata de textos escritos en versos con un alto contenido mítico).

actividad de las clases de matemática de los estudiantes de la institución educativa en la cual se realizó la otra parte del estudio.

4 Razón, proporción y proporcionalidad: Análisis epistemológico de objetos de conocimiento

4.1 La razón como objeto de conocimiento

La razón, como objeto matemático, eclipsada hoy en día por la teoría moderna de los números reales, ocupa un lugar privilegiado en el desarrollo de las matemáticas tal como las conocemos hoy en día, a pesar de que en la actualidad haya pasado al olvido (al menos para las matemáticas formalizadas, pues en la escuela sigue siendo un organizador fundamental del currículo). Si bien nuestro concepto moderno de razón se debe en gran medida a los desarrollos matemáticos de los griegos, no se puede desconocer que babilonios, egipcios, chinos, hindúes (entre otros) evidencian un cierto grado de elaboración en relación con este objeto de conocimiento, y que en la Edad Media, gracias al cruce de culturas gestada en la Europa naciente, en donde los árabes jugaron un papel fundamental, dieron origen al concepto moderno, base para el desarrollo de las matemáticas que hoy conocemos. Pero, ¿qué tanto se puede hablar de una idea de razón por fuera de ese contexto griego, ampliamente conocido hoy en día, y base del concepto moderno de razón?

4.1.1 La razón, ¿un concepto primitivo?

Con respecto a las razones, si bien no se puede citar un texto que exprese de manera explícita qué significaban estos objetos de conocimiento en el marco de culturas prehelénicas o no occidentales, si es posible, a través de los problemas, sus soluciones, y las explicaciones, cuando las hubo, formular a manera de hipótesis el lugar de la razón como objeto de conocimiento en el sistema de prácticas matemáticas de las personas que escribieron tales textos. Este rastreo es posible gracias que en dichos textos se evidencia un conocimiento y un uso sistemático de las fracciones de la unidad, muy seguramente entendidas como números; un conocimiento de las relaciones multiplicativas evidenciadas en las formas de resolver ciertos tipos de problemas, y en la presencia de algoritmos para realizar tal operación; un conocimiento de las razones y las proporciones, en relación con los procesos de comparación y de medida relativa entre diferentes cantidades, necesarias en la solución de ciertos tipos de problemas prácticos de la agrimensura, la astronomía, las construcciones, las transacciones comerciales y la distribución de diferentes tipos de bienes y servicios (impuestos, labores, alimentos, etc.). Todo esto permite argumentar en favor de que la idea de razón ya estaba presente en las matemáticas desde la antigüedad, mucho antes del discurso griego sobre las razones y las proporciones; es más, en construcciones teóricas diferentes, pero no por eso menos importantes. Como se mostrará en las secciones siguientes, desde la antigüedad no solo se contó sino que también se midió, se repartió, se intercambió, se compró y se vendió, y todas esas situaciones fueron el escenario para el surgimiento y tratamiento de una idea de razón.

4.1.2 Los sistemas metrológicos en la base

Quizás uno de los contextos más antiguos de donde se tenga evidencia de la existencia de una idea de razón es el uso de los sistemas metrológicos. Esto se ve, de un lado, en la conservación de un cierto tipo de relación entera entre las diferentes unidades de tales sistemas, y de otro, en el uso sistemático de las fracciones para expresar los resultados de las medidas. Así por ejemplo, los textos[95] más antiguos de que se tenga evidencia del uso de fracciones datan aproximadamente del tercer milenio a. C., y fueron encontrados en la antigua Sumeria, en lo que podría llamarse un sistema metrológico para diferentes tipos de mediciones necesarias en las actividades económicas y religiosas.

Friberg (2007) expresa que en el período de la antigua Babilonia existían diferentes sistemas de medidas (para medir pesos, longitudes, capacidad, áreas, volúmenes), pero con una característica común: se adaptaron al sistema de numeración sexagesimal, de tal forma que las diferentes unidades del sistema fueran un múltiplo sexagesimal de una unidad básica, lo cual les permitía hacer cálculos con dichas medidas con el apoyo del sistema de numeración.[96] La figura 9 muestra el caso de un sistema de medidas de capacidad, en donde

[95] Es altamente probable que el desarrollo de unas matemáticas que fueran más allá del conteo y las medidas simples precisamente estuviera mediado por el desarrollo mismo de la escritura, la cual, por supuesto, genera un soporte que amplía la capacidad de la mente humana para ciertos procesos: notaciones numéricas y métodos de cálculo basados en esas formas de notación.

[96] La medida de una cantidad en el sistema tradicional se convertía al sistema sexagesimal, se hacían los respectivos cálculos en el sistema de numeración, y luego se hacía la respectiva equivalencia al sistema

la unidad es 1 *sila*, y por ende las restantes unidades son $1 gin = \frac{1}{60} sila$; $1 bán = 10 silas$; $1 bang = 60 silas$; *1 gur = 300 silas.*

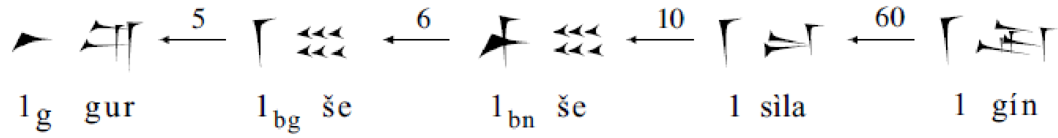


Figura 9. *Sistema de medidas de capacidad en babilonia al final milenio 4 a. C. (tomado de Friberg, 2007, p. 102).*

Para escribir cantidades entre 1 y 19 *gin*, se usaban los números usuales, pero para 20, 30, 40 y 50 *gin*, se usaban fracciones de *sila* ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$de *sila* respectivamente).

Un sistema de la misma época para la medida del peso del grano tiene una característica similar. Consta de 4 unidades, a saber, *se*, *gin*, *ma.na* y *gù*.[97] Y sus equivalencias son: $1\,gin = 180\,se$, $1\,ma.na = 60\,gin$ y $1\,gù = 60\,ma.na$. En este caso, 1 *ma.na* es la unidad, y al igual que en otros sistemas de medida, existían tablas de equivalencias entre las diferentes unidades de medida y la notación sexagesimal (ver Friberg, 2007, pp. 111-114).

En ambos casos, hay dos hechos importantes de resaltar: de un lado, el uso de unas pocas fracciones (denominadas por algunos autores como fracciones básicas) para expresar las medidas en las diferentes unidades, y de otro, el diseño del sistema de unidades en función del sistema de numeración sexagesimal, lo que les permite expresar todas las medidas en función de una unidad (que se podría llamar fundamental), facilitando que las operaciones con las cantidades se pudieran realizar con las reglas propias del sistema de numeración. Esto quizás sea la razón por la cual los babilonios no desarrollaron reglas para operar con las fracciones, pues su sistema de numeración les permitía expresar fracciones de la unidad (en una notación similar a la que usamos hoy en día con el recurso del sistema de numeración decimal), y los sistemas de medida para las diferentes magnitudes estaban diseñados para que las medidas resultantes se pudieran expresar fácilmente en su sistema de notación numérico.

de medidas. Como ayuda para estos cálculos se disponía de tablas que expresaban la equivalencia entre las unidades de medida y su respectiva notación sexagesimal (esto para todos los sistemas de medida), tomando el *sila* como unidad (ver, por ejemplo, Friberg, 2007, pp. 104-106).

[97] Estas expresiones se pueden traducir: *se*, grano de cebada o de maíz (aproximadamente 45*mg)*; *gin*, ciclo, (aproximadamente 8*g)*; *ma.na*, mina (aproximadamente 500*g)*; *gù*, talento (aproximadamente 30*Kg*).

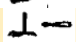
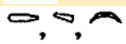
En todo caso, se puede afirmar que estos sistemas metrológicos permiten la cuantificación de cantidades (continuas o discretas), en donde las relaciones entre las diferentes unidades de medidas eran referidas a una unidad fundamental, es decir, las fracciones de unidad expresaban una medida relativa con respecto a una unidad tomada como referencia. Los babilonios, al contar con tablas de equivalencia de las diferentes unidades de medida al sistema de numeración sexagesimal, evidencian conocimiento de la fracción de unidad en una medida como expresión cuantitativa con la cual se podía operar a través de su sistema de numeración.

En la antigua China los sistemas metrológicos fueron diseñados de manera similar con base en el sistema de numeración, pero ahora, decimal. Hacia el siglo VI a.C. se tiene evidencia del uso de un sistema de unidades para medir la capacidad, con unidades graduadas en forma descendente y en relación decimal: el *hu* (aproximadamente 20 litros), el *dou* ($=\frac{1}{10}hu$), el *sheng* ($=\frac{1}{100}hu$), el *ge* ($=\frac{1}{1000}hu$) y el *yue* ($=\frac{1}{2000}hu$) (Martzloff, 2006, p. 191). Sin embargo, como se ampliará más adelante, en las matemáticas chinas hay evidencia de un uso sistemático de las fracciones para representar cantidades y para operar directamente con ellas: formas de notación específicas (no basadas en el sistema de numeración decimal) y técnicas de cálculo para operar con las fracciones (sin el recurso a su transformación al sistema de numeración decimal). Quizás esto se deba a que en un sistema de numeración decimal muchas de las fracciones básicas (como $\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{6},\ldots$, etc.) no tienen una expresión finita en el sistema, lo que dificulta los cálculos pues se tendrían que tener técnicas para operar con expansiones decimales infinitas.

Pero, sin importar la diferencia, de nuevo la cuantificación de las medidas se expresa a través de las fracciones, y una fracción expresa la relación cuantitativa entre cantidades de magnitud. La existencia de reglas para operar con las fracciones es evidencia de su existencia como formas de expresión para la cantidad, y el uso de unas relaciones constantes entre las diferentes unidades de los sistemas de medida de nuevo ponen en evidencia una conciencia de las fracciones para expresar las medidas de cantidades.

En el caso de los sistemas metrológicos de los egipcios, la situación es un poco diferente: de un lado, su sistema de numeración aditivo (con símbolos para las unidades, las decenas, las centenas, etc.) ofrece muy pocas posibilidades para el diseño de un sistema de medidas a partir del cual poder medir con facilidad cualquier cantidad. De otro lado, el sistema de numeración sólo les permitía representar cantidades enteras, lo que hizo necesario desarrollar un sistema de notación para representar las fracciones en la medida cuando ésta no era exacta (más adelante se ampliará este sistema de notación).

Tabla 1. *Sistema de medidas de longitud en el antiguo Egipto (Clagett, 1999, p. 8).*

	Unidad	Equivalencia
	Codo real	7 palmas = 28 dedos
	Codo corto	6 palmas = 24 dedos
	Brazo	5 palmas = 20 dedos
	Brazo doblado	4 palmas = 16 dedos
	Gran arco	3½ palmas = 14 dedos
	Pequeño arco	3 palmas = 12 dedos
	Dorso de la mano	2 palmas = 8 dedos
	Puño	1 ½ palmas = 6 dedos
	Palmo	1 ¼ palmas = 5 dedos
	Palma	1 palma = 4 dedos
	Dedo (Subdividido en medios, tercios, cuartos, hasta el dieciseisavo)	¼ palma = 1 dedo

La tabla 1 muestra un sistema de medidas de longitud (el gran número de unidades quizás busque tener el máximo de posibilidades para cubrir la longitud que se deseara medir) las cuales se pueden expresar en función de tres unidades básicas (el codo, la palma y el dedo), y dado el uso reiterado de las fracciones de palma, se puede pensar en esta como una especie de unidad principal.

Tabla 2. *Equivalencias de unidades de longitud al codo, escritas en notación moderna. Papiro Rhind (Gillings, 1982, p. 209)*

4 dedos = 1 palma	
7 palmas = 1 codo	
Palmas	Codos
1	$\frac{1}{7}$
2	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{28}$
3	$\frac{1}{4}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{28}$
4	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{14}$
5	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{14}$
6	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{28}$

El sistema metrológico hindú es bastante similar al sistema egipcio: su unidad más pequeña, el *angula* (un dedo), seguido por el *hasta* (un codo), el *hombre* (la estatura de un hombre), el *crosa* y el *yójana*,[98] hacen evidente que las unidades conservan una referencia antropomórfica, y el sistema de equivalencias entre ellas conserva una amplia semejanza con el sistema de los egipcios. Algo similar pasa con los sistemas de medidas para otros tipos de magnitud. A pesar de que el sistema de numeración hindú era decimal, su sistema de medidas no se diseñó en función de éste, sino que conservó sus referencias antropomórficas y, por ende, de manera similar a los egipcios, tuvieron en las fracciones y sus operaciones una herramienta importante para el cálculo en las diferentes situaciones que debieron enfrentar. Sin embargo, como se mostrará en la siguiente sección, el tratamiento dado a las fracciones fue un tanto diferente.

Si bien todas las culturas en sus épocas más remotas tenían sistemas de medidas con referencias antropomórficas, vemos como en el caso de los babilonios y los chinos, se da un rediseño de los mismos en función de sus sistemas de numeración, mientras que en el caso de los egipcios e hindúes sus sistemas metrológicos conservaron estas referencias antropomórficas. Este último tipo de sistemas de medida fueron ampliamente usados en la Europa de la edad media, y el rediseño de los mismos en función del sistema de numeración decimal fue, incluso, una tarea que caminó de la mano con un cambio en la manera de comprender el número, y en su popularización fueron fundamentales los cambios en los sistemas políticos y económicos de la Europa del, y posterior, al renacimiento.[99]

Pero independiente de la congruencia o no del sistema de numeración con respecto a los sistemas metrológicos, se disponía de una serie de conceptos que podemos hacer equivalentes a nuestro concepto moderno de fracción, y que les permitía cuantificar magnitudes no discretas, al igual que operar con dichas cantidades. El carácter de cantidad de estas fracciones se puede afirmar precisamente por la posibilidad de representarlas a

---

98 Este sistema de medidas para las longitudes, se definía así: Un *dedo*, equivalente a la longitud de 8 granos de trigo, un *codo* equivale a seis veces 4 dedos (es decir, 24 dedos), un *hombre* equivalente a 4 *codos*, un *crosa* equivale a 200 hombres, y un *yójana* equivale a 4 *crosas* (Bhascara, 1817; Bhaskaracarya, 2001). No sobra aclarar que Bhascara o Bhaskara son palabras usadas para referirse al mismo autor, cuyo nombre real fue Bhaskaracarya. El *Lilavati* fue escrito hacia el año 1150, y formó parte de una obra más amplia que compilaba el conocimiento hindú sobre las matemáticas y la astronomía.

99 En el libro de Witold Khula (1980), *Las medidas y los hombres*, se muestra con gran amplitud este trasfondo social de los sistemas metrológicos (unidades de medida definidas en función de lo que se debe medir, del uso de aquello que se mide, de la utilidad de lo medido, de las necesidades de supervivencia, incluso del sentido mismo de lo que es medido) donde la medida está profundamente arraigada en la totalidad del sistema de prácticas de las comunidades y, por ende, cambiar de un sistema a otro, muchas veces no fue un asunto ni fácil, ni rápido, y requirió de profundas transformaciones en los sistemas políticos y económicos de una época y lugar.

través de alguna forma simbólica, y tener un conjunto de reglas para operar con estas formas simbólicas (en casos como el de los chinos e hindúes, de manera muy similar a como lo hacemos hoy en día).

Pero también, esta forma de comprender la razón en términos de los procesos de cuantificación de magnitudes, y la estrecha relación con las fracciones como una forma de expresar la razón (medida relativa entre dos cantidades), hace igualmente que en la base del tratamiento de las cantidades se encuentre alguna idea de lo que modernamente llamamos proporción. Esto se ve en las formas de operar con las fracciones en los chinos y egipcios (ver sección siguiente), pero igualmente se ve en el tratamiento de ciertos tipos de problemas implicados en las reparticiones de bienes o servicios.

Se puede entonces proponer, a manera de cierre, que los sistemas de medidas, en la necesidad de la cuantificación de las magnitudes (en función de ciertos tipos de prácticas sociales) son una fuente importante a partir de la cual una idea de razón tiene su asidero, y en donde la fracción de unidad es la forma más usual para expresar esa cara de la razón. Además, la fracción es la forma de expresar ese número no entero, y la razón es el proceso mediante el cual establecer la comparación entre las diferentes cantidades de magnitud. Todo esto, como se mencionó antes, sobre la base de los sistemas de actividades de las comunidades (comprar, vender, construir, cultivar, cobrar impuestos, etc.).

4.1.3 En los griegos: noción moderna (occidental) de razón

El concepto moderno de razón, por así decirlo, tiene sus orígenes en la matemática griega, y los libros V y VII de los *Elementos* (Euclid, 1908)[100] son el máximo tratado teórico sobre las razones y las proporciones escrito en la antigüedad. En general, el estudio de las razones en el contexto matemático griego se localiza en la rama de las matemáticas que estudian las cantidades[101] relativas, es decir, las cantidades en sus relaciones mutuas de unas a otras (*logística*, del griego λογιστικε),[102] y en particular, para el caso de los números,

[100] En general, para este capítulo se tomó como base la edición de los elementos realizada por Sir Thomas L. Heath. Igualmente, con fines comparativos, se consultó la edición en español publicada por Editorial Gredos.

[101] La cantidad (*quantun*, ποσον), en las matemáticas griegas era comprendida bajo dos formas: las magnitudes, referidas a las cantidades continuas, y los números, referidos a las pluralidades, las cantidades discretas (ver *Metafísica* 5, 1020a 5-15).

[102] Nichomachus de Gerasa dice al respecto: "la cantidad una parte es estudiada *en sí misma*, sin ningún tipo de relación con alguna otra, como ser 'par', 'impar', 'perfecto'. [...] y la otra es *cuando es relativa a alguna otra* cosa, y solo es posible de ser pensada en su relación a la otra cosa, como 'doble', 'mayor, 'menor',

esta parte del estudio de las cantidades se consagraba a la música.

La palabra *razón* proviene de latín *ratio* que fue la traducción latina de la palabra griega *λογος (logos)*,[103] cuyo significado más habitual era la forma como comprendemos algo, la intelección sobre algo (también hacía referencia al razonamiento mental sobre algo, o al discurso producido sobre algo y expresado en la palabra). En el contexto matemático griego, *logos* igualmente era usada para referir la relación mutua entre dos cantidades. Ahora bien, como lo expresa ampliamente Heath en sus comentarios explicativos a la definición 3 del libro V de los *Elementos*,[104] el tipo de relación que expresa *logos* con respecto a las dos cantidades dadas, es en términos de *medida relativa* de una cantidad con respecto a la otra. Esta noción de logos como comparación, como relación cuantitativa entre dos cantidades se puede ver en las explicaciones dadas por Theon de Smyrna (1892) a los tipos de razones entre números. Por ejemplo, al definir la razón superparticular,[105] dice: "la razón es superparticular cuando el término mayor contiene una vez al menor más una *part* de este, es decir, cuando el más grande sobrepasa al más pequeño en una cantidad que es una *part* de este" (p. 125, énfasis del autor). De manera similar procede para el caso de otros tipos de razones (géneros de razón en el sentido griego).[106] Al analizar estos conjuntos de definiciones se pueden sacar conclusiones interesantes:

a. Hay una distinción entre las cantidades comparadas y la expresión que cuantifica la relación (*logos*) entre dichas cantidades. Así por ejemplo, ser múltiplo o submúltiplo definen *géneros* de relaciones (*logos*) de las cuales, ser *doble*, *triple*, *cuádruple*, *mitad*, *tercio*, *cuarto*, etc., son diferentes especies, a los cuales pertenecen parejas de números, las parejas que cumplen con la relación expresada para cada especie. Es más, para cada especie existen infinitas parejas de números que tienen el mismo *logos* (ver por ejemplo, Nicomachus (of Gerasa), 1926, p. 214 y siguientes);

'mitad', 'uno y una y media vez'…" (Nicomachus (of Gerasa), 1926, p. 184).

103 En el sentido amplio de la palabra, *logos* es una expresión con un amplio significado en la filosofía griega (ver diccionario de Filosofía de Ferrater Mora), y es igualmente usado por Euclides y Aristóteles para referir a la razón entre dos cantidades (números o magnitudes).

104 En la definición 3 del libro V de los *Elementos* de Euclides se lee: "Una **razón** es un tipo de relación con respecto al tamaño entre dos magnitudes del mismo tipo" (Euclid, 1908, p. 114).

105 Sobre esta definición y las otras que nombran las razones se volverá en la sección siguiente debido a la importancia que tiene para mostrar la relación entre las razones y las fracciones. En particular, en esta definición, la expresión "*part*" debe ser interpretada como una fracción de la forma $1/n$. En adelante la palabra "*part*" usada en las traducciones al inglés de textos antiguos (de originales en griego o en latín), se traducirá al español como "*parte exacta*" o "*parte alícuota*", o donde no se preste a confusión, simplemente como "*parte*".

106 Definiciones similares se pueden encontrar igualmente en Nichomacus (1926).

b. Las especies se presentan en parejas que se codefinen una a la otra, por ejemplo, las especies *doble* y *mitad*, *triple* y *tercio*, etc. Esto implica, por ejemplo, que dadas dos cantidades A y B, siempre se tiene la posibilidad de definir dos formas de razón, a saber, $A:B$ o $B:A$ (de la mayor a la menor, o de la mayor a la menor), y dada la una, de manera inmediata se tiene la otra, pues por ejemplo, si A es el doble de B, entonces dado que B es contenido dos veces en A, entonces B es la mitad de A;
c. Para cada especie existe una pareja de números (la pareja de números más pequeños que pertenecen a la especie, y que son primos entre sí) que está en el *logos* definido para la especie, que se pueden tomar como generadoras de las demás parejas que pertenecen a la especie (en términos modernos, el representante de clase). Así por ejemplo, la razón de 2 a 1 se puede tomar como la generadora de todas las demás razones que componen la especie *dobles* y todas las demás parejas de números de esta especie son tales que se pueden organizar de manera creciente de acuerdo a la serie de los números pares (ver por ejemplo, Nicomachus (of Gerasa), 1926, p. 216; Théon (de Smyrne), 1892, p. 131). En general, esto se cumple para cualquier razón: un *logos*, como especie, permite caracterizar una familia completa de parejas de cantidades que están en el mismo logos, que están en *analogía* (αναλογια), y para cada familia se puede definir un representante de clase (en el lenguaje moderno) que genera (de acuerdo a un principio o ley) todas las demás parejas de dicha especie.

Otra forma de argumentar en favor de esta idea de razón como medida relativa entre dos cantidades se puede apoyar en el sentido de la idea de proporción (*analogía*). Proporción en el contexto griego significaba similitud en el *logos*, es decir, conservar la misma relación cuantitativa, y esta aplicaba tanto para las relaciones aditivas (exceder o ser excedido) que generaban las proporciones aritméticas, y las relaciones por medida relativa (*logos*) que generaban las proporciones geométricas (Nicomachus (of Gerasa), 1926, p. 264; Théon (de Smyrne), 1892, p. 133). Sin embargo, Theon afirma que en el sentido estricto del término, proporción refiere a la comparación de cantidades que están en la misma razón (*logos*), y este es el sentido que se encuentra en los *Elementos*. La definición 20 del libro VII de los *Elementos* define la proporción entre cuatro números recurriendo a la idea de que éstos, tomados dos a dos, están en proporción cuando son el mismo múltiplo, o la misma fracción el uno del otro, es decir cuando conservan su medida relativa. Hacer una afirmación similar para la definición 5 del libro V implica dilucidar el concepto de equimúltiplo, sobre el cual descansa la noción de tener, de estar, en la misma razón.

El principio de los equimúltiplos para determinar cuándo cuatro magnitudes están en una misma proporción dice: …cualquiera equimúltiplos tomados de la primera y de la tercera, y de la segunda y la cuarta… si la primera excede a la tercera, la iguala, o es menor,… entonces igualmente la segunda excede, iguala o es menor con la cuarta. Esto es, si A, B, C y D son las cuatro magnitudes, de las cuales se quiere saber si están o no en la misma proporción (es decir, determinar si la razón de las magnitudes A a B es la misma de las magnitudes C a D) se debe verificar (en notación moderna): $\forall n,m \in N$, si $nA > mB$, o, $nA = mB$, o $nA < mB$, entonces, respectivamente, $nC > mD$, o, $nC = mD$, o $nC < mD$. Dicho de otra forma, si dadas las magnitudes A, B, y sus respectivos múltiplos $A, 2A, 3A, \ldots$ y $B, 2B, 3B, \ldots$ organizados de acuerdo un orden determinado por su tamaño, al igual que las magnitudes C y D, con sus respectivos múltiplos $C, 2C, 3C, \ldots$ y $D, 2D, 3D, \ldots$, entonces la ley de distribución de los múltiplos de A con respecto a los de B, debe ser exactamente igual que la ley de distribución de los múltiplos de C con respecto a los de D.[107] De esta forma, el concepto de equimúltiplo presente en la definición 5 del libro V estaría entregando una técnica operatoria (Acerbi, 2003) para definir cuándo cuatro magnitudes son o no proporcionales entre sí.[108] Aceptando entonces esta idea de la equidistribución de todos los múltiplos correspondientes cuando las magnitudes que se comparan son proporcionales, entonces lo que se está proponiendo es que esas cuatro magnitudes, comparadas dos a dos, conservan la misma medida relativa.

En suma, se puede afirmar entonces que la razón de la magnitud *A* a la magnitud *B* se

---

[107] Una descripción detallada de esta interpretación se puede leer en la nota explicativa de Sir Thomas Heath a la definición 5 del libro V de los *Elementos* (Euclid, 1908, especialmente páginas 120 a 126). Explicaciones similares también se pueden leer en De Morgan (1836), especialmente páginas 1 a 29, cuyo principal objetivo es, como lo expresa el título, un intento de comprender el libro V de los *Elementos*.

[108] Esta forma operatoria del concepto de equimúltiplo se puede ver en muy pocas demostraciones de los elementos (por ejemplo, proposiciones 8 del libro V, 33 del libro VI, 25 del libro XI y 13 del libro XII) pues la mayoría de los problemas y construcciones que se resuelven en los elementos parten de la existencia de la razón entre dos magnitudes, y desde allí, al considerar que la ley de distribución de los equimúltiplos se cumple, se demuestra que otras dos magnitudes tienen la misma razón. Otro texto donde se puede leer esta forma constructiva de la definición 5 del libro V es en el tratado de Arquímedes sobre las espirales, en la demostración de la proposición 1, en donde se demuestra que si dos cuerpos se mueven a velocidad constante, entonces las distancias recorridas son proporcionales a los tiempos empleados (Arquimedes, 1970). Un uso similar se puede leer en Galileo Galilei (1976), demostrando que el tiempo y la distancia recorrida por un móvil son directamente proporcionales cuando se viaja a velocidad constante (casi la misma demostración de Arquímedes, aunque Galileo no da ninguna referencia al respecto).

puede interpretar como una especie de cuantificación (relativa) de la primera magnitud con respecto a la segunda, la cual ha sido tomada como unidad de medida (ídem, si A y B fueran números). Por lo tanto, la razón expresa una forma particular de relación entre las magnitudes (números) A y B, a saber, la medida relativa de una con respecto a la otra. Adicionalmente, la proporción entre cantidades (números o magnitudes) afirma que éstas, tomadas dos a dos, conservan la misma razón, es decir, la misma medida relativa. Adicionalmente se puede afirmar que la noción de razón (*logos*) distingue, de un lado, la familia, la especie de todas las parejas de cantidades (magnitudes o números) que tienen el mismo *logos* (están en proporción, en *analogía*), y de otro, la cuantificación de ese *logos*, es decir, la expresión numérica que expresa la medida relativa entre las cantidades comparadas: en términos modernos, los números racionales para las razones entre números (naturales) y las magnitudes conmensurables, y los números irracionales para las razones entre magnitudes inconmensurables.

4.1.4 Pero…, no solo en los griegos vivió la razón

Si bien en la actualidad, cuando se habla de razón, lo que se viene a la mente es la idea que heredamos de los griegos a través de las reelaboraciones realizadas por los matemáticos árabes y europeos a lo largo de la Edad Media, no se puede desconocer que en otras latitudes, en otras épocas, igualmente se pueden rastrear nociones que, por su lugar como instrumentos en el tratamiento de cierto tipo de situaciones, por las operaciones constituidas alrededor de ellas, por las representaciones, etc., se pueden reconocer como la idea de razón en esa época y lugar.

Así por ejemplo, en documentos que datan de la dinastía Ming se encuentran enunciados de problemas que se corresponden con la situación típica de encontrar la altura de un determinado objeto, y la distancia a que se está de él, bajo el supuesto de esta medición no se puede hacer de manera directa. El siguiente es un ejemplo:[109]

> Ahora una isla en el océano es observada. Clavamos dos estacas de la misma altura de tres *Zhang* [=30 pies = 5 pasos] 1000 pasos separadas una de otra, de tal manera que la estaca de atrás esté alineada con la estaca del frente [alineadas con la isla]. Si uno se mueve 123 pasos atrás desde la estaca del frente, y mira desde el suelo hasta la cima de la montaña en la isla, ésta coincide con la parte más alta de la estaca del frente. Si uno retrocede 127 pasos desde la estaca de atrás, y mira desde el suelo a la cima de la montaña

[109] Este problema lo toma Vogel de un libro antiguo (siglo III a. C.) que compila una serie de problemas orientados a cálculos de distancias para las cuales no se tiene acceso de manera directa. Una traducción del libro se puede leer en Swetz (1992).

en la isla, está de nuevo coincide con la parte más alta de esta estaca. El problema es encontrar la altura de la isla y la distancia a la estaca del frente. (Vogel, 2002, p. 1).

Seguidamente el autor presenta la solución del problema y describe el procedimiento (es decir la regla que permite el cálculo), el cual se basa en las razones de los lados de los triángulos *ABH* y *FGH*, y en particular, de los triángulos *ACF* y *FJH* (figura 10), en tanto que la solución del problema se fundamenta en que los segmentos *JH* y *CF* conservan la misma relación con los segmentos *FG* y *AK* respectivamente.

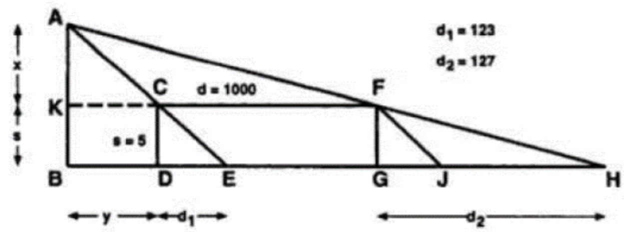


Figura 10. *Diagrama en el problema de la isla. (tomado de Vogel (2002, p. 2)).*

Ahora bien, dado que en las matemáticas chinas no se tiene evidencia de una teoría sistemática de triángulos semejantes (Dauben, 2007; Martzloff, 2006), entonces la posibilidad de comparar pares de magnitudes, y establecer si conservan o no la misma medida relativa, descansa sobre otro criterio: la igualdad de las áreas de los rectángulos subtendidos por los lados de triángulos semejantes. Así por ejemplo, en la figura 11, $\frac{BA}{AC}=\frac{ED}{DC}$, lo que, sin el recurso de la semejanza de triángulos, se puede explicar a partir de la igualdad de las áreas de los rectángulos *AG* y *DF*, en tanto $AB \times DC = AC \times DE$, de donde se deduce fácilmente que $\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DC}$. Esta observación es importante porque muestra que hay una idea matemática que cumple con la misma función (lógica si se quiere) que la idea moderna de razón, lo que de alguna manera permite llamar a dicha idea, la idea de razón en las matemáticas chinas de aquel momento (así ellos le hubieran dado otro nombre, o incluso, así no lo hubieran nombrado).

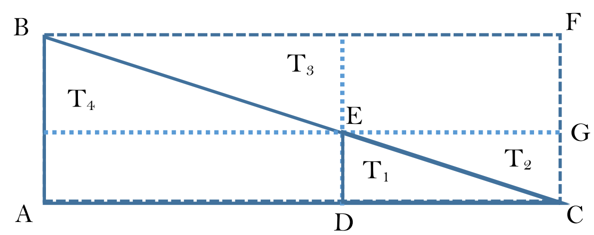


Figura 11. *Gnomon usado para justificar la semejanza entre segmentos.*

Dicho de otra manera, el legado griego presente en los libros V y VII de los *Elementos* de Euclides, es uno entre otros posibles, y a pesar de las diferencias necesarias entre unos y otros, se puede asegurar que una idea de razón ha estado presente desde la antigüedad (como se ampliará en las secciones siguientes, por los problemas que se resuelven, por los instrumentos y procedimientos para su solución, por la manera como se comprenden las razones), y en los casos estudiados, refiere la medida relativa entre dos cantidades, e igualmente, en estos casos estudiados, la proporción es la conservación de esa medida relativa entre dos parejas de cantidades.

4.2 Las fracciones: una forma de expresión para las razones

Si bien no se puede negar la existencia de ciertas formas de conceptualización y de técnicas operatorias asociadas a una idea de fracción en lo que se podrían llamar las matemáticas occidentales de la era cristiana, es necesario reconocer que lo que se conoce hoy en día sobre fracciones, al igual que las técnicas operatorias asociadas a ellas, tiene una fuerte influencia de concepciones desarrolladas en diferentes épocas y lugares: en las matemáticas del antiguo Egipto, Babilonia, China, India y del mundo islámico. "Tanto en la China, como en la India, o en el mundo árabe, las primeras obras matemáticas que nosotros conocemos, la mayoría testimonios tardíos de tradiciones anteriores y de textos ya perdidos, tienen una parte relativa a las fracciones las cuales por lo general son presentadas en relación con la operación de la división,…" (Benoit, Chemla, & Ritter, 1992, p. 177). Estas concepciones ingresan al mundo occidental finalizando el primer milenio de la era cristiana (en gran parte, gracias a la expansión árabe en Europa), y tienen gran influencia en el desarrollo de la matemática occidental del último milenio.

Sin embargo, a pesar de esta aparente base común, en lo que podría llamarse una misma base fenomenológica, hay diferencias significativas en el tratamiento matemático que se da a las fracciones, no solo por las formas de representación del número o los instrumentos de cálculo disponibles, sino también por el sentido mismo del número en relación con la cosmovisión propia de una época y lugar.

4.2.1 Algunos sentidos para la noción de fracción antes de los griegos

De lo dicho en la sección anterior se puede colegir que las fracciones, al igual que los números (al menos los enteros positivos), formaron parte de los primeros desarrollos matemáticos de las diferentes culturas. Esto tiene sentido si se acepta que la cuantificación no tiene solo el aspecto del contar, sino también el de medir, y que las culturas que desarrollaron sistemas de producción y comercialización complejos tuvieron la necesidad de hacer medidas y realizar cálculos con esas medidas. De esa manera, las fracciones emergen como la posibilidad de tratar diferentes tipos de situaciones en las que se necesitaba cuantificar cantidades y las relaciones entre dichas cantidades, en el marco de complejos sistemas de relaciones sociales. Sin embargo, a pesar de ese aparente origen en actividades similares, la conceptualización sobre las fracciones tomó diferentes caminos.

En las matemáticas chinas los problemas típicos que implicaban el uso de fracciones fueron la repartición de ciertos bienes entre varias personas, repartos proporcionales, cálculo de intereses, tasas de impuestos, intercambio de productos.[110] En el contexto de este tipo de problemas, la noción más común para la fracción proviene de dividir un todo en partes iguales, lo cual se evidencia en expresiones como *shi fen chi yi ye*, que significan literalmente "10 partes" o "1 de 10 partes de (1) *chi*" (Dauben, 2007). Esto sugiere no sólo la repartición de un todo en partes iguales, sino la relación entre el tamaño de cada parte y el todo. Este último sentido es el que se estandariza en el proceso de consolidación de las matemáticas chinas en el primer milenio de la era cristiana (Dauben, 2008).

Otro sentido para la fracción proviene de la operación de dividir: los calculadores llamaban *shi* al numerador (dividendo) y *fa* al denominador (divisor), lo cual podría ser interpretado de distintas maneras, pero en esencia se trataba de la repartición de una riqueza (*shi*) con base en una determinada ley (*fa*) (Martzloff, 2006, p. 194). La fracción expresa el residuo de dicha división. "… cuando una división no daba exacta, quien calculaba invariantemente expresaba el resultado en la forma $A+\frac{a'}{a}$ donde A es un entero *kuan* (con respecto a una unidad dada) y $\frac{a'}{a}$ expresa el residuo de dicha división (con $a' < a$ puesto que $\frac{a'}{a}$ representa una fracción de la unidad principal)" (Martzloff, 2006, p. 193). Así la fracción o bien refiere a la relación parte todo entre las dos cantidades que deben ser divididas, o el residuo después de efectuar la división, el cual quedaba expresado como una especie de relación (por no decir razón) entre la cantidad de unidades que sobraron del dividendo, con respecto a las unidades del divisor (así por ejemplo, al dividir 12 entre cinco, el residuo se expresaba como 2 de 5).

La situación en los diferentes textos matemáticos de los hindúes es similar a la de las matemáticas chinas. Las fracciones se encuentran en contextos de dividir o repartir. En la

[110] Ver por ejemplo, Dauben (2007; 2008) o Cullen (2007) donde se muestran la traducción del *Suan Shu Shu* (*El libro de los números y los cálculos*), un texto matemático antiguo (aproximadamente 200 a. C.) que describe procedimientos para calcular con los números (en particular con las fracciones), al igual que una serie de problemas y métodos para solucionarlos. Otro texto que describe procedimientos de cálculo y problemas típicos es el llamado "*Nueve Capítulos*" del cual se pueden leer extensos fragmentos traducidos al inglés en Dauben (2007).

traducción al inglés del *Lilavati* (Bhascara, 1817), el traductor comenta que literalmente la fracción refiere a una cantidad dividida, o la cantidad que es obtenida de la división. De esta forma, al igual que el contexto de las matemáticas chinas, el resultado de la división se expresaba en la forma $A+\frac{a'}{a}$ donde A es un número entero y $a'<a$ representa el resto de la división, aunque para los cálculos, estas expresiones mixtas se transforman en fracciones donde el numerador es mayor que el denominador (fracciones impropias), a partir del uso de un procedimiento que se puede sintetizar en la forma $\frac{A\times a+a'}{a}$, pero al terminar los cálculos se regresan a la forma mixta.[111] Keller (2006a) afirma que este doble uso de las fracciones (mixtas e impropias) implica una distinción entre la fracción como parte de un todo (siempre menor que la unidad) y la fracción como expresión de un número racional (número fraccionario en general) que puede ser mayor que 1. Sin embargo, el hecho que esta forma general sólo se usara en los cálculos (como cantidades auxiliares) puede hacer dudar sobre ese grado de generalidad en la comprensión de la fracción como número racional.[112] Pero el que pudieran operar con las fracciones como entidades simbólicas en sí mismas argumenta en favor del nivel de abstracción con que eran manipuladas este tipo de entidades en las matemáticas hindúes. Así por ejemplo, se puede ver en las reglas para operar con las fracciones (Bhascara, 1817, p. 13) que las fracciones son referidas como cantidades.[113]

En textos del antiguo Egipto se evidencia un uso sistemático de las fracciones en función de los diferentes tipos de problemas que se debían resolver. Uno de los contextos dentro de los cuales se usaban las fracciones fue el de la división entre números enteros con un residuo. Según Caveing (1992), la expresión más usual para la división era: "Calcule con *d*, hasta completar *D* (Compte avec *d* jusqu'a trouver *D*)". Se trata de dividir *D*, entre *d*, con $d<D$. Esta expresión es similar a la de la multiplicación: 'calcule con *M*, *m* veces', lo que hace pensar que para la división, los escribas egipcios en última instancia buscaban con qué número multiplicar el divisor para obtener como resultado el dividendo. Adicionalmente, se puede evidenciar en los distintos procedimientos para realizar los cálculos que la fracción

111 Gran similitud con el caso de las matemáticas chinas, lo que se puede explicar como resultado del intercambio cultural entre ambos pueblos.

112 Igualmente el que no usaran el sistema de numeración decimal para notar las fracciones puede ser otro argumento usado en contra de esa generalidad de las fracciones como expresiones de un número racional.

113 La palabra es *rasi*, la cual es usada en diferentes contextos para referirse a las cantidades (ver por ejemplo (Keller, 2006b, p. 214))

siempre era referida a la cantidad que representa la parte una vez sustraída del todo, es decir, que la expresión $\frac{1}{n}$ siempre refiere la *n-ésima* parte de un todo *A*. Maurice Caveing (1992) llama la atención sobre este hecho para mostrar que, contrario a algunas interpretaciones que afirman que los egipcios comprendían las fracciones unitarias como cantidades menores que la unidad, el estatus operatorio de las mismas muestra que en el sentido estricto de la palabra las fracciones egipcias no operan como tales cantidades, en tanto la unidad es variable, no es el 1 absoluto de la aritmética, y lo que se divide en *n* partes no es dicho 1, sino una cantidad cualquiera que se toma como unidad. Pero se debe resaltar que $\frac{1}{n}$ es una entidad abstracta (una especie de operador que produce el valor de la parte) que denota una operación: calcular la *n-ésima* parte de…

4.2.2 ¿Fracciones en las matemáticas griegas?

Para el caso de las matemáticas en la antigua Grecia la situación es un poco diferente. La tajante diferencia que se estableció entre las matemáticas prácticas y las matemáticas teóricas,[114] prácticamente relegó el uso de las fracciones a las matemáticas prácticas, y por tanto, su contraparte teórica (logística teórica)[115] estudia las partes de los números en tanto

---

114 Jacob Klein (1992) muestra que esta distinción entre las matemáticas teóricas y las matemáticas prácticas no debe confundirse con la distinción aritmética (*arithmoi*) y logística (*logistic*), pues en el caso de las matemáticas prácticas y teóricas la separación es entre el estudio de los números como objetos puros del pensamiento vs el uso de los números en las actividades prácticas, fundamentalmente en el comercio. Por su parte, la distinción aritmética y logística tiene que ver con el estudio de los números en sí mismos (*arithmoi*) vs el estudio de los números en sus relaciones mutuas de unos a otros (*logistic*). De esa manera la aritmética se encarga del estudio de la naturaleza de los números (ser par, impar, perfectos, abundantes, etc.) mientras que la logística estudia las relaciones entre los números (ser mayor o menor, la razón entre números) y las operaciones entre ellos. Nicomachus (1926) expresa ideas similares, dejando el estudio de los números en sí mismos a la aritmética, mientras que el estudio de los números en sus relaciones relativas a la música (del mismo modo que asigna a la geometría el estudio de las magnitudes en sí mismas, en sus formas estables y sin cambio, mientras que el estudio de las magnitudes en movimiento, en su continuo fluir, es estudiado por la astronomía). Reflexiones en el mismo sentido se pueden encontrar en Aristóteles, *Metafísica*, 1004b, 10-20.

115 De acuerdo a lo dicho en nota 114 se puede hablar de una aritmética práctica y una aritmética teórica, al igual que de una logística práctica y logística teórica. La aritmética práctica trata de los números en tanto emergentes de la actividad física de contar, mientras que la aritmética teórica trata del número como emergente de las unidades abstractas, de las mónadas, como objetos puros del pensamiento. Igual forma de distinción aplica entonces a la logística práctica y la logística teórica: la primera, estudia los cálculos y las relaciones numéricas tal como se presentan en las actividades cotidianas, la segunda, lo mismo, pero en relación al número como objeto puro del pensamiento. En la *República* de Platón, se pueden ver fragmentos en los que se hace referencia en este sentido: "Eso tan vulgar -dije- de conocer el uno y el dos y el tres. En una palabra, yo le llamo número y cálculo" (Platón, 1988, 522c); "Sería conveniente, Glaucón, establecer por ley este estudio y persuadir a los que van a participar de los más altos cargos del Estado a que se apliquen al arte del cálculo [logística], pero no como aficionados, sino hasta llegar a la contemplación de la naturaleza de los números por medio de la inteligencia; y tampoco para hacerlo servir

razones, en virtud de la indivisibilidad de la unidad, que no es el caso en las actividades prácticas.[116] Esto es, mientras que en las actividades prácticas, las fracciones se aceptaban, siguiendo la tradición egipcia, en las matemáticas teóricas, más que hablar de fracción se habla de razón, la cual expresa la comparación entre cantidades.

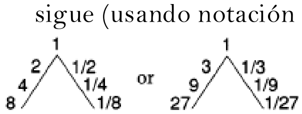
Sin embargo, las reflexiones sobre la fracción no estaban totalmente ausentes en los tratados teóricos. En la aritmética de Nicomachus, al expresar las propiedades de los números pares dice que el número par es aquel que puede ser dividido tanto en partes iguales como desiguales, y que en ese proceso de descomposición, entre más grande el tamaño, menor la cantidad (Nicomachus (of Gerasa), 1926, libro I, capítulo VII, §3).[117] Una posible interpretación que podemos dar a esta expresión es que si se toma cualquier número, y se compara su tamaño relativo con respecto a la unidad, cuanto más grande el número, menor *parte* es la unidad de este, así por ejemplo, la unidad es un medio del dos, un tercio del tres, un cuarto del cuarto, etc.[118] Pero no debe olvidarse que en el contexto de la aritmética griega, un medio, un tercio, ..., significa tanto una fracción de la unidad, como la expresión que permite hablar de la relación (razón) entre dos cantidades. La base para esta afirmación se puede encontrar en el sentido para dos expresiones claves que refieren a las modernamente llamadas fracciones de unidad: μέρος (*méros*, *parte*) y μέρη (*merē*, *partes*), que, como se verá a continuación, se pueden interpretar como expresiones genéricas para referir a lo que en notación moderna llamamos fracciones de la forma $\frac{1}{n}$ y $\frac{m}{n}$, $m,n \in N$ y

en compras y ventas, como hacen los comerciantes y mercaderes…" (Platón, 1988, 525c).

116 El mismo Platón, en la República, Libro VII, 525d dice: "este estudio del que estamos hablando eleva notablemente el alma y la obliga a discurrir acerca de los Números en sí, sin permitir jamás que alguien discurra proponiendo números que cuentan con cuerpos visibles o tangibles [hacer cálculos con números concretos]. En efecto, sabes sin duda que los expertos en estas cosas, si alguien intenta seccionar la unidad en su discurso, se ríen y no lo aceptan, y si tú la fraccionas ellos a su vez la multiplican, cuidando que jamás lo uno aparezca no como siendo uno, sino como conteniendo muchas partes" (Platón, 1988).

117 Boethuis, en su libro *De Institutione Arithmetica*, en el libro primero (el cual es en esencia una traducción, ampliada con explicaciones del libro primero de la aritmética de Nicomachus) explica esta relación entre un número y las partes de ese número diciendo que cuando un número es dividido en dos partes iguales, estas dos partes son las dos más grandes que se pueden obtener, y que por el contrario, cuando se dividen en tres partes iguales, entonces el tamaño de cada parte ahora es más pequeño, pero se ha aumentado en número de partes. "lo que hemos explicado previamente es que cuando una cantidad crece al infinito en pluralidades, entonces el espacio, el cual de otra manera puede llamarse una magnitud, se disminuye en secciones infinitamente pequeñas…" (Boethius, 2006, p. 77).

118 Iamblichus (1988) refiere estas relaciones como el diagrama lambda, el cual se puede representar como sigue (usando notación moderna):



En el cual se expresan la relaciones entre dos series de números que están en progresión geométrica.

$m < n$.

Estos términos aparecen en la definición 1 del libro V y las definiciones 3 y 4 del libro VII de los *Elementos*,[119] y en líneas generales expresan que un número (respectivamente una magnitud) es *parte* de otro cuando lo mide exactamente, pero es *partes* cuando no lo mide (esto último ya no se afirma para las magnitudes).[120] De acuerdo con Heath (Euclid, 1908), la expresión *parte* remite a la *Metafísica* de Aristóteles[121] y debe ser entendida como la relación entre dos números en donde el menor mide exactamente al otro y, por ende, dicha expresión dice que el número menor es "*parte exacta*" (parte alícuota) del mayor, es la *n-ésima* parte del mayor.[122] En consonancia con lo anterior, *partes* indica que si bien el número menor no mide exactamente al mayor, existe otro número que mide a ambos (a veces es la unidad), tal que dicho número es *parte* del mayor, y *m-veces* esa *parte* iguala al número menor, es decir, *m-veces* la *n-ésima* parte del número mayor iguala al número menor.[123] Así pues, *parte* y *partes* son en la obra euclidiana las formas de referir las fracciones (unitarias y no unitarias), pero entendidas en su forma no de números, o cantidades menores que la unidad, sino en su forma de expresiones para la relación parte-todo (razón) entre dos números (o cantidades). Es igualmente importante anotar que *partes* es comprendida como la repetición de una *parte* una cierta cantidad de veces, mientras que *parte* se define en su relación de medir de manera exacta al todo[124] y, por ende, está en estrecha conexión con la

---

119 Def. 3, libro VII: Un número es **parte** de un número, el menor del mayor, cuando este mide al mayor (la definición 1 del libro V es idéntica a esta, pero cambiando la palabra número por magnitud); Def. 4, libro VII: Pero es **partes** cuando no lo mide. (Euclid, 1908).

120 El concepto de *partes* no se expresa para las magnitudes (libro V) sino solo para el libro VII (definición 4). Quizás se deba a que esta expresión no puede extenderse de manera generalizada a las magnitudes, pues no todo par de magnitudes son conmensurables entre sí, mientras que en los números, todo par de números son conmensurables entre sí (con la mónada, la unidad).

121 "*Parte*, en un sentido se dice de aquello en que se puede dividir una cantidad cualquiera. Porque siempre lo que se quita de una cantidad, en tanto que cantidad, se llama parte de esta cantidad. Y así dos puede considerarse como parte de tres. *En otro sentido, se da sólo este nombre a lo que mide exactamente las cantidades; de suerte que, bajo un punto de vista, dos será parte de tres, y bajo otro, no*." Aristóteles, *Metafísica*, 1023b, 10-20 (énfasis del autor).

122 Por supuesto, no se trata de un número racional, sino que en esta definición está implícita una especie de comparación cuantitativa del tipo relación parte todo. Es decir, dados dos números, si el menor mide al mayor, entonces es porque éste está contenido un número exacto de veces en el mayor, digamos *n*-veces, entonces el menor será la *n-ésima* parte del mayor (simbólicamente, si *A* y *B* son dos números, con $A < B$, si $B = nA$ entonces $A = \frac{1}{n}B$)

123 Esto es, cuando dos números *A* y *B*, con $A < B$, son tales que el menor no mide al mayor, entonces siempre será posible encontrar otro número *C*, tal que esté contenido *m* veces en *A* y *n* veces en *B* (con $m < n$), de tal forma que *A* es *m* veces la *n-ésima parte* de *B*.

124 Las proposiciones 4, 5, 6, 37 y 38 del libro VII de los *Elementos* muestran que esta interpretación sobre los conceptos de *parte*, *partes* es acertada, pues en sus demostraciones tales conceptos son usados

noción de *múltiplo*.[125]

Una idea más precisa de esta estrecha relación de las fracciones como formas de expresión para las razones, se puede ver en las definiciones de las razones entre números, base del estudio de la música. Así por ejemplo, con pequeñas diferencias, Theon y Nichomachus definen el género *múltiple* (πολλαπλάσιο)[126] como aquellas razones en las que "el término mayor contiene al menor un número exacto de veces, es decir, cuando el término más pequeño mide al más grande exactamente sin que sobre ningún residuo. Si le mide dos veces, la razón es *doble*; si lo mide tres veces las razones *triple*, y así sucesivamente" (Théon (de Smyrne), 1892, p. 123), y recíprocamente, define el género *sub-múltiple* (ύποπολλαπλάσιο),[127] como aquel que permite la comparación del término menor al mayor: "el término más pequeño, como *parte* del más grande, recibe una de denominación correspondiente a la razón *múltiple*: se nombra la mitad del término doble, el tercio del término triple,… y la razón es llamada mitad, tercio, y así sucesivamente" (Théon (de Smyrne), 1892, p. 125). Cada género tiene sus respectivas especies: ser doble, triple, cuádruple,…, la mitad, el tercio, el cuarto,…, respectivamente.

Nótese como la relación *n-veces* (comparado el término mayor con respecto al menor) define la relación *n-ésima* parte (que compara ahora el término menor con el mayor).[128] Además, la diferencia entre la razón cómo una forma de poner en relación dos cantidades (la acción de comparar una con respecto a la otra), el nombre de esta acción en función de la naturaleza de la relación entre las dos cantidades, y la fracción como forma de nombrar, de cuantificar dicha relación en casos específicos. Consecuencias similares se puede leer en las restantes definiciones de las razones entre números.

Así pues, vemos que la idea de fracción no era ajena al pensamiento griego en tanto esta era una forma de expresar la razón, la conmensurabilidad de una cantidad con respecto

instrumentalmente en los sentidos aquí propuestos.

[125] De Morgan (1836) muestra explicaciones similares para justificar el sentido de las expresiones *parte* y *partes* en el contexto euclidiano.

[126] Esta expresión usualmente significaba la repetición de una determinada cantidad un cierto número de veces.

[127] El prefijo ύπο (*hypo*), traducido al latín como *sub*, literalmente traduce debajo de, pero puede ser entendido en este contexto de las fracciones como indicador de la relación del menor al mayor.

[128] Nicomachus (1926) es más explícito en este hecho, y por ejemplo dice "si este [el término menor] mide al número mayor con quien es comparado dos veces solamente, este es propiamente llamado *subduplus*, como 1 es de 2; si tres veces, *subtriplus*, como 1 es de 3; si cuatro veces, *subcuadruple*, como 1 es de 4, y así sucesivamente" (p. 214).

a otra.[129] Dicho de otra manera, si bien es cierto que los griegos no admitían la división de la unidad, si podían dividir y establecer relaciones (razones) entre números. De otra parte, como se dijo antes, desde la matemática práctica se tenía la posibilidad del reconocimiento de las relaciones fraccionarias (como partes de un todo) con respecto a la actividad de medir. Klein (1992), citando a Herón afirma: "con el fin de, entonces, no tener pies o *ells*, o sus partes en cada medida, podemos mostrar nuestros resultados numéricos como *monadas*, sustituyendo cualquier medida que deseemos" (p. 112). Esto es lo que hoy en día llamamos cambio de unidad y permitía que en las medidas los resultados no fueran fracciones de unidad sino resultados expresados en números enteros.

En los anteriores pasajes también se puede ver que la interpretación de *parte* como fracción unitaria es plausible, pero sobre todo, muestran que dicha fracción unitaria, como medida relativa, como razón, de una cantidad menor a una mayor, no puede ser pensada por fuera de la relación de la razón de la mayor a la menor, es decir, de la relación de multiplicidad que tiene la mayor con respecto a la menor. En simbología moderna, si A y B son dos cantidades, con $A > B$, entonces si la razón de la cantidad mayor a la cantidad menor es de multiplicidad, es decir la razón de A a B es n, entonces la razón de B a A es $\frac{1}{n}$, en tanto que la cantidad A contiene un número n de veces a la cantidad B.

De otra parte, la presentación en géneros y especies muestra la conciencia de la existencia de infinitas parejas de cantidades que tienen el mismo logos, y que cada familia, por así decirlo tiene un principio generador y, por ende una pareja que las genera. Pero además, la presentación en diadas de los géneros y especies de razones, muestra la conciencia de la relación de reciprocidad que se presenta entre cada pareja. Si se mira con atención, esta reciprocidad tienen que ver con que la composición de las dos razones que componen cada diada es la unidad: *n-veces*, multiplicado por $\frac{1}{n}$-*veces*, da la unidad; $(1+\frac{1}{n})$-*veces* multiplicado por $\frac{n}{n+1}$-*veces*, da la unidad, y así sucesivamente. Esto muestra la importancia del reconocimiento de estas familias de razones: no sólo son generadas de acuerdo a principios elementales, sino que se reconoce para cada especie la existencia del individuo que genera a los demás. Pero además, cada especie, con respecto a su recíproca, se puede componer multiplicativamente para restaurar la unidad. Así entonces, la unidad,

[129] De todas formas esta visión de la fracción era limitada, en tanto no se consideraron como números.

la cantidad, la medida, la medida relativa entre cantidades, la reciprocidad, la fracción como expresión de la cantidad, son conceptos claves en la comprensión de las razones en el contexto matemático griego, y por qué no, pueden serlo en los contextos escolares actuales.

4.2.3 Y en la Edad Media

Al contrario de lo sucedido en el mundo oriental, pero continuando con la tradición heredada de la antigua Grecia, la Edad Media latina no disfrutó de las fracciones en el sentido estricto de la palabra (o al menos hasta la parte final del medioevo). "Las matemáticas legadas por la tradición antigua no les fijó un lugar claro. Las cifras romanas no se prestan para su expresión. De otra parte se enseñó una aritmética que trataba sobre temas muy diferentes." (Benoit *et al.*, 1992, p. 183). Sin embargo, en la actividad comercial era necesario el uso de las fracciones, y en eso los comerciantes de la Edad Media siguieron la tradición romana de tratar las reparticiones en función de dividir las cantidades en dos sub-múltiplos. Igualmente, en el tratamiento de las unidades de medida buscaban que los sistemas de unidades evitaran, tanto como fuera posible, el uso de cantidades no enteras. Un buen ejemplo de los sistemas de unidades usadas en la edad media es el sistema de pesos utilizado en Francia: "la libra se divide en dos marcos, el marco en ocho onzas, la onza en 24 denarios, y el denario en 24 granos –granos de cereal– con lo cual se buscaba llegar tan lejos como fuera posible en el proceso de medir pequeñas cantidades" (Benoit *et al.*, 1992, p. 183). También se pueden citar los sistemas de medida romanos, en base doce –de ahí el nombre de docena, para representar las 12 unidades– quizás por el hecho de que 12 tiene bastantes divisores, y esto facilita la definición de sub-unidades para medir cantidades más pequeñas (Smith, 1923, 1925). "Incluso en el siglo XV, cuando ya se tenía un uso generalizado de los cálculos con los fraccionarios entre los matemáticos, algunos todavía insistían en evitar las sutilezas de los números quebrados." (Benoit *et al.*, 1992, p. 183).

Sin embargo, la adopción en la Edad Media por parte de los países cristianos del Occidente de estas nuevas formas de expresar los fraccionarios (la herencia árabe del sistema de numeración decimal y la notación con fracciones), es lo que permite desarrollar nuevas formas de cálculo con las fracciones, y esto no solamente conlleva una nueva visión de la práctica sino también a una nueva concepción del número (Smith, 1925). En todo este tránsito a lo largo de la parte final de la edad media, los trabajos de los matemáticos árabes tuvieron gran influencia.

Finalizando el primer milenio de la era cristiana, y comenzando el segundo, la cultura árabe alcanza su máximo esplendor, lo que trajo importantes consecuencias para el desarrollo económico, social, político y científico de la Europa de finales de la edad media.

> …hacia el siglo IX de nuestra era, los árabes eran depositarios de conocimientos matemáticos de origen diverso, no solamente de los grandes clásicos griegos, sino también de los trabajos de los matemáticos hindúes, en particular de la astronomía. Se ve así entonces fluir a partir de esta época los "tratados de cálculo hindú," que son la parte más bella de las fracciones… diferentes tradiciones se encuentran en los países de lengua árabe y los matemáticos las confrontan, las sintetizan, las yuxtaponen… (Benoit *et al.*, 1992, pp. 180-181).

Así pues, los matemáticos árabes no solo tradujeron importantes obras del pensamiento matemático griego, sino que fueron lectores críticos de dichos trabajos. Además, conocedores de los desarrollos matemáticos hindúes, logran establecer una amalgama entre las matemáticas de ambas culturas, de tal forma que combinan la practicidad de los cálculos presentes en las matemáticas orientales, con la demostración y los intereses teóricos de las matemáticas griegas. Es así que se debe reconocer en los escritores árabes formas particulares para manipular las fracciones, unidas a representaciones simbólicas propias:

> Ellos recurren sistemáticamente a las herramientas combinatorias para numerar los casos posibles en los que las diferentes clases de fracciones pueden aparecer en las operaciones. Se ve de la misma manera aparecer las pruebas para los algoritmos, de naturaleza diferente a las encontradas en China, en tanto que los autores reconocen los movimientos clásicos del análisis y la síntesis para establecer los diferentes métodos de cálculo…, colocándose así en la tradición inaugurada por los griegos, pero a diferencia de ellos, los matemáticos árabes incorporan, dentro de sus obras, discusiones filosóficas sobre los objetos matemáticos, lo que los griegos habían reservado para los libros de la metafísica (Benoit *et al.*, 1992, p. 181).

Así pues, en el marco de una Europa que se reconfigura continuamente, y de la mano de comunidades académicas con un amplio intercambio de saberes,[130] del crecimiento de las ciudades europeas, y con ellas el desarrollo comercial que plantea nuevas necesidades para las cuales eran insuficientes los sistemas de medida y cálculo antiguos, la herencia árabe va dando forma a una nueva forma de hacer matemáticas, y hacia finales del siglo XIII, las fracciones han sido completamente asimiladas en las matemáticas occidentales: nuevas formas de representar (notación decimal para los números enteros, notación en forma de fracción para las cantidades no enteras de manera similar a como lo hacemos hoy en día), calcular (algoritmos basados en el sistema de numeración decimal para realizar las cuatro operaciones básicas, para calcular con fracciones) y comprender los números.

[130] Representadas por las universidades o algunos sectores de la iglesia católica.

Así, en el libro de Fibonacci (Leonardo (de Pisa), 1202/1872, 1202/2003),[131] *Il Liber Abaci*, fracción aparece en relación con la división entre números completos o enteros, hoy "naturales", y que el autor explica como la relación entre el número de partes iguales en que se divide un todo (el *denominatus*, el que ha denominado o nombrado el número de partes iguales en que se ha partido la unidad) y la cantidad de esas partes que se toman (el *denominans*, el que está denominando o nombrando el número de partes que se toman). Así, el *denominatus* expresa una acción pasada (la partición de la unidad en partes iguales, que es la acción de nombrar la unidad con el total del número de partes, el cual queda fijo para cualquier número que se vaya a escribir encima de la raya o "vírgula"), mientras que el *denominans* expresa una acción presente, la selección del número de partes de la unidad que se toman. Si se toma una sola, no hace falta contar, pero si se toman varias de ellas, sí hace falta contarlas, enumerarlas o numerarlas, por lo que en siglos posteriores el *denominans* se va a llamar "*numerator*": el que numera o enumera.

Además, para Fobonacci, la fracción tiene una estrecha relación con la división, lo que se evidencia, por ejemplo, en la presentación de las tablas para dividir: en estas tablas se ve que dividir por $2,3,4,\ldots$, es representado como calcular $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots$ de una cantidad dada, y en caso de que la división no fuera exacta, el residuo es tratado como una fracción,[132] la cual expresa la relación entre dicho residuo y el divisor.

De esta manera, se puede ver entonces que la fracción, más que un número, es una forma de representar la operación misma de la división, y de expresar el resto de una división relativamente al divisor de la cantidad dada (en este caso se puede decir que la fracción expresa la razón del resto de la división al divisor de la misma).

4.2.4 Nombrando las fracciones: palabras y símbolos

Los babilonios sólo tuvieron formas específicas para denotar fracciones sencillas:

[131] Este libro es dedicado a la instrucción matemática de los mercaderes (como lo expresa el autor en la introducción), y fue escrito a comienzos del siglo XIII. Este texto es una especie de tratado enciclopédico de mucha de la matemática conocida hasta el momento, y trata teórica y prácticamente temas relacionados con la aritmética, la geometría y el álgebra.

[132] Así por ejemplo, en la división de 365 entre dos (primer ejemplo dado por Leonardo de Pisa explicando el algoritmo de la división), sobra 1 como residuo, y él expresa que sobra "uno de dos", lo cual hace un medio, y que se escribe $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\ldots$ y $\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\ldots,$[133] pues como se dijo antes, tenían en su sistema de numeración un instrumento potente para su representación (por ejemplo, $\frac{1}{2}$ sería equivalente a .30 en sistema sexagesimal,[134] y $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\ldots$ serían equivalentes a .20, .15 y .10 respectivamente), y para realizar las operaciones con fracciones. Estos procesos de equivalencia se facilitan por la base del sistema de numeración, a saber 60, cuyos factores primos son 2, 3, y 5, lo cual hace que en la notación del sistema sean fracciones irregulares (periódicas infinitas) aquellas en las que su denominador contenga números primos mayores o iguales a 7. Comparativamente con nuestro sistema de numeración decimal es una ventaja para los cálculos, pues son menos los casos en los que habría que enfrentarse con notaciones infinitas.[135]

Usaban la expresión *igi-n-gal* para expresar la fracción unitaria $\frac{1}{n}$ y la expresión 1 *LA igi-n-gal* para la complementaria, es decir aquella de la forma $\frac{n-1}{n}$ (Michel, 1992). Se debe aclarar que estas expresiones se usaban fundamentalmente en los textos comerciales, para expresar las medidas de las cantidades, y que, como ya se dijo, para hacer los cálculos las fracciones se convertían a la notación sexagesimal.

Los egipcios desarrollaron un sistema de notación para las fracciones que les permitía representar gráficamente las fracciones de la forma $\frac{1}{n}$.[136] Por lo general, encima del símbolo del número, se colocaba el jeroglífico  que se podía interpretar como parte.[137] Tenían signos especiales para algunas fracciones, tales como $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4}$ y las fracciones no unitarias eran expresadas como sumas de fracciones unitarias (así por ejemplo, $\frac{3}{4}$ se expresaba como $\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ que en esencia significa la suma de ambas fracciones).

133 Al parecer evitaron las fracciones de denominador 5 (quizás por cuestiones de facilidad en los cálculos).

134 Aclarando que los babilonios no usaban el punto para separar las cantidades enteras de las fracciones de unidad, pero aquí se hace por facilidad en la escritura.

135 Por ejemplo, si se toman las fracciones con numerador 2, 3, hasta el 12, entonces, en un sistema de numeración como el nuestro, se tendría que sólo las de numerador 2, 4, 5, 8 y 10 tendrían expresiones finitas, mientras que un sistema como el babilonio, de base 60, serían expresiones finitas las fracciones con numerador 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 y 12.

136 En este documento, y por facilidad en la escritura, se usará la notación moderna, pero se debe aclarar que en el contexto egipcio no se distinguían numerador ni denominador.

137 Este símbolo representa la boca. Caveing (1992) afirma que posiblemente la simbolización de la fracción por dicho símbolo provenga de la unidad más pequeña para medir el grano, a saber, la cantidad de grano que una persona se podía poner en la boca.

En el caso de los griegos, las fracciones eran notadas de una forma muy similar a como lo hacían los egipcios tomando como base las fracciones unitarias, y a partir de ellas, representar cualquier cantidad fraccional no unitaria como una suma de varias fracciones unitarias (Fowler, 1992; Heath, 1921, 2003). Las fracciones unitarias se representaban, por lo general, con la letra del número acompañado de un énfasis en la parte superior.[138] Así por ejemplo, $\frac{1}{3}$ se representaba γʹ, y la palabra sería γʹ μέρος = τρίτον μέρος, que significaría tercera parte (Heath, 2003, p. 20), en donde como ya se dijo, la palabra usada para referir la fracción unitaria era μέρος (*méros*). Para el caso de las fracciones no unitarias, dice Heath, no se tenía un método generalizado para representar la fracción, pero el más usual era el método egipcio, basado en expresar cualquier fracción como suma de fracciones unitarias (ver figura 12).[139]

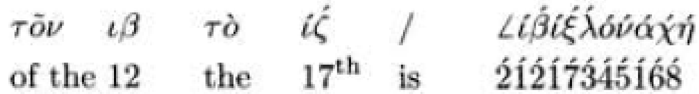


Figura 12. *fragmento de un texto griego en el que se calculan* $\frac{12}{17}$.
En notación moderna sería $\frac{12}{17}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{17}+\frac{1}{34}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$. *Al inicio de la expresión del extremo derecho se puede observar un símbolo especial para la fracción* $\frac{1}{2}$ *(tomado de Fowler (1992))*

Finalmente, es de señalar el uso del sistema sexagesimal (de origen babilonio) para notar las fracciones, sobre todo en el contexto de los cálculos astronómicos, desarrollado a plenitud por Ptolomeo, tomando la estructura que conocemos hoy en día, de grados, minutos y segundos (Heath, 2003).[140]

En el caso de las matemáticas chinas, la fracción era vista como una entidad compuesta de dos partes numéricas, a partir de la cual expresar la relación entre las partes y el todo. Más específicamente,

> …las partes de un todo podían ser dadas en la forma *x fen zhi y* (o: *y* de *x* partes - *y* partes de un todo que ha sido fragmentado en *x* partes iguales). El denominador y numerador son llamados respectivamente *fen mu* (la "madre" de lo compartido) y *fen zi* (el "hijo" de

[138] Esta notación es coherente con lo dicho en la sección anterior de que la fracción unitaria (originada en la relación (razón) submúltiple) se define en función de la relación (razón) opuesta, es decir, la razón múltiple.

[139] Heath (2003) muestra diferentes métodos para representar las fracciones, llamando la atención el que uso Diofanto, pues usaba una notación muy parecida a la moderna, colocando la cantidad correspondiente al numerador en línea con el texto, y la cantidad correspondiente al denominador encima de la anterior. Así por ejemplo, $\overset{\delta\xi\delta}{\rho}$ representa, en notación moderna $\frac{4}{164}$ (p. 22).

[140] En la forma usada por Ptolomeo, dice Heath (2003), la circunferencia se dividió en 360, y cada una es una *parte* (nuestros grados), luego cada grado en 60, y cada *parte* es llamada *sesentaavos* (nuestros minutos), y luego cada segundo se divide en 60, siendo cada *parte* llamada *segundos sesentaavos* (nuestros segundos).

> lo compartido). … con estas expresiones se quiere subrayar tanto la diferencia en tamaño de uno a otro, como la relación de intima dependencia entre ambos términos (Martzloff, 2006, p. 193).

Chemla (1992) propone interpretar estas dos expresiones para referir a la fracción como que el numerador cuantifica, mientras que el denominador específica el tipo de fracción cuantificada.

Para el caso de las matemáticas hindúes, la situación es similar. Se tenía una palabra para designar la fracción, *bhinna*,[141] y dos palabras especiales para referir el numerador y el denominador, a saber, *amsa* y *cheda*, las cuales se podría decir que son como nuestras palabras numerador y denominador, pero a diferencia nuestra, la palabra *amsa*, refería tanto al numerador de la fracción, a la cantidad que es una parte fraccional (por ejemplo, $\frac{1}{5}$ de 5 designaría la cantidad que es la quinta parte de 5, es decir 1), como a la cantidad que va a ser dividida. Por su parte la palabra *cheda*, igual puede referir al divisor (la cantidad por la que se divide) o al denominador de la fracción. Además se debe decir que las fracciones eran notadas de manera muy similar a como lo hacemos hoy en día, numerador encima del denominador, pero sin la *rayita* que los separa.

Hacia finales de la Edad Media, en Europa, se tiene un sistema notacional similar al nuestro. Así por ejemplo, Simon Stevin (1634) utiliza para las fracciones la notación $\frac{a}{b}$, como ya se hacía al menos desde la época de Fibonacci,[142] pero los nombres para los dos términos de la fracción han cambiado: *numerateur* y *denominateur* para los números que se escriben respectivamente encima y debajo de la línea fraccional (la barra que separa uno del otro), en donde *denominateur* nombra la cualidad que caracteriza cada una de las partes en que se ha divido la unidad (en este caso, la cualidad es la de tener, en relación con el todo, la misma medida relativa, es decir, cada *parte*, con el todo, están en la misma razón), mientras que *numerateur* nombra la cantidad de esas partes que componen la cantidad medida. Así entonces, en la fracción $\frac{m}{n}$ el *denominateur* nombra la cualidad de cada parte, a saber, ser la *n-ésima* parte de la unidad. Por su parte, el *numerateur*, *m*, numera la cantidad

[141] Por lo general refiere a la fracción en su forma $A+\frac{a}{b}$ (es decir el resultado de hacer una división). "…una cantidad, a la cual una parte, sea una mitad, un cuarto, etc., es sumada, o de la cual tal parte es sustraída" (Bhascara, 1817, p. 13)

[142] Vale la pena mencionar que en la forma como Leonardo escribía la fracción era distinta a como lo hacemos hoy en día: primero escribía el número del denominador, luego, encima de este, la raya fraccional, y finalmente el número correspondiente al numerador.

de partes que se han juntado *m* partes de cualidad $\frac{1}{n}$ para completar la cantidad que se quiere medir. Nótese entonces que a pesar de la similitud con nuestras palabras *numerador* y *denominador*, los sentidos eran distintos: en nuestro español actual, ambas expresiones son nombres para dos números, que son unas especies de operadores, uno que parte la unidad en partes iguales (el denominador), y el otro que cuenta la cantidades de esas partes de la unidad (el numerador). Se ve entonces en estas ideas trazas muy cercanas al concepto actual de fracción: la fracción como una representación de cantidades numéricas no enteras, la notación usual en la forma $\frac{x}{y}$, e incluso, las palabras y significados muy cercanos a los que usamos hoy en día. Sin embargo, y a diferencia nuestra (o bien porque los números reales sustituyeron la razón, o bien por la excesiva aritmetización del currículo que rompe el vínculo entre números y magnitudes, o tal vez por otras razones desconocidas), la fracción sigue estrechamente ligada al concepto de razón, siendo precisamente una forma de expresar la relación cuantitativa, la medida relativa, entre la parte y el todo.

A través de este corto tránsito por las diferentes formas de nombrar y simbolizar a las fracciones se pueden obtener lecciones valiosas que afirman aspectos ya enunciados en las secciones anteriores, o que muestran lecciones nuevas.

En primer lugar, y ampliando lo dicho sobre la relación entre la fracción y la razón, se puede agregar que las palabras y los símbolo usados para hablar y simbolizar la fracción fueron desarrollados o bien en el contexto de establecer relación (razón) entre cantidades (de la misma naturaleza), o bien en el contexto de situaciones que implicaban la repartición de cantidades, pero en todo caso, se trataba de poner en relación dos cantidades, de cuantificar dicha relación, y la palabra usada para nombrar la fracción refería tanto a la relación entre las cantidades comparadas como a la acción realizada sobre ellas: repartir (dividir), comparar (razón). Así las cosas, la fracción terminaba teniendo como telón de fondo una cierta idea de razón, y como tal, se constituye en una forma de expresar, de decir la relación cuantitativa detrás de la razón. Esta relación entre razones y fracciones fue ampliamente explotada por los matemáticos griegos, pero a partir de la introducción en la Europa de la Edad Media, vía los árabes, de nuevas formas de tratar con las fracciones (originadas en las matemáticas chinas e hindúes, y refinadas por los algebristas árabes), se dan nuevos procesos de conceptualización que permiten el reconocimiento del estatus de número a las fracciones y, por ende, de las razones, sentando las bases para el desarrollo del concepto de número real que conocemos hoy en día. Todo esto lleva finalmente al eclipse de las razones, en tanto, de un lado, el número real sintetiza el concepto mismo de razón, y tal vez de las fracciones mismas, y de otro la popularización del sistema de numeración decimal brinda a la aritmética otros marcos representacionales con más poder operatorio.

En segundo lugar, sobre todo mirando la herencia griega, y con los impulsos de los matemáticos de la Edad Media, es notable el énfasis mostrado en la necesidad de distinguir entre el nombre de la cosa y la cosa nombrada. Por ejemplo, en las formas griegas de nombrar las fracciones, una cosa era el nombre de la fracción y otra la razón nombrada por ella, aunque el nombre dado de alguna forma comportaba en su estructura morfosintáctica el conjunto de acciones y relaciones que definían la razón nombrada. Es más, las cantidades que se relacionaban a través de esta razón nombrada podrían recibir nombres especiales en virtud de la razón que las vincula, pero también en estos casos los nombres daban cuenta de la relación entre estas dos cantidades (si a y b se relacionan a través de una razón doble, y $a > b$, entonces a es el doble de b, y b es el sub-doble, la mitad de a). En los casos en que se distinguió numerador de denominador, la situación era similar: los nombres remitían a las acciones y relaciones entre las cantidades nombradas. Así pues, independientemente de la situación, las palabras para las fracciones designaban formas de relación entre cantidades (que el sentido moderno son las razones), y si a partir de ellas se nombraban las cantidades, o las partes del símbolo usado para representar la relación (razón) entre cantidades, ni estos nombres, ni los objetos nombrados confunden la fracción (como forma notacional) con la razón (la cuantificación realizada a través de la fracción).

4.2.5 Las operaciones con fracciones

Como se ha dicho ya en varios momentos, los babilonios no tuvieron algoritmos específicos para operar con las fracciones, pues podían expresarlas en su sistema de notación sexagesimal y operar con ellas de acuerdo a los algoritmos propios de dicho sistema de numeración. Si bien las fracciones eran referidas a contextos de división, y su sistema de numeración les permitía tener un algoritmo para realizar la división, también conocían que una división por un número n, era lo mismo que multiplicar por el recíproco de n:

$a \div n = a \times \frac{1}{n}$ (en el caso de que *n* no fuera un número regular[143] en el sistema de numeración, entonces la división se podía resolver buscando el número que multiplicado por el divisor *n*, diera como resultado el dividendo (Friberg, 2007)). Este conocimiento se evidencia en la existencia de extensas tablas de números y sus respectivos recíprocos (nombrados *igi-n*), las cuales aprovechaban el hecho de que su base de numeración 60 tiene muchos divisores y, por ende, cada una de las familias 4, 8, 16, 32,…; 3, 6, 9, 18, 21,..; 5, 10, 15, 20…; tienen la misma terminación en la escritura sexagesimal, simplificando así la construcción de las tablas (Ver Friberg, 2007, pp., especialmente el capítulo 2, páginas 67 y siguientes).

Caso distinto se identifica para las matemáticas chinas e hindúes, en donde el sistema de numeración utilizado para representar los números enteros no era muy apropiado para la representación de las cantidades no enteras. En este caso, los algoritmos para las operaciones con fracciones fueron distintos de los utilizados para operar con los números enteros, y en cierta forma similares a como lo hacemos hoy en día. Así por ejemplo, en el texto chino de los *Nueve Capítulos*, se lee el siguiente procedimiento para simplificar una fracción,[144] el cual se basa en la búsqueda de una medida común entre numerador y denominador, siguiendo un procedimiento similar al propuesto por Euclides en la proposición II del libro VII, pero realizando la división por restas sucesivas. El procedimiento dice: “divida tanto como se pueda dividir, hasta que no se pueda dividir más [procediendo como sigue]: tome el número de la madre [el denominador] y el hijo de la partición [el numerador], sustraer el menor del mayor [y así sucesivamente], y alternadamente (*geng xiang jian sun*) hasta determinar el “igual” *deng*. Simplifique la fracción usando este igual […] (Martzloff, 2006, p. 194). Tal procedimiento se entiende mejor viendo como hacían la simplificación de la fracción $\frac{49}{91}$ (problema 6, libro uno del *Nueve Capítulos*), como se muestra a continuación:

143 Los números regulares eran aquello cuya descomposición en factores primos solo tienen divisores de 60. Para estos números, su recíproco se puede expresar en el sistema sexagesimal con un número finito de símbolos del sistema.

144 Otro texto antiguo, posiblemente del siglo segundo o tercero a. C. (Dauben, 2008) presenta, además de este procedimiento general, otros tales como: “si se le puede sacar la mitad, hágalo, si puede ser dividida por un cierto número, divídala por este”, lo que puede interpretarse como que si numerador o denominador tienen de manera evidente un divisor común, entonces se debe dividir tanto numerador como denominador por este divisor común.

$$\begin{aligned}
91 - 49 &= 42 \\
49 - 42 &= 7 \\
42 - 7 &= 35 \\
35 - 7 &= 28 \\
28 - 7 &= 21 \\
21 - 7 &= 14 \\
14 - 7 &= \boxed{7}
\end{aligned}$$

luego (en notación moderna): $\frac{49}{91} = \frac{49 \div 7}{91 \div 7} = \frac{7}{13}$

El "igual" es ese *n-ésimo* residuo para el cual el siguiente residuo es cero.[145] Ese *n-ésimo* residuo es la medida común a los números dados, y por lo tanto la fracción puede ser simplificada al dividir tanto numerador como denominador por él. Cuando este último residuo no es cero, sino uno, entonces numerador y denominador son primos entre sí, y la fracción no se puede simplificar.[146]

Para las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división)[147] se tenían algoritmos similares a los nuestros. Así por ejemplo, para la suma de fracciones de diferente denominador, la regla expresada en los *Nueve Capítulos* era presentada en dos partes, una primera, que podemos llamar la búsqueda del común denominador, multiplicando los denominadores entre sí. Esta operación era llamada homogenización.[148] En la segunda parte de la regla, llamada la estandarización, los numeradores son multiplicados por este denominador común para obtener entonces las nuevas fracciones, en su nueva

145 Martzloff dice que el "igual" se identifica como el número que se repite en la serie de los residuos, y para el ejemplo, el 7 es dicho número. Sin embargo tal interpretación no parece muy apropiada, pues no siempre se encuentran dos números iguales en la serie de residuos, como por ejemplo, al simplificar $\frac{2}{10}$ (para más detalles de esta y otras críticas a las traducciones de los textos matemáticos antiguos chinos, ver Volkov (2010)).

146 Si en vez de hacer restas sucesivas de los residuos, se hacen los cocientes entre los residuos consecutivos, se tiene el algoritmo de Euclides para encontrar la medida común a dos números dados.

147 A manera de anécdota se puede mencionar que los matemáticos chinos reconocían las dificultades para realizar los cálculos con las fracciones, como lo dice Martzloff (2006) al citar la introducción del libro *Nueve Capítulos*: "cualquiera que estudie las matemáticas no debería enfrentar ninguna dificultad con la división o la multiplicación, pero debe ser temeroso de los misterios de los cálculos con las fracciones" (p. 194). Esto se evidencia, por ejemplo, en la presentación de las reglas para operar con fracciones, buscando desglosar al máximo todos los casos posibles.

148 Martzloff (2006), dice que los chinos llamaban a esta operación "equalization" (*tong*), cuya significado según el *Oxford Advanced Learner`s Dictionary* es "hacer cosas iguales en tamaño, cantidad, valor, etc., en la totalidad de un grupo o lugar". Según este autor, en los *Nueve Capítulos*, se lee al respecto de esta regla: "la multiplicación conjunta de las diferentes madres [denominadores] es llamada la equalization" (p. 195) Por cuestiones del lenguaje, dado que en el español la expresión usada comúnmente para esta operación es la de "homogenizar" entonces se usa esta expresión como traducción del término en inglés "equalization".

denominación.[149] Luego procedían a sumar los numeradores entre sí, dejando como denominador el denominador común. Las reglas para la multiplicación y la división eran similares a las encontradas en la actualidad.[150] Esta forma de proceder para el cálculo con las fracciones tiene como telón de fondo la posibilidad de transformar el cálculo con fracciones en operaciones entre números enteros, los cuales encierran una cierta idea de proporcionalidad entre cantidades. Por ejemplo, Dauben (2008), en un problema en el que se debe repartir $3+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ entre cinco personas, dice (usando notación la notación actual de las fracciones):

Tome uno como 6 (seis es el denominador común entre medios y tercios)
La mitad es 3, y un tercio es 2
Si se suman todas da 23 (es decir, si uno es 6, entonces 3 es 18, más la mitad, más el tercio, eso da 23)
Ahora ponga en la parte de abajo, la cantidad de 1 (es decir, el 6, o lo que es lo mismo, al poner 6 como denominador, se estaría diciendo que es 23 de 6, o $^{23}\!/_{6}$),
y entonces multiplique este por 5 (dividir por 5 es equivalente a multiplicar el denominador por 5).
Eso da lo que le corresponde a una persona (es decir, repartir $3+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ entre cinco es igual a repartir 23 de 6 entre 5).

Lo anterior implica una cierta conciencia de la fracción como razón (sin que se pueda hablar de que en los chinos se tenía un concepto de razón como se conocía, por ejemplo, en el contexto griego) y de proporción, de tal forma que operar con una fracción de la unidad es equivalente a operar con una cantidad entera que guarda con otra cantidad entera la misma relación que la fracción con la unidad. Como se verá a continuación, esta idea está igualmente presente en la forma egipcia de operar con fracciones.

En el contexto matemático egipcio, sumar fracciones era referido a la suma de números enteros que, con respecto a una cantidad fija dada (el equivalente a nuestro común denominador), tienen la misma relación parte-todo que las fracciones con respecto a la unidad. Así para sumar las fracciones $\frac{1}{72}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ y $\frac{1}{576}$ (escritas en lenguaje moderno), los egipcios recurren a unos números auxiliares (que los escribían en rojo y cada uno debajo de las fracciones dadas) 8, 36, 18, 9 y 1, cuya suma es 72. Caveing (1992) analiza este

[149] Martzloff (2006) expresa, al respecto de estas dos operaciones (homogenización y estandarización), que son dos operaciones generales, usadas no sólo en el campo de las operaciones con fracciones, sino igualmente en la solución de diferentes tipos de problemas, como por ejemplo en la regla de tres.

[150] Dauben (2008) muestra en otro texto antiguo un procedimiento, quizás más intuitivo, basado en la posibilidad de homogenizar las fracciones doblando, triplicando, etc., o dividiendo por dos, por tres, etc., numerador y denominador de algunas de las fracciones. Cuando esto no era posible, entonces se propone el procedimiento anteriormente descrito.

procedimiento y expresa que algunos autores han interpretado los números en rojo como los numeradores de las fracciones obtenidas después de homogenizar los denominadores de las fracciones originales, pero objeta este tipo de interpretaciones en tanto estaría en contradicción con la forma usual de expresar la fracción como composición de fracciones unitarias (es decir, en el contexto egipcio no existe la fracción $\frac{m}{n}$). Por lo tanto, la otra interpretación posible es que cada uno de estos números son tales que guardan con respecto a 576, la misma relación parte-todo que 1 a 72, 1 a 16, etc. Dicho de otra manera, una fracción expresa una razón entre la cantidad unidad y el todo, y el cálculo con fracciones se transforma en cálculo con números enteros que guardan con otra cantidad (el común denominador) la misma relación parte-todo.[151] De esta manera, la fracción es vista entonces, o bien como una relación parte-todo, o bien como un operador que permite encontrar nuevas parejas de cantidades en la misma relación (razón) que la fracción original. Dicho de otra forma, $\frac{1}{m}$ es una especie de relación parte-todo a partir de la cual todas las parejas de la forma (a', A') con $a' = \frac{1}{m}A'$ son equivalentes. Esta idea de proporción entre números, gracias a la fracción, es la que está en el fondo de la definición de proporción entre números del libro VII de los Elementos de Euclides.

Ideas similares se pueden leer en el libro de Fibonacci (1202/2003) cuando explica, por ejemplo, cómo realizar la suma entre fracciones: para sumar $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ primero propone encontrar un número para el cual el tercio y el cuarto sean enteros, y este número es 12. Después pide calcular el tercio y el cuarto de 12, que son 4 y 3 respectivamente. Luego dice que estos dos números se deben sumar, lo cual da 7. Y finalmente, 7 se debe dividir por 12, lo cual da $\frac{7}{12}$, que es siete doceavos de la unidad.[152] Si bien esta técnica para realizar la

[151] Esta idea se ve igualmente en la aplicación el método de la falsa posición. Por ejemplo, el problema 26 del papiro del Rhind implica solucionar la ecuación $x+\frac{1}{4}x=15$, el cual inicia con siguiente cálculo:

\1	4
\¼	1
	5 (resultado)

El cual muestra que la escogencia del falso valor inicial es de tal forma que se pueda calcular fácilmente su cuarta parte. Es más, el cuatro es asumido como 1, como la unidad, entonces ¼ de la unidad es 1. Este procedimiento es muy usual en los matemáticos egipcios: si 1 es n, entonces $\frac{1}{n}$ (de n) es 1, o más generalmente, si n es A, entonces, $\frac{1}{n}$ es $\frac{1}{A}$. Esto se ve igualmente en el problema 33, en donde se calculan $\frac{2}{3}$ (de 42) igual 28, y por lo tanto se concluye que $\frac{1}{28}$ es 1½.

[152] Leonardo igualmente explica otros procedimientos, como por ejemplo, la suma del producto cruzado de numeradores y denominadores, sobre el producto de denominadores (tal como lo hacemos hoy en día), y para el caso más general, propone el método que usamos hoy en día de reducción a un común

suma se parece a uno de los procedimientos antes descritos en chinos y egipcios, en este caso es claro que el cálculo con fracciones de unidad se puede referir a cálculos entre enteros, a condición que estos números enteros guarden la misma proporción con una cantidad dada que las fracciones de unidad con la unidad. Esta referencia a la proporcionalidad numérica se ve con claridad en uno de los procedimientos explicados para hacer la división: “la razón de $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$, por ejemplo, es como la razón de $\frac{1}{3}$ de 12 a $\frac{1}{4}$ de 12. Por lo tanto, la división de $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{4}$ es la misma que dividir 4 por 3, y el resultado $1\frac{1}{3}$” (Leonardo (de Pisa), 1202/2003, p. 100). Otro procedimiento para la división dice: “si usted divide $\frac{1}{3}$ entre $\frac{1}{4}$, entonces esta debe ser entendida como cuadruplicar un tercio de la unidad. Por lo tanto, al cuadruplicar esta parte, a saber, cuadruplicar un tercio, encontramos cuatro tercios, es decir, $1\frac{1}{3}$” (Leonardo (de Pisa), 1202/2003, p. 100). Este procedimiento parece basarse en el conocimiento de que dividir por un número es equivalente a multiplicar por su inverso, hecho conocido desde la matemática babilónica. Igualmente, en ambos casos, es importante la referencia de la fracción (como partes de la unidad) a la unidad.[153] Para la multiplicación, o para el paso de la expresión fraccionaria mixta a la fraccionaria pura (o viceversa) Fibonacci propone métodos similares a los que usamos hoy en día.

4.3 Razones - números: ¿competencia o complementariedad?

Como se ha podido leer en las secciones anteriores, la relación entre razones y números han sido diversas: en algunos casos, no es explícita la existencia de una teoría de razones, aunque las fracciones son tratadas como cantidades numéricas que expresan cierto tipo de relaciones entre cantidades, relaciones que perfectamente pueden significarse como el concepto de razón de esa época y lugar; en otros casos (como en los griegos) hay una referencia explícita a las razones, en el marco de unas formulaciones teóricas precisas, pero entonces el estatus de éstas como números no es muy claro. Pero lo que sí es claro, es que en las matemáticas modernas, los números reales han desplazado –casi que han hecho desaparecer– a las razones como un tema de preocupación de las comunidades científicas (aunque en las comunidades educativas sigue siendo tema de preocupación, pero más por

denominador, dividiendo el denominador de la fracción por el común denominador, y multiplicando el numerador de dicha fracción por el resultado de este cociente.

153 No sobra decir, que para los casos de fracciones más complejas, Fibonacci propone realizar el cálculo a partir del método del producto en cruz que conocemos hoy en día.

su utilidad en las actividades de la vida cotidiana, que por un lugar claro en la constitución de los objetos de estudio de las matemáticas). ¿Cómo se han dado entonces esos movimientos de las razones a los números y viceversa, y como se constituyen primacías de lo uno hacia lo otro en determinadas épocas y lugares? No hay una respuesta única, quizás no haya respuesta, pero se pueden formular una serie de hipótesis al respecto.

Por tomar un punto de partida, se puede referir la idea griega de razón. Si bien es claro que en los griegos la razón no es un número (pues solo eran números los naturales), si se puede afirmar que éstas gozaban de un estatus de cantidad, aunque diferente de los números y de las magnitudes. Las definiciones y proposiciones sobre las razones que aparecen en el libro *Data* de Euclides (1806), al igual que el tratamiento dado a las razones y a las proporciones en los libros V y VII de los *Elementos* (en donde se muestra que las razones son susceptibles de comparación por igualación y por diferencia), hacen evidente que ellas cumplen con las dos características esenciales para que algo pueda ser cantidad. Sin embargo, no se tiene evidencia de un texto matemático griego en el que se manifieste de manera explícita el carácter de cantidad de la razón.

La declaración explicita de las razones como cantidades se evidencia en los textos de los matemáticos árabes de finales del primer milenio de la era cristiana. Esa declaración de la razón como cantidad, vino de la mano de una lectura crítica de los textos matemáticos griegos por parte de los matemáticos árabes y, por ende, de una reconceptualización de nociones claves de los *Elementos*, como la definición de proporcionalidad, en particular, la definición dada en el libro V. Es así que Rashed y Vahabzadeh (1999), en la traducción que presentan de algunos textos del matemático persa Al-Khayyam, mencionan varios trabajos en los que se critica la definición 5 del libro V de los *Elementos*, pues se considera que la noción de equimúltiplo sobre la que se basa no es de fácil aplicación, y que además, la separación dada en los libros V y VII profundiza la confusión, pues la definición de proporción en el libro VII es de más fácil uso.

En particular, Al-Khayyam, al comienzo del libro segundo,[154] dice: el autor de los *Elementos* ha dicho, a propósito de la verdadera naturaleza de la razón: "*es la esencia de la*

[154] Se trata de una obra escrita en el siglo XI de la era cristiana, titulada *Comentarios sobre las dificultades de ciertos postulados en la obra de Euclides*. En particular este libro segundo lleva por título *Exposición sobre las razones y la noción de proporcionalidad y sobre su verdadera naturaleza*. El mismo es un conjunto de exposiciones sobre la noción de razón y proporción en los libro V y VII de los *Elementos* de Euclides, presentando nuevas definiciones sobre razón y proporción, basadas en lo que el autor define como la esencia de la razón, buscando claridad sobre dichas nociones.

medida de dos magnitudes homogéneas, la una relativamente a la otra." (Rashed & Vahabzadeh, 1999, p. 340), aclarando luego que dichas magnitudes[155] deben cumplir la propiedad arquimediana, y que la medida relativa de una magnitud a otra remite a establecer de manera exhaustiva cuánto es una con relación a la otra, "bien sea determinando qué fracción es, o bien sea de alguna otra manera".[156] Luego, después de aclarar que una característica fundamental de las cantidades en general, y de las magnitudes en particular, era la de poderse comparar, bien sea en la igualdad o en la diferencia, argumenta entonces que la razón comporta dos aspectos: poner en relación dos magnitudes comparadas a través de su diferencia (diferencia pensada en términos de cociente), y que ella en sí misma posee la característica de cantidad (en tanto dos razones pueden ser comparadas en la igualdad y la diferencia).

Posteriormente analiza las implicaciones de considerar estos dos principios sobre las razones, cuando se consideran las razones entre números o entre magnitudes. Así entonces, partiendo del hecho de que establecer la razón entre dos números es determinar la medida de uno con respecto al otro, concluye entonces que la razón establece el valor de la medida relativa entre los dos números, y que esta medida se puede determinar dividiendo uno entre el otro, y que para el caso en que el número menor no mide al número mayor (el mayor no es múltiplo del menor), la comparación del uno con respecto al otro, es decir la división del mayor por el menor, en virtud de la indivisibilidad de la unidad, siempre termina en uno, y por lo tanto, la división siempre dará la medida relativa de uno con respecto al otro.[157] Esto es, dados dos números, si el menor mide al más grande, entonces la división del mayor por el menor da la medida de la razón del mayor al menor, y si no lo mide, entonces siempre será posible encontrar una división de ambos de tal manera que una parte (fracción unitaria) así obtenida mida a ambos números. Es más, el autor, apoyado en las proposiciones 1 y 2 del libro VII muestra que dados dos números donde el menor no mide al mayor, la aplicación sucesiva del algoritmo de Euclides, permite determinar la medida relativa de un número con respecto al otro (para el caso de los números este proceso siempre es finito,

[155] Este autor consideraba cuatro tipos de magnitudes: la línea (longitud), la superficie, el sólido (volumen), y el tiempo (el cual era considerado como la medida del movimiento de los cuerpos). Estas cuatro magnitudes, siguiendo la tradición aristotélica, eran considerados géneros de la cantidad.

[156] La expresión "de alguna otra manera" refiere al caso en que las magnitudes no son conmensurables, y por lo tanto no se puede encontrar la fracción que expresa la medida relativa, lo cual no implica que dicha medida relativa no se puede hallar.

[157] Dicho de otra manera, dados dos números, ellos siempre son conmensurables entre sí.

dado que el proceso de dividir un número tiene como límite mínimo la unidad).

Cuando este principio del algoritmo euclideo se utiliza para determinar la medida relativa entre dos magnitudes (continuas), entonces Al-Khayyam muestra que la dificultad radica en que para el caso de las magnitudes, no todas las sustracciones sucesivas de los residuos (la división euclidea) terminan en un número finito de pasos, en tanto que las divisiones sucesivas para el caso de las magnitudes continuas no tienen como límite la unidad. Sin embargo, afirma, esto no imposibilita afirmar que la verdadera naturaleza de la razón esté en la medida relativa entre magnitudes, y que la división euclidiana sea el principio a partir del cual determinar el tamaño, la cantidad de la razón que relaciona las dos cantidades para las cuales se establece la razón.

De esta manera, el estudio de la proporción entre magnitudes se separa en dos: el caso en que son conmensurables, y el caso en que no lo son. Si lo primero, Alkhayyam dice (expresado en términos modernos) dadas cuatro magnitudes A, B, C y D, donde A es el mismo múltiplo de B que C es de D, o A es la misma fracción de B, que lo es C de D, entonces la razón de A a B es inevitablemente la misma que la de C a D.[158] Si lo segundo, dadas cuatro cantidades A, B, C y D, donde el mismo múltiplo m_o de veces que se puede sustraer B de A, sobrando un residuo r_o, es el múltiplo de veces que se sustrae D de C, sobrando un residuo s_o; y si el mismo múltiplo m_1 de veces que se puede sustraer r_o de B, sobrando un residuo r_1, es el múltiplo de veces que se sustrae s_o de D, sobrando un residuo s_1; y si el mismo múltiplo m_1 de veces que se puede sustraer r_1 de r_o, sobrando un residuo r_2, es el múltiplo de veces que se sustrae s_1 de s_o, sobrando un residuo s_2; y así sucesivamente, encontrando que la serie infinita de números $m_0, m_1, m_2, \ldots$, es la misma número a número para ambas razones, entonces la razón de A a B es inevitablemente igual a la razón de C a D.

Esta nueva forma de establecer la proporcionalidad entre dos parejas de magnitudes no conmensurables entre sí tiene gran importancia: en primer lugar, se identifica un mecanismo único y universal para encontrar la cantidad de una razón que relaciona dos magnitudes, a saber, la división de una por la otra. En segundo lugar, el uso de una técnica que siglos más tarde será llamada la representación en fracciones continuas[159] para

[158] En este caso extiende la definición de proporcionalidad del libro VII al libro, para el caso de magnitudes conmensurables.

[159] Al finalizarla Edad Media, este método será usado de manera sistemática para aproximar números

aproximar razones entre magnitudes no conmensurables. En tercer lugar, como lo dicen Rashed y Vahabzadeh (1999), cada razón queda identificada con una sucesión de números que la identifican de manera univoca, haciendo que la razón pueda ser analizada en sí misma, y no, como en el caso de la definición euclidea del libro V, en donde una razón siempre debe ser analizada con respecto a otra (la que es igual, o menor o mayor).

Estos elementos son sin duda un importante avance en la objetivación de la razón como cantidad, dotando a las razones de un estatus operatorio más claro, ganando autonomía como entidad con naturaleza propia, pero las razones aún no son consideradas números.

Durante la parte final de la Edad Media y los inicios del Renacimiento, se dan nuevos desarrollos que ponen otros elementos en el escenario. Así entonces se encuentran libros clásicos como *La Aritmética* de Boethuis (2006; 1974), o *The Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius (1230/1981), los cuales son tratados teóricos sobre la aritmética, fundamentados en la teoría de razones, sin un lugar claro para las razones cómo números. Pero de otra parte, como se expresó antes, las actividades comerciales hicieron que los calculistas, al igual que los autores de los libros para enseñar el arte de calcular, experimentaran una necesidad creciente de tratarlas como tal. En el intermedio se tienen tratados como el libro de Fibonacci (ya mencionado), que mostrando todo el poder de los métodos de cálculo aprendidos de los árabes (sistema de numeración decimal, algoritmos para operar, etc.) busca insistentemente fundamentar tales procedimientos sobre la teoría clásica de las razones y las proporciones heredada de la tradición griega. Así, en uno de los ejemplos dados para explicar los métodos para hacer divisiones entre fracciones, en donde se debe dividir 83 entre $5\frac{2}{3}$, luego de expresar ambas cantidades en tercios, lo que da 249 tercios y 17 tercios, propone entonces que la división entre los números dados es lo mismo que la división de 249 entre 17, en tanto estos dos números son el triple de los originales, y para darle un soporte teórico a este procedimiento cita a Euclides, diciendo que este autor declaró que "si un número a otro están en una cierta razón, entonces sus múltiplos están en la misma razón" (Leonardo (de Pisa), 1202/2003, p. 107). Situaciones similares se pueden encontrar en otras partes del libro, por ejemplo, en los capítulos dedicados a la regla de

racionales e irracionales, pues las fracciones continuas no solo convergen más rápidamente que en el proceso de división usual (en el sistema de numeración decimal), sino que, cuando las cantidades comparadas son conmensurables (la razón es un número racional), la expansión es finita, y cuando no (la razón es un número irracional), si esta razón es solución de una ecuación cuadrática, la expansión es periódica.

tres, al lado del algoritmo de la multiplicación en cruz, están las justificaciones para este procedimiento basadas en mostrar que las cuatro cantidades implicadas en la situación son proporcionales entre sí, y que por tanto, los procedimientos utilizados tienen su fundamento en las definiciones y teoremas de los libros V y VII de los *Elementos* de Euclides. Esta popularización de los cálculos con fracciones en la solución de problemas de proporcionalidad directa e inversa y sus intentos de justificación en el marco de una teoría clásica de la proporción griega, de un lado, permitieron que las razones encontraran en las cantidades fraccionarias (o números quebrados, como fueron llamados por algunos) y los irracionales unas formas de expresión que facilitaran los cálculos (como se puede ver en la sección anterior) y, de otro, fueron paulatinamente afianzando el reconocimiento de las fracciones como números y, por ende, de las razones, pero esto último solo se dio hasta finales de la Edad Media.

Adicionalmente, al finalizar la Edad Media se dan importantes avances en la representación simbólica de los números y las razones y, por ende, en las técnicas para operar con estas nuevas cantidades. Por ejemplo, Bombelli introduce de manera sistemática el uso de las fracciones continuas para expresar cantidades irracionales,[160] Oresme desarrolla un estudio sistemático de las proporciones continuas mostrando nuevas técnicas de representación que facilitaron los cálculos con las potencias y las raíces;[161] Napier introduce los logaritmos proporcionando nuevas técnicas de cálculos entre cantidades que cambian proporcionalmente con respecto al tiempo.[162] Hechos como estos fueron determinantes en el desarrollo de nuevas formas de representación para las cantidades y los números, nuevas técnicas para calcular con estas cantidades y, por ende, nuevas formas para resolver los problemas, y por qué no, nuevos problemas que permiten la constitución de un escenario en el que números y razones cambian rápidamente, conceptualmente hablando.

Estos cambios se evidencian, por ejemplo, en el trabajo de Vieta, en donde a partir de un programa unificador que le permitiera aplicar el análisis no solo a lo geométrico (en el sentido de Pappus), sino también a lo aritmético (en el sentido de Diofanto), desarrolla una

160 El nombre de fracciones continuas se debe a Wallis, quien estudió de manera sistemática sus propiedades.

161 Se trata fundamentalmente del texto *Algorismus proportionum* del cual se puede consultar una traducción realizada por Edward Grant (Oresme & Grant, 1965).

162 Una traducción del texto de Napier sobre los logaritmos se puede consultar en el sitio web http://www.johnnapier.com/table_of_logarithms_001.htm

conceptualización sobre el análisis y la síntesis que aplica por igual a ambas ramas del conocimiento, basado, por supuesto, en una teoría de proporciones que aplica entonces tanto a números como a magnitudes, con lo que efectivamente asume el álgebra no solo como una teoría sobre las ecuaciones, sino como una teoría general de las proporciones (Klein, 1992).[163] Pero así como el álgebra se constituye en una teoría general de las proporciones, aplicables tanto al número como a las magnitudes, los símbolos usados por Vieta para representar las magnitudes o los números comportan igualmente una noción de cantidad generalizada. Así entonces, la incógnita se hace la representación generalizada de la cantidad o de la magnitud, se opera con ella como si fuera un número, y por qué no, se constituye una nueva forma de cálculo (Klein, 1992). En palabras de Vieta, una "logística especiosa" (cálculo con lo simbólico), en la cual los símbolos usados representan la forma de la cosa, y no la cosa en sí misma, es decir son signos con estructura espacial usados para representar la naturaleza de las magnitudes, y en el mismo sentido, las ecuaciones son construcciones que representan las relaciones (las proporciones) entre las magnitudes involucradas en la situación, y estos signos se hacen cosas, como objetos del pensamiento, con las que se puede operar. Es en este sentido que Klein afirma que en Vieta está el nacimiento del concepto moderno de número, no medido tanto por su nivel de abstracción, sino por su capacidad para el cálculo simbólico, y eso es lo que se encuentra en el conjunto de reglas establecidas para el cálculo especioso, las cuales, a la manera de un sistema axiomático, crean un contexto dentro del cual se define el objeto mismo con el que se tratará, a saber, la incógnita como número generalizado.

Otro giro importante en la comprensión del número se da en el tratamiento dado por Stevin (1634), pero ahora en un contexto que busca una mejor comprensión de las matemáticas necesarias en las actividades prácticas del comercio. Y esto es quizás lo que estaba en la mente de Simón Stevin, cuando a finales del siglo XVI propone rediseñar los sistemas de medida de tal forma que se compongan de una unidad principal, y de múltiplos y submúltiplos de dicha unidad, tal que su relación con la unidad principal sea una potencia

[163] Es así entonces que para Vieta una proporción puede decirse es la constitución de una ecuación, y la ecuación, la manera de resolver una proporción (Viete, 1630, 1630/1983), Igualmente afirma (finalizando el capítulo 1) que este obtener las proporciones y las ecuaciones se apoya en los principios generales de la lógica, del silogismo, en las nociones comunes, en los axiomas y teoremas ya conocidos (refiriéndose a los elementos de Euclides), como se evidencia en el capítulo II donde enuncia los principios generales, tomados de los elementos, sobre los cuales se fundamentan los símbolos para las ecuaciones y las proporciones.

de 10 (positiva o negativa). De esta manera, muestra que todos los cálculos con las medidas se pueden hacer como se calcula con los números (en el sistema de numeración decimal que ya era ampliamente difundido en Europa), pero además, que cualquier fracción podría ser expresada en notación decimal, y que por tanto, las operaciones con fracciones serían igual que en las operaciones con los números en notación decimal. Pero esto implicó que Stevin llegara a proponer una nueva comprensión del número[164] con el fin de que las fracciones de la unidad fueran aceptadas como números. Así, en la definición VII dice que número entero es bien la unidad, o bien la multitud de unidades, y en la definición X, dice que un número quebrado (*nombre rompu*) es el que es una fracción (*partie* o *parties*) de un número entero, explicando que si el 1 se parte en cuatro partes iguales, entonces tres de esas partes es un número quebrado, lo que se escribe como $\frac{3}{4}$, y se nombra *tres cuartos*. Nótese entonces como Stevin no solo comprende la unidad como número, sino que también admite la divisibilidad de la unidad, y más aún, que esas partes en que se divide la unidad igualmente son números. Pero esta comprensión de la unidad como número, de las fracciones de unidad como números, caminó de la mano de una comprensión simbólica del número en relación con la notación en un sistema decimal base 10, lo cual le permite pensar el número en su forma simbólica independientemente incluso de la imposibilidad de manipular la cantidad de unidades representadas en el símbolo. Esto es, para Stevin, el número no es solo multitud de unidades, sino también el símbolo representado por la combinatoria de cifras (Klein, 1992), lo expresado directamente por las cifras en el sistema de numeración decimal. Este carácter simbólico del número, su reconocimiento de las fracciones de unidad como números, le permite reconocer que a las magnitudes continuas corresponden números continuos, y sobre todo, el carácter numérico de las cantidades negativas e irracionales (llamadas hasta ese momento cantidades absurdas). De esta manera para Stevin existen diferentes tipos de números,[165] y cualquier número, aritmético o no, puede ser tomado como

[164] Así entonces, Stevin (1634) propone, en relación al número, comprender el 1, la unidad, como número, y en comparación con las unidades geométricas, igualmente propone que la unidad debe ser divisible (como lo son todos los números), y de esta manera, las fracciones de unidad igualmente deberán ser consideradas como números. Así por ejemplo, en el libro primero de su aritmética, define número como aquello que explica la cantidad de todas las cosas; demuestra, silogísticamente, que la unidad debe ser número; igualmente, demuestra que el origen de todos los números no puede ser el uno sino el cero (así como en la geometría el origen de la recta es el punto), y define y explica la notación decimal para todos los números.

[165] Por ejemplo, Stevin llama "números aritméticos" a aquellas cantidades que no son adjetivadas en una magnitud, y "geométricos" a los que son cuadrados, cubos, etc., de cualquier cantidad. Aunque igualmente reconoce que cualquier número puede ser cuadrado, cubo, etc., de otra cantidad dada.

el origen de la cantidad.

Este aspecto es clave, pues podría decirse que es la primera vez que se da el estatus de número a cantidades que no son enteras o positivas (fracciones, raíces, negativos), pues si bien a lo largo de la Edad Media se constituyeron como entidades simbólicas con las cuales se podía operar, que representaban las razones y proporciones entre números o magnitudes, admitiendo su naturaleza de cantidad, no se asumían como números en tanto se conservaba la conceptualización griega del número. Pero este reconocimiento va de la mano, como ya lo había indicado Vieta, de la posibilidad de reconocer en el signo un objeto con el cual se opera, de alguna manera definido por dicha estructura operatoria. Este discurso sobre el símbolo, donde el número se refiere no tanto a las cantidades sensibles a través de los sentidos, sino a la estructura definida por el símbolo y sus operaciones, hace posible una racionalidad en la que se aprehende a través de la razón aquello que, en otro momento, se había considerado por fuera de la razón misma. Sin embargo, esta apertura al discurso simbólico del número no implica un rompimiento con los fundamentos intuitivos de este; es decir, la naturaleza misma del número, los fundamentos primarios de este, siguen siendo puestos con respecto a esas cantidades sensibles de las cuales el número es una abstracción simbólica, y en donde el símbolo gana independencia, por así decirlo, de esa fuente fenomenológica primaria. Es una objetivación del número en el símbolo.

Una objetivación de orden similar se evidencia en Descartes, en relación ahora al papel de las figuras, y su correspondiente aritmetización, en el proceso del análisis y síntesis propio de la algebrización que él propone para la geometría. Esto se evidencia, por ejemplo, en el libro de la *Geometría* (Descartes, 1637/1954, 1686), en la representación geométrica de las operaciones de la aritmética (las cuales para Descartes son cuatro o cinco, en tanto la radicación la define como una especie o tipo de división). En particular, con respecto al producto (al igual que la división) entre dos cantidades (ídem, magnitudes), lo plantea como la búsqueda de una cuarta proporcional entre una línea (segmento) tomada como *unidad*, y otras dos líneas, que representan las cantidades que deben ser multiplicadas, las cuales son tales que una de ellas es a la unidad como la cuarta proporcional buscada es a la otra.[166] La división se expresa en el mismo sentido, solo que ahora una de las líneas es a la otra como la cuarta proporcional buscada es a la unidad.

[166] Esta idea de comprender la multiplicación en relación con la búsqueda de una cuarta proporcional estaba ya presente en la definición de multiplicación entre números dada en el libro VII de los *Elementos* de Euclides.

De esta manera, Descartes abre la posibilidad del tratamiento aritmético de las magnitudes, pues al tomar una de las magnitudes (arbitrariamente) como la unidad, la razón de las restantes magnitudes a esta unidad se torna en una cantidad absoluta, es decir, se logra una reducción de las magnitudes a la multitud (Descartes, 1701/1996, § 452). Esto facilita el tratamiento de las magnitudes pues las proporciones entre magnitudes se reducen a proporciones entre números y, por ende, las reglas del álgebra son ahora aplicables a la geometría (Descartes, 1701/1996, Regla VII). Esto igualmente implica una nueva aproximación al número: el número no solo es el resultado de la multitud de unidades, sino también la medida de la cantidad continua (la razón entre dos magnitudes) la cual, en virtud de la definición arbitraria de una cantidad de magnitud como unidad, deja de ser una medida relativa (cuánto es una magnitud con respecto a la otra) para tornarse en absoluta. Descartes no habla más de cantidad sino de dimensiones[167] de un cuerpo, entendidas como todos aspectos de éste que pueden ser medidos. La unidad es una magnitud cualquiera elegida arbitrariamente, que puede ser tomada como la medida común a todas las demás magnitudes, con respecto a la cual se establecen las razones de las demás magnitudes, y estas razones, en virtud de que la magnitud de referencia es llamada "*la unidad*", son llamadas "*la medida*" de dicha magnitud, y "*medir*" no es otra cosa que "*numerar*" las magnitudes, es decir, determinar el número que representa dicha magnitud (Descartes, 1701/1996, Regla XIV § 447 a 449).

Así entonces, se ve una vez más el carácter abstracto, simbólico del número, lo cual permite su extensión al campo de las magnitudes, y con la posibilidad de representar por la unidad, por el uno, esa magnitud tomada como referencia que sirve como medida común para comparar las demás, entonces, la razón, la medida relativa entre una magnitud cualquiera y esa que se toma como unidad, se hace igualmente número.[168]

Esta formulación de la razón como número se hace explícita en otros matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Por ejemplo Newton, en su texto *Aritmethica Universalis* (Newton, 1720, 1972),[169] define número de la siguiente manera: "por número comprendemos, no tanto

[167] La noción de dimensión le permite mostrar que largo, ancho o alto, no son tres dimensiones de un mismo cuerpo, sino más bien, tres manifestaciones diferentes de una misma dimensión, a saber, la longitud.

[168] Klein (1992) afirma que es precisamente esta aritmetización de las magnitudes lo que realmente está en la base del trabajo cartesiano, y por esta vía, la algebrización de las relaciones entre magnitudes es lo que hace posible un marco que entiende el álgebra como una teoría general de las proporciones, aplicables ahora por igual a lo numérico como a lo geométrico. En este marco, la figura y el número son entendidas cómo formas de expresar simbólicamente las relaciones (proporciones) entre cantidades.

[169] Una primera versión de este texto fue escrita entre 1673 y 1674, pero la versión publicada en 1707 (y

una multitud de unidades, como la *razón* abstraída de cualquier cantidad a otra cantidad del mismo tipo, la cual tomamos como unidad" (Newton, 1720, p. 2). En esta definición de número hay profundas raíces de la herencia cartesiana, pero a diferencia de este, se hace explícito el carácter de número presente en las razones. En la misma página, Newton afirma la existencia de tres tipos de números: *enteros (whole)*, los que son un múltiplo entero de veces la unidad; *fracciones*, los que son una parte submúltiple (*submultiple part*) de la unidad de medida, y *absurdos (surds)*, los que no son conmensurables con la unidad. Nótese entonces la relación explícita entre los números, las razones, la medida y, por ende, las cantidades en general, y las magnitudes en particular. Adicionalmente es interesante mencionar que al explicar el valor posicional de las cifras utilizadas para la notación de los números,[170] las fracciones de unidad expresadas en esta notación son llamadas *fracciones decimales* puesto que ellas siempre decrecen en una razón decimal, mientras que las partes enteras son llamadas la clase de las unidades, las decenas, las centenas,…, en tanto van en una razón *décuple*. El conjunto de caracteres que expresan un número es llamado la *figura* del número (como se hacía desde la Edad Media). Más adelante define las cantidades como positivas o negativas, identificando con esto aquellas que son mayores que, o menores que cero (la nada), dando ejemplos con respecto a los bienes que se poseen, las deudas, los movimientos adelante o atrás, los aumentos o las disminuciones, líneas orientadas, etc. Nótese como Newton aún no reconoce las cantidades negativas como números, como sí sucede con los racionales y los irracionales, pero sí caracteriza la negatividad como una especie de atributo de la cantidad que expresa dos tipos de movimientos de la cantidad, uno de los cuales es opuesto al otro (aumentar disminuir, poseer no poseer, derecha izquierda). Desde el punto de vista pedagógico esta observación es interesante, pues así como la medición, en donde la magnitud de referencia se identifica con el 1 fue clave en la comprensión de las razones como números y, por ende, de aceptar los irracionales como números, entonces el movimiento de las cantidades, la identificación de esos dos movimientos uno como opuesto del otro, puede ser la clave para la comprensión de las cantidades negativas como números por parte de los estudiantes. Todo lo anterior subraya que, desde el punto de vista

reeditada en 1722), editada por William Whiston, contiene correcciones sustanciales al texto original escritas por el mismo Newton. Una de estas se corresponde con la definición de número la cual no aparece en el texto inicial.

170 Explícitamente afirma, en una nota al pie de página, que la notación nos enseña a expresar en caracteres (símbolos) cualquier número expresado en palabras, y la inversa, como enunciar cualquier número propuesto en caracteres.

epistemológico, esta comprensión no es evidente.[171]

Las operaciones de multiplicación y división son igualmente explicadas en función de la razón entre las cantidades que se deben multiplicar y la unidad. Así por ejemplo, dice: "Multiplicación, *propiamente dicha, es la que se realiza entre números enteros, para los cuales se afirma una nueva cantidad que es tantas veces mayor que el multiplicando como el multiplicado es mayor que la unidad.* Pero a falta de una palabra mejor, *también se llama usualmente* multiplicación *al procedimiento mediante el cual se afirma, por medio de fracciones o irracionales, una nueva cantidad en la misma razón (cualquiera que ella sea) al multiplicando, que el multiplicador a la unidad*" (Newton, 1720, pp. 10-11; 1972, p. 495). Seguidamente afirma que estas formas de comprender la multiplicación aplican tanto para los números en abstracto, como para las cantidades concretas (líneas, superficies, movimiento, pesos, etc.), en tanto que la referencia de alguna de las cantidades a la unidad, permite expresar las razones entre números y hacer que cumplan su papel.

En la anterior explicación sobre la multiplicación se deben destacar dos cosas:

i. Si bien la primera explicación, la cual es un buen parafraseo de la definición 15 del libro VII de los *Elementos*,[172] se puede pensar como la interpretación moderna de la multiplicación como una suma de sumandos iguales, una mirada cuidadosa de las expresiones usadas muestra que detrás de la multiplicación hay mucho más que una suma abreviada, o, dicho de otra forma, que la interpretación de la multiplicación como suma abreviada es una interpretación que simplifica de manera excesiva el sentido mismo de la multiplicación. Tal como lo muestra esta interpretación euclidiana de la multiplicación, multiplicar implica, dados dos números, encontrar uno que está con respecto al multiplicador en la misma razón que el multiplicando con respecto a la unidad. De esta manera se ve con claridad el carácter cuaternario de la multiplicación (como relación), a saber, la unidad, el multiplicando, el multiplicador y el producto, solo que la unidad no siempre se hace explícita y termina por ser olvidada en la interpretación moderna de la multiplicación como suma de sumandos iguales.[173] Es

[171] O al menos, como lo muestra Emmanuel Lizcano (1993) en su libro *Imaginario Colectivo y Creación Matemática*, no es evidente en la cultura occidental, no siendo este el caso para otras culturas, como el caso de las matemáticas en la antigua China.

[172] En la traducción de Heath de esta definición dice: "un número se dice multiplicado por otro número cuando el que es multiplicado es adicionado a si mismo tantas veces como unidades hay en el otro, y así un nuevo número es producido" (Euclid, 1908, p. 278).

[173] Es más, podría afirmarse que esta interpretación de la multiplicación como suma de sumandos iguales es derivada de la definición formal de multiplicación en el marco de la axiomática de Peano, en la misma es

más, se podría decir, que esta misma definición –si se quisiera interpretar como suma de sumandos iguales– debe tener en consideración la relación "*por cada unidad en el multiplicando, el multiplicado debe sumarse una vez consigo mismo*" lo cual es mucho más explícito en la formulación euclidea de la definición 15 del libro VII. La interpretación newtoniana de la multiplicación tiene más un sentido variacional, e implica establecer una especie de ley de correspondencia: si b es a 1, entonces a n veces 1 (el multiplicador como multitud de unidades) corresponde n veces b. De nuevo hay cuatro términos en relación dos a dos.

ii. La segunda explicación es de alguna manera la idea cartesiana de la multiplicación entre segmentos, lo cual incluso se afirma al ver los comentarios explicativos en los que muestra que si una cantidad A debe ser multiplicada por una línea de 12 pies, suponiendo que una línea de 2 pies es la unidad, entonces el resultado es 6A (seis veces A), que es exactamente lo mismo que se obtiene de multiplicar la cantidad A por el número (abstracto) 6, y se puede ver que la cantidad 6A está en la misma con respecto a A, que la cantidad 12 pies lo está con 2 pies. De esta manera la multiplicación es igualmente afirmada para las magnitudes, en el sentido cartesiano del término. Podría decirse que se trata más de una multiplicación por escalar, es decir, la ampliación o reducción de una determinada cantidad, que multiplicación de magnitudes en el sentido estricto de la palabra, como se evidencia en la explicación de la diferencia entre generar una superficie por el movimiento de un segmento, y la multiplicación de dos segmentos, que no produce la superficie, sino un número abstracto que representa la cantidad de unidades de superficie en la figura que tiene por lados los dos números multiplicados.

Para no alargar estas explicaciones, la división es interpretada en el mismo sentido de la proporción entre cuatro cantidades; pero ahora, la que va de una de las cantidades dadas a la otra (del dividendo al divisor), como la cantidad buscada (el cociente) es a la unidad, tal como lo había expresado anteriormente el mismo Descartes. Sin embargo, a diferencia de

una definición recursiva, que cuando se desarrolla en todos sus términos hace que la multiplicación $m \times n$ se reduzca a la suma $\underbrace{n+n+\ldots+n}_{m-veces}$. De esta manera la escuela actual solo muestra el resultado final de aplicar la definición de la axiomática de Peano, y al ocultar todo el marco formal que la soporta, oculta el significado mismo de lo que es multiplicar. De todas formas esta interpretación formal de la multiplicación tampoco permitiría entender la función lógica de la multiplicación en las situaciones donde las cantidades implicadas están relacionadas, o bien a través de un isomorfismo de medida, o bien a través de un producto cartesiano. Para ello sería más potente esta idea cartesiana de multiplicación ligada a una interpretación de razón entre dos parejas de cantidades, en donde una de ellas es la unidad.

este, Newton usa la notación de fracción para expresar la división entre dos cantidades. A los números que se dividen los llama *numerador* y *denominador*, como es usual hoy en día.

4.4 Proporcionalidad directa

En el sentido amplio de la palabra, el concepto moderno de proporcionalidad[174] se encuentra estrechamente ligado con el álgebra lineal, pues las relaciones lineales (y en general n-lineales) están en la base de toda situación de proporcionalidad directa o inversa, simple o compuesta.[175] Esto hace de la proporcionalidad un concepto tan moderno como la mayoría de las matemáticas que conocemos hoy en día, pero como lo expresan los Bourbaki (2007) en su libro sobre la historia de las matemáticas, la linealidad es igualmente tan antigua como la matemática misma. Es decir, si bien la linealidad permite un tratamiento moderno, en términos del algebra lineal, de las situaciones típicas de proporcionalidad, este tipo de situaciones fueron objeto de tratamiento sistemático desde épocas muy remotas, como lo evidencian las soluciones dadas por los matemáticos de la antigüedad a los problemas[176] que enfrentaron. Así, en las operaciones básicas (en especial la multiplicación) y, en general, en la solución de una ecuación lineal con una incógnita (o incluso un sistema de ecuaciones de varias incógnitas), se ve una percepción de la linealidad y de su tratamiento a través de ciertos métodos, al igual que del concepto de razón.

4.4.1 La linealidad en la antigüedad: egipcios y babilonios

Entre los textos babilónicos antiguos se encuentran tablas que expresan, por ejemplo, tasas de transporte (debido a la importación y exportación de mercancías), las cuales dependían tanto de la distancia recorrida, como del tipo de mercancía (valor de la mercancía), lo cual implica algún conocimiento sobre variaciones proporcionales, en donde la tasa de transporte se comporta como una razón constante (Michel, 1992). También se

[174] Es importante aclarar que esta sección está dedicada a un tratamiento de la proporcionalidad directa e inversa, pero por simplificación en el uso del lenguaje, y siempre que no haya lugar a confusión, se usará la expresión "proporcionalidad" para referir a la proporcionalidad directa.

[175] En particular, toda situación de proporcionalidad directa puede ser modelada por una función lineal de la forma $f(x) = kx$

[176] Por ejemplo, el método de la falsa posición en egipcios y babilonios para la solución de ciertos tipos de ecuaciones lineales, el tratamiento de situaciones de proporcionalidad a través de la regla de tres en chinos e hindúes, o simplemente, el reconocimiento de las operaciones aditivas y multiplicativas en situaciones cotidianas, son algunos de los ejemplos más destacados.

encuentran textos sobre diferentes tipos de transacciones comerciales que implican el uso de cierta noción de razón y variación proporcional, como en el caso de la repartición de una herencia (este tipo de problemas, por lo general, estaba reglado por ciertos tipos de leyes, como por ejemplo, que el hijo mayor debe recibir el doble de lo que recibe el menor), el cobro de los impuestos (que dependía de las tierras cultivadas y del valor de la cosecha), etc. La tabla 3 muestra un ejemplo tomado de Friberg (2007) en el que se describe la cantidad de carga que puede llevar un hombre si se conoce el tipo de producto y la capacidad de transporte de carga del hombre por día[177] y por unidad de distancia recorrida en ese día.[178]

Tabla 3: *Ejemplo en donde la tercera columna es, para cada tipo de ladrillo, la tasa constante de trabajo de un hombre en un día y por unidad de distancia. (Friberg, 2007, p. 173).*

walking number	loading number	carrying number (work norm)	brick type
45 00 ninda/man-day	6 bricks	4 30 00 brick-ninda/man-day	bricks (type R1/2c)
45 00 ninda/man-day	4;30 bricks	3 22 30 brick-ninda/man-day	cow-bricks (type H2/3c)
45 00 ninda/man-day	2;15 bricks	1 41 15 brick-ninda/man-day	tile-bricks (type S2/3c)

El uso de este tipo de constantes era ampliamente generalizado, y se tenían estimadas para diferentes tipos de actividades, sobre todo las relacionadas con el intercambio de mercancías, las tasas de rendimiento de un determinado trabajo o de un campo cultivado, y las tasas de transporte de mercancías, las cuales seguramente generaron problemas cotidianos en un pueblo dedicado al comercio y la agricultura.[179]

> El fundamento de todas estas prácticas fue la proporcionalidad (que no debe ser confundida con la teoría de las proporciones al estilo griego!) y proporcionalidad inversa. Esto, en efecto, se presupone por las tablas de constantes fijas: si un hombre puede llevar 540 ladrillos de un cierto tipo a través de 30 nindan en un día (los ladrillos Babilonios eran enormes!) ¿Cuántos hombres-día son necesarios para transportar ***N*** ladrillos del mismo tipo a través de ***M*** nindan? En los cálculos geométricos también hicieron uso del hecho de que todas las extensiones lineales dentro de una configuración de forma bien definida son proporcionales y las áreas son proporcionales al cuadrado de una dimensión lineal; en ambos casos, los factores de proporcionalidad se encuentran en las tablas de constantes fijas. (Høyrup, 2007, p. 265)

Así pues, las constantes no solo estaban presentes en situaciones comerciales, sino también en la solución de problemas geométricos (seguramente relacionados con la medida

[177] El *talento*, aproximadamente 30 kg.
[178] La *ninda*, aproximadamente 16 km.
[179] Robson (2007) muestra una extensa lista de constantes utilizadas en diferentes tipos de cálculo.

de la tierra), en donde se disponía de valores constantes (coeficientes) que permitían, por ejemplo, calcular la altura de un triángulo equilátero conocido su lado (valor aproximado a la mitad de $\sqrt{3}$), o para calcular el área de polígonos regulares, o calcular la diagonal de un cuadrado conocido su lado (aproximación para $\sqrt{2}$), entre otras.[180] El cálculo de estos coeficientes se hacía con referencia a una figura tomada como unidad, es decir, donde sus lados se normalizaban referenciando un lado como unidad con respecto al cual medir los otros lados. Igualmente implicaba el conocimiento de ciertos tipos de proporcionalidad entre los lados de figuras semejantes, y la relación entre los lados de las figuras y los lados (fórmulas para el cálculo de áreas).[181]

Sin embargo, queda una pregunta difícil de responder a partir de la evidencia que se tiene de las matemáticas babilónicas: ¿cómo calcularon estas constantes de proporcionalidad? Los textos de las tablillas, dedicados fundamentalmente a la enseñanza, o al registro de las transacciones comerciales, no dejan rastros de la manera como se calcularon dichas constantes, pero para poder llegar a ellas indudablemente fue necesario un proceso de observación de regularidades en el comportamiento de un fenómeno (por ejemplo, de las observaciones astronómicas se tiene evidencia de sistematizaciones de este tipo) y algún tipo de conocimiento sobre razones y proporciones.[182] Elementos como estos seguramente permitieron en la base del descubrimiento del comportamiento lineal de la dependencia entre las variables implicadas en situaciones de proporcionalidad y, por ende, en el cálculo de tales constantes, que seguramente permiten trabajar sobre este tipo de situaciones sin un uso explícito de una teoría de razones y proporciones.

4.4.2 Proporcionalidad en las antiguas China e India: la regla de tres

El tratamiento sistemático de situaciones de proporcionalidad se presentó igualmente entre los matemáticos chinos e hindúes, siendo lo que hoy en día conocemos como *la regla de tres*[183] uno de sus legados más importantes. Sin entrar en una discusión sobre si el origen

[180] En Maza (2009) se pueden leer una serie de explicaciones sobre cómo pudieron llegar a obtener este tipo de constante. Igualmente amplias explicaciones se pueden leer en el capítulo 8 de Friberg (2007).

[181] Este tipo de problemas igualmente fueron resueltos por los matemáticos egipcios, lo que se usa como prueba del intercambio entre ambas culturas (Friberg, 2007)

[182] Por ejemplo, Clagett (1999), en el capítulo 8, muestra algunos ejemplos de problemas geométricos en el que se hace uso de las razones, como en el caso de dividir un trapecio de acuerdo a una relación entre las áreas, lo que implica el cálculo de una constante que expresa la razón de crecimiento de la longitud de los lados paralelos puestos entre los lados no paralelos.

[183] Rajeswara (2002) dice, a propósito de la regla de tres: "en la historia de transmisión de la ideas matemáticas, la Regla de Tres es un caso interesante. Ya era conocida en China en los primeros siglos de

de lo que hoy llamamos la regla de tres se dio en las antiguas China o India, lo cierto es que en ambas culturas se tiene evidencia[184] del tratamiento de ciertos tipos de problema para los cuales tenían un método (o métodos) semejante al que hoy se conoce como la regla de tres,[185] y sobre todo, de la importancia de esta regla,[186] la cual seguramente deriva de las posibilidades que ofrece para el tratamiento de situaciones fundamentales en las actividades comerciales diarias: las variaciones proporcionales entre cantidades variables, donde unas dependen linealmente de las otras. La regla de tres es precisamente una forma de tratar con estas situaciones, sin el recurso explícito a una teoría de razones y proporciones (como sí fue en el caso de los griegos), o incluso, sin la formulación explicita de constantes de proporcionalidad.

El texto de los *Nueve Capítulos*[187] muestra que los matemáticos chinos usaban de manera sistemática las constantes de proporcionalidad, por ejemplo en la forma de factores de conversión, tasas de intercambio entre productos, costo unitario de un

Millet and Rice Exchange Rule

millet rate	50	cooked imperial millet	42
hulled millet	30	soya beans	45
milled millet	27	small beans	45
highly milled millet	24	sesame seed	45
imperial millet	21	wheat	45
fine crushed wheat	13 ½	paddy	60
coarse crushed wheat	54	fermented beans	63
cooked hulled millet	75	porridge	90
cooked milled millet	54	cooked soya beans	103 ½
cooked highly milled millet	48	malt	175

Figura 13: *Tabla de valores relativos para el intercambio de mezclas de cereal. (tomada de Dauben, 2007, p. 241)*

la era cristiana. Los textos hindúes la referencian a partir del siglo V D.C. Fue introducida en el mundo islámico hacia el siglo VII. El renacimiento Europeo la llamó la Regla de Oro." (pp. 133-134).

[184] Para el caso de las matemáticas chinas, ver por ejemplo Dauben (2007); Dauben (2008). Para el caso de las matemáticas hindúes ver por ejemplo, Bhascara (1817); Bhaskaracarya (2001); Brahmegupta (1817); Rajeswara (2002).

[185] Algunos autores afirman que se trata de nuestra regla de tres, pero si se analiza con cuidado los métodos utilizados, y las formas de representación empleadas, se notan diferencias importantes que dan lugar a una relativización de la afirmación: no la regla de tres en el sentido moderno, aunque indudablemente en esas formas de expresión de las matemáticas antiguas están los fundamentos del método que se usa en las escuelas de la actualidad.

[186] David Eugene Smith (1925), en su historia de las matemáticas (Vol II), dedica varias páginas a la regla de tres, mostrando que esta importancia no fue solo para el caso de las matemáticas antiguas, sino que se extendió incluso hasta el renacimiento europeo, donde fue bautizada como la regla de oro.

[187] Se toma como base para los comentarios siguientes la traducción y comentarios presentada por Dauben (2007). Esta traducción tiene como referente la edición realizada por Lui Hui, hacia el siglo tercero d.C., con comentarios explicativos del propio Hui. Este texto clásico en la matemática de la antigua China, remonta sus orígenes más allá del siglo segundo antes de la era cristiana, como lo manifiesta el propio Lui Hui en el prefacio de su libro.

producto, etc.[188] El capítulo 2 (dedicado a situaciones de proporcionalidad) inicia con una tabla titulada "reglas de intercambio de arroz y millo", en donde se presentan diferentes tipos de estos productos y las tasas de intercambio de unos por otros (ver figura 13). En palabras de Lui Hui, esta tabla presenta tasas de intercambio que están en proporción y que se pueden convertir mutuamente entre ellas, tomando los valores apropiados. En esta tabla, a cada tipo de producto se le asigna un número entero que se interpreta como un valor relativo con respecto al resto de productos. Por ejemplo, los dos primeros productos de la primera columna tienen valores de 50 y 30, lo que significa que la razón del millo al millo descascarado es de 5 a 3, es decir, que 5 unidades de millo valen lo mismo que 3 unidades de millo descascarado. "Tasa" aquí puede significar más bien valor relativo y la comparación, es decir, la normalización que refiere la cantidad de un producto por cada unidad del otro; la razón entre los dos valores correspondientes.

La regla para realizar tales intercambios dice: "tome el número dado y multiplíquelo por la rata buscada. [este producto] es el dividendo. La rata dada es el divisor. Divida" (Dauben, 2007, p. 241).[189] Las explicaciones que da Lui Hui a esta regla son interesantes, por lo que se transcriben a continuación casi en su totalidad:

> Esta es una regla general…como decían los antepasados: "conociendo el pasado se puede predecir el futuro. Se muestra una de las esquinas [de un cuadrado], uno puede inferir las otras tres." Esta regla puede resolver problemas difíciles y complicados y superar las barreras entre cantidades [de diferente naturaleza]. … lo poco es el inicio de lo mucho; la unidad es el fundamento del número. Por lo tanto, la discusión de las tasas debe basarse en la unidad. Según [las reglas de intercambio] millo 5 y millo descascarado 3. Es decir, millo 5 por unidad, millo descascarado 3 por unidad. Para Intercambiar millo por millo descascarado, considerar primero el millo [dado] como unidad. [una] unidad significa reducir [la cantidad dada] por 5. Esto es, 5 como unidad. Multiplíquelo por 3, esto es [uno] 3 como unidad. Por lo tanto las tasas de dependencia para [una] unidad son equivalentes, es decir de 5 a 3. Divida antes de multiplicar, pero si hay fracciones, entonces invierta [el procedimiento] en la regla. Mirados como enteros, sheng 5 de millo equivale a 3 sheng de millo descascarado. Mirado como fracciones, 1 dou de millo es equivalente a $\frac{3}{5}$ dou de millo descascarado. Utilice denominador 5, numerador 3. Para convertir millo en millo descascarado: multiplica por el numerador y divide por el denominador. Por lo tanto la tasa buscada es siempre el [numerador y la tasa dada es el] denominador.

[188] Por ejemplo, el problema 32 del primer capítulo, requiere calcular el área de un campo circular y se refiere la relación de la circunferencia al radio del campo como una razón de 1 a 3 (aunque Lui Hui comenta en relación con esta aproximación que hay otros valores para dicha relación: $\frac{22}{7}$ o $\frac{157}{50}$).

[189] Esta regla podría ser parafraseada como sigue: se necesita conocer por cuánto producto puedo intercambiar una cantidad de producto dado (*el número dado*), y se sabe que *n* unidades del producto dado (*la rata dada*) equivalen a *m* unidades del producto que se desea adquirir (*la rata buscada*), entonces la regla dice: $(\textit{número dado} \times \textit{rata buscada}) \div \textit{rata dada}$.

Con estas explicaciones en mente, se ve entonces que el método expresado implica determinar la tasa de intercambio entre dos productos dados (lo que modernamente llamaríamos el precio por unidad), y con base en esta razón, dada la cantidad de uno de los productos, determinar a qué cantidad del otro producto equivale. Es más, la explicación muestra la conciencia de la existencia de una razón constante (la relación entre las tasas) que permite calcular la cantidad desconocida que es equivalente a la cantidad dada. La verbalización del método explica cómo hacer la operación que permite calcular la cuarta cantidad desconocida, puesto que, en general, la tasa de intercambio entre los dos productos es una fracción, y por tanto, el método explicita cómo realizar, con la ayuda del tablero para calcular, la multiplicación de una cantidad entera por una fracción, sabiendo que el numerador y el denominador de la fracción, al igual que el multiplicando, se corresponden de manera invariante a una de las tres cantidades dadas.

La versión hindú de la regla de tres tiene redacción semejante, pero las diferencias son significativas. Aunque existen diferentes formulaciones[190] según la época o el matemático que la escribiera, en general conservó la siguiente estructura: se dispone de tres cantidades, una primera, llamada la cantidad dada, o el argumento; una segunda, llamada el producto, lo producido por el argumento, y una tercera, llamada la cantidad demandada o deseada, y de la cual se debe calcular el producido. La regla dice que la primera y tercera, que por lo general son de la misma naturaleza, se ponen en primer y último lugar respectivamente, y la segunda, de naturaleza diferente, se pone en el medio de las otras dos, y la cantidad buscada se obtiene al multiplicar la última con la segunda, y dividir este resultado por la primera.

Al hacer una mirada de los ejemplos dados para la aplicación de esta regla (Bhascara, 1817; Bhaskaracarya, 2001; Brahmegupta, 1817), se puede ver que las palabras más generalizadas para estas dos cantidades eran *pramana* (argumento) *phala* (fruto), que son usadas para referir por lo general a la cantidad de un producto y su valor o la materia prima y la cantidad de producto manufacturado. Podría entonces proponerse a manera de conjetura, que, en general, se trata de dos cantidades relacionadas una con la otra de tal forma que el valor de la una depende de la cantidad presente en la otra, y en cierta forma, los dos valores dados, que se corresponden uno al otro, establecen la regla de equivalencia,

[190] Por ejemplo, Bibhutibhushan y Narayan (1962) presentan 6 formulaciones diferentes para esta regla, correspondientes a matemáticos de los primeros siglos de la era cristiana.

de intercambio entre estas dos cantidades. La conciencia de la existencia de esta dependencia de una cantidad con respecto a la otra se puede ver en el Lilavati de Baskhara, donde se lee posterior al enunciado de la regla, la siguiente aclaración.[191]

> Si, en una situación dada, la cantidad que se desea calcular se incrementa (respectivamente decrece) con el incremento de la cantidad demandada (respectivamente decrece), entonces la simple regla de tres es aplicada por un adepto a las matemáticas (Bhaskaracarya, 2001, p. 78).

Sin embargo, esta regla, a diferencia de la versión china, pone énfasis en una organización espacial de los términos, a manera de mnemotécnica para recordar el orden en el cual realizar los cálculos y, al menos de manera explícita, no parece dar relevancia a la razón constante (el valor por unidad) que pone en relación las dos cantidades dadas, como sí se hace evidente en el caso de la aplicación de la regla de tres en la versión china.

En el Lilavati, casi sin ningún tipo de explicación, para la regla de tres inversa se dice:

> Si en una situación dada, la cantidad que se desea calcular se incrementa (respectivamente decrece) en tanto que decrece la cantidad demandada (respectivamente incrementa), entonces regla de tres términos invertida es aplicada por un adepto a las matemáticas (Bhaskaracarya, 2001, p. 81).

En este caso, la expresión *regla de tres términos invertida* quiere decir que se invierte el orden en que se deben realizar las operaciones, es decir, que después de ordenar las cantidades en línea teniendo en cuenta que las de la misma naturaleza se ponen en primero y último lugar, y la otra en el medio, entonces la cantidad buscada se obtiene multiplicando la primera por la segunda, dividiendo por la tercera. Nótese entonces que la denominación de inversa (para la regla) no tiene que ver con el reconocimiento de que las cuatro cantidades estén en proporción inversa, sino con que después de ordenar las cuatro cantidades de acuerdo a un determinado principio (el mismo tanto en el caso de las situaciones de variación directa o inversa), la regla original se aplica invirtiendo el orden para el otro tipo de situaciones. Sin embargo no puede desconocerse que la aplicación de la regla de tres, o bien la inversión de la regla (es decir, del orden de los cálculos) depende del reconocimiento de una cierta forma de variación entre las dos cantidades que se consideran correspondientes una a la otra aunque las explicaciones dadas son muy vagas y poco precisas.

---

[191] No sobra decir que las explicaciones sobre las condiciones dentro de las cuales aplicar la regla de tres son muy exiguas, por no decir inexistentes, lo que hace suponer que se estaba frente a un conocimiento común que no requería de mayores aclaraciones, o que estos textos estaban acompañados de una amplia explicación verbal que no quedaba capturada en el verso escrito.

En suma, en la versión hindú de la aplicación de la regla de tres, si bien se puede decir que había un reconocimiento del proceso de dependencia de la cantidades involucradas en la situación (que se podría denominar como un reconocimiento de la covariación positiva o negativa en uno u otro caso), a partir del cual se tomaba la decisión de aplicar el orden directo o inverso de las operaciones implicadas en la regla de tres, el énfasis estaba en la organización espacial (distribución horizontal) de las tres cantidades involucradas en la situación, y no en el reconocimiento de la razón constante (en proporción directa o inversa) que correlaciona las dos magnitudes involucradas en la situación.

4.4.3 Leonardo de Pisa: una nueva mirada al mismo problema

El texto de Fibonnaci (ya citado) aborda el tema de la proporcionalidad en el capítulo 8 y siguientes en donde se presentan los aspectos relativos a la regla de tres (simple, inversa y compuesta). En las primeras líneas del capítulo 8 se lee:

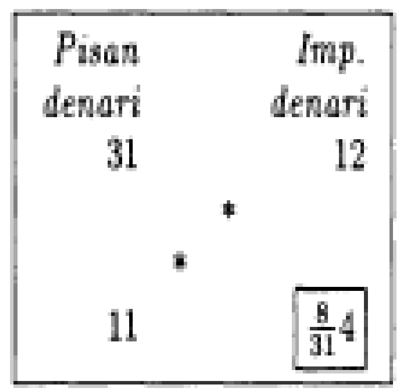


Figura 14. *Organización de las cantidades en un problema de regla de tres. (imagen tomada de Leonardo (de Pisa), 1202/1872, p. 104).*

> …cuatro números proporcionales siempre se encuentran en todas las negociaciones de los cuales tres son conocidos y uno efectivamente desconocido; el primero de los tres conocidos es el número de cualquier mercancía que se quiere vender, número de unidades, de peso, de medida… [después de dar una serie de ejemplos sobre los tipos de cantidades que pueden expresarse como este primer número continua]. El segundo es el precio de la venta de este primer número…[igualmente da ejemplos de cantidades que pueden representar este segundo número]… El tercer número es alguna cantidad del mismo tipo de mercancía que se desea vender, para la cual se desconoce el precio, a saber, la cuarta cantidad: y este entonces debe ser alguna cantidad de la misma especie que el segundo número… [es decir, es el precio de venta de la segunda cantidad de mercancía]… Por lo tanto, como el número desconocido se puede encontrar a partir de los conocidos, nosotros enseñamos para todas esas situaciones una regla general, a saber… [continua con la descripción verbal de la forma de distribución espacial de las cuatro cantidades en una tabla de dos por dos, tal como lo hacemos hoy en día (ver figura 14), haciendo énfasis en que las cantidades que quedan en la misma columna deben ser de la misma naturaleza (*cualidad o cantidad*).]… Así escritas [las cantidades] es evidente que dos de los números escritos son siempre opuestos por la diagonal, y si uno se multiplica por el otro, y el producto de la multiplicación es dividido por el tercer número restante, entonces la cuarta cantidad desconocida, puede ser efectivamente encontrada. (Leonardo (de Pisa), 1202/2003, pp. 127-128)

El algoritmo presentado se basa, entonces, en la figura que se obtiene de distribuir las cantidades de acuerdo a las instrucciones dadas. Esta forma de representación espacial de las cantidades es utilizada sistemáticamente en todos los ejemplos (más de cuarenta páginas) en los que explica el funcionamiento de la regla de tres para diferentes sistemas monetarios, diferentes sistema de pesos y medidas, y para diferentes tipos de números: enteros y fraccionarios.

Se pueden hacer tres comentarios con relación a esta extensa cita: (i) la forma de interpretar las cantidades es similar a la que presentaron los matemáticos hindúes: la primera es una causa, la segunda un efecto, la tercera es otra causa, y la cuarta su efecto. De estas cuatro, tres son conocidas y una es la que se debe buscar. Además, tal como lo hicieron los matemáticos árabes, reconoce que las cuatro cantidades pertenecen a dos tipos de magnitudes,[192] y la forma de organización espacial de las cuatro cantidades obedece a este reconocimiento de la naturaleza de tales cantidades. Pero lo más importante es el énfasis de Leonardo por hacer manifiesta no solo la relación de dependencia de las cantidades dadas, sino por afirmar que las cuatro cantidades son proporcionales entre sí. (ii) la forma de organización de las cantidades introduce una técnica innovadora: la organización espacial en una tabla de doble entrada, lo cual no solo permite identificar con precisión la naturaleza de cada una de las cantidades involucradas (como se dice modernamente, identifica los dos espacios de medida de las cantidades involucradas), sino que la cantidad desconocida es representada en el esquema por un cuadro vacío el cual se llena después de realizar los cálculos (en este punto hay una diferencia fundamental con la regla de tres heredada de los hindúes). Por la forma de organización de las cantidades en una tabla de dos columnas, Leonardo fácilmente muestra (ver cita más adelante) que no importa cuál de las cantidades sea la desconocida, siempre la multiplicación de las dos cantidades conocidas en extremos opuestos de la diagonal, dividido por la otra cantidad, da como resultado la cuarta cantidad. (iii) finalmente, el algoritmo introducido, similar al que utilizamos hoy en día, se basa en la figura que se obtiene de la representación espacial de las cantidades, y en ese sentido descarga la mente de una serie de consideraciones necesarias para tener éxito en la utilización de la regla de tres, heredada de los indo-árabes, en donde la distribución de las cantidades se hacía linealmente.

[192] Al-Khuwarizmi, en su libro de álgebra (Muḥammad ibn Mūsā al-Khuwārizmī & Rosen, 1831; Muḥammad ibn Mūsá Khuwārizmī & Robert (of Chester), 1143/1915), dedica un capítulo a las situaciones comerciales, y allí dice que en este tipo de situaciones se tienen cuatro cantidades y dos ideas. Sin más explicaciones, se pueden interpretar que "idea" se refiere a la naturaleza de las cantidades: las cuatro cantidades se agrupan dos a dos según su naturaleza.

Pero en este punto no termina el trabajo de Leonardo, sino que igualmente hace un esfuerzo importante en mostrar los fundamentos aritméticos que hacen que la regla funcione

> … y como todo esto debe ser claramente comprendido, lo explicaremos con diferentes ejemplos de precios y mercancías. Pero primero debemos mostrar cómo es que este método procede, que hay de hecho, en que en todos los negocios hay IIII números que son proporcionales: a saber, como el primero es al segundo, es el tercero al cuarto, esto es, como el número de alguna cantidad de mercancía es al número de la cantidad del precio, así cualquier otra cantidad de la misma mercancía es al número de su precio; o como cualquier cantidad de mercancía es a cualquier cantidad de la misma mercancía, también el precio de una es al precio de la otra; y si hay IIII cantidades proporcionales, el producto de la segunda por la tercera debe ser igual al producto de la primera por la cuarta, como es en las demostraciones de la aritmética o la geometría; por lo tanto si la cuarta cantidad es la única desconocida, de hecho la multiplicación de la segunda cantidad por la tercera dividida por la primera, efectivamente da como resultado la cuarta cantidad;… similarmente si la tercera cantidad es la desconocida, esta es el resultado de la primera multiplicada por la cuarta y dividida por la tercera,… (Leonardo (de Pisa), 1202/2003, p. 128)

En esta cita es importante rescatar el interés de Fibonacci por justificar teóricamente la aplicación de los procedimientos aritméticos a los fines prácticos del desempeño eficiente en los negocios. Esta justificación se da mostrando que el método funciona, en tanto que las cuatro cantidades involucradas son proporcionales entre sí (bien sea, comparando las dos parejas de cantidades homogéneas, o comparando las dos parejas de cantidades heterogéneas), lo que le permite aplicar los teoremas de las proporciones ya demostrados para la aritmética y la geometría (se refiere a los libros V y VII de los *Elementos*).

El capítulo 9 del ya citado libro de Fibonacci está dedicado a situaciones de intercambio –el capítulo se divide en tres partes, la primera dedicada al intercambio de mercancías, la segunda al cambio de monedas, y la tercera al intercambio de animales; en ellas la razón entre la cantidad desconocida y su correspondiente cantidad conocida se puede expresar como la composición de las razones (al menos dos) de parejas de cantidades correspondientes. Al igual que en el caso anterior, se describe la regla general (basada en una distribución de los cantidades dadas en una tabla de tres columnas, una para cada especie de cantidad), y luego se dan una serie de explicaciones sobre los fundamentos que garantizan la validez teórica de dicho procedimiento. Los ejemplos de aplicación inician con situaciones que involucran seis cantidades (formando tres parejas de cantidades, cada una de naturaleza distinta), una de las cuales es desconocida, y al final aumenta la cantidad de cantidades implicadas.[193] Una descripción general del procedimiento sugerido por Leonardo para el caso de tres cantidades podría intentarse así:[194] sean A, B y D tres Magnitudes, tales que la cantidad *a* en A equivale a la cantidad *b* en B, y que la cantidad *b´* en B equivale a la cantidad *d* en D. Entonces, ¿Qué cantidad en A, le corresponde a la cantidad *d´* de D? Siguiendo el procedimiento sugerido por Fibonnaci, se deben organizar los datos en una tabla como sigue:

$$\begin{array}{ccc} A & B & D \\ a & b & d' \\ \square & \ddots\ b'\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & d \end{array}$$

De donde se tiene, entonces, que la cantidad desconocida se obtiene de multiplicar los tres cantidades a, b' y d', (las tres cantidades conocidas que quedan opuestas por las diagonales sucesivas) y de dividir este producto por el producto de las otras dos cantidades conocidas (igualmente opuestas por la diagonal). La justificación para este método puede parafrasearse como sigue (igualmente en términos modernos para evitar los giros de una presentación retórica): lo primero es preguntarse: si *a* es a *b*, entonces ¿qué cantidad de A es a la cantidad *b´* en B? Sea *z* esta cantidad. Luego afirma: como la cantidad *b´* se corresponda con la cantidad *d*, entonces, la cantidad *z* se corresponde con la cantidad *d*. Por lo tanto, ahora se puede hacer la pregunta final: si la cantidad *z* es a la cantidad *d*, ¿qué cantidad de A se corresponde con la cantidad *d´*?

Simbólicamente lo que se tiene es: $\frac{a}{b}=\frac{z}{b'}$; $\frac{x}{d'}=\frac{z}{d}$; por lo tanto, $\frac{x}{d'}=\frac{z}{d}=\frac{\frac{a}{b}b'}{d}=\frac{a}{b}\frac{b'}{d}$ de donde $x=\frac{ab'd'}{bd}$. Esta secuencia de razones se puede entender mejor si se usa la siguiente distribución espacial de las cantidades:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ a & b & \\ & \ddots b' & d \\ \square & & \ddots d' \end{array}$$

Donde la cantidad auxiliar *z*, de acuerdo a las ecuaciones anteriores, quedaría localizada debajo de la cantidad *a*, pues la pregunta inicial, de alguna manera fue: ¿qué cantidad *z* se

[193] Este tipo de situaciones fueron llamados por árabes o hindúes como situaciones de 5, 7,… términos.

[194] No se hace la descripción como la muestra Leonardo en su texto, pues el estilo retórico de la misma la hace muy difícil de traducir. Sin embargo, lo que se expresa en estas líneas, y las siguientes, conservan la estructura conceptual de las formas de razonamiento seguidas por él.

corresponde con la cantidad d de tal forma se pueda determinar la cantidad de A que se corresponde con la cantidad d'? La misma línea de razonamiento se podría utilizar, pero ahora localizando la cantidad auxiliar z encima de la cantidad d: ¿qué cantidad de C se corresponde con la cantidad a de tal forma que se pueda determinar la cantidad de A que corresponde con la cantidad conocida d'? En cualquiera de los dos casos, el paso de las cantidades de A a las cantidades de C, está mediado por los pasos de A a B, y de B a C, esto es, la razón de cantidades de A a cantidades C, es la composición de dos razones, una de cantidades de A a cantidades de B, y otra de A a C. La conciencia de estos elementos teóricos detrás del método se ve en la siguiente cita, donde Leonardo explica un ejemplo sobre cambio de monedas de diferentes lugares:

> …y así uno se puede hacer hábil para encontrar el precio de cualquier cantidad de dinero como lo he demostrado por el método de la sexta proporcional; la proporción es compuesta de dos proporciones dadas. Y como cualquier proporción es compuesta de un número de proporciones, ésta es llamada una proporción de proporciones, y he demostrado claramente cómo es que esta composición se hace. Hay un número del cual resulta un segundo número por una proporción de dos números, y del segundo número uno hace un tercero por una proporción de otros dos números, y el tercer número lleva el cuarto, y así por pasos sucesivos; entonces la proporción del primer número al último se dice que es la compuesta de todas las proporciones, y efectivamente la proporción compuesta es hecha de todos los números a antecedentes a todos los números consecuentes, del primero al último. (Leonardo (de Pisa), 1202/2003, p. 205)

Se tiene, entonces, a partir del trabajo de Leonardo, ahora sí, lo que se podría llamar la versión moderna de la regla de tres: una forma de representación espacial de las cantidades, organizadas en dos columnas según la naturaleza de las cantidades, con un algoritmo igual al que conocemos hoy en día, basado en dicha organización espacial, pero a la vez, el reconocimiento de que este algoritmo funciona bien en todos los casos posibles en virtud de que las cuatro cantidades involucradas son proporcionales entre sí. Sin embargo, aún no se puede hablar de proporcionalidad en el sentido moderno. La regla de tres, con toda la justificación teórica que ahora posee, precisamente tiene el poder de permitir el tratamiento de situaciones de proporcionalidad directa, sin la necesidad de reconocer de manera explícita la función lineal que modela este tipo de situaciones, en tanto el reconocimiento de la proporción entre las cuatro cantidades permite operar con ellas sin que sea necesario hacer explicita la constante de proporcionalidad, la cual dicho sea de paso, permite precisamente el proceso contrario: tratar situaciones de proporcionalidad, sin que sea necesario reconocer explícitamente la proporción entre las cantidades involucradas (como fue el caso de los babilonios).

Nótese entonces que en los casos analizados, la regla de tres es una forma de tratar con problemas de proporcionalidad directa, cuando las cantidades involucradas son homogéneas. La razón constante que define las tasas de intercambio de cantidades de un tipo en cantidades del otro, es una especie de transformador lineal que, aplicado sobre una cantidad produce la otra. En las técnicas a partir de las cuales se resolvían este tipo de problemas en la antigua China o Babilonia, esta función de la razón como regla de intercambio, como transformador lineal era más explícita que en las versiones mnemotécnicas de la regla de tres que heredamos de los hindúes. Pero esto no quiere decir que en la regla de tres no esté como fondo conceptual la razón como transformador (baste para ello, ver las extensas explicaciones que da Fibonacci mostrando que el soporte conceptual del método de la regla de tres está en la teoría de razones y proporciones de los libros V y VII de los *Elementos* de Euclides).

4.5 A manera de síntesis: razones, proporciones, proporcionalidad, entonces ¿qué son?

Del anterior recorrido zigzagueante, saltando de una época a otra, de una cultura a otra, dejando por fuera muchos momentos, lugares, pueblos, historias, etc., se pueden tomar una buena cantidad de lecciones, en particular, lecciones para la didáctica de las matemáticas, que, desde una mirada histórica, marcan trazas epistémicas que muestran los objetos de conocimiento, no en una evolución condicionada por la estructura lógica de la disciplina, sino como emergentes de ciertas prácticas históricamente situadas. Estas trazas muestran multiplicidad de fuentes fenomenológicas desde las cuales razones, proporciones y proporcionalidad emergen de las prácticas diversas de las personas, con diversidad de sentidos y significados, pero igualmente, en respuesta a la solución de problemas similares, lo que no implicó soluciones idénticas.

Entonces se puede afirmar que la idea de razón ha estado presente desde la antigüedad, con otros nombres (quizás sin un nombre), en tanto responde a una pregunta crucial; ¿cuánto es un cantidad comparada con otra (en principio, de la misma naturaleza) tomada como referencia? La herencia griega nos enseñó a llamar razones (que no números) a esas entidades que respondían esta pregunta para las cantidades; pero no fue ese el caso en otras culturas, en donde las fracciones de unidad fueron la respuesta, y estas eran reconocidas como números (que no necesariamente la idea moderna de número de la cultura occidental). Para occidente, tener las razones como números implicó una profunda reorganización del sistema de prácticas matemáticas asociadas a la cantidad, al número.

Pero la idea de razón también estuvo ligada al intercambio de bienes y servicios, en cuyo caso la razón expresaba una rata constante de intercambio con respecto a la conservación de un valor fijado para cada bien o servicio. En estos casos la razón ya no compara dos cantidades sino que en realidad compara familias de cantidades, generando una especie de invariante a un fenómeno dado: la razón establece una regla de equivalencia entre los valores. Pero igualmente la idea de razón estuvo presente en otro tipo de situaciones, ahora en relación con la distribución, de acuerdo a una determinada ley, de una riqueza, una deuda, los alimentos, etc. Es en este contexto donde surge la proporción, de alguna manera, como un ideal de distribución de justicia: dar a cada cual lo que le toca, en función de la regla establecida para tal fin.

Finalmente, la idea de razón también se reconoce en las operaciones que permite sobre las cantidades a las que se aplica, y en las formas de representación del resultado de esta operación. En todos los casos estudiados, en última instancia, la razón se establece a partir de alguna forma de división y, una vez establecida, funge como una especie de operador, que, aplicado sobre una cantidad, produce la otra. En relación con la notación, como emergente de un proceso de división, la razón remite de una u otra forma a una representación de la cantidad no entera, proceso solucionado en algunos momentos a partir del sistema de numeración existente, o a partir de la invención de formas especiales de notación, como es el caso de las fracciones tal como las conocemos hoy en día. Y todo esto hace que, finalmente, la idea de razón sea objetivada igualmente como número, incluso a costa del olvido de su origen en la acción práctica desde la cual emerge.

5 *Prácticas matemáticas en el aprendizaje de la multiplicación: la noción de razón y de linealidad en el foco*

Este capítulo presenta el análisis del sistema de prácticas de los estudiantes del grado 3º, en la clase de matemáticas, en relación con los objetos de conocimiento *razón*, *proporción y proporcionalidad*. La primera sección expone unas notas preliminares sobre ciertas nociones básicas para este capítulo y el siguiente. Las dos secciones siguientes exponen una descripción general de las características de las tareas propuestas a los estudiantes, mientras que las restantes analizan la actividad matemática que estas tareas les permiten.

5.1 *A manera de preámbulo: sobre las nociones de cantidad y magnitud*

Si bien en el trabajo de los estudiantes en el aula de clase *cantidad* o *magnitud* fueron usadas sin hacer de ellas un objeto de estudio explícito, puede decirse que cantidades o magnitudes, y en particular, los procesos de cuantificación de ambas (contar o medir) estaban en la base del trabajo realizado, para lo cual fue necesario apoyarse en las intuiciones que el conocimiento cotidiano brinda sobre este par de nociones.[195]

Dada esta importancia, el desarrollo del trabajo analítico de las prácticas matemáticas (tanto de los estudiantes en el aula de clase, como de las estudiadas en el componente histórico-epistemológico) mostró al equipo de investigación la necesidad de profundizar en cuestiones de orden epistemológico relacionadas con nociones tales como cantidad, magnitud, medida de cantidades, etc., con el fin de tener una mejor comprensión de dichas prácticas.

[195] Como se hará notar en su momento, no tener las cantidades o magnitudes como un objeto de estudio explícito en la clase generó formas de presentación de las tareas, o intervenciones en el aula de clase, que podrían constituirse en fuente de comprensiones equivocadas en los alumnos sobre estos objetos de conocimiento.

La ideas que se presentan a continuación fueron elaboradas en el desarrollo del trabajo investigativo, en el diálogo continuo entre los aspectos histórico-epistemológicos de las prácticas matemáticas relacionadas con las razones, proporciones y proporcionalidad, y las prácticas matemáticas con respecto a estos mismos objetos de conocimiento en contextos escolares. Sin embargo, estas nociones se presentan en este momento como una especie de marco conceptual previo al análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes con el fin de brindar al lector una mejor comprensión de los análisis, toda vez que las mismas fueron incorporadas en la estructura analítica realizada.

5.1.1 La noción de cantidad y de sistema de cantidades

Siguiendo la idea aristotélica de *atributo* (que él llamaría accidental a la sustancia), y su diferenciación de las categorías "cuál" y "cuánto", que nosotros llamamos "cualidad" y "cantidad", se puede decir que una atribución de cantidad es aquella que es realizada por un agente (noético-semiótico) sobre un fenómeno,[196] y que permite organizar diferentes estados del mismo según que la atribución sea objeto de aumento o disminución, de comparación (por diferencia) o de igualación (al agregar o quitar). Así por ejemplo, al determinar cuántos objetos hay en una colección de elementos discretos se hace una atribución de cantidad sobre una característica de la colección, que podemos llamar la *Numerosidad* o *Cardinalidad.* Pero a esta misma colección se le pueden hacer otros tipos de atribución, por ejemplo, cuánto pesa, o cuál es su volumen, cuál es su precio, etc. Es más, a muchas colecciones se les pueden hacer idénticas atribuciones y compararlas, ordenarlas, agruparlas, etc., de acuerdo con cada una de dichas atribuciones. Así, en general, sobre un mismo evento o fenómeno se pueden hacer varias atribuciones de cantidad, pero al mismo tiempo, dada una determinada colección de eventos o fenómenos (o una transformación en el tiempo y el espacio de un evento o fenómeno) una atribución de cantidad homogeniza todas esas manifestaciones del evento en relación con tal atribución. Nuestro lenguaje dispone de muchas palabras que cristalizan esas homogenizaciones que las atribuciones de cantidad hacen sobre eventos o fenómenos: *largura*, *anchura*, *altura*, *pesadez*, *rapidez*

[196] Se entenderá por fenómeno a un objeto, evento, sucesión de eventos u objetos –indexados de acuerdo con la ocurrencia de los mismos en función de condiciones espacio-temporales– sobre los cuales se puedan realizar atribuciones de cualidad o cantidad. No se entiende entonces fenómeno en la extensión filosófica del término, sino más bien en un sentido restringido como aquello que puede ser observado, pensado, analizado, de acuerdo a sus formas de atribución (de cualidad o cantidad).

(*velocidad*), etc. Cada una de estas expresiones condensa el conjunto de acciones y sentidos necesarios para reconocer cada forma de atribución de cantidad en un evento particular, lo que se expresa, por ejemplo, en "la *longitud* de…, el *largo* de…", "la *rapidez* de…", etc.

Así pues, una atribución de cantidad se hace entonces sobre la percepción de un continuo de –o al menos de una escala discreta de– posibilidades en esa determinada atribución (por ejemplo, la "largura" de las cosas). Es más, en ese continuo de posibilidades se debería estar en capacidad de definir la atribución opuesta, por ejemplo, en una atribución como la "altura" se debe oponer lo "alto" y lo "bajo" (o aunque suene raro, a la "altura" se opone la "bajura"). Esto implica entonces, en el sentido amplio de la palabra, que lo fundamental en una determinada atribución para que sea llamada *atribución de cantidad* es la posibilidad del ordenamiento de las manifestaciones de dicha atribución de acuerdo con un determinado criterio objetivo. Por lo anterior, en una atribución de cantidad no siempre es necesaria la posibilidad de medición, ni tampoco la definición de una operación aditiva.[197] Esto también implica percibir que la cantidad no necesariamente requiere del número,[198] aunque el recurso al número, a través de la medida, o del conteo, amplía el campo de experiencias del individuo,[199] tanto con las cantidades mismas, como con los números y las relaciones entre los números.

De acuerdo con lo anterior, dadas dos instancias posibles de una determinada atribución de cantidad se puede establecer cuándo la una difiere de la otra, en cuánto difieren, en cuánto la una aumenta o disminuye con respecto a la otra, y por ende, cuando no se perciben las diferencias, establecer cuándo las dos atribuciones de cantidad son iguales (y por lo tanto los dos estados del evento serían equivalentes desde el punto de esta atribución de cantidad). Esto implica, entonces, que en toda atribución de cantidad es posible definir una relación de orden a partir de la cual se determina cuándo, desde el punto de vista de dicha la atribución, dos eventos o fenómenos son equivalentes o no, cuándo uno

[197] Es el caso de algunas magnitudes físicas como la densidad, en donde la suma no puede hacerse, o al menos no en el sentido usual.

[198] Esta percepción de la cantidad, incluso en ausencia del número, es la que se puede ver en el tratamiento dado a las magnitudes en el libro V de *Los Elementos* de Euclides, en el cual, conjuntamente con el libro *Data* de Euclides, muestra la comprensión de las magnitudes en esa posibilidad de homogenización de una cierta forma de atribución sobre algo. Basta para ello, por ejemplo, ver las primeras definiciones de "ser dado en magnitud" que se dan en el libro *Data*. Para detalles ver capítulo 4.

[199] En un sentido amplio se trata de un refinamiento en las prácticas, como por ejemplo, en el caso de ajustar una tapa a una ranura: se puede lograr sin utilizar ningún número, trabajando por ensayo y error, cortando cada vez una porción delgada en un extremo de la tabla con la que se va a tapar el agujero, pero el recurso a ciertas cantidades numéricas puede hacer más eficiente el proceso.

es mayor o menor que el otro. La igualdad en la atribución de cantidad permite definir clases de eventos o fenómenos que son equivalentes desde el punto de vista de la atribución dada. Dicho de otra manera, una *cantidad* homogeniza bajo una misma clase un conjunto de eventos o fenómenos que son equivalentes desde el punto de vista del agente que hace la atribución.

Se entiende un *sistema de cantidades*, en su forma más general posible, al conjunto de *cantidades* con la estructura mínima posible: una estructura relacional de orden. Esto implica que para definir un sistema de cantidades no es necesario que el conjunto de *cantidades* tenga una operación aditiva.[200] El sistema de cantidades con su estructura relacional de orden (y otras relaciones y operaciones, si las hay), define una *Magnitud*. De esta manera se propone una noción de *Magnitud* más general que la que usualmente se tiene en matemáticas, pues desde estas últimas se exige que sobre el conjunto de cantidades se pueda definir un álgebra para que tal sistema de cantidades sea una *Magnitud*, mientras que la noción aquí propuesta solo exige una estructura relacional de orden para que el sistema de cantidades pueda definir una *Magnitud*.

Nótese que hasta el momento la palabra magnitud se ha escrito a veces con la "m" en mayúscula y otras veces en minúscula. En adelante *Magnitud* (con "M" mayúscula) se usará para referir de manera general al sistema de cantidades con su estructura, el cual es el resultado de la atribución de cantidad, el punto de vista, de un agente sobre un evento o fenómeno. Así por ejemplo, *Longitud*, *Peso*, *Densidad* se refieren a formas de atribución sobre un evento o fenómeno, que en cada caso es una *Magnitud*. De manera similar, se usará *cantidad-de-magnitud* (o simplemente *cantidad* o *magnitud* –con "m" en minúscula, cuando no haya lugar a confusión) para referir una instanciación particular de una *Magnitud*, esto es, para referir a una cantidad específica de un *sistema de cantidades* que es una *Magnitud*.[201]

[200] Esta noción de *sistema de cantidades*, siguiendo a Vasco (1994h, 2011, 2013), es más general que la definida por Steiner (1969), quien exige para un *sistema de cantidades* que el conjunto de *cantidades* tenga una operación aditiva, pero si se hace esta exigencia, entonces la densidad o la dureza no podrían ser identificadas como cantidades. Otros autores han usado conceptos similares intentando buscar una noción más general que la noción matemática de magnitud, como por ejemplo Vergnaud (1991), al hablar de "*espacios de medida*", en un intento de abarcar no solo los aspectos matemáticos, sino también los cognitivos y didácticos, pero de manera similar a Steiner, al introducir la noción de medida, introduce la necesidad de la aditividad entre las cantidades del conjunto con los que se trata.

[201] Siguiendo a Federici (2001), proponemos que el esquema verbal que refiere a una cantidad anumérica es "la *magnitud* de" o "la *m* de", mientras que si se omite el "de", queda el esquema verbal que refiere a la *Magnitud* como *sistema de cantidades*, la cual es también anumérica, que escribiremos con mayúscula en cursivas: "la *Magnitud*", o "la *M*". Podría omitirse la mayúscula, pero puede ayudar a recordar que "la *longitud* de" –con minúscula– refiere a una cantidad específica del sistema de cantidades llamado "la

Así por ejemplo, la *cantidad* de fichas en una determinada colección específica es un caso particular a una magnitud que podemos llamar *Numerosidad*, o por ejemplo, la *longitud* de, o el *largo* de una cinta (pues ambas expresiones denotan una cantidad específica todavía anumérica), atribuida a esa cinta, pertenece al sistema de cantidades que llamamos "la Magnitud *Longitud*" o simplemente "la *Longitud*".

Las anteriores nociones de *cantidad*, de *sistema de cantidades* y de *Magnitud* son útiles pues, como se deja entrever en el párrafo anterior, la noción de *Magnitud* más restrictiva comúnmente usada en matemáticas (ver por ejemplo Whitney, 1968) no contemplaría, como tal, sistemas de cantidades desde una perspectiva física, como por ejemplo la *Dureza* en la escala de Moss, ni las cantidades numéricas (como sistemas numéricos), o incluso, otros sistemas que tienen valor social (como por ejemplo, el dinero, la utilidad, la belleza, que podríamos llamar cantidades o magnitudes sociales). Igualmente, permiten tratar de forma genérica con eventos o fenómenos sin tener que hacer las distinciones entre magnitudes físicas, matemáticas o sociales. Además, facilita hablar de razones sin tener que entrar a distinguir si la razón se define entre números, Magnitudes (intensivas o extensivas, escalares o vectoriales, matemáticas o sociales) o incluso, sin la necesidad del recurso al número.

En suma, se debe distinguir:

1. La *atribución de cantidad* como una acción noético-semiótica todavía no numérica que fija el punto de vista de un agente sobre un evento o fenómeno, como por ejemplo, la atribución de área a la cara anterior de esta página (que no requiere de la medida en tanto proceso posterior).
2. La *Magnitud* como un *sistema de cantidades* con su sustrato, su dinámica y su estructura, al menos ordinal.
3. La *cantidad* considerada como una clase de equivalencia de objetos o fenómenos constituida desde la atribución dada, todavía anumérica, como *el área de* todas las superficies de cualquier forma que sean equivalentes en área a esta cara de la página.

Estas nociones de *cantidad*, de *sistema de cantidades* y de *Magnitud*,[202] como objetos

Longitud", con mayúscula y sin "de".

[202] Por supuesto, ni esta terminología de *clases de equivalencia*, de *sistema de cantidades*, etc., ni las sutilezas de la magnitud con mayúscula o minúscula, fueron usadas con los alumnos en las aulas de clase, sino que estos conceptos son usados como lente para comprender las acciones, los gestos, los procedimientos, los objetos, los conceptos etc., presentes en la actividad matemática de los estudiantes.

constituidos sobre una forma de atribución de cantidad, permiten matematizar los procesos de percepción, representación, transformación de la cantidad, así como sus procesos de variación, cuando se estudian diferentes estados de un determinado evento o fenómeno, o una colección de estados posibles de un evento o fenómeno determinado.

5.1.2 Medida de cantidades

Al entender la noción de *Magnitud* como una forma generalizada de tratar las atribuciones de cantidad que un agente hace sobre un evento o fenómeno, la noción de medición requiere de algunas explicaciones:

- La atribución de cantidad que define una *Magnitud* y sus respectivas *cantidades* no requieren de la medida, la cual es un proceso posterior que busca especificar numéricamente una determinada *cantidad*, por ejemplo, medir el área de una hoja multiplicando las longitudes de sus lados. Además, la medida no se afirma sobre la *Magnitud* como tal, sino sobre una instancia particular de tal atribución, que en general, llamaremos *cantidad-de-magnitud* (por ejemplo, *cantidad-de-longitud*, *cantidad-de-área*, etc.), o simplemente, *cantidad* (cuando no se preste a confusión).[203] Así entonces, no se mide la magnitud *Longitud*, sino la c*antidad-de-longitud* de… o simplemente la *longitud* de.
- En su forma más general, el proceso de medir implica que dadas dos *cantidades* se determine la razón entre ellas, es decir, definir *cuántas veces está* contenida la cantidad menor en la mayor, o definir *cuánto es* la cantidad menor de la mayor.[204] En este sentido, dadas dos *cantidades*, el proceso de medir implica tomar una de las *cantidades* como unidad, y determinar la razón que la otra *cantidad* tiene con esa que se ha tomado como unidad.
- El resultado del proceso de medición, que llamamos "la medida", puede ser expresado por medio de números o no. El resultado puede enunciarse sin números ni unidades, ni

[203] Una cosa es *el área de* todas las superficies de cualquier forma que sean equivalentes en área a esta cara de la página, esto es la *cantidad-de-área*, y otra la *medida* de esa cantidad que es un resultado numérico en un sistema métrico específico con un rótulo que refiere a una unidad de ese sistema métrico dado; por ejemplo, "93.5 pulgadas cuadradas".

[204] Nótese que no se dice comparar una cantidad tomando otra como unidad, pues existen diferentes formas de comparar que no necesariamente llevan a la razón entre dos cantidades. Por ejemplo, la comparación entre dos cantidades de longitud puede llevar a la diferencia entre la menor y la mayor, no a la razón. Los niños prefieren esta comparación (aditiva) a la que los adultos queremos enseñarles que es la multiplicativa. Así entonces, cuando les decimos que "medir es comparar" ayudamos a confundirlos.

siquiera haciendo explícita la Magnitud de que se trata ni la cantidad que sirve como unidad de medida, por estar suficientemente claras en el contexto de la enunciación: "este balón es más grande de lo que me cabe en esta caja", o "este redondelito resultó demasiado pequeño para tapar este agujero", o "a este listón le sobra un poco por este lado". El resultado de ese proceso de medición lleva a la determinación de una cantidad específica de una Magnitud como punto de vista de atribución cuantitativa por parte del agente: el volumen de este balón, el área de este disco, o la longitud de este listón, pero esa cantidad ya bien determinada todavía no se enunció con una razón o con un número específico. En estos casos, la medida como resultado del proceso de medición se enuncia sin explicitar números ni razones, y la llamamos "la medida no numérica" o "anumérica" de esa cantidad específica.

- Si se explicita la Magnitud y la cantidad que sirve como unidad de medida, el resultado o *medida relativa* a esa cantidad seleccionada suele darse de dos maneras: la medida es *numérica* si se toma una única cantidad como unidad de un sistema métrico ya estandarizado a la que se le asigna el número 1, acompañado del nombre o abreviatura de la unidad de ese sistema (como un metro, una pulgada), y las demás cantidades se miden con respecto a esa misma unidad. En este caso, el resultado es una razón homogénea que expresa la medida relativa a esa unidad por medio de un número único (racional o real) para cada cantidad medida con respecto a esa unidad del sistema métrico seleccionado. Esa razón numérica acompañada del rótulo que indica la unidad seleccionada se dice entonces "la medida en ese sistema" de la cantidad que se mide. Se suele considerar como "medida absoluta", pero claramente es relativa a la unidad de medida del sistema respectivo. Cuando en una comunidad se usa un solo sistema con una única unidad para cada Magnitud, se suele hablar simplemente de "la medida" de esa cantidad como si fuera absoluta y única.
- Si por el contrario, cuando en el proceso de medición de un conjunto de cantidades de la misma Magnitud cualquier cantidad se puede tomar como unidad de medida para medir cualquiera otra cantidad de la misma naturaleza, entonces la razón que expresa la medida depende de ambos componentes de la pareja de cantidades tomadas en consideración y, por ende, la medida de una misma cantidad no es absoluta, sino relativa a la cantidad tomada como unidad (que puede ser la más grande o la más pequeña de las dos y en ese sentido no es única), y por ende ya no es relativa a ningún sistema

métrico estandarizado. Esta razón que expresa la medida relativa a la unidad seleccionada *ad hoc* para el proceso de medición –sin atribuirle explícitamente el número 1 ni agregarle un rótulo que indique una unidad estandarizada– en el sentido euclidiano "no es un número". Es más, en ese sentido euclidiano, una razón homogénea o heterogénea no es necesariamente una cantidad numérica (como por ejemplo "el doble", o "la mitad", o "la media aritmética", o "la media geométrica", o "la razón áurea" o "media y extrema razón", o "la razón de la diagonal al lado", etc.). Es más, esta medida relativa de esa cantidad específica puede no necesitar de un número racional o real para ser expresada, y los estudiantes, como Pitágoras o Euclides, tampoco parecen considerar al doble o a la mitad, al triple o a la tercera parte, etc., como números. En este segundo caso, la razón todavía no considerada como número racional o real se puede llamar "la medida relativa prenumérica" de una de las cantidades con respecto a la que se tomó como unidad de medida. Si se tratara de refinar aún más la terminología, esa medida prenumérica sería "anumérica" si no se consideraran las razones como números, y "numérica" en caso contrario. Como ya solemos tomar las razones como números reales, ahora la medida prenumérica nos parece a los adultos siempre numérica, pero como lo veremos en detalle más adelante (en especial la sección 6.2), en la práctica de aprender a medir no surge así.

5.2 Cómo enseñar la multiplicación: una mirada de la propuesta institucional

Una estrategia muy común para introducir el estudio de la multiplicación en los primeros años de la Educación Básica (por lo general finalizando el grado 2, o iniciando el grado 3) es la de mostrar la multiplicación como una forma de abreviar la suma, cuando los sumandos son todos iguales.

Este tipo de mirada sobre la multiplicación tiene una ventaja aparente al mostrar una línea de continuidad desde la suma hacia la multiplicación, pero en el sentido estricto de la palabra, los eventos o fenómenos en donde se suma varias veces una misma cantidad (como

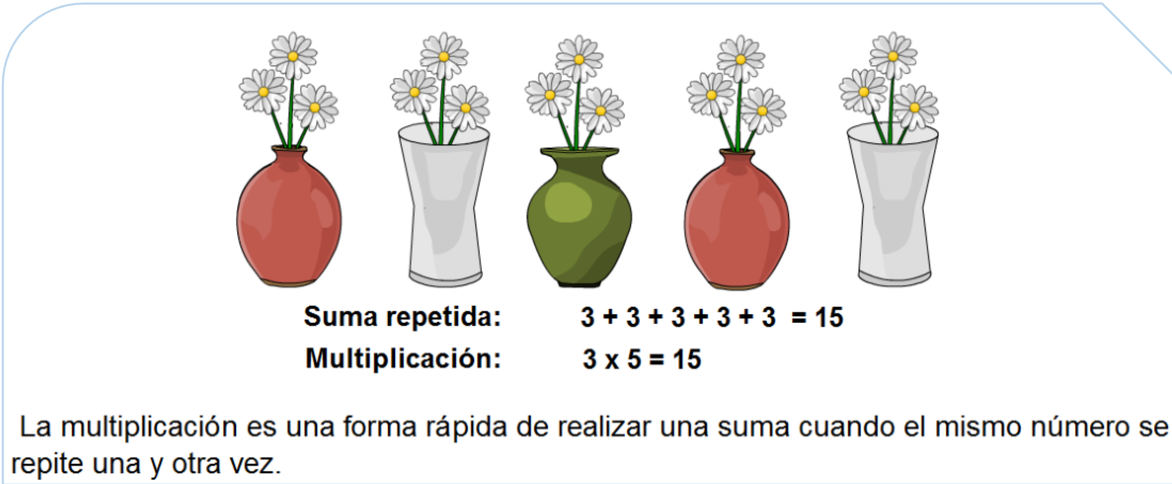


Figura 15. *Imagen típica de una lección introductoria para la enseñanza de la multiplicación (Tomada del sitio: http://www.wikisaber.es/Contenidos/LObjects/multiplication/index.html).*

se muestra en la figura 15, en donde la cantidad 3 flores se repite 5 veces) al no presentar explícitamente los dos sistemas de cantidades (cantidad de flores y cantidad de floreros), ni la razón constante que permite poner en correspondencia cantidades de un sistema con cantidades del otro (a saber, tres-flores-por-cada-florero), deja escondidos elementos claves que permiten relacionar este tipo de situaciones con los casos más simples de proporcionalidad directa,[205] y por lo tanto, no permiten una buena comprensión de las relaciones en toda situación multiplicativa. Todo lo anterior, sin entrar a considerar los casos en los que la multiplicación no admite la interpretación de una suma de sumandos iguales, como por ejemplo, el cálculo de áreas de figuras planas a partir de multiplicar dos medidas lineales,[206] o cuando las cantidades multiplicadas son fracciones menores que la unidad.

Esta aproximación que se hace en la escuela a la multiplicación a partir de la suma de sumandos iguales no es la más apropiada,[207] no solo porque es limitada para interpretar los

[205] Vergnaud (1988, 1994, 2009) expresa que la multiplicación usual es el caso más simple de la proporcionalidad simple directa.

[206] En ocasiones este cálculo áreas de figuras planas se hace cuadriculando la superficie de la figura, contando cuántos de esos cuadrados unidad hay en un lado, y sumando luego esta cantidad tantas veces como cuadrados hay en otro lado. Si bien procedimientos de este tipo son expresiones de una suma de sumandos iguales, se debe destacar que en el sentido estricto de la palabra, no se multiplicaron las dos medidas lineales, sino que se cambia el problema original por otro, que consiste en multiplicar una cantidad de área (la cantidad de cuadrados unidad en uno de los lado) por un número sin unidades, que es el que representa las veces que se repite dicha cantidad de área. Así entonces, cuando el área es vista como producto de dos medidas lineales, esta multiplicación no admite interpretación como suma de sumandos iguales.

[207] Es importante aclarar en este punto que la aproximación a la multiplicación como suma de sumandos iguales tiene un trasfondo en la axiomática de Peano, en donde la multiplicación $x \cdot y$ es definida en

tipos de tarea a los que se deben enfrentar los estudiantes, sino porque se circunscribe a una forma de pensamiento aditivo (acumulaciones sucesivas en una sola cantidad), alejándola de las formas de razonamiento típicamente multiplicativas (variación conjunta de dos o más cantidades), pues como se mostró en el capítulo 1 (en especial la sección 1.2.2), los eventos o fenómenos que generan problemas multiplicativos son aquellos en donde existen al menos dos cantidades variables, para las cuales, la variación en una de ellas condiciona el proceso de variación en la otra. Incluso, en este tipo de situaciones, al ver la multiplicación como una suma abreviada se centra la atención en una sola de las cantidades, y por ende en su variación (acumulación aditiva), y se deja implícita la otra cantidad al igual que la variación conjunta de la primera con respecto a la segunda.

Con críticas como las anteriores y teniendo en cuenta que el conocimiento de que la multiplicación forma parte de un constructo mucho más amplio, el de las estructuras multiplicativas, el grupo de docentes de la institución educativa[208] pretende una organización de los procesos de enseñanza de la multiplicación desde la perspectiva del isomorfismo de medidas, como una alternativa para superar las problemáticas antes enunciadas.

Así entonces, en la propuesta pedagógica para el grado 3, en el plan de área se destaca un eje llamado "estructuras multiplicativas", que se desarrolla a lo largo del año escolar a partir de líneas temáticas como las siguientes (ver anexo 5, archivos Planeacion_Anual_Grado_3(e) y Planeacion_Anual_Grado_3(i)):[209]

forma recursiva como: (1) $x \cdot 1 = x$ y (2) $x \cdot \tilde{y} = x \cdot y + x$ (donde x, y son números naturales y $\tilde{y} = y + 1$). Esta definición, en última instancia, reduce la multiplicación a una suma donde x se repite y veces como sumando. Sin embargo, esta interpretación de la multiplicación como abreviación de una suma de sumandos iguales, derivada de un aproximación formalizada con base en la axiomática de Peano, no da cuenta de las formas de razonamiento típicamente multiplicativas presentes en los tipos de problemas que se resuelven a través de multiplicaciones y divisiones, en particular, de aquellos que implican situaciones de proporcionalidad directa como es el caso estudiado en este capítulo, en donde se pone en evidencia que la multiplicación es la coordinación de dos sumas iteradas.

208 Como se manifestó en el capítulo 3, se trató de una institución educativa de la ciudad de Cali.

209 Los documentos presentados en el anexo 5 (documentos de planeación institucional), al igual que los presentados en el anexo 6 y 7 (las tareas propuestas a los estudiantes) son las versiones elaboradas en la institución al finalizar el año lectivo 2011, momento en el que se concluye el trabajo de acompañamiento a la institución por parte del investigador. Es importante resaltar este aspecto pues estos documentos institucionales, desde el año en el que se inició el acompañamiento (2008) sufrieron transformaciones importantes, tanto en contenido como en estructura, debido a la reflexión continua que hacen los profesores de la institución sobre su actividad educativa, y también al trabajo de acompañamiento del investigador mientras se realizaba el trabajo de campo. No es el objetivo de esta investigación analizar estas transformaciones institucionales, pero si se requiere reportar que estos cambios se dieron, y por ende, llamar la atención sobre la necesidad de hacer investigación pedagógica que devele los procesos de transformación del docente (y de la institución) en el marco de su actividad de enseñanza y los

- Diferentes algoritmos para la multiplicación: egipcio, ruso, celosía (árabe), tradicional;
- Relaciones multiplicativas: doble de…, la mitad de… (*ídem*, cuádruple de…, cuarta parte de…; óctuple de…, octava parte de…; etc.); triple de…, la tercera parte de… (*ídem*, séxtuple de…, la sexta parte de…; 9 veces…, la novena parte de…; etc.), entre otras;
- Problemas multiplicativos: cuarta proporcional y proporcionalidad directa;
- Tablas de multiplicar.

Estas líneas temáticas, que se desarrollan paralelamente a lo largo del año lectivo, presentan de hecho cuestiones interesantes en lo que tiene que ver con los primeros aprendizajes de la multiplicación. En primer lugar, la aproximación a las relaciones multiplicativas pone en simultáneo parejas de razones (relaciones parte-todo) de la forma *n-veces de…* y *n-ésima parte de…*, y esto permite trabajar al tiempo tanto con las relaciones directas como con las inversas, relacionando la razón *n-veces* (razones en las que la cantidad mayor es un número exacto de veces la cantidad menor) con la razón *n-ésima parte de* (cuando la cantidad menor es una parte alícuota de la mayor). Dicho de otra manera, la multiplicación se aprende en simultáneo con la división.

Además, estas parejas de razones son organizadas a través de familias de cantidades que conservan la regularidad de que al ser ordenadas de mayor a menor, cada pareja de cantidades consecutivas es una de otra el *doble de…*, o la *mitad de…*; el *triple de…*, o el *tercio de…*; etc. Esta regularidad en las cantidades genera entonces familias de parejas de razones de la forma 2^n *veces…* $\frac{1}{2^n}$ *parte de…*; o de la forma $3n$ *veces…*, $\frac{1}{3n}$ *parte de…; etc.* Las regularidades que se identifican entre estas familias de cantidades y de parejas de razones son utilizadas como una estrategia para el aprendizaje de las tablas de multiplicar, de tal forma que éste sea resultado de la aplicación sucesiva de relaciones entre números (razones). Esta apuesta por las familias de razones, como se verá en el capítulo siguiente, es fundamental para los primeros aprendizajes de los números racionales.

Además, el estudio de estas familias de razones es la base para el trabajo con las multiplicaciones; así por ejemplo, multiplicar por 2 tiene como base la razón *doble de…*, multiplicar por 3, la razón *triple de…*, y así sucesivamente. De esta manera la institución

mecanismos y posibilidades para dicho cambio.

busca una base conceptual para la multiplicación a partir de la noción de razón y, como se verá más adelante, esta apuesta institucional da una forma específica a la actividad matemática que desarrollan los estudiantes.

En cuanto a las formas de realizar los cálculos, es interesante que no se presente un método único de cálculo para efectuar multiplicaciones (de hecho se estudian diferentes tipos de algoritmos para hacer la multiplicación, tales como el egipcio, ruso, etc.) lo que entrega a los estudiantes diferentes posibilidades de acción al resolver los problemas que les proponen las tareas. Además, esta parte dedicada al cálculo busca favorecer de manera sistemática el uso de multiplicaciones ya conocidas para calcular nuevas multiplicaciones, haciendo uso de las relaciones de dobles, triples, mitades, tercios, etc. Se echa de menos, eso sí, que no se haga explícito el uso de la calculadora como otra forma de realizar los cálculos cuando se requiere hacer una multiplicación.

Finalmente se plantean los problemas multiplicativos como si fueran problemas de proporcionalidad simple directa. Este trabajo se introdujo a través de una adaptación de la propuesta de los minicomputadores de Papy[210] que realizaron los profesores de la institución: a los niños se les presenta una tabla con cuatro casillas, donde se dan tres valores (el valor de la primera posición es uno), y se debe encontrar un cuarto valor desconocido. Dos a dos las cantidades son de la misma naturaleza y se organizan en la tabla de tal forma cada pareja ocupa una columna diferente. Esquemáticamente esto les permite trabajar situaciones de la forma

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & a \\ n & \rightarrow & ? \end{array}$$

para la multiplicación, o de la forma

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & ? \\ n & \rightarrow & n \times a \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & a \\ ? & \rightarrow & n \times a \end{array}$$

para el caso de la división. El trabajo se desarrolla de manera tal que en ocasiones se da la representación gráfica, para que el estudiante elabore el enunciado verbal del

[210] Una especie de ábaco plano, con cuatro casillas, diseñado por Georges Papy en los años 50, usado para el aprendizaje de la numeración y el cálculo numérico (fundamentalmente en el sistema binario). La adaptación realizada en la institución se orientó hacia la representación de las cuatro cantidades implicadas en una situación multiplicativa de isomorfismo de medidas, sin tomar en consideración los cambios de unidad que implicaban los valores posicionales de cada casilla en la propuesta original de Papy. En el sentido estricto de la palabra, al no considerar el valor posicional de las casillas se deja de lado la propuesta original, y por tanto, bien podría dársele otro nombre a esta adaptación, pero aquí conservamos ese nombre en tanto era el que se le daba en la institución.

problema y realice el cálculo respectivo, o dado el enunciado verbal, el estudiante debe realizar la representación gráfica y solucionar el problema.[211] De lo dicho anteriormente no es difícil inferir la influencia del trabajo de Vergnaud sobre las estructuras multiplicativas (y de Duval sobre las representaciones semióticas) en esta forma de organización institucional del trabajo de los escolares.

Puede decirse que esta forma de organizar el estudio de las relaciones multiplicativas tiene un fundamento epistemológico interesante, pues, de un lado, pone la idea de razón como base para la construcción de tales tipos de relaciones (ver capítulo anterior, en especial la sección 4.2) y, de otro, organiza los procesos de estudio de la multiplicación y la división como parte del campo conceptual de las estructuras multiplicativas (ver capítulo 1). De esta manera el estudio de ciertos objetos de conocimiento tales como la razón, el número racional, la proporción y la proporcionalidad se realiza siguiendo una línea que toma como base la linealidad, y no tanto una teoría explícita de las razones y proporciones. Además, las operaciones multiplicación y división son estudiadas en contextos que las muestran una como inversa de la otra, y separando los aspectos relativos al cálculo de los que son propios de las relaciones multiplicativas de base, presentes en los objetos de conocimiento antes enunciados.

Adicionalmente, se ponen en juego diferentes formas de representación (verbal, gráfica, simbólica –fracción y notación decimal) y se favorece el desarrollo de diferentes tipos de técnicas de cálculo (diferentes algoritmos, uso de relaciones numéricas, memorización de hechos numéricos), lo que genera entonces ambientes ricos para la actividad matemática de los alumnos en donde se favorecen la búsqueda de regularidades, la formulación y validación de hipótesis, la comparación de procedimientos, etc.

5.3 Sobre las tareas propuestas a los estudiantes

Cómo se expresó antes (ver sección 3.2), las tareas son un dispositivo para orientar las acciones intencionadas de maestros y estudiantes (orientación hacia el objeto de estudio) a través del acto educativo. Las tareas son, desde el punto de vista de la actividad del maestro, uno de los resultados visibles de su actividad, y como tales reflejan los supuestos institucionales (epistemológicos, cognitivos, didácticos) en relación con la enseñanza y el

[211] Ver por ejemplo, en el anexo 6, las tareas sobre formulación de problemas multiplicativos.

aprendizaje de las matemáticas. De otro lado, las tareas son los escenarios sobre los cuales se desarrolla la actividad matemática de los estudiantes y cumplen la función de orientar tal actividad. Es en estos escenarios de actuación del estudiante, a propósito de la tarea, que emerge la *situación*: la *situación* no es entonces un *a-priori* a la actividad del estudiante, sino un emergente de la acción del estudiante, en la cadena de inter-acciones con otros estudiantes y con el profesor (a partir de la tarea) y al realizar su actividad matemática en el marco de las condiciones institucionales del sistema de prácticas matemáticas al que está adscrito. En otras palabras, la *situación* es la manera como un estudiante o grupo de estudiantes actualiza en un aquí y en un ahora (momento histórico específico) su actividad matemática en el marco de las condiciones institucionales (medios culturales a su disposición) para su acción y en relación con los problemas que debe resolver al enfrentar la tarea propuesta por el maestro.[212]

Es importante expresar que en el lenguaje usado en la institución, las tareas eran llamadas "situaciones", o "situaciones problema", siguiendo la propuesta de Obando y Múnera (2003). Para evitar confusiones en la redacción de este capítulo y el siguiente, cuando la palabra "situación" se use en el sentido institucional, como sinónimo de tarea, se realizará la aclaración respectiva. Cuando no se haga ninguna aclaración las expresiones *evento* o *fenómeno*, *tarea* y *situación*, son utilizadas en el sentido conceptual aquí propuesto.

5.3.1 Objeto/motivo de las tareas: aprender sobre la multiplicación

Como se expresó en el capítulo 2, en toda tarea escolar, al menos al momento de iniciarla, el objeto/motivo que explicita la tarea, y que orienta de manera inmediata la actividad de los estudiantes, no solo no es coincidente con el objeto/motivo educativo de la misma,[213] sino que este objeto/motivo educativo de la tarea es oculto a él. Un punto fundamental de la actividad (de maestros y estudiantes) en el aula de clase es hacer emerger este objeto/motivo de la tarea en la actividad del estudiante, hacer que sea visible y que oriente las acciones de estos en el aula de clase.

Esta dualidad en el objeto/motivo de la tarea, lejos de ser un elemento problemático

[212] Nótese que no se entiende *situación* ni el en el sentido de la *situación didáctica* (Brousseau, 1998), ni en el sentido de situación-problema como se presenta en los lineamientos curriculares de matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

[213] Davidov (1988), citando a Elkonin, expresa que la actividad de estudio en la edad escolar tiene como contenido los conocimientos teóricos. En otro aparte dice: "los conocimientos teóricos, constituyendo el contenido de la actividad de estudio, son simultáneamente su necesidad." (p. 178).

en el proceso de aprendizaje es por el contrario lo que genera su posibilidad: el objeto/motivo explícito de la tarea, al generar un espacio en el que el estudiante organiza sus acciones, también genera un espacio compartido entre estudiantes y profesores, espacio en el cual el objeto/motivo educativo se va constituyendo como objeto/motivo explícito en la actividad matemática del estudiante. Es en este sentido que la tarea permite la emergencia de una *situación* a partir de la cual se genera el aprendizaje matemático.

Así entonces, el juego fue el objeto/motivo explícito de las cuatro tareas[214] que orientó la actividad de los estudiantes.[215] El juego, en tanto conjunto de reglas que organizan y orientan la acción de los estudiantes en el tiempo y el espacio, en función de unos medios para tal acción, y en relación con otros sujetos (compañeros del juego y profesores), genera *situaciones* con una alta capacidad para propiciar espacios compartidos entre estudiantes y profesores a partir de los cuales se constituyen aprendizajes sobre la multiplicación. Por su parte, el aprendizaje de la multiplicación entendida como isomorfismo de medida (Vergnaud, 1988, 1991, 1994, 2009), fue el objeto/motivo educativo de las tareas y por tanto, estas buscaban el reconocimiento de las formas de correlación entre las cantidades de los dos sistemas de cantidades involucrados en el evento o fenómeno sobre el que ellas se edifican (Bryant & Nunes, 2009; Mamede & Nunes, 2008; Nunes & Bryant, 2008; Park & Nunes, 2001).

Para buscar el acercamiento entre los dos objetos/motivo de las tareas, éstas organizan el proceso de estudio de los estudiantes en tres momentos:[216]

Un primer momento, en el que se realiza el juego propuesto en la tarea, donde los estudiantes consignan en unas hojas de registro las jugadas realizadas y efectúan los cálculos necesarios para determinar el ganador del juego. Esta parte de las tareas buscan en los estudiantes una primera aproximación a los problemas típicos multiplicativos a partir del isomorfismo de medida al tratar con *situaciones* que implican coordinar la covariación de dos cantidades, al manipular las cantidades representadas en los elementos físicos del juego (las fichas, los tableros de juego, etc.) y al organizar una serie de acciones orientadas a realizar las cuentas necesarias para llevar los registros de las jugadas y para definir el

[214] El juego de la canasta, el juego de los bolos, el juego del tiro al blanco, y el juego de las canicas (Ver Anexo 6 - Tareas Grado 3).

[215] Davidov (1988) plantea que para los niños en edad escolar, la actividad educativa tiene en el juego una importante fuente que organiza las acciones del niño en el aula de clase, entre tanto el juego es el principal canalizador de la actividad del individuo en la edad infantil.

[216] Ver las hojas de trabajo de las tareas en el Anexo 6 - Tareas Grado 3.

ganador del juego.

En un segundo momento, llamado de reflexión, los estudiantes resuelven una serie de cuestiones sobre eventos posibles del juego realizado, los cuales se presentaban a partir de tablas con valores faltantes, enunciados verbales, u otro tipo de representaciones gráfico-simbólicas. Estas tareas de reflexión amplían la complejidad de los problemas que deben resolver los estudiantes (al tratar con cantidades más grandes), los enfrenta a nuevos problemas (planteando eventos con otro tipo de relación entre las cantidades) o incluso, les presenta los problemas de forma diferente. La figura 16 es un ejemplo de ello, tomado del juego de la canasta. Cada tabla permite consignar la cantidad de fichas y los puntajes de las fichas según la sección de la canasta en que han caído. Cada fila representa un evento posible.[217] Los eventos son hipotéticos, pues en el juego real lo máximo que se puede obtener es 10 fichas en un determinado color, pero ahora la cantidad de fichas se puede extender tanto como se quiera. La figura 29 (sección 5.4.2.2) muestra otro ejemplo de este tipo de tareas de reflexión, en donde se completan los valores faltantes en una tabla con eventos hipotéticos sobre el juego.

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuál estrategia usaste para completar los puntos obtenidos en la sección azul del primer registro? Y ¿Cuál estrategia usaste para completar los puntos obtenidos en la sección amarilla del segundo registro?
- Si fuese el caso de un registro de más tiros, como se presenta a continuación, ¿qué estrategia usarías?

SECCIÓN ROJA	
Número de fichas	Puntos Obtenidos
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20
6	24

SECCIÓN AMARILLA	
Número de fichas	Puntos Obtenidos
2	16
4	32
8	64
16	120
32	258
64	512

SECCIÓN AZUL	
Número de fichas	Puntos Obtenidos
3	6
9	18
27	54
81	162
243	480
729	1,458

Figura 16. *Ejemplo de tarea de reflexión*
Archivo de imagen Compilado_2_varios_estudiantes_pagina_1

Otro tipo de tareas de reflexión se puede ver en la figura 17 en donde se propone al estudiante el trabajo sobre diferentes posibilidades de representación de un mismo problema. Este tipo de tareas también permite refinar ciertos aspectos de la notación matemática, las técnicas utilizadas por los alumnos, y el lenguaje matemático usado en el aula de clase.

[217] Nótese como en la tabla que corresponde con la sección amarilla, el profesor puso una marca de correcto sobre la tabla, pasando por alto los dos errores al calcular los valores correspondientes a 16 y 32 fichas.

Finalmente, un momento de institucionalización[218] del saber en estudio, en el que los alumnos exponen sus trabajos realizados (sus procedimientos, sus estrategias, etc.) y conjuntamente con la clase discuten y toman las conclusiones pertinentes con el trabajo realizado. Como se verá más adelante, cada momento de la tarea tiene funciones muy específicas en la organización de los procesos de estudio de los estudiantes, y abre posibilidades distintas para su actividad matemática de los estudiantes.

SITUACIÓN	PROBLEMA MULTIPLICATIVO	REPRESENTACIÓN	ECUACIÓN	RESPUESTA
SECCIÓN AZUL → 12 PUNTOS SECCIÓN AZUL Número de aciertos: 7 / Puntos Obtenidos: x			$7 \cdot 12 = x$	$7 \cdot 12 = x$ $84 = x$
SECCIÓN AZUL → 12 PUNTOS SECCIÓN AZUL Número de aciertos / Puntos Obtenidos	Cada acierto en la zona azul corresponde a 12 puntos, ¿Cuántos aciertos se hicieron en la sección azul si se obtuvo **48** puntos?		$x \cdot 12 = 48$	$x = 48 \div 12$ $x = 4$

Figura 17. *Ejemplo de tarea de reflexión sobre diferentes tipos de representación.*

5.3.2 Acciones: finalidad objetiva de la acción

Las tareas se organizan de manera tal que cada una favorece situaciones en las que las cantidades se correlacionan a partir de familias de relaciones. Así por ejemplo, en la tarea del juego de la canasta (o de los bolos), se trabaja con relaciones de la forma $2n$ (*ídem* $\frac{1}{2n}$), mientras que en la tarea del juego del tiro al blanco se tienen relaciones de la forma $3n$ (*ídem* $\frac{1}{3n}$), y en la tarea de las canicas se trata con relaciones de la forma $5n$ (*ídem* $\frac{1}{5n}$). En cuanto a las correspondencias, se favorecieron correspondencias de uno a varios (es decir, por cada unidad en uno de los sistemas de cantidades, se tienen varias unidades en el otro) en las tareas del juego de la canasta, de los bolos o del tiro al blanco, y de varios a varios en la tarea del juego de las canicas (es decir, varias unidades en uno de los sistema de cantidades, se corresponden con varias unidades en el otro). Como se expresó antes, con esta forma de organización de las tareas se busca poner las razones enteras y sus inversas en la base de la conceptualización de la multiplicación, y promover conceptualizaciones de la multiplicación en relación con las nociones fundamentales de la linealidad, y en

[218] *Institucionalización* es el proceso por medio del cual una forma de hacer y de saber particular se convierte en forma de hacer y de saber socialmente compartida. Es la posibilidad que se brinda para que esas formas de acción (individuales o de pequeños grupos) sean objeto de discusión y reflexión para la totalidad de la clase y, por ende, se conviertan en saber socialmente compartido (al menos para ese grupo de alumnos en particular). Para detalles ver capítulo 2, en particular la sección 2.4

particular, con la proporcionalidad directa (el capítulo 4 muestra evidencias sobre el valor epistemológico de una propuesta en este sentido, donde las razones y la linealidad son uno de los pilares en la constitución de las nociones modernas de número, y para el tratamiento matemático de los problemas típicos de intercambio de bienes y servicios en ausencia de la noción moderna de función).

5.3.3 Las operaciones: posibilidades objetivas de la acción

Estas tareas buscaban promover tanto los procedimientos tipo escalar (basados en los razonamientos por analogía) como los de tipo funcional (basados en los razonamientos analíticos). De esta manera, el concepto de razón está presente en este proceso inicial de aprendizaje de la multiplicación, pues la base de estas dos formas de razonamiento está en el reconocimiento de ciertas relaciones (por cociente) entre cantidades, relaciones que son invariantes en un fenómeno dado. Las cantidades involucradas en los eventos tratados en las tareas son de naturaleza discreta, por lo que en lo fundamental, las razones presentes, como ya se dijo, son razones enteras y sus recíprocas. La forma de presentación de las tareas promueve el uso de diferentes representaciones gráfico-simbólicas y por ende se favorecen diferentes posibilidades instrumentales a partir de esta diversidad semiótica.

Así pues, en el marco institucional anteriormente propuesto, se despliega la actividad matemática de los alumnos (del grado 3º de la Educación Básica Primaria) cuando estudian la multiplicación. En lo que sigue se analiza con detalle las operaciones (condiciones para la acción) que permiten ciertos procesos de objetivación sobre la multiplicación. Este análisis tiene como finalidad discutir las características específicas de la práctica matemática de dichos estudiantes. No se trata de una evaluación de la efectividad de la propuesta pedagógica de la institución, sino de buscar elementos que permitan brindar una mejor comprensión de la manera como los estudiantes aprenden sobre los objetos de conocimiento en estudio.

5.4 En el camino de lo multiplicativo: objetivación de un saber

5.4.1 Percepción de la variación: un proceso natural

Al inicio del año escolar del año 2008-2009, se entregó a los estudiantes, en una hoja impresa, una tarea que presentaba unos eventos hipotéticos a partir de una serie de enunciados verbales (algunos de los cuales estaban acompañados con información organizada en una tabla, u otra forma de representación gráfico-simbólica), y se les pedía que resolvieran los interrogantes planteados en relación con dichos eventos.

Uno de los eventos fue el siguiente:

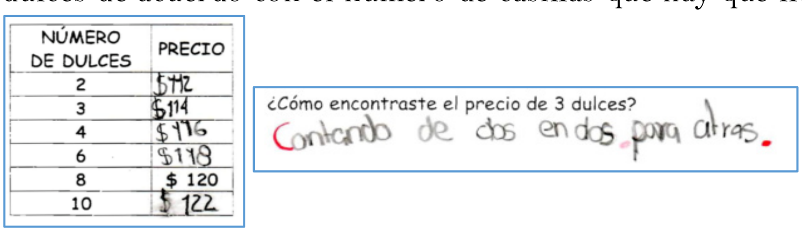
Situación (tarea) 3: Andrés pagó $120 por 8 dulces iguales. ¿Cuánto pagará por tres dulces?
Respuesta: ___________________

Ahora teniendo en cuenta los datos del problema anterior, completa la siguiente tabla:
¿Cómo encontraste el precio de 3 dulces?
¿Cómo encontraste el precio de 10 dulces?

NÚMERO DE DULCES	PRECIO
2	
3	
4	
6	
8	$ 120
10	

En esencia, todos los procedimientos que se muestran a continuación (de la figura 18 a la figura 21) evidencian que los estudiantes pueden percibir alguna forma de covariación entre las dos cantidades involucradas en el evento. Pero como se podrá ver, no todos las formas de correlación establecidas permiten llevar a cabo procedimientos apropiados en el tratamiento de la tarea.

Así por ejemplo, la figura 18 es representativa de un tipo de procedimiento en el que las dos cantidades se correlacionan en función del número de casillas que se deben completar con los precios de los dulces, para este caso, cuatro. Así entonces, contar de 2 en 2 (desde el 120 hacia atrás) permite tener una distribución regular de los valores de los dulces de acuerdo con el número de casillas que hay que llenar.[219] El 2 como base para el conteo seguramente proviene del hecho que las casillas contiguas a la cantidad 8 dulces tienen dos unidades más o dos unidades menos.



NÚMERO DE DULCES	PRECIO
2	$112
3	$114
4	$116
6	$118
8	$ 120
10	$ 122

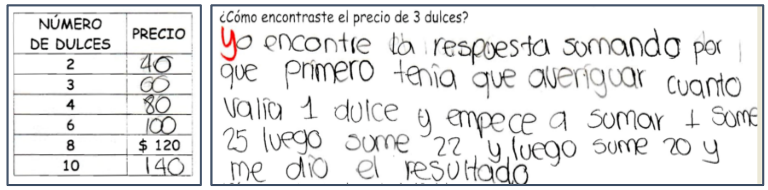
¿Cómo encontraste el precio de 3 dulces?
Contando de dos en dos para atras.

Figura 18. *Respuesta situación (tarea) 3 del taller inicial. Archivo de imagen* Diagnostico_3_ABC, *p. 20.*

La figura 20 presenta otro procedimiento, que si bien se parece al anterior, tiene la diferencia de que el conteo se basa en suponer un valor hipotético para cada dulce, y se realiza un conteo iterado de este valor hipotético tantas veces como cantidad de casillas vacías hay por llenar, y además, se busca que la distribución de valores haga coincidir a la

[219] En procedimientos similares los estudiantes contaron de uno en uno, desde 115, poniendo los valores de cada casilla como una secuencia de números naturales, o restando 8 al 120 y distribuyendo los valores entre 112 y 120 en las casillas vacías de la tabla.

cantidad de 8 dulces el valor de $ 120. Nótese que el valor de $ 40 asignado a los 2 dulces da a entender que para esta casilla se tomó en consideración que el valor de 2 dulces es el doble del valor supuesto para un dulce, pero a partir de ahí se asumió que una casilla más era una dulce más, y no se consideró que el valor escrito en cada casilla de la primera columna es la cantidad de dulces al cual se le debía calcular el precio.

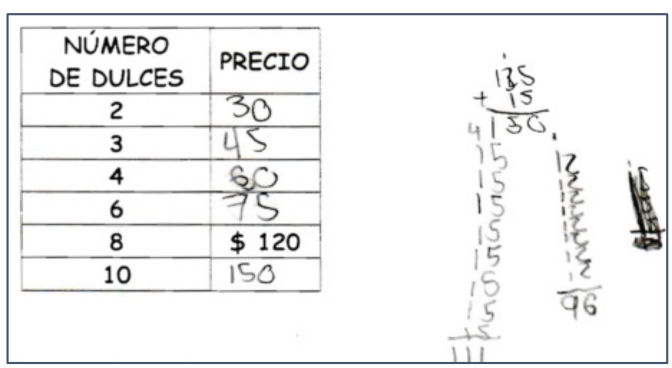


NÚMERO DE DULCES	PRECIO
2	40
3	60
4	80
6	100
8	$ 120
10	140

Figura 20. *Respuesta situación (tarea) 3 del taller inicial. Archivo de imagen Diagnostico_3_ABC, p. 27.*

Se puede decir que la actividad de los estudiantes en estos procedimientos está centrada en uno de los sistemas de cantidad, el precio de los dulces, mientras que el otro sistema de cantidades (la cantidad de dulces) permanece oculto, o al menos es sustituido por otro que es más evidente: la cantidad de casillas que debe llenarse. La tabla en la que se presenta la tarea a los estudiantes determina el tipo de análisis relacional que hacen: (1) hay dos columnas, una de la cuales se debe llenar con valores que se deben calcular, a saber, el precio de una cierta cantidad de dulces; (2) se asume que cada casilla vacía es un dulce más en la cantidad total de dulces, y por lo tanto, (3) para hallar el valor en dicha casilla, se agrega al valor en la casilla anterior, el valor de un dulce más. Nótese entonces que el instrumento usado para presentar la información determina la manera como se analizan las relaciones entre las cantidades. Esta forma de "ver" las relaciones entre las cantidades define unos procedimientos que no permiten asignar el valor correcto a cada cantidad de dulces, pues se basan en un criterio de distribución espacial de la escritura de las cantidades en la hoja de trabajo: la cantidad de casillas vacías en la segunda columna de la tabla se usan para hacer una distribución regular de una serie de valores de tal forma que el 120 fuera coherente con esta secuencia de valores, y se asume que cada casilla es un dulce más en la cuenta.

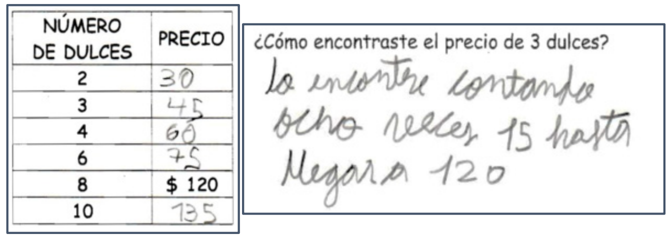
En las figuras 20 y 21 se muestra otro tipo de procedimiento el cual fija el valor hipotético para un dulce considerando que ese valor debe ser tal que 8 veces el mismo dé como resultado $ 120. Esta forma de proceder se ve con claridad en los cálculos que acompañan



NÚMERO DE DULCES	PRECIO
2	30
3	45
4	60
6	75
8	$ 120
10	150

Figura 19. *Respuesta situación 3 del taller inicial. Archivo de imagen Diagnostico_3_ABC_Página_01*

la tabla en la figura 19: se sumó 8 veces 12, y como no dio 120, se repitió el proceso ahora con 15. De igual forma se ve en la explicación verbal en la figura 21 en donde explícitamente se dice que se ha sumado 15 hasta completar 120.



NÚMERO DE DULCES	PRECIO
2	30
3	45
4	60
6	75
8	$ 120
10	135

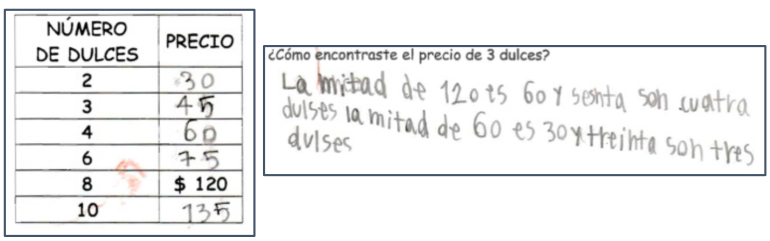
¿Cómo encontraste el precio de 3 dulces?
lo encontre contando ocho veces 15 hasta llegara 120

Figura 21. *Respuesta situación (tarea) 3 del taller inicial. Archivo de imagen Diagnostico_3_ABC, p. 09.*

Por su parte la explicación verbal que acompaña la tabla de la figura 22 es diferente, pues se basa en tomar el valor de 120 para calcular el valor de un dulce, haciendo reducciones sucesivas por la mitad, tanto del precio, como de la cantidad de dulces, siguiendo una forma de razonamiento por analogía (ver sección 5.5).

Sin embargo, en estos tres casos, el error con los valores asignados a 6 y a 10 dulces hacen notar que en algún momento del proceso se pierde de vista que el valor escrito en cada casilla de la columna de la izquierda es la base para el cálculo del precio de dicha cantidad de dulces (si es que alguna vez se tuvo en cuenta), para tomar como criterio que de una casilla a otra se aumenta 15 (como sucedía con las tres primeras casillas).

Como se puede observar en las selecciones presentadas, los procedimientos de los estudiantes muestran cierta sensibilidad para percibir en un determinado evento el proceso de covariación entre las cantidades de los dos sistemas de cantidades involucrados en el evento, pero el criterio o regularidad usado para definir tal proceso de covariación no les permite la descripción precisa de lo que realmente sucede en el evento.



NÚMERO DE DULCES	PRECIO
2	30
3	45
4	60
6	75
8	$ 120
10	135

¿Cómo encontraste el precio de 3 dulces?
La mitad de 120 es 60 y sesenta son cuatro dulses la mitad de 60 es 30 y treinta son tres dulses

Figura 22. *Respuesta situación (tarea) 3 del taller inicial. Archivo de imagen Diagnostico_3_ABC, p. 27.*

De estos procedimientos también se evidencia que los valores faltantes en la columna precio no se fijan de cualquier manera, sino que se hace a partir de un principio que tiene al menos dos momentos: uno, que fija el valor de un dulce (tomar como referencia que el valor de 8 dulces es $ 120), y otro, que permite hacer copias sucesivas de ese valor, tantas veces como dulces se tenga (lo que implica interpretar el valor escrito en cada una de las casillas de la columna de la izquierda). Nótese que en los casos mostrados el criterio escogido para una u ambas partes del proceso no es apropiado, bien porque no se toma como referencia la pareja de valores 8 a 120, bien porque los precios son asignados siguiendo un criterio de organización espacial (cantidad de casillas vacías que se deben llenar) sin tomar en consideración el valor correspondiente a la casilla “cantidad de dulces”. Esto es, los estudiantes más que centrar la atención en el proceso de variación de las cantidades en ambos sistemas, analizan la variación en cada sistema como dependiendo de su distribución espacial en la tabla, y trasladan relaciones en uno de los procesos como regla para controlar el proceso de variación en el otro sistema.

Al inicio del año lectivo 2009, al igual que en el caso del año 2008, se propuso a los estudiantes una serie de tareas escritas (enunciados de problemas), pero a diferencia del año 2008 no se presentó la tarea de la tabla de valores (descrita antes), con el fin dar libertad a los estudiantes para desarrollar sus propios procedimientos.[220] Dos de las tareas propuestas fueron:

Situación (tarea) 1: Ana y Jaime están jugando a los bolos, y por cada bolo que derriben, ganan dos puntos. En el juego, cada uno realizó tres lanzamientos. Ana, derribó en el primer lanzamiento 2 bolos, en el segundo 4 bolos, y en el último 6 bolos. Jaime derribó en el primer lanzamiento 3 bolos, en el segundo lanzamiento 5 bolos, y en el último 8 bolos. ¿Cuántos puntos obtuvo Ana en cada uno de los lanzamientos? ¿Cuántos puntos obtuvo Jaime en cada uno de los lanzamientos? ¿Quién ganó el juego?

Situación (tarea) 2: Juanita ha comprado 4 bananas[221] para regalar a algunos de sus amigos, y pagó 200 pesos. Ella quiere saber cuánto dinero necesitaría para regalar de una banana a cada uno de sus 20 compañeros de clase. ¿Cómo le ayudarías a Juanita a realizar las cuentas?

A continuación se muestran algunas respuestas de los estudiantes a estas dos tareas, en donde se evidencian hechos similares a los descritos en páginas anteriores.

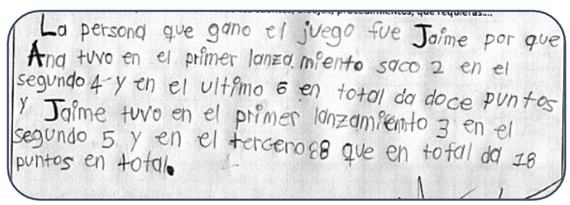


Figura 23. *Respuesta situación (tarea) 1 del taller inicial. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 08.*

Desde el punto de vista de la comprensión de la correspondencia de las cantidades en los dos sistemas de cantidades, los procedimientos de la figura 23 y la figura 24 son idénticos pues solo toman en consideración los bolos derribados, asumiendo que la cantidad de bolos derribados es la cantidad de puntos (como en el juego tradicional de bolos, donde cada bolo

[220] En las reuniones del área de matemáticas se había analizado que poner la tabla para ser llenada podría predisponer a los estudiantes al uso de un instrumento, por demás no era usual para ellos pues en el trabajo hasta el grado segundo no se hace uso de este tipo de instrumentos, y que por ende, las soluciones presentadas por ellos podría estar influenciadas por su falta de familiaridad con dichas formas de organizar la información.

[221] La palabra “banana” usada en esta tarea no tiene el sentido con el que usualmente se le conoce (fruto comestible de forma alargada y de color amarillo, que también se conoce como “banano” o “plátano”), sino que refiere a un dulce pequeño de forma ovalada y envuelto en una cubierta de plástico para su protección. Por facilidad para el lector, donde sea posible se usará la palabra “dulce” y no “banana” como se usaba textualmente en las tareas, pero donde no sea posible, deberá entenderse “banana” como “dulce” y no en sentido usual del término.

derribado equivale a un punto).

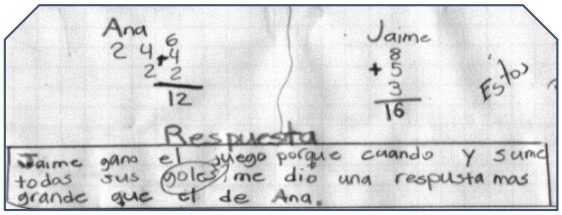


Figura 24. *Respuesta situación (tarea) 1 del taller inicial. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 14.*

La figura 24 muestra un hecho interesante, pues el estudiante usa la palabra "goles" y no bolos (como en el futbol, donde cada gol anotado es como si fuera un punto obtenido). Esto muestra la convergencia en el aula de diferentes tipos de conocimiento que dan forma integral de los procesos de razonamiento de los estudiantes. Es más, podría decirse que en esa interacción entre los problemas propuestos en la tarea y el conocimiento que tiene el estudiante producto de su experiencia personal, es donde emerge una situación en la cual los problemas tienen un contexto para ser pensados, pero esa situación no necesariamente es equivalente a la del evento propuesto en la tarea.[222]

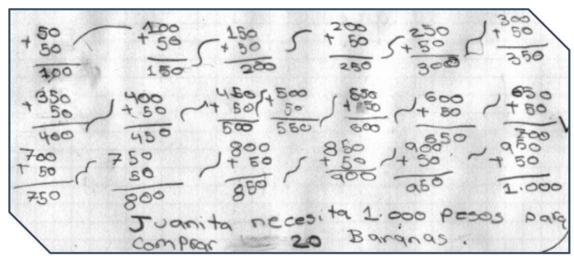


Figura 25. *Respuesta situación (tarea) 2 del taller inicial. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 47.*

En ambos casos se evidencia lo expresado anteriormente: o bien se fija la atención solo en la variación de una de las cantidades, o bien el criterio para definir la regularidad del proceso de covariación de las dos cantidades fija una regla que si bien es coherente con la variación en una de las cantidades, no correlaciona correctamente esta variación con la variación en la otra cantidad.

En el caso de la figura 25, se repite uno a uno el valor 50 (que corresponde al valor de un dulce), hasta completar 20 veces ese valor, sumando acumulativamente cada vez que se repite. De manera explícita se está tomando en consideración el proceso de variación en uno solo de los dos sistemas de cantidades y la cantidad de veces que se suma el 50 es el control de la cantidad de dulces acumulados, el cual permanece implícito (por eso la suma repetida de un valor es un procedimiento exitoso, aunque poco económico). El procedimiento tiene implícito un mecanismo que oculta

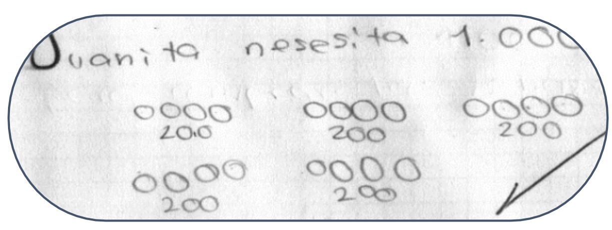


Figura 26. *Respuesta situación (tarea) 2 del taller inicial. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 40.*

[222] Esta idea del lugar del conocimiento cotidiano en las formas de razonamiento de los estudiantes fue ampliamente analizado en una de las tesis de maestría realizadas bajo la tutela de la investigación reportada en esta tesis. Para detalles ver Sánchez Ordoñez (2011), en especial la sección 4.7.

parcialmente uno de los procesos de suma iterada implicada en la situación. En la sección siguiente se mostrará el valor epistémico de la coordinación de este doble conteo.

Por su parte, de la figura 26 a la figura 28 se muestran procedimientos a partir de los cuales se puede afirmar plena conciencia del proceso de covariación entre los dos sistemas de cantidades, pues se explicita que por cada vez que se repita la cantidad 4 dulces, se repite la cantidad $ 200. Lo que cambia es la manera como se controla este doble proceso de variación (las implicaciones de estas formas de control serán analizadas en la siguiente sección). Esto implica conciencia de la relación *cada cuatro dulces se corresponden con doscientos pesos.* Tener conciencia de este tipo de relaciones, como se verá en las secciones siguientes, es clave para la comprensión de una idea de razón, y para el uso instrumental de esta idea de razón en la comprensión de los conceptos propios de la multiplicación. Es más, estos últimos casos muestran el valor instrumental de las formas de representación tanto de las cantidades, como de sus procesos de variación (lo cual también será analizado con detalle más adelante) en tanto que son elementos fundamentales en la objetivación de los aprendizajes sobre la multiplicación.

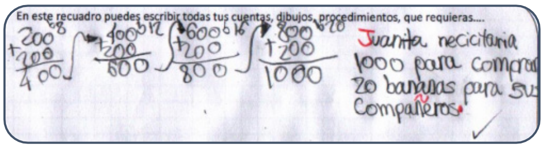


Figura 27. *Respuesta situación (tarea) 2 del taller inicial. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 05.*

Así entonces, las tareas iniciales propuestas en los dos años lectivos, si bien diferentes, muestran coincidencias: los estudiantes perciben con cierto grado de naturalidad los procesos de variación de cantidades en un solo sistema de cantidades, e incluso, en situaciones que implican la variación conjunta de dos sistemas. Sin embargo, las formas de control de esos procesos de variación no siempre les permiten correlacionar de forma correcta la covariación presente en todo tipo de tarea multiplicativa. Un análisis de las técnicas e instrumentos que permiten la coordinación de estos dos procesos de variación es el objeto de las secciones siguientes.

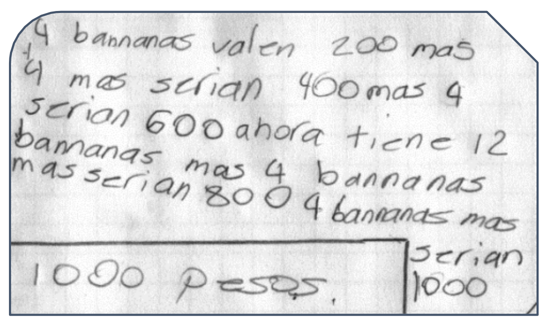


Figura 28. *Respuesta situación (tarea) 2 taller inicial. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 15.*

5.4.2 Principio fundamental: Coordinación de un doble conteo

Como se mostró en la sección anterior, la precepción de la covariación entre cantidades es un fenómeno con cierto nivel de naturalidad en las prácticas matemáticas de los estudiantes, pero también se mostró que los criterios usados por los estudiantes para modelar esta correlación, si bien son válidos en el marco de las regularidades que visualizan, no se corresponden con las formas de correlación que efectivamente se presentan en el evento o fenómeno que sirve como base para el diseño de la tarea. La pregunta que surge es cómo los estudiantes logran comprender esos procesos de covariación entre las cantidades involucradas en la tarea, y por esta vía, cómo logran comprender la multiplicación. Esta indagación es el tema de lo que sigue.

5.4.2.1 "Ver" la razón y la coordinación del doble conteo

Como se mostró en la sección anterior, algunos estudiantes realizaron procedimientos incorrectos (desde el punto de vista de la solución de la tarea por parte de un experto), pero estos procedimientos incorrectos dan pistas sobre lo que están comprendiendo en relación con la situación: si bien es cierto que en cada tarea se identifican tanto los dos sistemas de cantidades como los procesos de cambio en las cantidades de dichos sistemas, y se intuye que estos dos procesos de cambio están correlacionados, también lo es que la forma como se comprende esta correlación de los dos procesos de cambio se orienta, o está ligada, a la forma de presentación de la tarea (por ejemplo, la organización espacial de las tablas) y no necesariamente a la relación estructural entre las cantidades involucradas en la tarea. El siguiente diálogo muestra a un estudiante con dificultades en la situación (tarea) 2, y cómo a través de la interacción con el profesor logra encontrar una salida, la cual se da precisamente en el momento que logra visualizar la coordinación de los dos procesos de variación implicados en el evento descrito por la tarea (las convenciones utilizadas para la transcripción de los diálogos presentados en este capítulo y el siguiente se pueden consultar en el anexo 1).

***Diálogo** 1. Fragmento tomado del archivo de audio 2009_09_22_10_14*

22:48	e:	Mire yo ya la hi:ce, pero ella me dice que no::
22:49	p:	y como la hizo antes
22:51	e:	e:h. doscientos más cincuenta
22:54	p:	cuántas bananas llevaría ahí
22:57	e:	e:::
22:59	e1:	tres
22:59	e:	no::
23:01	e1:	cinco, más cinco
23:02	p:	pues esa sería una manera contando de cinco en cinco
23:06	e:	como así

23:07	p:	como así de cinco en cinco
23:10	e1:	veinte veces cinco
23:15	p:	cinco bananas son doscientos pesos
23:19	e:	si. -- no::o cua::tro
23:21	p:	ah perdón, cuatro son doscientos pesos --- siga
23:30	e1:	veinticinco, treinta, treintaicinco, cuarenta, cuarentaicinco
23:38	e1:	no, eso es mejor de a dos
23:40	p:	no mira. cua. cuatro bananas son doscientos pesos.
23:42	e1:	cinco, diez, quince, veinte, hasta veinte y de veinte, AH! Veinte más cincuenta
23:52	p:	um:.uc
23:53	e1:	ah yo sé, ay! Yo se
23:55	p:	que
23:56	e:	sumamos. el to. todo. veinte veces doscientos. así veinte bananas es doscientos
24:12	p:	de dónde salió este veinte por doscientos
24:15	e1:	ja ja. no se::. veinte por desciento::s
24:28	p:	y porque veinte por doscientos
24:29	e1:	porque ella le va a comprar a su compañera. -- acá:: uno es un veinte
24:35	p:	entonces cuantas bananas necesita comprar
24:39	e1:	cuatrocientos
24:40	p:	no::. cuántas bananas?
24:42	e1:	veinte
24:42	p:	veinte bananas y cuánto cuesta cada banana
24:45	e:	doscientos ((*responden varios niños al mismo tiempo*))
24:46	p:	no: cada banana no cuesta doscientos, ahí dice >que por cuatro bananas< pagó doscientos
24:57	e1:	Melisa lo estaba haciendo mal
24:58	p:	por cuatro bananas pagó doscientos
25:04	e:	como así:: esa es la parte que no entiendo
25:05	p:	ella compró cuatro bananas y cuatro bananas le costaron doscientos pesos ((*discuten entre ellos y se piden ayuda*))
25:28	e:	cuatro bananas. por doscien::tos
25:31	p:	um.ju
25:37	e:	cuento. espera. cuento. veinte. cierto, y entonces los cuento por cuatro. o sea grupitos de cuatro mientras da cuánto es
25:46	p:	hágalo, pero no borre esto que tiene ahí, hágalo a ver que le da.
26:47	p:	entonces cuánta plata necesita
26:49	e:	suma todo esto:: y ahí da el total y ya
26:52	p:	aja!
26:54	e:	es cuatrocientos, quinientos, seiscientos, setecientos, ochocientos, novecientos A::: ya!

Ante el procedimiento del estudiante en el que suma el 200 y el 50 (entrada 22:51) el profesor pregunta por cuántas bananas completarían al sumar esos dos valores. La expresión de duda (entrada 22:57) y la respuesta equivocada de tres bananas (entrada 22:59), y su posterior corrección por parte de una compañera al valor de cinco, permite iniciar un diálogo entre profesor y estudiante donde el profesor le llama la atención sobre la naturaleza de las dos cantidades con las que está trabajando (entrada 23:21) haciendo énfasis en que cuatro bananas son $ 200 (aunque inicialmente se equivoca pues habla de cinco bananas). Sin embargo, este primer intento no es comprendido por el estudiante, pues cuando el profesor intenta entregarle la responsabilidad de seguir con los cálculos, cuenta de cinco en cinco a partir de 25 (entrada 23:30), mientras que el profesor insiste en la relación de 4 a 200. El estudiante a corrige el punto de inicio del conteo iniciando entonces desde cinco hasta llegar a 20, para luego intentar el 20 más el 50. Esto evidencia que el estudiante no ha logrado diferenciar la naturaleza de los dos tipos de cantidades, ni comprender el proceso de coordinación de las repeticiones que se dan al interior de cada uno de los dos sistemas de cantidades.

Desde la entrada 23:56 a la entrada 24:46 se presenta otro diálogo entre profesor y estudiante que también evidencia esta misma falta de comprensión del papel que juega la relación que pone en correspondencia las cantidades de los dos sistemas involucrados. En este caso se asume que el 200 debe ser repetido 20 veces (20 es el número de bananas, y 200 el valor de cuatro bananas). Las interacciones profesor-estudiantes mostradas en este fragmento ponen en evidencia que no es claro para los estudiantes por qué decidieron repetir 20 veces el 200, pues no se tiene precisión sobre cuántas bananas se deben comprar (entradas 24:39 y 24:42) ni del precio de una banana, y se asume que una banana cuesta $ 200 (entrada 24:45).

El final de este episodio nos muestra la feliz resolución de esta situación: los estudiantes logran comprender que deben repetir el cuatro tantas veces como sea necesario para llegar al 20 y, que por cada vez que se repita el cuatro se debe repetir el 200. Por lo tanto, como el cuatro se repite cinco veces, entonces el 200 también se debe repetir cinco veces. Esto se logra a partir del momento en el que uno de los estudiantes reconoce la relación "cuatro bananas por $ 200" (entrada 25:29), y verbaliza "cuento en este caso 20, cierto, y entonces los cuento por cuatro, o sea grupitos de cuatro mientras da cuánto es". Este momento es crucial pues permite objetivar en una expresión verbal la relación entre las *cantidades* de los dos *sistemas de cantidades* (cuatro bananas por $200), y a partir de esta relación objetivada se pueden separar y coordinar los dos procesos de conteo, uno en cada *sistema de cantidades*: se repite la cantidad 4 tantas veces como sea necesario para llegar a la cantidad 20, y esa misma cantidad de veces se debe repetir el 200 para encontrar el valor de las 20 bananas (entradas 26:49 y 26:54).

El siguiente episodio es similar al anterior, pero nos deja ver con más pausa cómo es que la estudiante logra comprender los dos procesos de variación, en tanto las diferentes intervenciones del profesor van centrando la atención del estudiante en las cantidades involucradas, así como en la correlación que rige su proceso de variación.

Diálogo 2. *Fragmento tomado del archivo de audio 2009_09_22_10_14*

36:06	e:	es que no se si multiplicar, sumar o restar.
36:07	p:	a ver empecemos. qué es lo que tienen que hace::r Juanita
36:11	e:	Juanita apenas compró cuatro bananitas para regalarle a algunos amigos y cuando ahí::
36:21	p:	doscientos pesos
36:25	e:	ella quiere saber cuánto dinero necesitará para regalar una banana a cada uno de sus amigos
36:35	p:	entonces cuántas bananas realmente necesitará Camila
36:38	e:	a:h necesita:: veinte
36:39	p:	necesita veinte bananas. y ella necesita saber cuánto dinero necesitaría para comprar las veinte bananas. y entonces. ella que.que tiene. ella. estos doscientos pesos por cuántas bananas fueron?
36:57	e:	estos fue, po:r cuatro bananas
36:58	p:	cuatro bananas, entonces para completar veinte bananas que tiene que hacer
37:04	e:	se, se::: suma?
37:14	p:	tiene que comprar más bananas?
37:15	e:	si
37:16	p:	cuantas más
		((*una larga espera mientras la estudiante piensa*))
37:47	e:	dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte
38:02	e:	necesita: -- dieciséis?
38:03	p:	aja. necesita dieciséis bananas más y cuanto le costarán esa dieciséis bananas más, si tú sabes que cuatro valen doscientos
38:16	e:	si cuatro valen doscientos, más uno, trescientos.
38:34	p:	NO. cuatro bananas valen doscientos
		((*otra pausa larga*))
39:16	e:	con cuatro bananas más ya serían cuatrocientos
39:18	p:	exactamente, con cuatro bananas más serían cuatrocientos, perfecto. --- cuántas bananas llevarías aquí en total? --- cuántas bananas llevas hasta ahora?
39:46	e:	ahora llevo:: - ocho
39:47	p:	llevas ocho bananas y llevas cuatrocientos pesos
39:58	e:	a:h (mas cinco)
39:59	p:	y por qué cinco
40:02	e:	más otras cuatro
40:04	p:	más otras cuatro, porque tú sabes cuánto valen doscientos pero no sabes todavía cuánto valen cinco. más otras cuatro

40:14	e:	cuatrocientos y dos ((*no es audible*))
40:16	p:	serían seiscientos, más otras cuatro ya serían seiscientos
40:22	e:	y ahora tiene doce bananas
40:23	p:	y ahora tiene doce bananas
40:48	p:	...más
		((*otra pausa larga*))
40:49	e:	más cuatro bananas
40:55	p:	ahí vas bien, muy bien, ahorita vengo

El profesor inicia solicitando al estudiante una lectura del enunciado verbal que presenta el problema (entrada 36:07), para luego, en la entrada 36:35 y 36:39, preguntar por la cantidad de bananas que se tienen que conseguir, y por la cantidad de bananas que se pueden comprar con $ 200. De esta manera llama la atención sobre la naturaleza de las cantidades involucradas.

En la entrada 36:58 pregunta al estudiante qué se tiene que hacer para completar las 20 bananas, y él responde con el cálculo de la cantidad de bananas que le falta conseguir a Juanita, a saber, 16 bananas más (entradas 37:47 y 38:02). Si bien esto es cierto, con esta idea no es fácil encontrar la cantidad de dinero que necesita para comprar las 20 bananas. Al final de esta entrada, la expresión del profesor "si tú sabes que cuatro valen 200" es fundamental en el cambio de estrategia de la estudiante: en la entrada 38:16, la estudiante intenta tomar como punto de partida esa relación de "cuatro a 200", agregando de una en una (al cuatro), pero al 200 le suma 100, duda, y regresa nuevamente a parafrasear la relación "cuatro 200", y ante esto el profesor, enuncia nuevamente la relación "cuatro bananas valen 200". En este momento opera un cambio en la estrategia desarrollada por la estudiante: "con cuatro bananas más ya serían 400" (entrada 39:16) lo que evidencia que ha comprendido el papel que juega dicha relación en el proceso de solución del problema. Esto es ratificado por el profesor que parafrasea lo dicho por la estudiante, y termina con una pregunta que pone la atención sobre la cantidad de bananas acumuladas "¿cuántas bananas llevas hasta ahora?". Ante esta pregunta la estudiante responde "ahora llevo ocho", y el profesor (parafraseando al estudiante) enuncia los totales parciales "llevas ocho bananas y llevas $ 400". Luego de una pequeña vacilación, la estudiante retoma la línea argumental agregando otras cuatro bananas (entrada 40:02), y agregando $ 200 al total de dinero (entradas 40:14 y 40:16). Todo esto es reafirmado por el enunciado del profesor en la entrada 40:16, en donde afirma que ya se tendrían entonces $ 600 en dinero, y la estudiante responde que se tienen ahora 12 bananas (entrada 40:22). El procedimiento continúa de esta manera.

Antes de continuar con el tema de la coordinación del doble conteo, es necesario llamar la atención, desde el punto de vista discursivo, sobre el papel que juegan las intervenciones del profesor en la manera como el estudiante va configurando su acción y en la forma cómo va fijando su atención en elementos claves de la situación: hasta la entrada 37:16 cuestiona, interroga al estudiante; en la entrada 38:03 hace una afirmación; en la entrada 38:34 enuncia una negación; de la entrada 39:16 en adelante parafrasea al estudiante. Cada uno de esos posicionamientos del profesor genera también diferentes posicionamientos en los estudiantes (centrar la atención sobre las cantidades relevantes para la descripción de evento; fijar la atención sobre los cambios en estas cantidades; comprender la relación (razón) que gobierna el cambio en las cantidades; direccionar los procedimientos que se van realizando; ganar confianza en que se ha tomado el camino correcto, etc.) que van dando forma a la acción de éstos últimos.

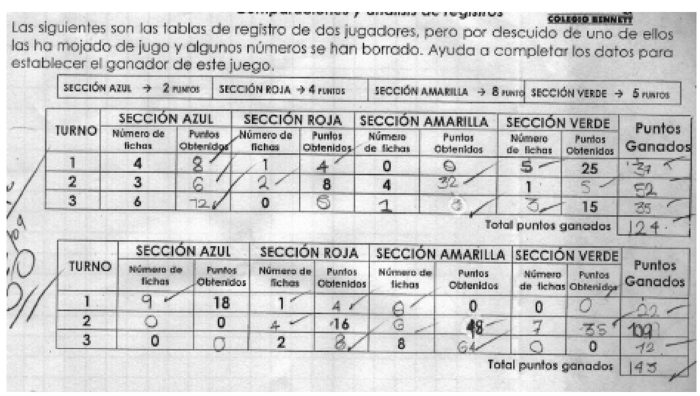
En suma, lo anterior muestra varios elementos claves en la comprensión de la multiplicación: (1) diferenciar la naturaleza de cada uno de los sistemas de cantidades, (2) identificar que de acuerdo con las condiciones del evento que da origen a la tarea, al interior de cada sistema de cantidades hay un movimiento en los valores que pueden tomar las cantidades y, finalmente, (3) que ese movimiento de los valores de las cantidades está gobernado por una condición, para este caso, la razón *4 bananas son 200 pesos*, a este nivel, objetivada a partir de una expresión verbal. En ambos casos, la tarea se resuelve favorablemente por la comprensión de esta razón, y por la coordinación del doble conteo que se desencadena a partir de dicha razón, lo que garantiza dos cosas: una, cada que haya un cambio en una cantidad hay un cambio en la otra, y dos, el cambio se coordina a partir de una regularidad (cada que se agreguen cuatro bananas a la cantidad de bananas, se deben agregar $200 a la cantidad total de dinero).[223]

En los casos analizados, el control de uno de los sumandos está soportado sobre algún medio (físicamente en las fichas usadas en el juego, en los dibujos, en las grafías escritas en las hojas de trabajo, etc.), y puede ser de uno en varios (cuando la relación inicial es del tipo: por cada unidad en uno de los sistema hay *n* unidades en el otro sistema) o de varios a varios (cuando la relación es del tipo: por cada *m* unidades en uno de los sistema, hay *n*

[223] Situaciones similares se pueden ver, por ejemplo, en los archivos de audio (anexo 2) 2009_11_17 (1), episodio 3, o 2009_09_22_10_14, episodios 3 y 4.

unidades en el otro). Este proceso de control de la cantidad de veces que se repite la cantidad unidad en uno de los sistemas (los puntos por cada ficha, el valor de una banana, los puntos por bolo, etc.) se oculta tras las representaciones físicas de las cantidades y de las acciones físicas de los estudiantes con dichas representaciones y, entonces, se da la impresión que sólo se estuviera trabajando sobre una sola suma iterada (la de los puntos, los precios, etc.), pero en realidad hay dos procesos de sumas iteradas que se coordinan entre sí: la suma de uno en uno (doces, cuatros, cincos) en un sistema de cantidades (la cantidad de fichas, la cantidad de bananas) se coordina con la suma de dos en dos, de cinco en cinco, etc., en el otro sistema de cantidades (el total de puntos, el precio total, etc.). Este ocultamiento de uno de los dos procesos de conteo sucede en la mayoría de las situaciones multiplicativas a las que clásicamente se enfrenta el estudiante en el aula de clase, y por ende, pareciese que la multiplicación fuese solamente una suma iterada, la que van de n en n, pues cuántas veces esté n en la suma como sumando, es la cantidad de veces que se ha sumado el uno en el otro sistema de cantidades.

La importancia y necesidad de ese doble conteo se muestra con fuerza en los dos diálogos anteriores, en donde los dos procesos de conteo refieren a la iteración de unidades múltiples, y por ende, el control y la coordinación de las sumas parciales cada vez que se hace una iteración (cómo ya se ha mostrado) es fundamental para el desarrollo del proceso multiplicativo implicado en este tipo de situaciones.


COLEGIO BENNETT

Las siguientes son las tablas de registro de dos jugadores, pero por descuido de uno de ellos las ha mojado de jugo y algunos números se han borrado. Ayuda a completar los datos para establecer el ganador de este juego.

SECCIÓN AZUL → 2 PUNTOS	SECCIÓN ROJA → 4 PUNTOS	SECCIÓN AMARILLA → 8 PUNTOS	SECCIÓN VERDE → 5 PUNTOS

TURNO	SECCIÓN AZUL		SECCIÓN ROJA		SECCIÓN AMARILLA		SECCIÓN VERDE		Puntos Ganados
	Número de fichas	Puntos Obtenidos	Número de fichas	Puntos Obtenidos	Número de fichas	Puntos Obtenidos	Número de fichas	Puntos Obtenidos	
1	4	8	1	4	0	0	5	25	37
2	3	6	2	8	4	32	1	5	52
3	6	12	0	0	1	8	3	15	35
								Total puntos ganados	124

TURNO	SECCIÓN AZUL		SECCIÓN ROJA		SECCIÓN AMARILLA		SECCIÓN VERDE		Puntos Ganados
	Número de fichas	Puntos Obtenidos	Número de fichas	Puntos Obtenidos	Número de fichas	Puntos Obtenidos	Número de fichas	Puntos Obtenidos	
1	9	18	1	4	0	0	0	0	22
2	0	0	4	16	6	48	7	35	109
3	0	0	2	8	8	64	0	0	72
								Total puntos ganados	143

Figura 29. *Ejemplo de tabla en una tarea de reflexión.*

5.4.2.2 Iconicidad y objetivación de las unidades de conteo

En una de las tareas derivadas del juego de la canasta los estudiantes debían completar los valores faltantes en unas tablas en las que se presentaba información incompleta sobre estados posibles del juego. Para cada tabla se sabía el color de la sección de la canasta a la cual pertenecían los valores consignados en ella (y por ende el puntaje que daba cada ficha en dicha sección) y se daba, o bien la cantidad de fichas obtenidas en dicha sección de la canasta, y se debía encontrar el puntaje correspondiente a dicha cantidad de fichas, o bien se daba el puntaje total en un determinado color, y se debía determinar la cantidad de fichas que originaron dicho valor (ver figura 29). Algunas de las imágenes y diálogos analizados a continuación se refieren a ejercicios de este tipo y nos muestran procedimientos en donde diferentes formas de representación icónica permiten el control del doble conteo.

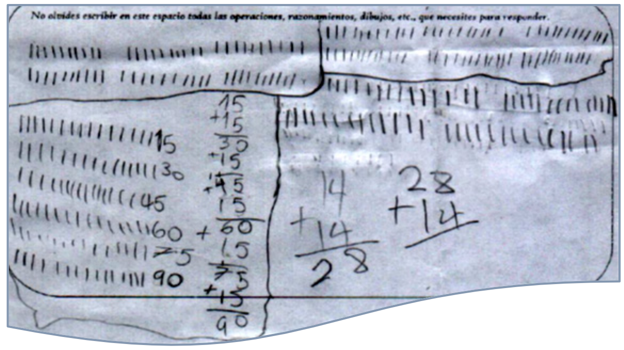


Figura 30. *Respuesta a tarea de reflexión, juego de la canasta. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p 19.*

A pesar de lo elemental que parecen ser los procedimientos mostrados, implican una complejidad que se pone en evidencia en la manera como se realiza la representación de las cantidades. Por ejemplo, en la figura 30: lo que se ha representado con cada grupo de rayas horizontales no es el valor de cada ficha según el color, sino la cantidad de fichas que han caído en un determinado color, y la cantidad de veces que está repetido cada grupo representa el valor de cada ficha según el color en la canasta. Esta representación ha cambiado la forma de la relación entre las cantidades y, al parecer, no se trata de un fenómeno aislado, pues como se verá más adelante, se presentó en el trabajo de los estudiantes con otras tareas, que en general implicaban tratar con cantidades grandes, lo que permite pensar que esta inversión está motivada por una especie de economía en el procesamiento: es más fácil tratar con un número menor de grupos, así cada grupo tenga muchos elementos.

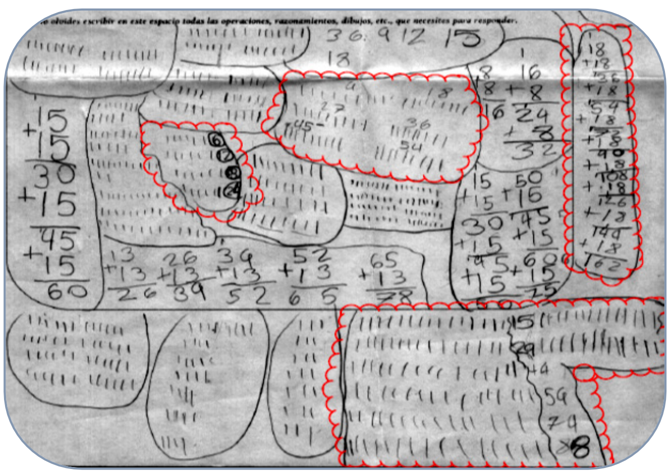


Figura 31. *Respuesta a tarea de reflexión, juego de la canasta. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 20.*

En los procedimientos mostrados en las figuras 31 y 32 la iconicidad de la representación coincide con la forma de relación entre las cantidades: cada grupo representa una ficha en un determinado color, y la cantidad de rayas en el grupo el valor de cada ficha. Es importante resaltar entonces que estas formas de representación están objetivando la relación *una ficha, puntos por esta ficha* (al representar el valor de la ficha con un grupo de rayas verticales), y por ende, la repetición de *n* de tales grupos objetivan la cantidad de fichas y la cantidad de puntos se objetiva en el conteo del total de las rayas dibujadas.

En particular, es de notar cómo en los procedimientos mostrados en la figura 32 si bien se representan los valores de las fichas con rayas horizontales, y hay tantos grupos como fichas en un determinado color, hay un apoyo en la representación numérica para determinar el total de puntos obtenidos sumando tantas veces el valor de la ficha, como fichas en un determinado color. El recurso de las representaciones simbólicas ahora ofrece otras posibilidades para la acción de los estudiantes.

Esto muestra un aspecto fundamental para la comprensión de las situaciones multiplicativas: se ponen en correspondencia dos procesos de variación de tal forma que una cantidad se repite tantas veces como unidades hay en otra cantidad (al menos en estas situaciones donde las cantidades son discretas). Esta forma de comprender las relaciones multiplicativas es la que está en el libro VII de los elementos de Euclides (ver sección 4.3 capitulo anterior), y nos muestra que la interpretación tradicional de la multiplicación como

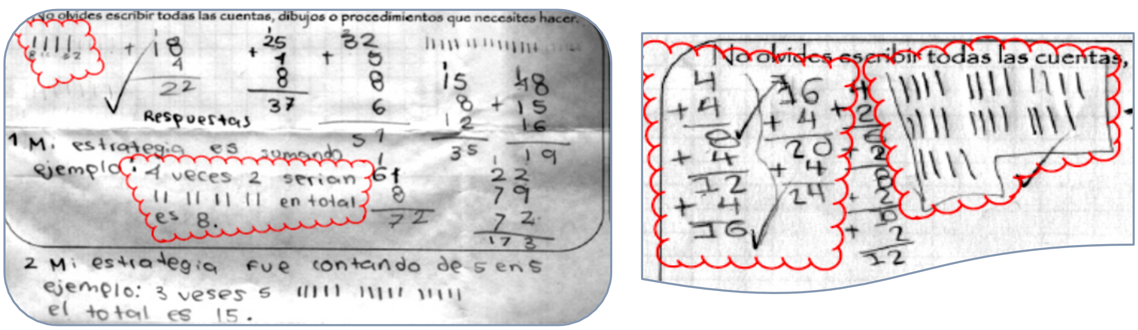


Figura 32. *(Izquierda) respuesta tarea de reflexión, juego de la canasta. (Derecha) respuesta situación (tarea) 1 taller inicial. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p 20. Y Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 43.*

abreviación de una sola suma de sumandos iguales no deja ver el trasfondo conceptual que da soporte a la multiplicación como objeto de conocimiento, a saber, la razón entre dos cantidades y la coordinación de los dos procesos de conteos correlacionados por dicha razón.

Así pues, la puesta en correspondencia de los dos procesos de variación, por lo visto hasta el momento, y por tratarse de cantidades discretas, se puede referir como la coordinación de dos procesos de conteo. Pero coordinar dichos procesos de conteo implica que para cada uno de los sistemas de cantidades se identifique una cantidad que se

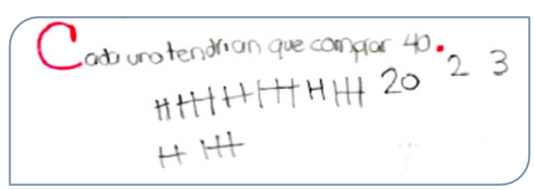


Figura 33. *Respuesta situación (tarea) 4 del taller inicial. Archivo de imagen Diagnostico_3_ABC, p. 4.*

repite –unidad para contar–, y que se coordine la repetición de ambas unidades. Esta identificación de las dos unidades de conteo y su repetición se evidencia con más fuerza en los procedimientos analizados a continuación.

La figura 33 (respuesta a la situación (tarea) 4)[224] muestra una representación icónica a partir de la cual el/la estudiante logra coordinar los dos conteos implicados en la tarea: por cada dos rayas verticales cruzadas por una horizontal, hay tres rayas verticales igualmente cruzadas por una horizontal, lo cual representa la relación (razón) "*por cada dos vídeos que Mateo compre, la mamá le regala tres*". La conciencia de esta forma objetivada de la relación se evidencia con el 2 y el 3 que aparecen escritos al lado del dibujo. La repetición de esta estructura cinco veces, objetiva el proceso de variación conjunto de ambas cantidades. Obsérvese entonces cómo esta representación icónica objetiva tanto la razón como el procedimiento para controlar la variación conjunta de ambas cantidades. Situación similar se evidencia también en la figura 26, en donde los cuatro círculos encima del número 200 representan los cuatro dulces, y el 200, el valor de tal cantidad de dulces, y la repetición de dicha estructura modela el proceso de variación conjunto de ambas cantidades.

El siguiente diálogo entre el profesor y un alumno muestra que la comprensión necesaria en la coordinación de estos dos procesos de conteo pasa por varios momentos, y que la representación icónica de las cantidades es una estrategia fundamental para lograrlo.

Diálogo 3*. Fragmento tomado del archivo de audio 2008_09_30_10_10_Grado 3 juego canasta*

23:37	P:	a ver, y cómo hacías esto-así-cada-que.
23:40	A:	cuatro – cuatro por - por ocho
23:44	P:	y cómo lo haces
		((*pausa*))
23:48	A:	multiplicando
23:48	P:	um:ju:
23:50	A:	pero primero necesito es: su:mar para. para poder.
23:55	P:	que sumas, que sumarias
		((*se escuchan otras voces*))
23:57	A:	o:cho, – má:s cuatro
24:01	P:	ocho más cuatro?
24:03	A:	ocho - ocho veces cuatro,
		((*se escuchan otras voces*))
24:07	P:	cuántas fichas son?
24:07	A:	°cuatro°

[224] La situación (tarea) 4 se presentó en el trabajo inicial con los estudiantes del grado 3 y era la siguiente: **Situación 4:** Mateo quiere tener 20 videojuegos y su mamá le propuso un trato. Cada vez que Mateo compre dos videojuegos con sus ahorros, la mamá le va a regalar tres videojuegos. ¿Cuántos videojuegos tendrá que comprar Mateo y cuantos tendrá que darle su mamá?

24:09	P:	cuatro
24:10	P:	entonces aquí cada ficha cuánto vale
24:13	A:	va:len::, vale ocho
24:15	P:	si quieres haz un dibujito ahí para veas como – cuatro fichas -dibuje las cuatro fichas ((*pausa*))
24:27	P:	cuánto vale cada ficha
24:29	A:	valen - ocho
24:31	P:	um:ju: ((*un fragmento inaudible por parte del estudiante, donde parece contar*)) um:ju:
24:36	A:	cada una vale ocho
24:37	P:	entonces que es lo que vas a suma-a-sumar
24:49	A:	a sumar las fichas
24:41	P:	um:hu: ((*negativamente*))
24:41	A:	el total de cada una
24:43	P:	exactamente, – eso, entonces como haces esa cuenta. ((*voz inaudible del estudiante*)) a:.ja:=
	A	=o multiplicación, más fácil ((*voz de otro estudiante*))
24:52	P:	pero como él todavía no se las sabe todas las multiplicaciones de memoria entonces se las está apenas apren↑diendo ((*voz inaudible del estudiante*))
25:01	A:	ocho más ocho (entonces me) queda dieciséis
25:04	P:	ah:ja: correcto
25:06	A:	daría – (espérate) – °dieciséis° - entonces - daría dieciocho – entonces más otro daría
25:20	P:	no, dieciséis mas ocho cuánto da? ((*voces de otros estudiantes mientras el estudiante cuenta de uno en uno*))
25:28	A:	VEINTE, da veinte – ((*voces de otros estudiantes*)) ya los sume to::dos
25:30	P:	um:hu: ((*negativamente*)) ((*voces de otros estudiantes*))
25:37	A:	!ah:¡ ↑MAS OCHO!
27:38	P:	más ocho, estabas sumando era cuatro no más=
	A	=eso es lo que le estaba diciendo a él ((*voz de otro estudiante*))
25:44	A:	VEINTICUATRO
25:45	P:	veinticuatro, ya cuántos-cuántas veces has sumado el ocho
25:48	A:	(tres)
25:49	P:	tres
24:50	A:	veinticuatro - mas ocho – °cuatro más cuatro° – =
	A	=le puedo ayudar, pero no decirle la respuesta - ((*le pregunta un estudiante al profesor*))=
	A	=cuatro más ocho – °cuatro más ocho – cuatro más ocho° –
26:25	A:	treinta y dos.
26:26	P:	Um:ju: ((*afirmativamente*))

Las entradas 23:37 a 24:03 muestran que para el estudiante no es muy claro el sentido de la multiplicación que le permite calcular el total de puntos de las cuatro fichas (en la zona que da 8 puntos por ficha). La entrada 23:48 da la impresión de que el estudiante comprendió que debe realizar una multiplicación, sin embargo, las entradas 23:50 y 23:57, muestran que no es así, pues se asume la acumulación de las dos cantidades (el de fichas, y el del total de puntos) como si fuera un proceso aditivo (quizás pensando en que la multiplicación es una suma abreviada). Esto lo lleva a proponer que debe sumar el total de fichas con el ocho (los puntos que da cada ficha). Así, a pesar de reconocer los dos sistemas de cantidad, y el movimiento de cambio en cada uno de ellos, no hay conciencia de que se trata de dos procesos acumulativos distintos que se deben coordinar uno con el otro. La repetición del profesor, que parafrasea la operación que dijo tenía que realizar, y en un tono interrogativo (entrada 24:01), de alguna manera pone en duda lo que el estudiante había enunciado anteriormente, y esto le lleva a rectificar afirmando "ocho veces cuatro" (entrada 24:03).

Las entradas 24:07 a 24:13 muestran una intervención del profesor intentando asegurar que el estudiante tenga claro cuál es la relación que coordina los dos procesos de variación de las *cantidades* en ambos *sistemas de cantidades*: cantidad de fichas y cantidad de puntos. Los dos momentos donde el profesor pregunta "¿cuántas fichas son?" (entrada 24:07) y luego, "entonces, ¿aquí cada ficha cuánto vale?" (entrada 24:10) van centrando la atención del estudiante en la razón *una ficha ocho puntos*. La intervención del profesor en la que sugiere realizar una representación gráfica de las fichas (entrada 24:15) introduce una técnica que busca ayudar al estudiante con un procedimiento que le permita coordinar los dos procesos de variación: en la gráfica se tienen representadas las cantidades de uno de los dos sistemas de cantidades, y con la interrogación "¿cuánto vale cada ficha?" (entrada 24:27) continua centrando la atención del estudiante en la razón *una ficha ocho puntos*. La respuesta del estudiante muestra que hasta el momento va distinguiendo las cantidades y la razón que gobierna el cambio en dichas cantidades. La confrontación que el profesor realiza en la entrada 24:37 busca ahora fijar la atención en las cantidades del otro sistema de cantidades, pero a la vez, pretende confrontar al estudiante con el procedimiento que había enunciado en la entrada 23:50, en donde había expresado que debía realizar una suma. La respuesta del estudiante "sumar las fichas" (entrada 24:49), y la exclamación del profesor que desaprueba lo dicho (entrada 24:41), hacen que el estudiante centre su mirada en las cantidades del otro sistema de cantidades: el total de puntos. En el resto del diálogo se muestra una serie de interacciones entre el profesor y el estudiante sobre los procedimientos que adelanta para realizar el cálculo del total de puntos correspondiente a las cuatro fichas. Inicia sumando 8 más 8, sin que muestra ninguna dificultad, y luego al pretender sumar otras 8 unidades más, tiene dificultad, no tanto porque no pueda sumar 16 más 8, sino porque solo suma 4, quizás pensando en las cuatro fichas, y no tanto en los 8 puntos de una ficha más. La negación del profesor (entrada 25:30) es clave en la corrección del estudiante, pero sobre todo, en la toma de conciencia de qué tiene que repetir, lo que se evidencia en la expresión en tono fuerte y de asombro: “Ah, es ocho”. Esa expresión, y el que en la siguiente etapa de la suma ya no presentará dificultades, es evidencia clara de la *objetivación* por parte del estudiante de la razón que gobierna el cambio coordinado entre la cantidad de fichas y de puntos y del procedimiento que le permite realizar la coordinación de los dos procesos de cambio. Esta objetivación está mediada por unas formas de representación icónica y por el uso de los números para realizar las cuentas necesarias (con el apoyo de las representaciones icónicas) que le permiten “ver” (las cantidades y la razón entre ellas),[225] “controlar” (hasta donde debe contar) y “coordinar” (cuantos puntos para tantas fichas) los dos procesos de conteo iterado, y por supuesto, por las interacciones con el profesor que permiten en los estudiantes ciertas formas de posicionamiento (identificar aciertos y equivocaciones, cambios en las estrategias de trabajo, comprensión de relaciones, etc.) frente a su actividad.

Esta coordinación de los dos procesos de conteo a partir de representaciones icónicas y simbólicas, que objetivan las cantidades y el control de la variación de las cantidades en cada uno de los sistemas de cantidades, al igual que la relación (razón) que permite coordinar los dos procesos de variación se puede ver igualmente en las siguientes imágenes tomadas de los cuadernos de trabajo de los estudiantes.

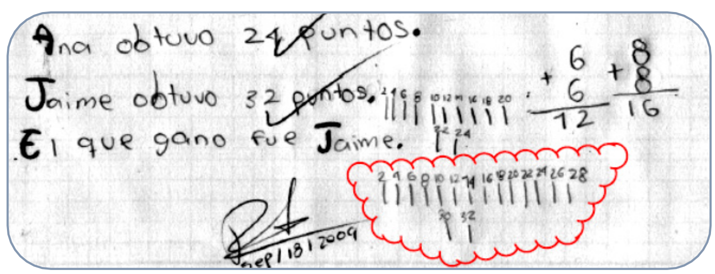


Figura 34. *Respuesta situación (tarea 1) del taller inicial. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 39.*

---

[225] Las cantidades de ambos sistemas se pueden representar de manera física o simbólica, pero la relación (razón) entre las cantidades correspondientes es una inferencia que emerge de la situación. Inicialmente cuando el estudiante dice que debe sumar ocho (puntos) más cuatro (fichas) lo hace porque él ve esas dos cantidades y, además, intuye que las debe sumar (quizás porque la situación alude a procesos de acumulación de cantidades), pero ese conocimiento no le permite desarrollar un procedimiento exitoso. Las intervenciones del profesor centran su atención en las cantidades, de un lado, y en la forma de relación entre ellas, de otro lado. Esto le permite entonces un cambio de foco en los procedimientos realizados, llegando finalmente a una solución exitosa de la tarea.

La figura 34 (respuesta a la situación (tarea 1)) muestra una representación icónica de los bolos derribados (cada raya vertical significa un bolo de derribado) y encima de cada bolo el total de puntos acumulados en un conteo sucesivo de dos en dos desde el primer bolo derribado (primera raya de la izquierda). La representación icónica de los bolos permite controlar el proceso de variación en el sistema de cantidades definido por la cantidad de bolos derribados, y los números puestos encima de cada bolo permiten controlar la variación en el sistema de la cantidad de puntos. La operación "*más dos*" que se evidencia en la secuencia de los números escritos encima de cada raya (bolo), objetiva la razón *un bolo dos puntos:* por cada nueva raya (bolo), se agregan dos puntos al puntaje acumulado con la raya (bolo) anterior.

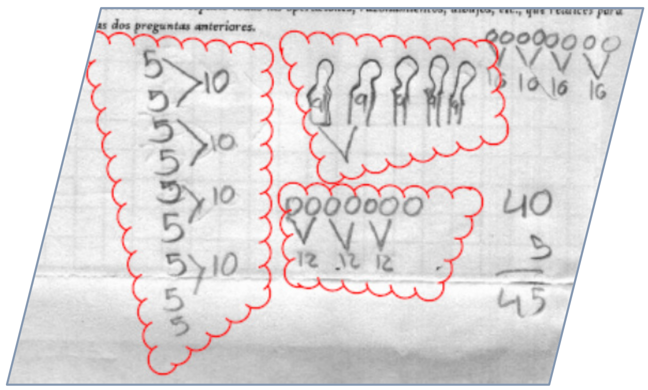


Figura 35. *Respuesta tarea reflexión, juego de bolos. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 30.*

La figura 35 muestra un caso similar a los anteriores en donde la representación icónica de los bolos (dibujado en unos casos como una botella, y otras como un círculo pequeño) ayuda en el control de la cantidad de bolos derribados, y la razón *cantidad de puntos por cada bolo derribado* es representada explícitamente con un número en el interior del dibujo de cada bolo (el nueve en interior de los bolos con forma de botella), o implícitamente en las agrupaciones de dos bolos que son puestos en correspondencia con el puntaje total que les corresponde (dos círculos unidos con una V al número 10 en un caso, o al 12 en otro caso). La suma de estas parejas de valores permite calcular el puntaje total obtenido.

En estos casos hay una combinación entre representaciones icónicas, acompañadas de representaciones simbólicas (uso de números), que permiten llevar el control de los dos procesos de variación acumulativa (el dibujo icónico para los objetos físicos: los bolos, y los

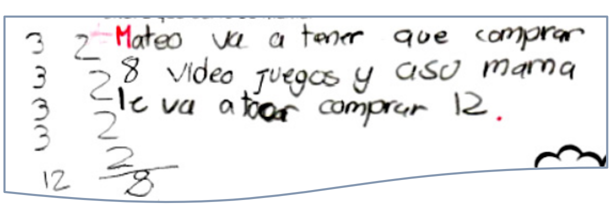
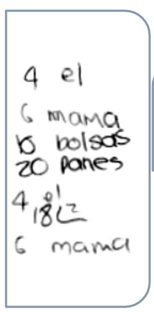


Figura 36. *Respuesta situación (tarea) 4 del taller inicial. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p 16.*

números para las cantidades: el puntaje total y la relación que asigna a cada bolo un determinado valor). Estas formas de representación combinada permiten a los estudiantes una objetivación de las cantidades en cada sistema, de la relación entre dichas cantidades, y de los procedimientos para llevar a cabo el control y coordinación de los dos procesos de conteo que permiten resolver el problema. Esto les entrega capacidades operatorias para controlar los dos procesos de acumulación, y por ende, de la correlación entre la cantidad de bolos con la cantidad de puntos que les corresponde.

En los procedimientos mostrados en la figura 36 o en la figura 37, el uso de los números para la representación de las relaciones entre las cantidades, y por ende, para controlar su proceso de variación, abre la posibilidad de nuevos procedimientos y, en consecuencia, un nuevo nivel de objetivación de la razón que regula el proceso de variación de las cantidades involucradas en la tarea. Así, en ambos casos, los números 2 y 3 puestos uno al lado del otro (figura 36), o uno debajo del otro y encerrados en un círculo (figura 37, derecha), son una forma de representar la relación entre las dos cantidades (2 videos juegos comprados por Mateo, tres video juegos comprados por la mamá), y la cantidad de veces que esta pareja de números se repite es una manera de controlar los dos procesos de variación hasta completar la cantidad total de videojuegos que se requiere (20 videojuegos).



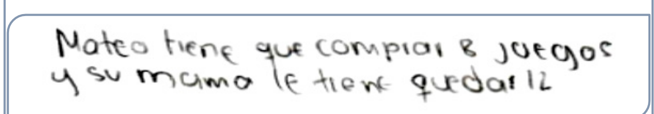


Figura 37. *Respuestas situación (tarea) 4 del taller inicial. Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 2 (derecha) y p. 6 (centro e izquierda).*

Algo similar se puede ver en la figura 27 (al final de la sección 5.4.1), en donde cada vez que se suma un 200 (el valor de cuatro dulces) al total acumulado (y en la parte superior) se van poniendo los números 8, 12, 16 y 20, los cuales representan el total de dulces que se van acumulando con cada \$ 200 agregado. Este doble conteo es posible gracias a la objetivación de la relación que regula el proceso de variación de las dos cantidades: *cuatro bananas son 200 pesos.*

5.4.2.3 Representaciones numéricas y coordinación de un doble conteo

En los casos en que los estudiantes representaron las relaciones entre las cantidades, y por ende, el proceso de variación a partir de números naturales, se evidenciaron procedimientos que muestran mayor conciencia y control tanto de la razón que relaciona las dos cantidades, como del proceso de variación de ambas cantidades.

Los tres procedimientos mostrados en la figura 38, si bien presentan pequeñas diferencias (no despreciables por cierto) tiene algo en común: se basan en sumar la misma cantidad, tantas veces como fichas en un determinado color (en el juego de la canasta) o bolos derribados (en el juego de los bolos). Como se mencionó anteriormente, la cantidad de veces que se repite el sumando ocho, o el sumando cuatro, está controlando la cantidad de fichas (bolos) cuyo valor es ocho, o cuyo valor es cuatro, y el número cuatro o el número ocho, representan el valor de puntos por cada ficha (bolo). Esto es, detrás del valor cuatro puntos, o el valor ocho puntos, aparentemente números absolutos, se esconden dos razones que expresan la razón “puntos por cada ficha”.

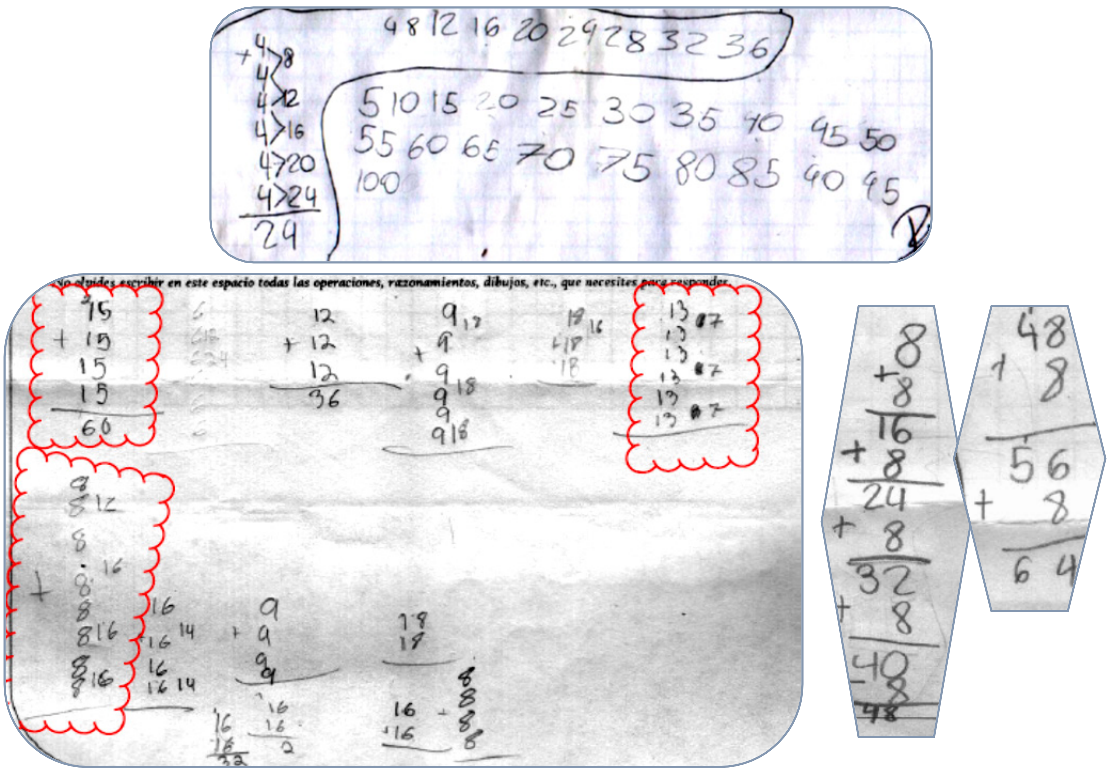


Figura 38. *Respuesta tarea de reflexión, juego de la canasta (superior e izquierda) y juego de los bolos (derecha). Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, pp. 17 (arriba), 18 (derecha) y 25 (izquierda).*

El total de puntos se obtiene de dos maneras diferentes, bien a partir de un conteo sucesivo de cuatro en cuatro (como es el caso del fragmento de la parte superior) o bien sumando por los medios convencionales (los otros dos fragmentos). En cualquiera de los casos se tiene control de los dos procesos de acumulación: el de la cantidad de fichas (bolos), y el del puntaje total obtenido. No debe confundirse este procedimiento con el de la suma abreviada como interpretación de la multiplicación, pues en este caso, si bien un mismo número se suma una cierta cantidad de veces, se tienen dos sumas iteradas que coordinan los procesos de variación de las *cantidades* en los dos *sistemas de cantidades* (cantidad de fichas, o cantidad de bolos y la cantidad de puntos obtenidos) a partir de la razón que expresa la cantidad de puntos que otorga cada ficha (bolo).

Los dos procedimientos de la figura 39 ratifican lo dicho en los párrafos anteriores sobre el control de los dos procesos de conteo, y por ende, de la variación de las dos cantidades. Sólo restaría llamar la atención sobre la manera como se calcula cinco veces 80 en el caso del fragmento de la izquierda, pues al sumar dos veces 160, se tiene conciencia de que se llevan cuatro veces el 80, y sólo resta sumar a dicho total un 80 más.

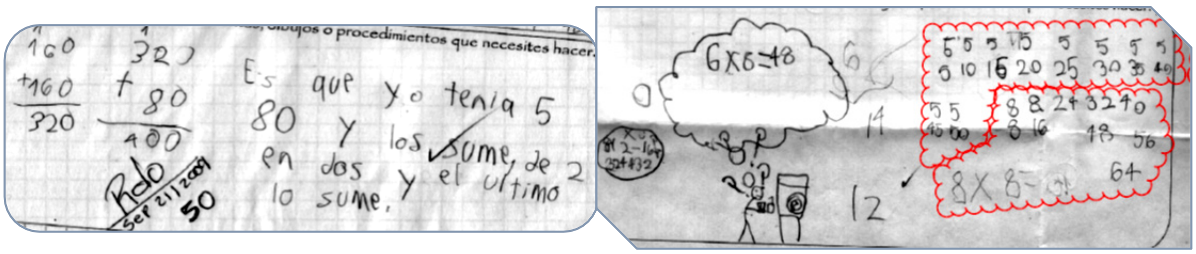


Figura 39. *Respuesta tarea de reflexión, juego de la canasta.*
Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 65 (derecha), 54 (izquierda).

Para el caso del fragmento de la derecha, se ve un intento de relacionar la multiplicación con los dos procesos de conteo, uno que va sucesivamente calculando el total acumulado, y otro en el que se controla las veces que se repite una determinada cantidad. Esta forma de controlar los dos procesos de conteo se ve con más fuerza en el fragmento mostrado en la figura 40, en donde emulando una tabla horizontal se organizan tanto la cantidad de veces que se repite una determinada cantidad, como el total acumulado en dichas repeticiones.

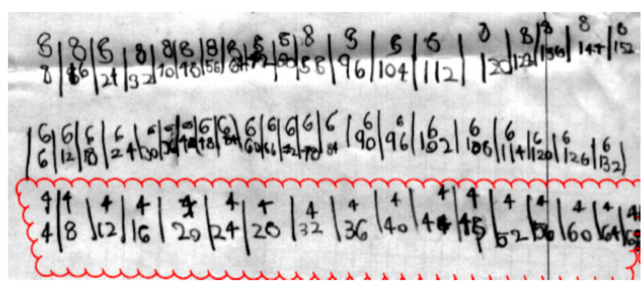


Figura 40. *Respuesta tarea de reflexión, juego de la canasta.*
Archivo de imagen Grado_3_2009_Periodo-1, p. 67

Así entonces, lo que estos procedimientos nos muestran es cómo las diferentes formas de representación utilizadas por los estudiantes les permiten objetivar varios elementos claves en la construcción de las relaciones multiplicativas implicadas en las diferentes situaciones:

1. En primer lugar, diferenciar los dos sistemas de cantidad cuyo proceso de variación está correlacionado a partir de una cierta relación (la razón de puntos obtenidos a las fichas o bolos derribados), y en segundo lugar, objetivar la relación (razón) que pone en correspondencia las cantidades en uno de los sistemas con las cantidades del otro sistema.

2. A partir de lo anterior, coordinar los dos procesos de conteo, lo que a su vez implica:
    a. Identificar la unidad de conteo que se repite en cada uno de los dos sistemas de cantidades.
    b. Dada una cantidad *A* en uno de los sistemas de cantidades, repetir la unidad de conteo en el otro sistema de cantidades tantas veces como esta cantidad *A* contenga la unidad de conteo de su sistema de cantidades.
3. Y finalmente, obtener el resultado a partir, bien de conteos sucesivos, o a partir de la suma de una misma cantidad un cierto número de veces, o a través de una multiplicación.

Estos tres elementos muestran que la multiplicación como la abreviación de una suma iterada de un mismo sumando es una interpretación que simplifica al extremo la complejidad subyacente a la comprensión de la multiplicación, pues de un lado, en una situación multiplicativa intervienen dos *sistemas de cantidades* (y no uno como daría a entender la suma iterada[226] de un solo sumando) que se correlacionan a partir de una razón constante, y de otro, es necesario poner en correspondencia dos procesos de conteo iterado. Es decir, en la multiplicación no hay uno, sino dos procesos de conteo iterado que se correlacionan uno al otro.

5.4.3 Multiplicar: la noción de razón en el centro

Las diferentes tareas propuestas a los estudiantes les permitieron constituir (de manera empírica) un conocimiento sobre la multiplicación. Los juegos brindaban una forma de tratar con situaciones que implicaban poner en relación *cantidades* pertenecientes a dos *sistemas de cantidades* diferentes, y además, la acumulación sucesiva de fichas, canicas, bolos, etc., les permitía ver el comportamiento de la acumulación de los puntajes respectivos.

Así por ejemplo, en el juego del tiro al blanco, los estudiantes para calcular la cantidad de puntos obtenidos por las fichas en cada una de las franjas de color, tienen la posibilidad de tocarlas, moverlas, reorganizarlas, al tiempo que van contando de tres en tres, de seis

[226] En la suma iterada al estilo de Peano también concurren dos *sistemas de cantidades*; lo que sucede es que se le oculta al estudiante (y probablemente a la mayoría de los matemáticos) que el cardinal n que se repite pertenece a un sistema de cantidades (la numerosidad de un conjunto de elementos discretos coexistentes en el espacio-tiempo) diferente del sistema al cual pertenece el número de veces m que se repite ese cardinal n (la iteración acumulada de acciones sucesivas en el continuo temporal). Tomado de conversación personal con el profesor Carlos Eduardo Vasco.

en seis, etc. Acciones como tocar las fichas, moverlas de un lado a otro, mientras se hace el conteo, son claves para ir comprendiendo la naturaleza de los dos tipos de sistemas de cantidades que se involucran en la tarea, al igual que el papel de la regla de correspondencia (la razón) que permite poner en relación las cantidades de cada sistema, para el caso de este juego, el valor de cada ficha según el color (ver, en el anexo 2, archivo de *video Grado 3 tiro al blanco*, especialmente episodios 3 y 4).

Esta experimentación física con las fichas, los bolos, o con las representaciones icónicas de las cantidades era favorecida por los tipos de problema que se proponen a partir de las condiciones delimitadas por los juegos: correspondencias 1 a n ($n \leq 10$), conteos iterados menores a 10, etc. Por el contrario, las tareas basadas en estados hipotéticos de los juegos permitieron ampliar considerablemente los rangos numéricos y la complejidad de las relaciones, lo que generó la necesidad de formas de representación más elaboradas que, al ampliar la capacidad operatoria con las cantidades, permitieron procedimientos más sofisticados. Este conjunto de acciones igualmente permitió la objetivación de una noción de razón como aquel objeto que les permitía una comprensión de la correlación entre las cantidades, y además, que les otorgaba cierta capacidad operatoria sobre dicha correlación. De esta manera los estudiantes pudieron tratar empíricamente con los procesos de conteo necesarios en las situaciones multiplicativas, y la objetivación de un conocimiento empírico sobre las leyes de comportamiento que gobiernan la covariación presente en estas situaciones.

Así entonces, el trabajo realizado sobre el aprendizaje de la multiplicación fija la atención de los estudiantes sobre los siguientes elementos. Primero, en la cantidad de fichas de un lado, y en la cantidad de puntos de otro, lo que permite diferenciar claramente los dos sistemas de cantidades sobre los cuales se trabaja. Segundo, la razón "cantidad de puntos por cada ficha",[227] que permite poner en correspondencia cantidades de un sistema con las cantidades del otro. Y finalmente, el puntaje asignado a cada ficha (según las características del juego), que se repite tantas veces como fichas obtenidas, y que es lo que permite establecer la correspondencia entre la cantidad de fichas y puntaje total por esas

[227] En el sentido estricto de la palabra, no se tiene evidencia de que los estudiantes hayan llegado a este nivel de formulación de la razón entre fichas y puntos, pero como se ha mostrado ampliamente hasta el momento, este tipo de razón fue utilizada bajo otras formas de objetivación. Esto muestra que la idea de razón en estos estudiantes aún requiere más elaboración, pero también es necesario reconocer que estos estudiantes están experimentando su primer contacto con el estudio formal de lo multiplicativo.

fichas. Esta regla de correspondencia es una forma de objetividad de la razón que funciona como una especie de operador que, aplicado sobre la cantidad de fichas, produce el puntaje total.

La regla de correspondencia da paso a la idea de razón, en virtud de las tareas propuestas que exigen analizar el comportamiento del conjunto de parejas de valores obtenidos en una determinada sección del juego. Un ejemplo de ello se puede ver en el siguiente fragmento de diálogo entre profesora y alumno, completando los valores que corresponden a la quinta fila de la tercera tabla de la figura 16, a saber, calcular cuánto puntaje se corresponde con la cantidad de 243 fichas:

Diálogo 4. *Fragmento tomado del archivo de audio 2008_10_07_10_15*

26:18	A:	aquí tiene que dar ciento y algo, cierto?
26:23	P:	más
26:27	A:	(entonces) tiene que dar doscientos algo porque, porque:: ocho más ocho más ocho tiene que dar - si, ocho y ocho so::n: dicisé::is, más otro-más otro-más otros ocho - doscientos cuarenta y tres.
26:43	P:	y el doble?=
	A:	=hay:! ((*una expresión de euforia*))=
	P:	=porque ya sabemos que de aquí a aquí es el doble ((*refiriendo a los valores de la segunda columna que implica calcular el doble de 243*))
26:48	A:	ya. el doble tiene que ser, - entonces el doble de dos es cuatro, - el doble de cuatro es ocho, - el doble de tres es seis, - entonce::s, - ya, huy::! ((*expresión de júbilo*))

En la entrada 26:43 profesora recuerda que los valores de una de las casillas en la fila son el doble de los valores de la otra casilla en la misma fila, y el estudiante procede de acuerdo con ello: calcula el doble de 243. De repetir el dos tantas veces como fichas (por supuesto, en este caso, repetir 243 veces el dos es tarea casi imposible) se ha dado paso al "doble de…", en lo que se evidencia una idea más clara de la razón tanto como relator (pone en relación una cantidad con otra que es su doble) como operador, pues si se aplica a una de las cantidades permite obtener aquella con la que se relaciona. Si se compara este tipo de procedimientos con los analizados en la sección anterior, en donde la razón era usada como criterio para coordinar los procesos de sumas iteradas, se ve entonces que por el tipo de cantidades involucradas, y por los instrumentos de representación usados, las tablas, se da lugar a otro tipo de procedimientos en donde la regla de correspondencia abre el camino a formas de acción de otra naturaleza: una idea de razón entre cantidades que ahora es una constante que aplicada sobre cualquier cantidad del primer sistema de cantidades, permite obtener su cantidad correspondiente en el otro sistema de cantidades.[228] Ese valor instrumental de la tabla y el carácter operatorio cristalizado en la noción de razón se puede ver en el siguiente diálogo, en donde se reflexiona sobre la tabla de la izquierda de la figura 16.

Diálogo 5. *Fragmento tomado del archivo de audio 2008_10_07_11_39*

9:50	P:	(que quiere decir) que aquí haya un uno y aquí un cuatro.
9:54	A:	que:::n, una-una ficha y ganó cuatro puntos
10:00	P:	ganó cuatro puntos, muy bien, entonces sí se encestara dos fichas
10:04	A:	si encestara dos fichas ((*murmullo no audible*))
10:07	P:	por qué ocho
10:09	A:	porque:: - uno es cuatro?
10:14	P:	y el siguiente ((*refiriéndose al puntaje de las tres fichas*))
10:16	A:	da:: da:: eh:: catorce
10:20	P:	catorce? por qué catorce
10:24	A:	((*poco audible*)) eh::: porque ocho más cuatro, doce!
10:29	P:	Ah::! Doce - y aquí ((*señalando la celda donde está escrita la cantidad de 6 fichas*))
10:34	A:	((*no es audible*))
10:40	P:	Por qué veinticuatro
10:42	A:	((*no es audible*))
10:50	P:	y ahora sí las que dice la profesora - si esta tabla siguiera llegaríamos al veinticuatro, veinticuatro fichas, cuántos puntos darían esas veinticuatro fichas ((*la profesora a adicionado un par de filas a la tabla dada inicialmente, con el fin de proponer un ejercicio con el cual confrontar la estrategia de solución empleada por los niños*))
11:04	A:	((*se oyen expresiones de asombro y risas*)) hay si me corchaste - cuarenta y ocho?
11:18	P:	Cuánto?
11:18	A:	cuarenta y ocho
11:20	P:	u::m, por qué cuarenta y ocho
11:22	A:	no se, ((*expresiones no audibles mientras hace cuentas mentalmente*)) ochenta:::: no - -
11:57	A:	ochenta o noventa.
11:59	P:	y por qué piensas que es por ahí entre ochenta y noventa, a ver
12:04	A:	porque seis más seis es doce=
	P:	=si::=
	A:	=doce más doce es veinticuatro=
	P:	=ah:ja:!
12:12	A:	sería cuatro veces=
	P:	=cuatro veces que=

[228] En el archivo de audio 2009_11_17(1) (anexo 2), fundamentalmente los episodios 1, 3 y 4, se pueden ver situaciones similares en donde el estudio de las tablas de valores, y el tener que tratar con números grandes, permite el desarrollo de otras estrategias de cálculo, las cuales ya dan una idea de comprensión de la regla de correspondencia como una razón constante.

	A:	=cuatro veces veinticuatro=
	P:	=cuatro veces veinticuatro ((*afirmando*))
12:18	A:	veinticuatro más veinticuatro es cuarenta y ocho. cuarenta y ocho más veinticuatro:: es setenta y dos no?
12:26	P:	cuarenta y ocho más veinticuatro=
	A:	=setenta y dos=
	P:	=ah:ja: - más otros veinticuatro
12:35	A:	noventa y seis ((*expresiones de alegría*))
12:38	P:	si ve que si sabe

En las entradas 9:50 a 10:00 se ve la exploración realizada por el investigador sobre la comprensión de los elementos claves de la información consignada en la tabla: qué tipo de cantidades se escriben en cada casilla de una fila, y la razón que relaciona ambas cantidades. De la entrada 10:04 a 10:42 se van completando los valores faltantes en la tabla, lo que muestra que efectivamente hay comprensión por parte del estudiante de las cantidades, sus relaciones, y sobre todo, claridad en un procedimiento para calcular la cantidad de puntos a partir de la cantidad de fichas. En la entrada 10:50 se introduce la reflexión central: calcular la cantidad de puntos que se corresponden a 24 fichas. Este tipo de situaciones no son posibles en el momento de realizar el juego, pues el máximo número de fichas que se usa es 10. El diálogo que se sucede entre las entradas 12:04 y 12:12 es crucial: el estudiante, al decir "seis y seis son doce" y luego "doce y doce veinticuatro" está comprendiendo que entre el 6 y el 24 hay una relación: 24 es cuatro veces el 6, o que el 6 está contenido cuatro veces en el 24. Luego al decir "cuatro veces veinticuatro" está trasladando esa relación a las cantidades de puntos: no se sabe cuántos puntos son las 24 fichas, pero si se sabe que esa cantidad de puntos debe ser 4 veces 24.

La tabla posibilita entonces reflexiones sobre situaciones que en los juegos reales no son posibles, y esas reflexiones sobre eventos hipotéticos movilizan nuevos procedimientos. En la sección 5.6 (este capítulo) se analizan con detalle estos procedimientos, pero por el momento se puede llamar la atención sobre la manera como se ve la emergencia de una cierta noción de proporcionalidad directa entre las cantidades de los dos sistemas de cantidades, noción que se abre paso a partir de esta primera objetivación de la razón como una constante que permite poner en correspondencia ya no solo parejas de cantidades, sino familias de cantidades. Dicho de otra manera, en esta forma de comprender la multiplicación las situaciones que emergen de los juegos tienen en el fondo una idea de proporcionalidad directa.

5.4.4 Dividir: diferentes aproximaciones

Como se expresó en secciones anteriores, las tareas propuestas a los estudiantes al tiempo que permitían procesos de estudio sobre la multiplicación lo hacían con la división y, en cierta forma, el conocimiento adquirido sobre la una apoyaba las conceptualizaciones que se iban requiriendo en la otra. De esta manera, la noción de razón, clave en la comprensión de las tareas que implicaban multiplicar, es igualmente una idea clave en la comprensión de aquellas en donde se debe realizar una división; o conocimientos sobre hechos multiplicativos son la base para los procedimientos necesarios al realizar una división. El siguiente diálogo evidencia que esta dualidad entrega medios instrumentales para la acción de los estudiantes, permitiendo aprendizajes sobre lo multiplicativo de manera integral.

Diálogo 6. *Fragmento tomado del archivo de audio 2009_03_17_10_14*

0:06	e:	cuatrocientos dividido dos=
	p:	=cuatrocie::ntos?=
	e:	=es el ejemplo que tu diste
0:10	p:	es el ejemplo que yo di. listo. cuánto da cuatrocientos dividido dos
0:14	e:	doscientos
0:16	p:	por qué?
0:16	e:	porque la mitad de dos
0:20	p:	porque la mitad de cuatrocientos es doscientos y como. °y como lo compruebo que si está bien°
0:27	e:	doscientos. doscientos por dos es igual a cuatrocientos
0:33	p:	porque doscientos por dos es igual a cuatrocientos
0:35	p:	de eso se trataba la tarea. qué otro número salió en la tarea, a ver
0:39	e:	treinta dividido seis
0:41	e2:	da cinco
0:42	p:	treinta – ↓dividido seis
0:49	e:	cinco cinco=
	p:	=esperen un momentito, cuando yo veo esto treinta dividido seis eso que quiere decir
0:53	e:	la mit. la mit.
0:54	e2:	la mitad de. de lo que (yo tengo)
1:00	p:	sesenta lo voy a dividir
1:02	e3:	la mitad de la mitad de la mitad
1:09	p:	estoy hablando con ella ahora te doy la palabra
1:10	e:	lo voy a descomponer?
1:11	p:	lo voy a descomponer? como lo voy a. qué será que hago con este treinta cuando me dicen – >treinta dividido seis, que hago yo aquí<
1:23	e:	que el treinta lo divido en seis partes
1:24	p:	A:h! que el treinta lo divido en seis partes. – cómo tienen que ser esas partes. -- no!, como tienen que ser, iguales, una más grandes, unas más chicas, por

		que yo.
1:35	e:	ahí
1:36	e:	tienen que ser iguales
1:37	p:	y por qué te dio cinco Christian
1:47	e:	porque lo comprobé
1:48	p:	usted lo comprobó diciendo que cinco por seis es treinta, pero porque le dio cinco?
		((*una pausa larga mientras espera la respuesta del estudiante, hasta que otro compañero responde*))
2:09	e2:	porque-porque lo hicimos en la tabla el cinco
2:13	p:	a:h, usaste aquí la tabla del cinco?
2:14	e2:	no: no pues. en la de::. - ehm::. - cinco: po:r sei:s. porque la hicimos en la tabla del cinco, entonces - cinco
2:22	p:	a::h, porque encontrarste un número que multiplicado por 6 diera el cinco=
	e2	=a:ja=
	p:	=pero en realidad como yo estoy dividiendo cómo será que yo hago esto? - cómo estoy repartiendo en seis partes
2:36	e:	teacher es que vea, yo lo. como ya tiene el resultado pues yo lo puse, no?. - entonces yo para estar seguro hice el por qué y entonces lo multipliqué a ver si me daba el número y como me dio ese número ese era
2:49	p:	como me dio ese número en la tabla descubrí que ese era. pero primero cómo lo pensé? o sea como pensé que ese (era)
2:53	e:	haciendo la tabla
2:54	p:	no, sin hacer la tabla primero
3:03	e2:	busque un número en la tabla del seis que me diera treinta
3:05	p:	busque un número en la tabla del seis que me diera treinta. cuál era el otro número?
3:09	e3:	yo iba restando
3:12	p:	él iba restando, cómo?
3:14	e3:	el número a la mitad tres veces
3:18	p:	a la mitad tres veces, cómo? a ver
3:20	e3:	digamos treinta, quince y y y
3:23	p:	la mitad de treinta es quince
3:24	e3:	a::h, no no no no
3:26	p:	ah, no me sirve
3:30	e4:	vea - vea como. - solo. - la tabla del seis que nosotros practicamos llega hasta el diez. - entonces (y se sabe que el diez es sesenta), seis por diez es sesenta entonces la mitad de sesenta sería treinta y la mitad de diez es cinco
3:50	p:	a::h!, el miro eso, el miro que. en la tabla del seis él tiene el ultimo que dice - seis por diez sesenta y a este sesenta le sacó la mitad para que diera este treinta y entonces vio que la mitad de diez era cinco, esa es otra estrategia que él se inventó.
4:12	e2:	teacher eso es como yo le di:je, yo. yo primero halle el resultado -- y después si multipliqué, bue.bueno , yo vi en la tabla del seis a ver qué número me daba treinta, entonces yo puse cinco y para estar bien seguro que si me daba la respuesta pues lo multipliqué, cinco por seis y me dio treinta

4:36 p: multiplicó, cinco por seis y le dio treinta, muy bien, cuál otra división había
4:41 e: cuarenta dividido ocho
4:43 p: cuarenta dividido ocho
4:46 e2: la segunda si está bien
4:47 e3: cinco ((*varios estudiantes responden lo mismo*))
4:51 p: nos dio cinco pero vamos a ver cómo, quien creo alguna estrategia diferente para buscar ese cinco, a ver
((*pausa larga esperando la respuesta de los alumnos*))
5:11 e5: digamos yo. yo primero busco el resultado - y miro a ver si está bien. sumando este.=
p: =pero cómo buscas el resultado
5:22 e5: digamos llego. y-y tengo que:. - un: num.-un: número (que por este ocho) me de cuarenta, hago es,
5:30 p: un número (que por este ocho) me de cuarenta
((*una pausa mientras se dirige a otros estudiantes*))
5:46 p: usted qué está haciendo?, No pero es que estamos en esta de cuarenta dividido ocho
5:52 e4: vea, cuarenta dividido ocho, entonces sería ocho – dieciséis - y así va por los números hasta que da cuarenta
6:06 p: a::h, a este ocho le va sumando ocho, otro ocho otro ocho hasta llegar a cuarenta

En la primera parte del episodio (desde 0:06 hasta 0:33) se muestra un diálogo entre profesora y alumnos en el que se relaciona $400 \div 2$ con calcular la mitad del dividendo. Éste cálculo de la mitad se corrobora con la multiplicación $200 \div 2$. La importancia de este episodio radica en que la operación dividir por dos se relaciona con la razón *la mitad de*, y a su vez, el número que es la mitad de algo, se verifica que efectivamente lo sea multiplicando dicho número por dos, y si es correcto, el resultado debe ser el número inicial al que se le calculó la mitad. La división por dos se relaciona con la razón *mitad de…* y dicha razón se calcula con base en la razón *doble de…* o lo que es lo mismo, con la multiplicación por 2. Nótese entonces la cadena de conexiones que se establecen: (dividir por *n*)-(razón *n-ésima* parte de…)-(razón *n-veces…*)-(multiplicar por *n*). Por supuesto, aún hay un camino muy largo que recorrer hasta que la operación dividir por *n* ($\div n$) sea identificada con la multiplicación por la fracción *n-ésima* ($\times \frac{1}{n}$), pero el que la división por 2 se ponga en relación con la razón *mitad de…*, y como se mostrará más adelante, el uso de esta razón para calcular otras divisiones es un punto de partida importante.

Desde la entrada 1:10 a 1:36, se introduce un significado para la división de un número: el número que se divide se debe repartir en partes iguales, y el número por el que se divide indica la cantidad de partes iguales que se deben obtener. Esta reflexión sobre la división como una repartición en partes iguales estuvo precedida (entrada 0:35 a 0:54) de un ejercicio propuesto por el profesor (30 dividido 6) que no pudo ser interpretado a partir de encontrar "mitades de...". Se diferencia esta manera de ver la división entonces, de la anterior, por el hecho de que ahora la división es interpretada en el marco de una acción física que significa repartir en partes iguales, mientras que en el caso anterior, la división era comprendida en términos de una noción aritmética: la razón *un medio*, la cual cumple una función como operador. Esto también muestra que una cosa son las acciones sobre las cantidades físicas (partir, repartir, etc.), y otra las acciones con las operaciones aritméticas sobre cantidades numéricas, una vez que las cantidades físicas son representadas por alguna forma de simbolización matemática. Las acciones sobre las cantidades físicas se transforman en operaciones sobre las cantidades numéricas, una vez que las primeras son matematizadas a partir de las segundas.

Desde la entrada 1:37 a 2:22 se muestra otra manera de encontrar el resultado de la división 30 dividido 6: el cociente es el número que multiplicado por 6 da 30, y este número se busca entonces en las tablas de multiplicar (bien sea que se sepan de memoria, o que se tengan copiadas en el cuaderno). En la entrada 1:48 el profesor insiste en que el estudiante dé una explicación del por qué la tabla de multiplicar le permite encontrar el resultado de una división sin lograr una explicación satisfactoria, a juzgar por la insistencia del profesor en pedir una justificación de este procedimiento (entradas 2:49 y 2:54). Ante esta solicitud los estudiantes seguían parafraseando de distintas maneras la misma explicación: porque usamos la tabla de multiplicar (entradas 2:36, 2:53 y 3:03). En la entrada 3:09 un estudiante expresa "yo iba restando" (entrada 3:09), lo que llama la atención del profesor y le pregunta cómo hace la resta (entrada 3:12), y el estudiante responde "el número a la mitad tres veces" (entrada 3:14). De nuevo el profesor cuestiona sobre cómo se hizo para obtener la mitad tres veces (entrada 3:18), lo que lleva al estudiante a expresar "la mitad de 30, 15 y y y" (entrada 3:20). Este balbuceo repetido con la letra "y" se refiere precisamente a que el estudiante cae en cuenta que el 15 no tienen mitad exacta, y que por lo tanto no puede sacar la mitad tres veces seguidas como pensaba, lo que se ratifica en la entrada 3:26 cuando expresa que ese procedimiento no le sirve.[229]

[229] Nótese que este procedimiento de sacar la mitad tres veces seguidas a un número, pensando que sea manera se divide dicho número entre seis es equivocado, pues esa composición de mitades produce es una división por 8. El profesor no llama la atención sobre este hecho, y al parecer acepta que la equivocación

En este punto, otro estudiante (entrada 3:30) encuentra una manera de usar la tabla para encontrar el resultado de 30 dividido seis a partir de encontrar mitades, el cual se basa en un razonamiento por analogía (ver sección siguiente), en tanto que en la tabla del 6 el número 10 se correlaciona con el número 60, y por lo tanto, la mitad de 60 es 30, y la mitad de 10 es 5, es decir 30 se correlaciona con 5.

Desde la entrada 4:51 hasta la 6:06 se evidencia otra manera de calcular el resultado de la división, ahora para el caso 40 dividido 8. Sumar repetidamente el divisor hasta completar el dividendo, y las veces que se repite el divisor, es el resultado de la división.

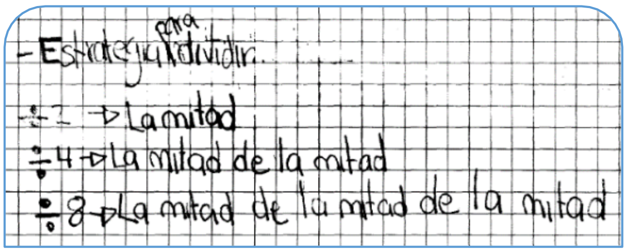
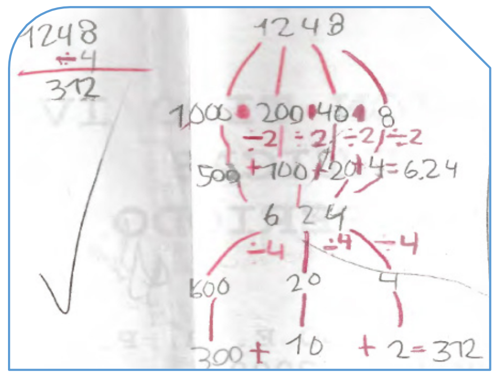


Figura 41. *Procedimientos para la división. Archivos de imagen Grado_3_Estudiante_2_pagina_6 (arriba) y Compilado_varios_estudiantes_pagina_2 (derecha)*



Nótese que en este fragmento se evidencian al menos tres aproximaciones distintas a la división: como repartición en partes iguales (que alude fundamentalmente a la acción física sobre las cantidades involucradas en un determinado evento), como composición de razones (para el caso mostrado hasta el momento, calcular la mitad de la mitad), y como repetición aditiva del divisor hasta completar el dividendo.

La composición de la razón *mitad de…* fue una estrategia ampliamente utilizada en el trabajo de aula para calcular divisiones por 2, por 4, por 8, etc., y en general, divisiones en donde el divisor era de la forma 2^n. En general, la composición de razones es una manera de tratar con la división, tomando como punto de partida el dividendo, pero tiene sus limitaciones, como por ejemplo, cuando el dividendo no es divisible por el divisor, o cuando el dividendo es una cantidad grande (imagen de la derecha figura 41).[230] En el caso mostrado en el diálogo anterior, el intento del estudiante por usar la composición de las mitades no es exitoso, entre otras cosas, porque el divisor 6 no es una potencia exacta de 2,

en el procedimiento es porque la mitad de 15 no es un número entero.

230 No se cuenta con evidencia de que este tipo de dificultades se hayan estudiado sistemáticamente en la clase, con el ánimo de buscar una mejor comprensión de la composición (multiplicativa) de las mitades por parte de los estudiantes.

y además, por que efectúa una composición aditiva de las razones *mitad de*…. Es decir, el estudiante pensaba que componer tres veces la razón *un medio de*… lleva a una división por 6, y no a una división por 8, como si se evidencia en la imagen de la izquierda de la figura 41.[231]

El diálogo 7 evidencia otro episodio en el que la estrategia de componer mitades no puede ser usado como método para calcular el resultado de una división dada.[232]

Diálogo 7. *Fragmento tomado del archivo de audio 2009_03_17_10_14*

15:20	p:	cual falta?
15:21	e:	veintiocho dividido siete
15:23	p:	veintiocho – dividido siete, y ahí que sería
15:39	p:	aquí se podría buscar la mitad veintiocho
15:41	e:	si
15:43	e2:	no llega, teacher
15:45	p:	no llega al resultado porque siete veces es impar
		((*hablan varios niños en tono muy bajo y no son audibles sus argumentos*))
16:53	p:	pongan cuidado lo que hizo Nicolás aquí. el trabajó también por la del siete y sumo siete. y vio que cuatro veces ya llegó a veintiocho
		((*continua con voces múltiples de los estudiantes que no son audibles*))

Al final de este diálogo (al igual que en el final del diálogo 6) se evidencia otro procedimiento usado para encontrar el resultado de una división, el cual se basa en la relación que se establece entre multiplicar y dividir: si en la multiplicación, uno de los factores se repite tantas veces como unidades hay en el otro, entonces en la división, basta con repetir el divisor tantas veces como sea necesario hasta completar el dividendo. Las veces que se repite el divisor es el cociente (el valor del factor desconocido). En el sentido estricto de la palabra se transforma la división en una multiplicación.[233]

Este tipo de procedimientos es frecuente entre los estudiantes, y seguramente está

[231] Si bien no se presentan con detalle en este documento, es importante mencionar en este punto que el trabajo con la composición de dobles presentó dificultades para los estudiantes, entre otras cosas, por una interpretación aditiva de la composición, y por la dificultad para calcular el doble o la mitad de números grandes. Estas dificultades se pueden ver, por ejemplo, en las transcripciones de los archivos de audio (anexo 2): 2008_10_28_10_08 (entradas 9:37 a 11:35 o 15:35 a 16:52), 2008_10_07_10_15 (fundamentalmente, episodio 2), 2008_10_21_10_27 (episodios 1 y 2), 2008_10_07_10_56 (episodios 3 y 4), 2008_12_02_10_11 (episodios 2 y 3) y 2008_10_08_10_10 (episodios 2 y 3). Sin embargo, una vez superadas las dificultades, la composición de dobles (mitades) entregó a los estudiantes una buena comprensión de la multiplicación y la división.

[232] Habría que destacar, al menos en la evidencia recogida, que no se profundiza mucho en estas limitaciones de la composición de razones como método para encontrar el resultado de una división. Tampoco se tiene evidencia del uso de esta composición de razones entre razones de diferente naturaleza, por ejemplo, mitades con terceras partes.

[233] El episodio 3 de este mismo audio presenta otras situaciones similares a las ya descritas.

favorecido por el hecho de que las tareas a las cuales se enfrentan tienen como referencia los juegos realizados (el de la canasta, el de los bolos etc.). Esta referencia a los juegos les ha proporcionado un contexto en el que han constituido la idea de que el número de fichas por el valor de las fichas da como resultado el total de puntos, lo cual se ha hecho de diferentes maneras, pero especialmente, iterando aditivamente el valor de una ficha tantas veces como fichas se tenga. Por lo tanto en las situaciones de división ellos conocen el total de puntos, y bien el valor de cada ficha, para averiguar la cantidad de fichas que producen el puntaje total, o bien la cantidad de fichas que producen dicho puntaje, y se debe averiguar el valor de cada ficha. Dado entonces que han aprendido que repetir el valor de cada ficha una cierta cantidad de veces (según el valor de cada ficha) produce el puntaje total, entonces este procedimiento de la composición aditiva tiene sentido para ellos si se mira el contexto desde el cual están pensando los problemas que tienen que resolver. Sin embargo, como se expresó en párrafos anteriores, esta forma de proceder con la división tiene sus limitaciones pues solo funciona para el caso de divisiones exactas, o incluso, como se verá a continuación, en ciertos tipos de situaciones, no se admite esta interpretación para el divisor y el cociente.

***Diálogo** 8. Fragmento tomado del archivo de audio 2009_11_03*

0:01,9	P:	y tres helados?
0:03,0	A1:	valen doce mil
0:04,5	P:	si tres helados valen doce mil, seis helados valen?
0:07,1	A1:	(veinticuatro)=
0:08,0	P:	=y por qué veintic↑uatro mil?
0:09,4	A1:	porque: – eh – doce mas doce da veinticuatro
0:12,7	P:	y por qué sabes que es doce más doce?
0:14,9	A:	porque el doble de tres es seis
0:17,7	P:	ah:: el doble de tres es seis, entonces el doble de doce es veinticuatro. bueno y acA – 2 helados?
0:24,2	A:	(vale doce mi:l) -- pero hay que saber el precio de los tarros de helado
0:29,1	P:	por eso! – y entonces cuánto vale cada tarro de helado? ((*pausa*)) que tendrías que hacer?
0:43,5	A:	una:: – una: multiplicación?=
0:44,1	P:	=qué multiplicación? –
0:47	A:	(tre::s, tre:::s) ((*no es audible el resto*))
0:51,0	P:	tienes tres helados, tres tarros de helado digamos, y esos tres tarros de helado valen doce mil pesos, entonces – ahora estás pensando es en el valor de cada tarro?
1:01,2	A:	si
1:02,8	P:	entonces para hallar el valor de cada tarro que tienes que hacer con esos doce mil?
1:06,4	A:	dividirlos?=

1:07,2	P:	=dividirlos – y entre cuánto?
1:13,3	A:	e::entre tre::s?=
1:14,7	P:	=y por qué entre?
1:19,8	A:	porque:: tres dan do::ce, doce menos tres da::
1:04,5	P:	dibuja aquí los tres tarros ((*pausa mientras dibuja*))
1:39,8	A:	ay!
1:40,2	P:	no importa! cualquier cosa ahí que: se parezca a los tarros -- y tres tarros -- entonces cuánto deberá costar cada uno para que el valor total sea doce mil?
2:01,8	A:	ochomi::l?
2:02,4	P:	mire haber si es ocho mil -- ((*el profesor se dirige a otro estudiante con el cual había hablado antes y le estaba preguntando algo*))
2:19,9	A:	¡vale CUATRO MIL!
2:21,8	P:	por qué cuatro mil?
2:23,6	A:	(haber porque) yo ahí dividí
2:25,3	P:	cómo dividió?
2:27.8	A:	eh:
2:28,5	P:	dividió o sumó?
2:30,2	A:	eh, resté
2:31,6	P:	cómo restó?
2:34,7	A:	tres menos tres menos tres menos tres
2:39,7	P:	y por qué restó de a tres? eso es lo que no entiendo ((*risas*))
2:46,3	P:	estos son helados – y estos son pesos, – entonces estas ((*pausa*)) cuánto cuesta cada tarro de helado?
3:01,9	A:	cuatro mil=
	P:	=por qué cuatro mil? – si es cuatro mil pero lo que quiero que me digas es por qué cuatro mil, qué estás pensando que te dio cuatro mil
3:10,7	A1:	porque vea -- porque yo iba restando y luego luego los volví a su. luego lo. luego los sumé otra ve:z y si daban
3:20,4	P:	y cómo los sumó?
3:22,6	A1:	tre::s. – entonces tres más tres. – tres
3:29,2	P:	cuánto da?
3:31,8	A1:	doce
3:32,5	P:	tres más tres más tres no da doce, tres más tres más tres no da nueve
3:40,5	A1:	cuatro más cuatro más cuatro
3:41,3	P:	cuatro más cuatro más cuatro da doce, exactamente, entonces dos tarros valen ((*una pausa esperando la respuesta del alumno*)) ocho mil -- y 7 tarros?
3:55,8	A1:	veintiocho
3:58,6	P:	por qué veintiocho? ((*el profesor pasa a otro grupo de trabajo*))

En este episodio se evidencian dos tareas, la primera en la que se hace el cálculo del valor de 12 helados, sabiendo que tres helados valen $ 12.000, y la otra, donde a partir de los mismos datos se debe calcular el valor de un solo helado. Para el caso, interesa la segunda en donde se debe calcular el valor de un helado, puesto que implica encontrar un número que repetido tres veces dé 12.000. En la entrada 0:43 y 0:47, ése parece ser el caso, pues el estudiante está pensando en que debe hacer una multiplicación: debe multiplicar 3 por un valor que desconoce. La intervención del profesor en la entrada 0:51 y 1:01 lo hace cambiar de estrategia, y ahora piensa entonces en una división. Sin embargo, ante el cuestionamiento cuando se le solicita una explicación se evidencia que no tiene claridad acerca de por qué tiene que hacer dicha división. Es interesante la justificación que da el estudiante en la entrada 1:19, pues muestra que intenta trabajar con el 3 (tres helados), algo así como buscando cuántas veces repetir el 3 para llegar al 12. En la entrada 1:04 el profesor sugiere realizar un dibujo buscando que el estudiante comprenda la naturaleza distinta de las dos cantidades involucradas, y por ende, que comprenda que repitiendo 3 (helados) no se puede llegar a $ 12.000. Una vez realizado el dibujo uno de los estudiantes del grupo sugiere que el valor de cada helado es 8000 y el profesor pide que se compruebe si efectivamente 3 veces el 8.000 da 12.000.

A partir de la entrada 2:21 se presenta una situación similar con otro grupo de trabajo. De nuevo en la entrada 2:34 se evidencia un intento de elaborar un procedimiento a partir del 3 (como en el caso anterior), y el profesor llama la atención en que el 3 son los helados, y el 12.000 se corresponde con el costo de esos 3 helados. El resto del diálogo muestra lo que efectivamente realizó el estudiante: primero sumó iteradamente con el 3, pero como 3 veces 3 no da 12, entonces ensaya con el 4, llegando al 12 esperado.[234]

Nótese entonces que este tipo de situaciones, en donde dividendo y divisor son de naturaleza distinta, repetir una cierta cantidad de veces el uno no completa el otro, obliga a un procedimiento basado en suponer un falso valor para el cociente, el cual, si repetido tantas veces como unidades tiene el divisor no da el dividendo, entonces se busca otro falso valor, mayor a menor según el caso, hasta que se encuentre el número correcto.

Como se puede ver de lo mostrado hasta el momento, se está frente a otro tipo de problema de división: se conoce el valor total, y la cantidad de objetos que producen ese valor total, pero no se sabe el valor de cada objeto. En este tipo de problemas la composición aditiva sigue siendo efectiva, pero los estudiantes se ven abocados a realizar el proceso varias veces, puesto que saben que deben averiguar por un número que repetido una cierta cantidad de veces arroje un resultado determinado, y para averiguarlo, se supone un valor

[234] Situación similar se evidencia en los restantes episodios de este archivo de audio (ver anexo 2).

hipotético para el mismo, se repite dicho número tantas veces como unidades en el dividendo, y si no da el resultado esperado, se repite el proceso nuevamente ajustando el "falso valor" de acuerdo con el resultado obtenido.

Si bien no se tiene evidencia empírica sobre los mecanismos de control que ponen en juego los estudiantes para definir un nuevo falso valor una vez que han verificado que el actual no funciona correctamente (y pareciera más bien un proceso compensatorio en donde si el valor obtenido con la repetición de este falso valor es menor o mayor que el valor esperado, entonces se aumenta o disminuye el valor actual una cantidad que se considere razonable, y se repite el proceso), si se puede afirmar su valor epistémico. Esto, en primer lugar, porque pone división y multiplicación en un mismo plano y, por ende, facilita los cálculos necesarios cuando se tiene que realizar una división. En segundo lugar, por su valor como técnica en diferentes momentos de la historia, incluso cuando aún no se habían desarrollado las técnicas modernas del cálculo algebraico. El capítulo anterior (sección 4.4) muestra que este método del falso valor fue una técnica usada en diferentes culturas para solucionar este tipo de problemas (y en general para la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita), e igualmente arroja luces sobre posibles maneras de organizar un trabajo más sistemático sobre las formas de control que requiere este tipo de técnicas aritméticas, las cuales se basan en la razón de la diferencia entre el valor esperado y el obtenido de la repetición del falso valor a la cantidad de veces que se debe repetir este falso valor. Este es un camino que deberá ser explorado en trabajos futuros.

Finalmente resta decir que esta forma de ver la división, que de alguna manera es entendida como el cálculo de una cuarta proporcional en la proporción $a:1::c:b$ (de donde $c = a \times b$), cuya cantidad desconocida o bien es *a* o bien es *b*, muestra no solo la división en sucesión conceptual natural con la multiplicación, sino que permite extender entonces la técnicas de cálculo aprendidas sobre la multiplicación a los cálculos de divisiones. Esto también muestra que la coordinación de dos sumas iteradas es más natural como técnica para hacer cálculos con divisiones que la forma tradicional como se enseña en la escuela a partir de técnicas basadas en restas sucesivas.[235] Además, como se puede ver en la sección 4.3 (capítulo anterior), esta forma de interpretar la división en línea conceptual con la

[235] Es importante insistir en la relación de la multiplicación con la coordinación de las dos sumas iteradas, a partir de la cual se ponen en correspondencia los procesos de variación de dos cantidades, pues en la aproximación tradicional solo se presenta una suma iterada y la otra se deja implícita, como si no existiera.

multiplicación, y a partir de la proporción antes descrita, estuvo presente desde la antigüedad hasta épocas muy recientes, y quizás el énfasis actual en la escuela de estudiar los algoritmos basados en el sistema de numeración decimal, profundizan en la confusión ya enunciada por Newton en pleno siglo XVII: se confunde el concepto de multiplicación con las técnicas para calcular una multiplicación. Dicho de otra forma, la proporción enunciada al inicio de este párrafo es la base conceptual para comprender lo multiplicativo, y dependiendo de cuál de estas cantidades sea la incógnita cuyo valor queremos averiguar, se debe hacer una multiplicación o una división, y cómo hacer ese procedimiento, es otro problema diferente.

En lo mostrado hasta el momento se han visto en detalle una primera aproximación de los estudiantes a la multiplicación basada en la coordinación de dos conteos iterados a partir de la razón constante que pone en correspondencia la variación de las cantidades involucradas en el problema.

En las secciones siguientes se analizan de manera más sistemática otros procedimientos que, si bien tienen como base la coordinación de la covariación entre las dos cantidades, se separan del doble conteo pues se fundamentan en conocimientos sobre la linealidad (constituidos empíricamente), y por ende, muestran de manera más decidida los vínculos entre la multiplicación y la proporcionalidad directa.

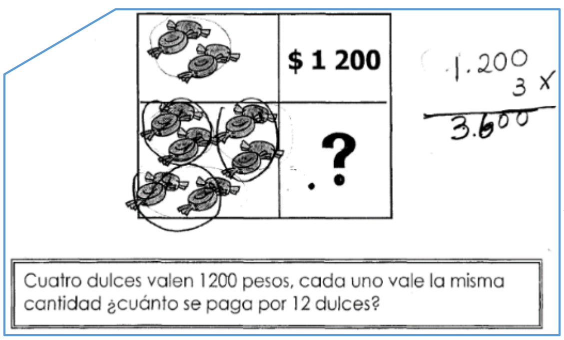
5.5 Razonamientos por analogía

Los razonamientos *por analogía* se identifican como los más frecuentes en el trabajo de los estudiantes. Se encuentran soportando diferentes tipos de procedimientos, con recurso a diferentes formas de expresión y representación. En esencia se basan en que la relación entre dos o más cantidades en uno de los sistemas de cantidades, se trasladada de forma análoga a las cantidades correspondientes en el otro sistema de cantidades. Como se verá a continuación, los procedimientos basados en esta forma de razonamiento están en la base de las comprensiones logradas por los alumnos sobre lo multiplicativo.

5.5.1 La conservación de la razón

Las dos imágenes de la figura 42, muestran lo realizado por dos estudiantes ante un tipo de tarea similar, y por demás típica en el trabajo escolar (aunque no lo es la forma como se presenta la tarea): se refiere un fenómeno o evento que involucra cuatro cantidades, dos de un tipo, otras dos de otro tipo, de las cuales tres son valores conocidos (por supuesto, dos de las cantidades conocidas son de la misma naturaleza), y se debe calcular el cuarto valor desconocido. Las cantidades de uno de los sistemas de cantidades se correlacionan linealmente con las cantidades en el otro sistema de cantidades, y por lo tanto, en este tipo de tareas se presentan problemas donde se debe calcular una cuarta proporcional.[236]

Si bien hay diferencias importantes en la forma de presentación de las respuestas (pues mientras en una se expresa la solución y su explicación en forma retórica, en la otra se hace con trazos sobre la imagen y la operación aritmética escrita al lado) ambos procedimientos se fundamentan en un razonamiento similar: de las cuatro cantidades, sobre las dos conocidas, y de la misma naturaleza, se establece la razón que las vincula, y luego esa razón es aplicada a la cantidad conocida en el otro sistema para determinar el valor de la cantidad desconocida.



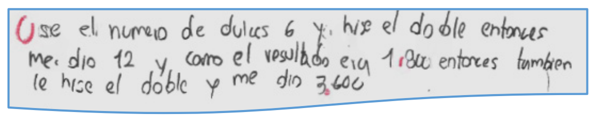


Figura 42. *Ejemplo de procedimiento por analogía Archivo de imagen Compilado_varios_estudiantes_pagina_07 (arriba) y Grado_3_Estudiante_1_Pagina_07 (Izquierda)*

En la imagen de la izquierda, el círculo sobre el dibujo de los cuatro dulces en el cuadro superior izquierdo, y los tres dibujados en el cuadro inferior izquierdo, agrupando los dulces en grupos de 4, y luego, la multiplicación escrita en simbología de la aritmética al lado derecho, indican que se ha identificado una relación entre las cantidades de cada columna: los tres círculos sobre los dibujos de la parte inferior izquierda indican que la cantidad 4 dulces está contenida 3 veces en la cantidad 12 dulces, y que por tanto, la cantidad 1200 se debe repetir 3 veces, o multiplicar por 3, para conocer el precio de los 12 dulces.

Por su parte, la frase de la imagen de la derecha que explica cómo se calculó el valor

[236] Este tipo de problemas se conocen en la literatura especializada como "*missing-value problems*" (problemas de valor desconocido), pero al menos en el español, éste no es un nombre apropiado, pues en general cualquier problema aritmético, sea o no multiplicativo, tienen un valor desconocido. Para discriminar de mejor manera el tipo de problema al que refiere la tarea es mejor llamarlos "problemas de cuarta proporcional".

de 12 dulces, sabiendo que 6 cuestan 1800, da cuenta de un análisis similar: se establece que la relación entre el 12 y el 6 es que el uno es el doble del otro, por lo tanto, la cantidad de dinero que se corresponde con los 12 dulces es el doble del que se corresponde con los 6 dulces, o lo que es lo mismo, al duplicar 1800 se obtiene el valor de 12 dulces. Es importante destacar en este punto que la relación "ser el doble" que existe entre el 6 y el 12, que permite calcular la cantidad 12 al duplicar la cantidad 6, se traslada por analogía al otro par de cantidades, lo que permite inferir que la tercera cantidad conocida y la cuarta conocida están en la misma relación de una ser doble de la otra, y por lo tanto, duplicar esta tercera cantidad, permite calcular el valor de la cuarta cantidad desconocida.

Nótese que la razón que relaciona las dos cantidades conocidas del mismo sistema de cantidades (cantidades homogéneas) es también desconocida, y la forma de presentación de la tarea no explicita ni la existencia de dicha cantidad, ni que sea una cantidad que deba ser calculada. Determinar la existencia de dicha razón (con base en la pareja de cantidades conocidas de la misma naturaleza), calcularla y asignarle una función (como relator y como operador) con respecto a este par de cantidades conocidas y, trasladar dichas funciones al otro par de cantidades (una conocida y otra desconocida), no solo es fundamental para organizar una estrategia de solución, sino que son un conjunto de inferencias que se debe hacer sobre la base de otros tipos de conocimiento, incluso no matemáticos.[237]

Dicho de otra manera, los problemas en donde se debe calcular la cuarta proporcional entre otras tres cantidades, o simplemente, problemas de regla de tres,[238] no implican cuatro cantidades sino cinco, tres de las cuales son conocidas (dos de ellas en un mismo sistema de cantidades), y dos son desconocidas: la cantidad por la cual se pregunta explícitamente en el evento que da origen al problema (la cuarta proporcional) y la razón que relaciona parejas de cantidades. Esta razón, o bien es la constante de proporcionalidad –ver sección 5.6 (más adelante), o bien pone en relación las dos parejas de cantidades del mismo sistema de cantidades. En este segundo caso, para calcular la cuarta proporcional desconocida se debe inferir que esta razón es la misma para las dos parejas de cantidades

[237] Es posible que este reconocimiento se dé a partir de lo que el estudiante sabe sobre el comportamiento de situaciones cotidianas como la compra y venta de productos, en donde cada producto tiene su precio. Este conocimiento podría denominarse como una especie de ley social que caracteriza el fenómeno. En una de las tesis de maestría (Sánchez Ordoñez, 2011) realizada en el marco del desarrollo de esta tesis, se analiza con detalle este conocimiento social en el tratamiento de lo que hacen los estudiantes al enfrentar tareas de reparto proporcional.

[238] En el contexto escolar colombiano, los problemas con este tipo de características son conocidos como "problemas de regla de tres simple directa", o simplemente "problemas de regla de tres".

(de la misma naturaleza). Luego, con base en las dos cantidades conocidas, se calcula el valor de dicha razón (en este punto del procedimiento, la razón cumple una función de relator con respecto a las cantidades conocidas sobre las que se calcula, pero a la vez, también cumple una función como operador, como se puede ver en las imágenes de la figura 42). Luego, dado que en la otra pareja de cantidades (una de las cuales es desconocida), las dos cantidades están en la misma razón (las dos parejas de cantidades están en *proporción*), entonces las funciones de la razón como relator y como operador se trasladan por analogía a este segundo par de cantidades, y por ende, al estar ambas cantidades en la misma relación (la razón como relator) si se aplica la razón sobre la tercera cantidad conocida se puede calcular el valor de la cuarta cantidad desconocida (la razón como operador). Esta razón no se menciona explícitamente en el problema como cantidad desconocida que deba ser calculada, y como se mencionó antes, si no se infiere su existencia, ni su papel como relator (relaciones entre) u operador (acciones sobre) con respecto a las cantidades involucradas en la situación, ni el movimiento por analogía de las relaciones y operaciones desde un par de cantidades al otro, la comprensión del procedimiento que se realiza puede ser limitada.[239]

Es más, detrás de esta forma de proceder en la solución de los problemas multiplicativos está la constitución empírica de ciertos conocimientos que son la base para los primeros aprendizajes sobre las proporciones: se asume (a partir de algún principio o ley) que dos parejas de cantidades están en la misma razón (en el sentido griego, están en *analogía*), y por lo tanto, una vez establecida la razón entre uno de los dos pares de cantidades (lo que define la función como relator u operador de esta razón sobre dichas cantidades), se traslada por analogía esta razón al otro par de cantidades (y por ende, en analogía, también se traslada sobre este segundo par las dos funciones de la razón). Este movimiento, que desde un par de cantidades traslada en analogía la razón y sus funciones al otro par de cantidades, es lo que permite calcular el valor de la cuarta cantidad desconocida (la cuarta proporcional) a partir de la tercera cantidad conocida.[240] Esta

[239] Esto es lo que puede suceder con el método de la "regla de tres simpe directa", que por la forma como es presentado para su estudio en los contextos escolares, enfrenta este tipo de problemas sin hacer explícita la necesidad de calcular esta razón, y por ende, sin analizar su función entre las cantidades involucradas en el problema (y quizás en esto reside su eficacia como método de cálculo). Al hacer esto, la escuela esconde el fundamento conceptual que permite la comprensión de su funcionamiento en este tipo de tareas. (Ver la sección 4.4.2 para una descripción detallada del contexto histórico y el valor epistémico de esta técnica de cálculo, y la sección 1.3.2.2 para una mirada crítica de cómo se desarrolla la enseñanza de la proporcionalidad en contextos escolares).

[240] Nótese que si se entiende la proporción entre cuatro cantidades a partir de estas ideas (identidad en las razones, movimiento de las relaciones entre, y las operaciones sobre, las cantidades), se puede entender

proporción igualmente está en la base de la comprensión de la linealidad que caracteriza la covariación de cantidades que se correlacionan a partir de una proporcionalidad directa, que es el caso de las situaciones que enfrentan estos estudiantes en su proceso de estudio de la multiplicación.

5.5.2 La conservación de la suma

Los razonamientos por analogía tienen otra versión, ya no basada en la conservación de la medida relativa entre parejas de cantidades homogéneas, sino en la conservación de la relación aditiva entre tríos de cantidades que se corresponden. Como se puede leer en la expresión del estudiante mostrada en la figura 43, el 16 (dulces) se corresponde con una cantidad desconocida (el valor de esos 16 dulces), y se conoce que 10 dulces cuestan $ 3000 y que 6 dulces cuestan $ 1800, luego entonces, como 16 es la suma de 6 y 10, entonces el valor de 16 dulces se calcula sumando los valores $3.000 y $1.800 que se corresponden respectivamente con el precio de con 10 y 6 dulces. Situación similar, en una expresión un poco más formal, se puede ver en la figura 44, en donde se calcula la multiplicación de 15 por 3, a partir de los resultados de dos multiplicaciones ya conocidas: 10 por 3 y 5 por 3.

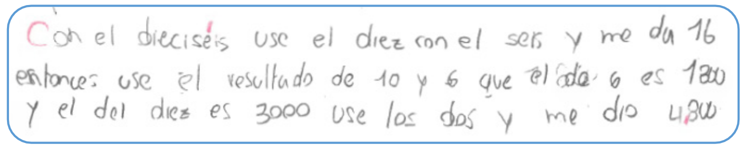


Figura 43. *Ejemplo de procedimiento por analogía.*
Archivo de imagen Compilado_varios_estudiantes_pagina_7

Esta forma de razonamiento por analogía es similar a la descrita en la sección anterior, pues traslada la relación entre cantidades de un mismo sistema a las cantidades correspondientes en el otro sistema. Sin embargo difiere de la anterior en que lo que se traslada es la relación parte todo (relación aditiva) entre ternas de cantidades: en un mismo sistema de cantidades se identifican tres cantidades, dos de las cuales se componen aditivamente para completar la tercera, y esa misma relación parte todo se traslada por analogía a la terna de cantidades que se les corresponden en el otro sistema de cantidades. Si alguna de estas seis cantidades

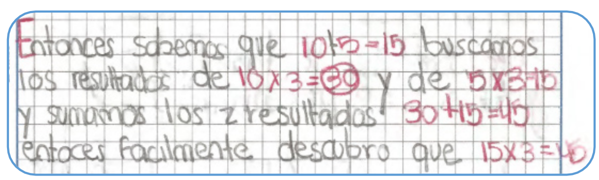


Figura 44. *Ejemplo de procedimiento por analogía.*
Archivo Compilado_varios_estudiantes_pagina_14

porque es más apropiado el nombre griego "*analogía*", que la traducción latina "*proportio*", de donde deriva nuestro nombre actual "*proporción*", para este tipo de relaciones cuaternarias entre cantidades. Es más, la definición moderna, que expresa la proporción en términos de la igualdad entre el producto de antecedentes y el producto de consecuentes, oculta totalmente estos movimientos por analogía entre los dos pares de razones que están en proporción.

es desconocida, conocidas las otras cinco, esta puede ser calculada.

Los siguientes dos diálogos muestran algunas aproximaciones de los estudiantes, a partir de los juegos, a este tipo de procedimientos. [241]

Diálogo 9. *Fragmento tomado del archivo de audio 2008_11_25_10_34*

8:17	E:	Teacher pero yo me pregunto algo, como-como-cómo hizo para-para-para-para no sé cómo decir
8:25	P:	cómo hizo para encontrar que
8:28	E:	pues-pues es que hay muchos números ahí.-y-cómo sumarlos si? pero cómo-cómo.
8:34	P:	cómo Valentina descubrió que este, que este, que este, era el que necesitaba?
8:39	P:	Valentina, que cómo tu descubriste que sumar estos dos te servía para encontrar el de este ((*no se oye la respuesta de la estudiante*))
8:55	P:	porque ella ya sabía que cinco por tres daba quince pero por qué otra forma habrá para descubrir, qué si yo sumo estos dos me da este resultado ((*se oyen voces de los estudiantes pidiendo responder*))
9:15	E3:	porque tres más dos me da cinco
9:17	P:	a:h ella lo descubrió porque buscó aquí unos números que sumados me dieran este. - cierto.
9:24	P:	entonces por qué otros dos números sumados me dan cinco aquí::.
9:28	E3:	cuatro más uno
9:30	P:	cuatro más uno ((*afirmando la respuesta del alumno*))
9:32	P:	y cuatro más uno también me servirá para el resultado?
9:35	E3:	SI::
9:36	P:	por qué?
9:37	E3:	porque doce más tres da quince
9:40	P:	porque doce más tres también da quince. muy bien.

Diálogo 10*. Fragmento tomado del archivo de audio 2008_11_25_10_34*

11:03	P:	Qué hiciste con esa del cuatro
11:05	E:	haciéndolo
11:06	P:	cómo? cómo?
11:09	P:	contaste otra vez todo?
11:10	E:	no.
11:11	P:	entonces como contaste?
11:12	E:	ocho, nueve y sume los dos
11:14	P:	a:h, a este nueve le sumó dos
11:18	P:	y entonces cómo hacer para las del.del siete
11:22	E:	entonce:s sería tre:s - cuatro, cinco, seis. voy a. voy a sumar el doce de más de nueve
11:27	P:	y por qué sumando el doce más el nueve le da la multiplicación por siete
11:31	E:	porque cuatro más tre:s. me da siete. y con estos dos números. ahí me estaría: dando. me estaría dando el siete

[241] Situaciones similares se pueden ver en los episodios 4, 6, 8 y 9 del archivo de audio 2008_11_25_10_34 (anexo 2) o en los tres episodios del archivo de audio 2008_11_25_11_39 (anexo 2)

11:41	P:	y, este, que multiplicación es esta de aquí
11:45	E:	cuál
11:46	P:	o sea, el número que pones aquí es el resultado de que multiplicación
11:53	E:	aquí tiene que ser veintiuno
11:54	P:	aja:!, veintiuno, y esa es la multiplicación de que números. – el resultado de multiplicar que números
12:00	E:	ah?
12:01	P:	este veintiuno es el resultado multiplicar que números
12:05	E:	el cuatro y el tres
12:07	P:	u:m-u:c ((*negación por parte del profesor*))
12:09	E:	el siete?
12:10	P:	por qué número estas multiplicando?
12:11	E:	por el siete
12:12	P:	el siete, con quien estas multiplicando?
12:14	E:	por tres
12:16	P:	siete por qué?
12:19	E:	siete por tres
12:20	P:	siete por tres
12:21	P:	este es el resultado multiplicar que
12:24	E:	cuatro por tres
12:25	P:	cuatro por tres, y este es el resultado multiplicar
12:28	E:	nueve por tres
12:30	P:	no, nueve por tres, no
12:32	E:	ah, no
12:33	P:	este nueve es el resultado multiplicar
12:36	E:	tres por tres,
12:37	P:	tres por tres, y este doce es el resultado de multiplicar – cuatro por tres
12:40	E:	y aquí da cuarenta y cinco, no?
12:44	P:	por qué da cuarenta y cinco
12:46	E:	porque aquí siete más siete me da catorce, o sea que duplico dos veces este me da catorce aquí me daría cuarenta y dos y le sumó tres y me daría cuarenta y cinco
12:59	P:	o sea, que cuarenta y cinco es el resultado de multiplicar que
13:02	E:	quince por tres
13:03	P:	quince por tres

El diálogo 9, muestra una situación interesante, en relación con la constitución empírica de este tipo de reglas: la inquietud inicial del estudiante es cómo saber qué números sumar para obtener el resultado de la multiplicación 5×3 (entrada 8:17), es más, cómo tener seguridad, con tantos números a disposición, que se han escogido los números correctos (entrada 8:28). Partir de un hecho conocido es la clave para poder estar seguro que el procedimiento funciona: la explicación brindada por otro estudiante, unida a la que le brinda el profesor, le ayudan a tener confianza en el funcionamiento de este procedimiento: en este caso, se parte de que se conoce $5\times3=15$, y se deben buscar en la tabla del tres dos números que sumados den 5, y de la suma de los resultados de la multiplicación de esos dos números por tres se obtiene el resultado de la multiplicación 5×3, y eso es lo que se verifica entre las entradas 9:24 y 9:40, en donde se buscan otras parejas de números cuya suma sea 5, y por lo tanto la suma de los resultados de las multiplicaciones de esos números por 3, da el resultado de 5×3.

Por su parte, el diálogo 10, muestra otro momento importante del proceso: tomar conciencia de qué números son los que se multiplican y cuyo resultado sea la suma de los dos resultados parciales. Obsérvese cómo para el estudiante es claro que debe sumar 12 y 9 (resultados de las multiplicaciones de 4×3 y 3×3), pues busca el resultado de la multiplicación 7×3, y $4+3$ da 7 (entradas 11:03 a 11:31). Sin embargo, ante la pregunta del profesor sobre la multiplicación cuyo resultado es 21 (entradas 11:41 a 12:00), muestra que no se tiene plena conciencia sobre el significado de ese 21, como resultado de la multiplicación 7×3 (la expresión de duda del estudiante en la entrada 12:00 es prueba de ello). Nótese entonces cómo hay conciencia de que el 21 es el resultado de las multiplicaciones del 3 por el 4 y por el 3 (entrada 12:05), pero aún no se ha vinculado con la multiplicación del 3 con el 7. La negación del profesor (entrada 12:07) y el diálogo posterior, afirman en el estudiante este significado. Ese tipo de conciencia se ve en la parte final del diálogo (entradas 12:40 a 13:03), en donde el estudiante calcula el resultado de multiplicar 15×3, a partir de duplicar el resultado de 7×3 y sumarle 3 (el resultado de 1×3), en tanto 15 es el doble de 7 más 1, y ante la pregunta del profesor sobre que multiplicación tiene como resultado el 45, se responde sin ninguna duda 15×3.[242]

Dado que este tipo de procedimientos se justifican empíricamente, entonces conocimientos sobre la multiplicación, como los mostrados en este diálogo, son fundamentales para tomar confianza en el funcionamiento del mismo: qué cantidades sumar en uno de los dos sistemas, y luego, con base en esto, qué cantidades sumar en el otro sistema. Esta relación por analogía de la composición aditiva entre ternas de cantidades correspondientes, al igual que la conservación de la razón descrita en la sección anterior,

[242] Evidencias similares se puede ver en el los archivos de audio 2009_11_17(1) episodio 2, 6 y 8 (anexo 2).

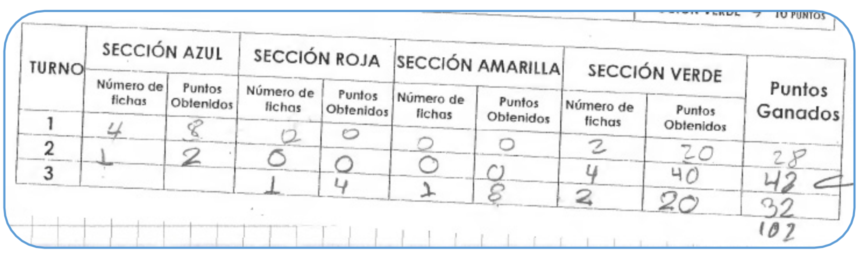
son elementos fundamentales en la comprensión de la linealidad que correlaciona las cantidades involucradas en este tipo de situaciones propiciadas a partir de los juegos.

En suma, en estas dos últimas secciones se muestran dos formas del razonamiento por analogía que son conceptos fundamentales en la comprensión de la linealidad, los cuales, por supuesto aun distan mucho de sus versiones formales en una teoría de la función lineal, pero que por el momento cumplen una función importante al otorgar a los estudiantes nuevos instrumentos con los cuales calcular de forma más eficiente las multiplicaciones que deben realizar, y por ende, brindarles nuevas comprensiones al respecto. Las nuevas comprensiones sobre lo multiplicativo, si bien elaboradas sobre la base de la coordinación de dos sumas iteradas, ahora constituyen un nuevo conocimiento (empírico) que sintetiza esta coordinación de sumas iteradas en nuevos procedimientos (la conservación de la razón o la conservación de la suma) y, por ende, se da paso a nuevas formas de hacer sobre la base de la proporción entre parejas de razones.

5.6 Los razonamientos analíticos: en el camino de la constante de proporcionalidad

Como se puede ver en las secciones anteriores, el trabajo de los estudiantes tuvo un fuerte apoyo en los procedimientos basados en razonamientos por analogía, los cuales se basan más en el uso y comprensión de ciertos tipos de proporciones que se establecen entre parejas de cantidades homogéneas. Pero los razonamientos por analogía no fueron los únicos utilizados por los estudiantes, pues, aunque no con tanta fuerza, las prácticas matemáticas de los estudiantes mostraron el uso de procedimientos soportados en la comparación de parejas de cantidades heterogéneas a través de la razón entre ellas. Llamaremos analíticos a los razonamientos detrás de estos procedimientos, en tanto se fundamentan en la relación funcional entre las parejas de cantidades heterogéneas.

Los razonamientos analíticos, como se mostrará a continuación, obligan a un cambio de foco en la manera como se comprenden las



TURNO	SECCIÓN AZUL		SECCIÓN ROJA		SECCIÓN AMARILLA		SECCIÓN VERDE		Puntos Ganados
	Número de fichas	Puntos Obtenidos	Número de fichas	Puntos Obtenidos	Número de fichas	Puntos Obtenidos	Número de fichas	Puntos Obtenidos	
1	4	8	0	0	0	0	2	20	28
2	1	2	0	0	0	0	4	40	42
3			1	4	1	8	2	20	32
									102

Figura 45. *Ejemplo de tabla de registro juega de la canasta. Archivo Grado_3_Estudiante_3_pagina_1*

relaciones entre las cantidades involucradas en la tarea y, a su vez, exigen de otras formas de acción ahora ligadas a la comparación de cantidades heterogéneas y al uso de instrumentos que permiten la comparación no sólo de parejas de cantidades, sino de familias de parejas de cantidades. Uno de esos instrumentos fueron las tablas de valores en donde se consignaban los resultados de los juegos, usadas posteriormente para las actividades de reflexión. El uso instrumental de las tablas no es fácil ni inmediato, y requiere de aprendizajes: qué cantidades se ponen en las casillas de cada fila y por qué son esas cantidades y no otras, y sobre todo, qué relación hay entre las cantidades de una de las columnas con respecto a las cantidades en la otra columna.

El siguiente diálogo muestra un episodio donde el profesor presenta una tarea en la que los estudiantes deben llenar una tabla (ver figura 45) con valores consignados al momento de realizar el juego de la canasta.

Diálogo 11. *Fragmento tomado del archivo de audio 2010_02_22_10_14*

11:53	p:	este cuadrito es el que vamos a pegar en el cuaderno:: pero en ese cuadrito vamos a pasar eso que usted tiene en su registro. -- (lo van a traducir al a traducir al idioma de este cuadrito). - ya les voy a decir que dice el cuadrito, listo?
12:12	p:	tabla de registro, sección azul, cuánto valía?
12:13	e:	dos ((*responden en coro los estudiantes*))
12.14	p:	sección roja
12.15	e:	cuatro ((*responden en coro los estudiantes*))
12:17	p:	amarilla
12:18	e:	ocho ((*responden en coro los estudiantes*))
12:19	p:	verde
12:20	e:	cinco ((*responden en coro los estudiantes*))
12:21	p:	entonces aquí están los turnos: el uno, el dos, el tres y el cuatro. ese es el suyo, el juego que usted hizo
12:33	p:	listo, en la <u>azul</u>, cuántas fichas le cayeron, cuántos puntos son. en la <u>roja</u> cuántas fichas le cayeron, cuántos puntos son. en la amarilla, en la verde, y luego cuántos puntos llevan en total en ese turno. En el primer turno cuánto sacó, en el segundo turno, en el tercero y luego el total del turno. Resulta que hay un amiguito que no tiene cuántas fichas sacó en la sección azul pero sabe que sacó aquí seis <u>puntos</u>. Entonces cuántas fichas serán?
13:09	e:	do::s, eh no. - en el rojo?
13:12	p:	no: en el azul, aquí dice <u>puntos</u> y saco 6 puntos, cuántas fichas serían?
13:20	e:	tre::s
13:20	p:	tres::s, por qué?
13:22	e:	por::que. - porque sei::s. ah ya, son dos, cuatro, sei::s
13:29	p:	dos, cuatro, sei::s
13.31	e:	porque es tres veces dos
13.32	p:	porque son tres veces dos, muy bien. y si hay un amiguito que no tiene cuántos

		puntos tiene en la sección roja pero sabe que tiene tres fichas rojas. tres fichas rojas cuántos puntos serán?
13:52	e:	doce, doce ((*responden varios niños a la vez*))
13:53	p:	do::ce por qué?
13:54	e:	porque cada. cada. cada roja va:le cuatro
13:59	p:	a.ja, muy bien, entonces va a ser fácil llenar este cuadrito con ese registro
13:58	e:	si
14:05	p:	quien ya tenga lleno el cuadrito ahí mismo me entrega ese que tiene porque ese es la que va a pegar en el cuaderno, listo

Obsérvese que el profesor inicia recuperando los valores de las fichas según la sección de la canasta en la que pueden caer (entradas 12:12 a 12:20). Luego explica que significan los valores que se ponen en cada fila de la tabla: cada fila de la tabla representa las cantidades sacadas en un turno del juego (entradas 12:21 y 12:33). Y luego, da dos ejemplos de cómo llenar la tabla con eventos posibles. En los ejemplos, el profesor enfatiza en la relación entre las fichas y los puntos: tres fichas en la sección azul, son seis puntos por que son tres veces el 2 (entradas 11:31 y 11:32) o 3 fichas en la sección roja son 12 puntos, porque cada ficha roja son cuatro puntos (entradas 13:54 y 13:59).

El siguiente diálogo muestra que el uso de las tablas, y sobre todo, el razonamiento sobre las tablas no es ni fácil ni inmediato, y por tanto debe ser objeto de estudio por parte de los estudiantes.

Diálogo 12. *Fragmento tomado del archivo de audio 2008_10_07_11_39*

6:00	P:	qué números van aquí?
6:06	A:	como así que uno más uno da cuatro?
6:08	P:	no: no ahí no dice que uno más uno da cuatro, qué quiere decir esto
6:12	A:	((*poco audible*)) no es que-es que-es-la-la-el puntaje de una ficha
6:15	P:	Ah:ja:: que hay una ficha ((*continua poco audible*))
6:21	A:	entonces como pongo acá
6:22	P:	aquí, cuántas fichas irían aquí
6:25	A:	para completar cuatro?
6:26	P:	no, no, no aquí vamos a poner los-las fichas que sacamos ((*señalando la primera celda de la primera columna*)) y aquí vamos a poner los puntajes - ((*señalando la primera celda de la segunda columna*)) que -mire los números que están aquí. Qué número de fichas irían aquí ((*señalando la segunda celda de la primera columna*))
6:38	A:	dos=
	P:	=do:s ((*afirmando*)), y aquí ((*señala la tercera celda*))
6:41	A:	tres, cuatro, cinco, seis ((*contando los valores de la primera columna*)) ((*hay un corto diálogo poco audible*))
6:49	P:	entonces si tienes dos fichas cuántos puntos obtendrías ((*hay un corto diálogo poco audible*))

7:02	A	(como tengo dos) yo cuento de uno en uno
7:05	P:	entonces-entonces aquí cuántos puntos serían
7:10	P:	haber tú tienes una ficha roja, y una ficha roja cuatro puntos - dos fichas rojas entonces cuántos puntos dan?
7:23	A:	ocho
7:24	P:	porque sabes que es ocho
7:28	A:	porque aquí:: uno da cuatro, entonces aquí da cuatro, cuatro, entonces dos más dos sería cuatro ((*continua poco audible*))
7:45	P:	y aquí - si tienes tres fichas cuántos puntos serían?
7:50	A:	si-si-acá son, ((*no audible*)) son tres - son doce
7:56	P:	y porque sabes que son doce
7:59	A:	porque es el doble del doble, ahí dice el título, doble del doble es cuatro.
8:03	P:	pero el doble de quién?
8:06	A:	del tres, dice, el doble del doble, el doble de tres da seis, y el-el doble de seis da doce

La pregunta del estudiante en la entrada 6:01 muestra que no tiene claridad sobre el sentido de las cantidades que ocupan las casillas de cada fila en la tabla. La negación del profesor obliga a recuperar, a partir del juego, el sentido para la cantidad en cada fila, pero el balbuceo del estudiante en la entrada 6:12 muestra que no se tiene plena conciencia del diferente significado de cada cantidad, lo que se confirma en la entrada 6:25, donde el estudiante afirma que en la segunda casilla de la primera fila se pone la cantidad de fichas para completar cuatro (dado que en la primera fila se puso 1, una ficha). Las explicaciones del profesor en la entrada 6:26 muestran al estudiante que la cantidad en cada casilla tiene un significado muy preciso (en función del juego realizado): la negación acompañada de una explicación de lo que se debe poner en cada fila es una ayuda importante para la comprensión del estudiante. A partir de ahí, se ve entonces que el estudiante logra comprender la naturaleza diferente de las cantidades que se ponen en cada fila de la tabla.

La parte final del diálogo muestra otro elemento importante del uso instrumental de las tablas: en este caso, se usa la composición de razones *doble del doble…* como expresión de la relación que existe entre las dos cantidades de una fila (para cada fila, la cantidad en la casilla de la derecha es el doble del doble de la cantidad en la casilla de la izquierda). Así pues, se identifica la razón *doble del doble* como un relator entre las cantidades de la primera columna y las de la segunda. Además, para hallar la cantidad que se corresponde con cada cantidad en la columna de la derecha, el operador *doble del doble* es aplicado sobre dicha cantidad. Nótese entonces que ahora el doble del doble es una especie de operador (entradas 7:45 a 8:06) que se aplica sobre la cantidad 3 fichas para obtener la cantidad 12 puntos, calculando el doble de 3, y luego el doble de 6.

Desde el punto de vista de la comprensión de la operación realizada, en esta manera de usar la composición *doble del doble*, aplicado sobre la cantidad fichas para obtener la cantidad de puntos, se deja un vacío conceptual importante pues no se hace un trabajo para mostrar que este operador hace algo más que permitir el cálculo de la cantidad de puntos que se corresponden con cierta cantidad de fichas: en el sentido estricto de la palabra, al aplicarlo a la cantidad de fichas, las transforma en la cantidad de puntos. Esta transformación se da en tanto este operador, a diferencia de los usados en los procedimientos basados en razonamientos por analogía, tiene unas unidades, a saber, "puntos por cada ficha". Y este análisis de la razón en este sentido de transformador de una cantidad en otra no se realiza. Dicho de otra manera, se ve que para el estudiante es claro que cada ficha son cuatro puntos, que organizados los datos en la tabla, la composición de razones *doble del doble* le permite encontrar los valores faltantes en la tabla, pero no se hace el análisis dimensional que permita ver que esa razón doble del doble, que está en el lugar de la multiplicación por 4, encarna en realidad la razón *cuatro puntos por cada ficha*, lo cual es significativamente diferente de una ficha vale cuatro puntos, que es el nivel inicial en el que se pone la comprensión del estudiante de la relación entre la cantidades de cada columna. Al expresar la relación entre las cantidades de cada columna como "una ficha da cuatro puntos" mantiene separadas las dos cantidades, y efectivamente es una invitación a repetir la cantidad 4, tantas veces como la cantidad de fichas. La expresión, o mejor aún, la razón *cuatro puntos por cada ficha*, expresa una nueva cantidad, que funge como un transformador que aplicado a la cantidad de fichas produce la cantidad de puntos.[243]

Así en el trabajo en clase no se haya profundizado en las implicaciones de este tipo de procedimientos, es importante hacer notar el cambio en la función que cumple la razón con respecto a las cantidades sobre las que se aplica. La razón ya no aplica sobre un par particular de cantidades (homogéneas), sino a parejas de valores seleccionadas de entre dos familias de cantidades, y en este sentido, la razón o bien es un correlator, es decir, pone en correspondencia biunívoca cantidades de una familia con cantidades de la otra (por ejemplo, cuando se dice que todas las parejas de cantidades de la tabla del dos, son una el doble de la otra), o bien es un transformador, es decir, aplicada sobre cantidades de una familia las

[243] Esta ausencia en el trabajo de aula no significa que lo realizado sea equivocado, sino que, como se ha manifestado en otros momentos, estos estudiantes apenas están iniciando el estudio de lo multiplicativo, y por ende, aún les queda un largo camino por recorrer.

transforma en las cantidades de la otra familia con las cuales se corresponden. Se puede decir que la razón es ahora una especie de función que correlaciona familias de cantidades (es decir, pone en correspondencia biunívoca cantidades de una familia con cantidades de otra), o transforma cantidades en una de las familias en cantidades en la otra. Es en este sentido que este tipo de procedimiento se llaman "*analíticos*", en contraposición a los estudiados antes que llamamos "*por analogía*", pues recurren al uso de la razón como una función que relaciona u opera sobre familias de cantidades (tal como ya se había propuesto en la renovación curricular de 1984 al hablar de los sistemas algebraicos-analíticos).

La parte final del diálogo 5, como ya se analizó, es un buen ejemplo del cambio de foco que requieren los procedimientos mediados por razonamientos analíticos pues de repetir 24 veces el valor 4 (24 fichas cada una de valor cuatro puntos) se pasa a calcular 4 veces 24, que implica asumir el cuatro ya no como la cantidad que se debe repetir según la cantidad de fichas, sino como una cantidad que aplicada a la cantidad total de fichas produce la cantidad de puntos. Esto es, el cuatro ya es en esencia una constante de proporcionalidad que no solo transforma la cantidad sobre la que se aplica (haciéndola más grande o más chica) sino que cambia su naturaleza (de cantidad de fichas, se transforma en cantidad de puntos). Desafortunadamente, como se dijo antes, esta idea de constante de proporcionalidad, no se explotó de manera sistemática en el trabajo propuesto en el aula de clase, lo que no implica negar la importancia de lo realizado.

Otro elemento importante para ver la razón como constante de proporcionalidad, identificado en algunos momentos de la práctica matemática de los alumnos (pero igualmente poco explotada en el trabajo en el aula de clase), se dio en las tareas en las que se debían resolver problemas que implicaban calcular el valor de la unidad. Así por ejemplo, en una tarea en donde se consignaban en una tabla los precios respectivos para diferentes cantidades de helados, y donde se suministraba el valor correspondiente, por ejemplo, a 5 helados (a saber, $ 15.000), para que se calculara el valor de otras cantidades de helados (por ejemplo, 2, 3, 10 y 15), los estudiantes calculaban el valor de un helado ($ 3.000) y luego usaban ese valor para calcular los precios de las otras cantidades.[244] Este hubiera sido un buen escenario para profundizar sobre la conceptualización de la razón como constante de proporcionalidad, pues la organización de la información en forma de tabla se prestaba

[244] En otros momentos esta misma tarea se presentó con otros productos y sus precios, o refiriendo helados y sus precios, se suministraban valores diferentes.

para ver el papel del 3.000 como una razón que transforma cantidades de una de las columnas en las cantidades correspondiente de la otra, pero para ello era necesario proponer una mirada de esta cantidad no como $3.000 pesos (que es el sentido que al parecer dan los estudiantes), para verlo como la razón de cambio "$3.000 por cada pastel" ($3000\frac{pesos}{pastel}$), y en este tipo de análisis no se profundiza en el trabajo de aula de clase. Estas tareas eran habituales en el trabajo de clase, pero en ningún caso se tiene evidencia de que se haya profundizado la idea de la razón como constante de proporcionalidad, a pesar de las facilidades que para ello brindaba la forma de presentación de la tarea.

Finalmente, otro escenario del trabajo de aula en el que se presentaron oportunidades de pensar la razón como constante de proporcionalidad fue en los momentos en los que se hacía el estudio de las tablas de multiplicar (para detalles del proceso de estudio de las tablas de multiplicar ver la sección 5.7), pues como se puede ver en el diálogo 13, en el estudio de las tablas de multiplicar a partir de los registros de los juegos, es necesario un cambio en la mirada de los datos consignados en las tablas y en los procedimientos para calcular las multiplicaciones que se deben efectuar: de procedimientos basados en razonamientos por analogía (centrados en las conservación de razones entre parejas de cantidades homogéneas) a procedimientos basados en razonamientos analíticos que correlacionan parejas de cantidades heterogéneas (una de cada sistema de cantidades) a partir de una misma razón. El estudio de las tablas de multiplicación muestra entonces un uso sistemático de las razones enteras para apoyar el trabajo de aprendizaje de la multiplicación, y para el desarrollo de ciertas técnicas de cálculo necesarias en las multiplicaciones que se deben realizar de acuerdo con las tareas tratadas en clase. Pero como en los casos anteriores, en general no se encontró evidencia del análisis dimensional necesario en este tipo de procedimientos, y por lo tanto, no se profundizó en el nuevo carácter de la relación *n puntos por cada ficha* cuando esta pasa de significar "repetir la cantidad *n*, tantas veces como fichas se tengan" a un nuevo sentido en el que dicha cantidad *n* se multiplica con la cantidad *x* de fichas para producir el puntaje que se corresponden con dicha cantidad de fichas, pues en el primer caso, la cantidad *n* no tiene unidades, mientras que el segundo caso si tiene unidades. En el primer caso *n* es un operador adimensional que agranda o achica una cantidad para producir otra cantidad de la misma naturaleza (procedimientos basados en razonamientos por analogía). En el segundo caso *n* es una cantidad con unidades que opera como un transformador lineal que al aplicarse sobre una cantidad la transforma en otra de naturaleza distinta.

A pesar de lo mucho que se ha dicho hasta el momento de lo que no se realizó, y que no puede hablarse de unas prácticas matemáticas en donde la razón efectivamente fuera comprendida como una constante de proporcionalidad, es importante resaltar que con los procedimientos basados en razonamientos por analogía o analíticos, se muestra la constitución empírica de una serie de conceptos que serán la base para la formalización en grados posteriores de teoremas importantes sobre la linealidad. Además, para el caso de los procedimientos basados en razonamientos analíticos, el uso instrumental de las tablas abre posibilidades de comprender la razón como una constante de proporcionalidad que permite correlacionar las familias de parejas de cantidades correspondientes.

5.7 Las tablas de multiplicar: familias de razones y razonamientos por analogía

El estudio de las tablas de multiplicar tiene un lugar importante en esta institución, sin embargo no se hace de la manera como clásicamente se han estudiado en la escuela: como un conjunto de hechos numéricos que deben se aprendidos de memoria. Así por ejemplo, para estudiar la tabla de multiplicar por un número cualquiera, digamos hasta el 10, se inicia estudiando las regularidades numéricas que ofrecen las tareas de los juegos, sobre todo las sistematizaciones que se han realizado a partir de las tablas de registro, lo que permite el estudio de familias de multiplicaciones organizadas a partir de las familias de razones.

El siguiente diálogo, muestra un episodio en el que se estudia la tabla del 2 a partir de lo realizado en el juego de la canasta.

Diálogo 13*. Fragmento tomado del archivo de audio 2008_09_30_Grado 3 juego de la canasta*

30:22	P:	>vamos a pensar nuevamente en la situación<, nena YA por favor ((*dirigiéndose a una estudiante que la interrumpía*)) – >en que el puntaje era dos – en que sección del juego valía dos puntos<
30:34	A:	((*voces de varios estudiantes*)) en el azul
30:36	P:	en el azul, o sea que >si una persona le salieron seis fichas en el azul entonces °cuál es el resultado°< levantando la mano ((*voces poco audibles de los estudiantes*))
30:55	P:	doce –
30:56	P:	>si otra persona le salieron cuatro fichas en el azul< cuánto eran
31:01	A:	ocho, ocho ((*varias voces de estudiantes*))
31:02	P:	yo señalo ((*una pausa mientras señala un alumno*))

31:08	A:	o:cho::=
	P:	=ocho, muy bien
31:10	P:	por qué sabe que es ocho
31:14	A:	(porque vea) dos, cuatro, seis, ocho
31:19	P:	A::h porque ella cuenta dos, cuatro, seis, ocho
31:22	A:	No:: yo le digo por qué, porque.=
	P:	=espera un momentico ((*se oyen voces de varios estudiantes*))
31:29	P:	Si >a una persona le salieron die:s< - en esa sección cuántos puntos da
31:36	A:	((*varias voces*)) veinte, veinte, serian veinte
31:39	P:	serian veinte, por qué
31:40	A:	((*varias voces se superponen*)) porque multiplique,
31:42	P:	multiplicó que
31:44	A:	e::h dos por diez
31:46	P:	>do:s por die:s< - bien - osea que en este cajoncito es la tabla del que
31:52	A:	((*varias voces*)) del do::s
31:53	P:	es la tabla del dos
31:58	P:	>la ta:bla del dos - cuando se acaba< hasta donde llega
32:00	A:	((*varios estudiantes*)) hasta el die::s, donde dice, hasta el doce
32:04	P:	>hasta el do::ce< ((*voces de varios estudiantes hablando al tiempo*)) preguntando y levantando la mano
32:08	A:	veinte
32:08	P:	hasta el veinte?
		((*dialogo entre alumnos y maestros poco audible*))
32:21	P:	hasta el treintai:nueve ((*voces poco audibles*)) quien piensa otra co:sa
32:26	A:	hasta el infinito
		((*varias voces de estudiantes poco audibles*))
32:35	A:	((*el mismo estudiante*)) HASTA EL INFINITO Y MAS ALLÁ
		((*varias voces de estudiantes poco audibles*))
32:40	P:	a ver Nicolás que dice
32:42:	A:	hasta el número que uno quiera, porque uno puede ((*no se entiende el resto de la frase*))
32:47	P:	como así que hasta el número que uno quiera
32:49	A:	HASTA EL INFINITO Y MAS ALLÁ:
32:52	P:	hasta el infinito y más allá, - por que - por qué,
32:56	A:	porque-porque uno puede multiplicar - dos por un millón
33:01	P:	>uno puede multiplicar dos por un millón< - y cuánto dará
33:05	A:	((*varias voces*)) dos millones
33:06	P:	dos millones por qué::?
		((*voces poco audibles*))
33:14	P:	ESCUCHEN LO QUE ELLA ME ESTA DICIENDO cuándo uno está multiplicando qué?
		((*no es audible el dialogo entre profesor y la estudiante*))
33:30	P:	tienes que contar dos veces cinco
		((v*oces poco audibles que hacen difícil seguir el diálogo entre estudiantes y maestro*))
34:09	P:	cuando tengo números grandes, cómo sería la manera más fácil de encontrar

		resultados.
		((*no es audible lo que dicen los estudiantes pues se superpone varias voces*))
34:38	A:	si es la tabla del dos, es el doble de ( )
34:41	P:	EL DO::BLE el doble que querrá decir
		((*varias voces de estudiantes poco audibles*))
34:54	P:	el doble entonces quiere decir que
34:56	A:	que:-por lo menos-por: lo menos el dos-el dos-por lo menos e:h - e::h - pues por lo menos usted nos pone a sumar dos mas diez - entonces uno sabe que es veinte, sabe porque.
35:13	P:	dos mas diez es veinte ((*afirmativamente*))
35:15	A:	NO:: ((*varios estudiantes al tiempo*))
35:16	P:	dos mas diez
35:17	A:	ah no, no perdón, no perdón dos por diez
35:20	P:	dos por diez se sabe que es veinte, por qué
35:23	A:	porque uno le-uno le suma-uno le suma, al total otro-otro=
35:28	P:	=otro igual ((*completando la frase del estudiante*))
35:30	A:	porque repite el diez
35:31	P:	porque repite el qué?
35:32	A:	el diez
35:33	P:	bueno

Este episodio, en lo fundamental, toma como punto de partida una de las relaciones que se pueden trabajar a partir del juego de la canasta: por cada ficha en la zona de color azul se obtienen dos puntos. Como se mostró en secciones anteriores, estos juegos facilitan una comprensión de las relaciones multiplicativas a partir de la coordinación de dos conteos iterados (el valor de cada ficha se repite tantas veces como fichas obtenidas) pero las intervenciones del profesor buscan centrar la atención de los estudiantes en la relación *ser el doble de…* que existe entre la cantidad de fichas en la zona azul de la canasta, y el puntaje total, buscando que los estudiantes logren llegar a algún tipo de generalización que les permita calcular de manera directa la cantidad de puntos que se corresponden a una cantidad de fichas dada, sin que tengan que recurrir al conteo de dos en dos. Es decir, busca que los estudiantes desarrollen algún tipo de técnica que les permita centrarse en un procedimiento más de tipo analítico, y que los lleve a dejar de lado los procedimientos por analogía. Con ello, además, busca que este tipo de generalización se relacione con las tablas de multiplicar, las cuales son objeto de estudio importante en la matemática escolar.

En la entrada 30:22 el profesor busca centrar la atención en la relación que pone en correspondencia las cantidades de los dos sistemas al preguntar por la sección de la canasta en la cual las fichas que cayeran allí tenían un valor de dos puntos cada una (la sección de color azul de la canasta). Luego inicia una serie de preguntas con eventos que se hubieran podido presentar en el juego de la canasta (entradas 30:36 y 30:56), y en la misma medida pide explicaciones del porqué a esas cantidades de fichas les corresponden tales puntajes (entradas 31:10 y 31:39). En el primer caso, el estudiante responde que sumando de dos en dos, lo cual es puesto en duda por otro estudiante (entrada 31:22), el cual a su vez pide que le dejen presentar su propia explicación. El profesor realiza una pregunta similar, pero ahora indagando por la cantidad de puntos que se corresponden con 10 fichas en la zona de color azul (entrada 31:29), y varios estudiantes responden 20, y ante la solicitud del profesor por una explicación responden que han multiplicado 2×10 (entrada 31:40). Esta respuesta es aprovechada por el profesor para introducir la relación de los procedimientos que han venido realizando con la tabla del dos (el parafraseo del profesor en la entrada 31:46, y la pregunta por la tabla sobre la están trabajando son claves en este momento del trabajo).

Desde la entrada 31:58 hasta la entrada 33:01, el profesor interpela a los estudiantes sobre la extensión que puede tener la tabla del dos, esto con el fin de que los estudiantes pudiesen ver que se trata de un procedimiento generalizado que se puede aplicar para cualquier cantidad: dada una cierta cantidad de fichas (caídas en la zona de color azul de la canasta), para conocer el puntaje asociado a esa cantidad de fichas hay que multiplicar por dos. Las respuestas de los estudiantes ponen en evidencia que efectivamente han captado que la tabla del dos se puede extender hasta el número que se quiera.[245] Lo que sucede de la entrada 33:06 en adelante es interesante, pues a partir del ejemplo dado de que se puede multiplicar 2 por un millón, y de la respuesta y explicación del estudiante, el profesor parafrasea una expresión de un estudiante que explica que para calcular el doble de un número se debe contar el número dos veces (entradas 33:14 a 34:38). En la entrada 34:41 el profesor pronuncia la palabra "*doble*" con mucha fuerza y prolongando la letra 'o', lo que hacen notar a los estudiantes la importancia de esta nueva operación *el doble de…*. De ahí en adelante las intervenciones del profesor buscan que los estudiantes ganen claridad sobre el sentido de la relación "doble de…" y por ende del procedimiento para calcular el doble

[245] La expresión de un estudiante en la entrada 32:49, en un tono de voz muy alto "hasta el infinito y más allá", si bien es tomada de una película animada de Disney, es muy reveladora de la manera como están comprendiendo la extensión de la tabla del dos, aunque no sobra decir, que el sentido de infinito para estos estudiantes es el de cantidades muy grandes, como por ejemplo, del orden de los millones, como se evidencia en el ejemplo que propone un estudiante en la entrada 32:56

de cualquier número. La equivocación del estudiante en la entrada 35:13, quien expresa que "2 + 10 es 20", y la negación del profesor con un "*no*" fuerte y de pronunciación alargada, invita a rectificar el procedimiento para pasar al 10 + 10 (entrada 35:16), hasta llegar a la expresión del estudiante en la línea 35:23 en donde se expresa la regla: para calcular el doble de un número, a ese número se le suma otra vez el mismo número.

A lo largo de todo el proceso visto en este diálogo entre maestro y alumnos, se evidencia un cambio del enfoque sobre el cual se centran los procedimientos para el cálculo del puntaje obtenido de acuerdo con la cantidad de fichas que caen en una determinada zona de la canasta: de un procedimiento basado en razonamientos por analogía (repetición del valor de cada ficha), a un procedimiento analítico basado en reconocer el valor de cada ficha como un factor multiplicante (una constante de proporcionalidad) que aplicado sobre la cantidad de fichas, produce la cantidad de puntos. Esto es, el factor multiplicante, la razón constante que aplicada sobre una determinada cantidad de fichas produce el puntaje que corresponde sobre dicha cantidad de fichas, ahora se comporta como un relator (pone en relación dos familias de cantidades) o como un transformador (aplicado sobre una cantidad en una de las familias, permite conocer la cantidad correspondiente en la otra familia). Por lo tanto, dicha razón forma parte de una función que correlaciona elementos de una familia de cantidades con elementos de otra familia, pero a la vez, transforma elementos de una de ellas en elementos de la otra. Cómo se expresó al final de la sección anterior, es en este sentido que se refiere a estos procedimientos como analíticos, pues el papel de la razón sobre las cantidades es el de una función que pone en correlación cantidades entre dos sistemas de cantidades, o transforma cantidades en uno de ellos en cantidades en el otro.

Si bien el diálogo anterior trabaja sólo sobre el cálculo de dobles, esta misma estrategia es utilizada para otras formas de relación entre cantidades tales como triples de, cuádruples de, quíntuples de, etc., relacionando cada uno de estos casos con la tabla del tres, la tabla del cuatro, la tabla del cinco, y así sucesivamente, y además utilizando la composición de las razones más simples para realizar cálculos con las razones más complejas.

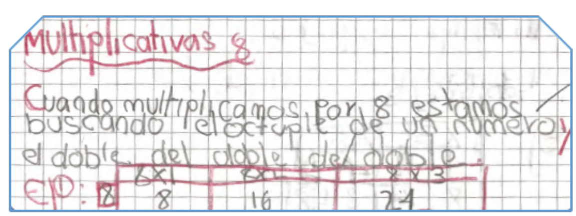


Figura 46. *Ejemplo de composición de razones. Fragmento tomado del archivo de imagen Compilado_varios_estudiantes_pagina_12*

Así por ejemplo, las multiplicaciones por dos se estudian a partir de la razón *el doble de…*, por cuatro a partir de la composición de razones *doble del doble de…* o de la razón que le es equivalente *cuádruple de…*, por ocho a partir de la composición de razones *doble del doble del doble…* o *doble del cuádruple de…* o de la razón que le es equivalente *óctuple de…*, etc. [246] De manera similar se hace para la multiplicación por tres, por seis, y por nueve (ver figura 49). Luego se hace para los otros números faltantes, por cinco, por diez y por siete. En todos los casos la idea es apoyarse en los resultados de multiplicaciones ya conocidas, y en las razones entre los factores de esas multiplicaciones conocidas y aquellas cuyo resultado se necesita conocer, como se puede ver en la figura 46 y la figura 47

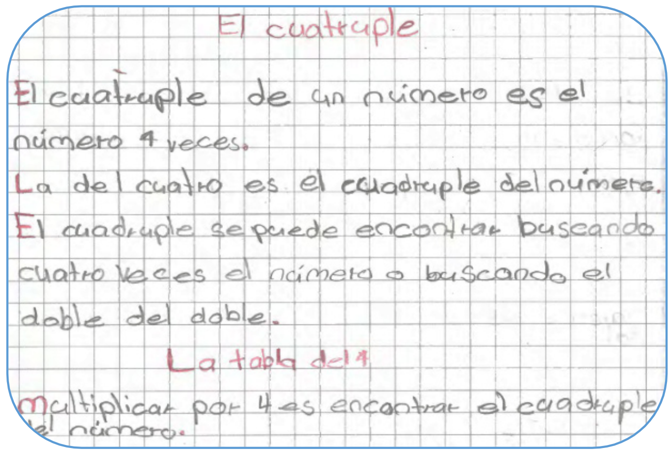


Figura 47. *Ejemplo de composición de razones. Fragmento tomado del archivo de imagen*

La imagen en la figura 47 es una buena muestra de este uso sistemático de nociones relativas a las razones para el estudio de las tablas. En la parte superior del escrito se ven diferentes maneras de encontrar la razón *cuádruple de…* bien a partir de componer otras razones (*doble del doble de…*) o bien directamente (cuatro veces el número), lo que permite de manera inmediata relacionar un tipo de razón (*el cuádruple de…*) con la operación multiplicación, en particular, con la tabla de multiplicar por el cuatro. La figura 46 muestra situaciones similares para otros tipos de razones y tablas de multiplicar.

La figura 48 o la figura 49 por su parte muestran un elemento un tanto diferente, aunque implícito, de la razón: antes de aplicar la razón *doble* a los valores de la tabla del 3, para obtener los valores de la tabla del 6, el estudiante debe identificar qué tipo de relación hay entre el 3 y 6. Es decir, antes de usar la razón como operador, debe verla como una especie de relator que le permite establecer la relación entre las cantidades 3 y 6. En todos estos casos la razón está siendo usada como un operador que se aplica sobre cantidades, y esa acción de usar la razón como operador se relaciona con la operación aritmética de multiplicar

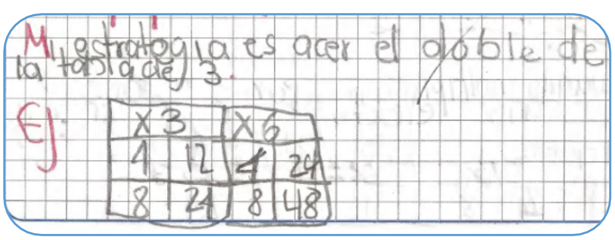


Figura 48. *Ejemplo de composición de razones Fragmento tomado del archivo de imagen Compilado_varios_estudiantes_pagina_11*

[246] Ver por ejemplo, el archivo de audio 2010_02_01_10_53, en especial el primer episodio.

Esta forma de estudiar las tablas de multiplicar es importante pues pone el centro de atención en la razón *el doble de…* utilizándola como un operador que permite encontrar el resultado de multiplicaciones que no conocemos a partir de los resultados de aquellas que si conocemos. De hecho, esto se basa también en una forma de razonamiento por analogía, en el que si en una multiplicación se duplica uno de los factores, entonces también se duplica el resultado. Es decir, dado $a \cdot b = c$ conocido, para calcular el valor $a \cdot d$, si $d = 2b$ entonces $a \cdot d = 2c$. Esto implica en primer lugar, una comprensión de la razón como un relator que permite establecer la razón entre las cantidades *b* y *d* (la razón de *b* a *d*), y luego como operador, para calcular el resultado del producto $a \cdot d$ duplicando el valor de la cantidad *c*.

La figura 49 muestra que en el estudio de las tablas de multiplicar también se usaron los procedimientos fundamentados en razonamientos por analogía basados en la conservación de la suma: si $z = x + y$, entonces $f(z) = f(x) + f(y)$, como se puede evidenciar en los arcos trazados en rojo uniendo el 3 y el 9 y uniendo el 4 y el 5, en la primera columna de la izquierda, y los arcos similares trazados uniendo el 9 con el 27, y 12 con el 15, en la columna que le sigue. Estos arcos significan, por ejemplo, que como la suma de 4 y 5 da 9, y la multiplicación por 3 de estos dos números da 12 y 15 respectivamente, entonces la multiplicación de 9 por 3 da la suma de 12 con 15, es decir, 27.

A pesar de la importancia que reviste esta forma de estudiar las tablas de multiplicar, como se mostró en la sección anterior, se deja un vacío importante: en una tabla de multiplicar el valor por el que se multiplican cada uno de los números de la tabla es una constante de proporcionalidad, y al poner el énfasis en los métodos particulares para calcular el valor de una multiplicación específica, no se profundiza en el estudio de ese $\times 2$, $\times 3$, etc., como un invariante funcional que aplicado sobre unas cantidades (1, 2, 3, 4,…), produce otras cantidades, a saber, los productos.[247]

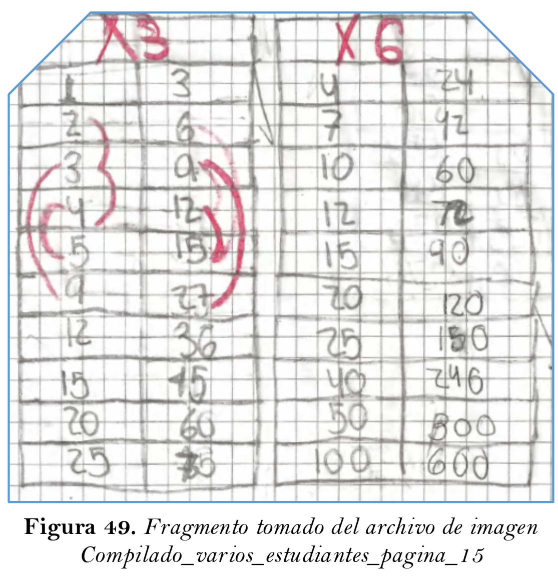


Figura 49. *Fragmento tomado del archivo de imagen Compilado_varios_estudiantes_pagina_15*

Obsérvese además, que la forma como se

[247] El episodio 2, del archivo de audio 2008_08_10_10 (ver anexo 2) entradas 13:28 a 16:18, muestran situaciones similares en donde no se explota el carácter analítico del estudio de la tabla de multiplicar como un todo (énfasis en los procedimientos basados en razonamientos por analogía).

escriben las tablas de multiplicar en tablas de dos columnas (ver figura 49), en una de las cuales se escriben los valores que puede tomar uno de los factores, y en la otra los resultados de la multiplicación de cada uno de los números de la primera columna por un único factor (escrito en el encabezado de la tabla), sería una buena oportunidad para reflexionar sobre el paso de las formas de calcular las parejas de valores particulares de cada fila, a la tabla como un todo donde el factor que define la tabla en estudio es una constante de proporcionalidad, y del papel de ese factor como transformador de las cantidades de la primera columna en cantidades de la segunda columna.

6 Fracciones y Números racionales: prácticas de medición en estudiantes de grado 4

6.1 Sobre las situaciones propuestas

En el grado 4 se inicia de manera formal el estudio de los números racionales a través de un trabajo sistemático con las fracciones, sus relaciones de equivalencia y de orden, y la adición. Similar a como pasaba con el estudio de la multiplicación en el grado 3, el estudio de las fracciones no se hace de la manera como usualmente se presenta en las instituciones escolares colombianas (al igual que en los libros de texto) a partir de actividades centradas en partir y contar, identificando la fracción como el nombre de una parte, nombrando el símbolo que representa la fracción como dos números separados por una raya (vínculo), uno de los cuales representa la cantidad de partes en que se divide la unidad, y el otro representa la cantidad de partes tomadas de esa unidad.[248] Por el contrario, en esta institución, como se mostrará a continuación, la base para el estudio de los números racionales es la medición.

6.1.1 Objeto/motivo de la tarea: estudiar los números racionales

Cómo se ha expresado en capítulos anteriores, toda tarea educativa plantea una doble finalidad objetiva (objeto/motivo de la actividad)

- La primera es una finalidad objetiva explícita, orientando la actividad de los estudiantes hacia un evento o fenómeno, para el caso, la comparación de la capacidad de diferentes vasos desechables, la comparación del área de las diferentes piezas de un rompecabezas tipo tangram, o la compararción el largo de unas cintas de cartulina. Esto es, dado un

[248] Una descripción detallada de las problemáticas asociadas a esta forma de presentación del proceso estudio de las fracciones en edad escolar se puede leer en Obando (1999, 2003, 2005).

conjunto de objetos[249] sobre el cual se ha realizado una determinada atribución de cantidad (una Magnitud), entonces las acciones de los estudiantes se orientaron a medir la cantidad de magnitud atribuida en cada objeto, tomando como unidad de medida la cantidad de magnitud atribuida en cualquiera de los otros objetos del conjunto. A partir de los resultados de estas mediciones (medidas relativas) se les plantearon diferentes problemas, por lo general, en la forma de enunciados verbales escritos, y para el caso de la tareas sobre medidas de cantidades de longitud, en la forma de un juego de competencia realizado por parejas.

- La segunda finalidad es hacia un objeto de estudio específico:[250] primeros aprendizajes de los números racionales a partir de la medida de cantidades, la comparación de las relaciones parte-todo entre dichas cantidades y de la representación de las medidas en la forma de notación fraccionaria. Las relaciones parte-todo plantean una base a partir de la cual los estudiantes pueden comparar parejas de cantidades de magnitud y establecer la razón entre ellas, la cual puede ser representada por un número entero o una fracción dependiendo de si las dos cantidades de magnitud comparadas son una un múltiplo entero de veces la otra o no. Esto genera un contexto para pensar el número racional fundamentado en la razón entre cantidades y de una forma de notación específica para las razones, la notación en forma de fracción.

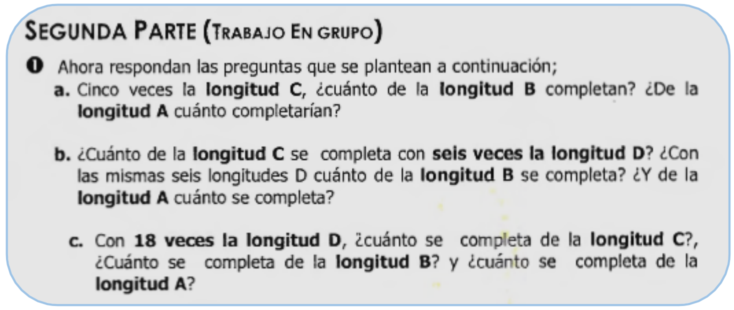
Así entonces, el proceso de estudio de las fracciones (como iniciación al estudio de los números racionales) tiene como base los procesos de medición, y se apoya fuertemente en la noción de razón y de las operaciones multiplicativas estudiadas en el grado 3º. De esta manera, las diferentes tareas presentan un énfasis marcado en la Magnitud sobre la cual se está realizando el proceso de medición, y la comparación cuantitativa entre dos cantidades, de esa magnitud, una de las cuales es tomada como unidad. Este énfasis se evidencia en el tipo de preguntas formuladas en cada tarea (ver figura 50). Los tipos de magnitudes sobre los cuales se organizaron las tareas fueron el Volumen, el Área y la Longitud. Nótese el énfasis en las magnitudes continuas, y el orden en que fueron propuestas en las distintas

[249] Por ejemplo, vasos desechables para el caso de las tareas de medición de volúmenes, las figuras de un Tangram, para el caso de las tareas de medición de áreas, y unas cintas de cartulina, para el caso de las tareas de medición de longitudes

[250] Como se expresó anteriormente, esta orientación objetiva de la acción del estudiantes hacia el objeto de conocimiento, no es explicita para él, precisamente una parte fundamental de la labor del maestro en el aula de clase es hacer que este objeto/motivo sea también aquello oriente la acción de los estudiantes en su actividad escolar.

tareas: primero el trabajo con los volúmenes, después el trabajo con las áreas, y finalmente el trabajo con las longitudes.[251]

La medida de cantidades se presenta como una alternativa eficiente para la conceptualización de los números racionales, pues como se puede ver en el capítulo cuatro, el tratamiento de las Magnitudes y sus medidas fue fundamental en el desarrollo del concepto moderno de número real, y en particular del concepto de número racional. Adicionalmente, como lo manifiesta (Davidov, 1988), organizar el estudio de los números a lo largo de la Educación Básica a partir de las Magnitudes es una manera eficiente que evita a los estudiantes aprender ciertos aspectos del número en un momento determinado del proceso, para luego tener que olvidarlos y poder así dar paso al aprendizaje de otros.[252]


SEGUNDA PARTE (TRABAJO EN GRUPO)

❶ Ahora respondan las preguntas que se plantean a continuación;

a. Cinco veces la **longitud C**, ¿cuánto de la **longitud B** completan? ¿De la **longitud A** cuánto completarían?

b. ¿Cuánto de la **longitud C** se completa con **seis veces la longitud D**? ¿Con las mismas seis longitudes D cuánto de la **longitud B** se completa? ¿Y de la **longitud A** cuánto se completa?

c. Con **18 veces la longitud D**, ¿cuánto se completa de la **longitud C**?, ¿Cuánto se completa de la **longitud B**? y ¿cuánto se completa de la **longitud A**?

Figura 50. *Ejemplo de preguntas en una tarea de medida de longitudes*

Con el fin de que este conocimiento sobre las razones y las fracciones se constituya en el objeto/motivo explícito de la actividad de los estudiantes, como se puede ver en la sección que sigue, en el curso del proceso de estudio propuesto en el aula de clase, las tareas están organizadas en diferentes momentos: un primer momento en el que se realizan las medidas relativas entre parejas de cantidades de magnitud (establecer las relaciones –razones– básicas entre dichas parejas de cantidades, y luego, a partir de estas relaciones básicas, un segundo momento en el que las tareas les proponen a los estudiantes problemas más

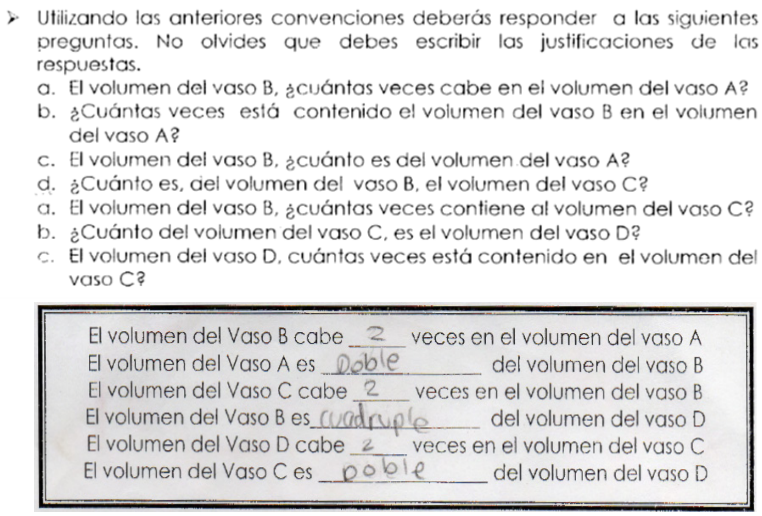
[251] Esta manera de usar los diferentes tipos de Magnitudes para organizar procesos de estudio sobre los racionales contrasta con algunas propuestas que se encuentran en la literatura especializada en las que se propone iniciar por el estudio de Magnitudes lineales, en particular la recta numérica (ver por ejemplo, Adjiage, 1999). La diferencia está en que en esta propuesta el objetivo es una conceptualización de las fracciones a partir de la comprensión de las relaciones parte-todo, y no tanto la formalización del número racional como sistema numérico. Por eso iniciar el estudio de las cantidades no enteras a partir de los volúmenes ofrece un contexto fácilmente accesible a los estudiantes, a partir del cual comprender las relaciones parte-todo, en particular, cuando se trata de medir cantidades en las que la unidad de medida es más grande que la cantidad que se quiere medir.

[252] Davidov expresa, por ejemplo, que la enseñanza del número natural en la escuela elemental se basa exclusivamente sobre las colecciones discretas, y por tanto los estudiantes aprenden ciertas cuestiones sobre los números que no pueden ser generalizables a aquellas situaciones que involucran Magnitudes continuas, como por ejemplo, que la multiplicación siempre agranda o que la división siempre achica. Por el contrario, un ingreso al estudio de los números a través de las Magnitudes plantea de entrada el estudio simultáneo de las cantidades enteras y de las cantidades no enteras, y por lo tanto los aprendizajes logrados tienen el suficiente grado de generalidad como para ser propiedades generalizadas de los números.

complejos a partir de situaciones de medición hipotéticas.

6.1.2 Acciones: organización de la actividad del estudiante

En las tareas de medición de volúmenes los estudiantes recibían 4 vasos desechables (4 onzas, 2 onzas, 1 onza y media onza),[253] cuyas capacidades, comparadas dos a dos en tamaños consecutivos entre sí, estaban en relación de *un medio de…* o *el doble de…*. Se les pedía que marcaran los vasos con las letras A, B, C y D, de mayor a menor respectivamente, y que midieran el volumen (capacidad)[254] de cada vaso, tomando otro vaso cualquiera como unidad de medida. Como registro de la tarea debían responder en su cuaderno unas preguntas sobre las relaciones métricas entre unos vasos y otros (la figura 51 es un ejemplo de las preguntas que debían responder).



- Utilizando las anteriores convenciones deberás responder a las siguientes preguntas. No olvides que debes escribir las justificaciones de las respuestas.
  a. El volumen del vaso B, ¿cuántas veces cabe en el volumen del vaso A?
  b. ¿Cuántas veces está contenido el volumen del vaso B en el volumen del vaso A?
  c. El volumen del vaso B, ¿cuánto es del volumen del vaso A?
  d. ¿Cuánto es, del volumen del vaso B, el volumen del vaso C?
  a. El volumen del vaso B, ¿cuántas veces contiene al volumen del vaso C?
  b. ¿Cuánto del volumen del vaso C, es el volumen del vaso D?
  c. El volumen del vaso D, cuántas veces está contenido en el volumen del vaso C?

El volumen del Vaso B cabe 2 veces en el volumen del vaso A
El volumen del Vaso A es Doble del volumen del vaso B
El volumen del Vaso C cabe 2 veces en el volumen del vaso B
El volumen del Vaso B es cuadruple del volumen del vaso D
El volumen del Vaso D cabe 2 veces en el volumen del vaso C
El volumen del Vaso C es doble del volumen del vaso D

Figura 51. *Ejemplos de preguntas en una tarea de medición de volúmenes. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_estudiante_2 (p 2)*

Posteriormente se les proponían tareas en las que, con base en estas relaciones iniciales, debían resolver problemas más complejos: relaciones no enteras, medir la capacidad de recipientes más grandes, etc., utilizar otros contextos, como por ejemplo, preparar una

[253] La capacidad de los vasos en onzas viene como marca de fábrica en la parte inferior de los mismos, y en el enunciado inicial de la tarea se presentaba por escrito. Como se verá más adelante, algunos estudiantes se dieron cuenta de este hecho, y lo usaron en la solución de las tareas propuestas, pero otros no.

[254] En este punto es importante resaltar que la tarea trata de manera ambigua las magnitudes Volumen y Capacidad, al punto que los confunde, y si bien en las acciones de comparación del contenido de dos vasos, o en las preguntas que se les formulan de manera escrita, se habla explícitamente del volumen de los vasos, en el sentido estricto de la palabra lo que se compara, lo que se mide, es la capacidad de los mismos y no su volumen. Esto implica que desde el punto de vista del estudio de las magnitudes (Volumen o Capacidad), si bien la tarea puede generar en los estudiantes errores al aprender sobre sobre éstas, estos posibles problemas no serán estudiados en el análisis de las prácticas de los estudiantes, y por lo tanto, en estas tareas solo se analizará lo relativo a los procesos de objetivación de la noción de razón y de número racional, coherente con el objetivo de la tesis. En adelante, cuando se hable de estas tareas, se usará la palabra "volumen" para referir la cantidad de magnitud sobre la que trabajan los estudiantes, en tanto esa era la palabra usada en la institución (con la salvedad del uso ambiguo que se le ha dado en las clases), y para efectos de claridad en los análisis, donde sea necesario, se sustituirá la palabra "volumen" por la palabra "capacidad". Igualmente en donde se presente el punto de vista del investigador se usará la palabra "capacidad", en tanto no se preste para confusiones, o se esté referenciando de manera explícita aspectos del trabajo realizado en clase.

receta. El paquete completo de las tareas sobre medición de volúmenes se puede ver en el "Anexo 7 – Tareas grado cuarto", archivo "Jugando con arena 2".

El grupo de tareas sobre la medida de cantidades de área[255] tomaba como punto de partida un rompecabezas geométrico (un cuadrado dividido en 7 piezas), y un Tangram clásico de 7 piezas. De manera similar a como se procedió con las tareas de medición de capacidades, primero se mide la cantidad de área de las cada una de las piezas tomando la cantidad de área de otra cualquiera como unidad de medida, y los resultados se consignan en el cuaderno y se respondiendo algunas preguntas que indagan por este proceso de medición. Posterior a estas tareas de medición, se proponen otras que plantean problemas más difíciles, a partir, por ejemplo, de relaciones más complejas entre las cantidades de área con las que tienen que tratar (las tareas sobre las banderas), o proponiendo otros temas de reflexión (equivalencia entre fracciones o sumas de fracciones homogéneas).[256]

Si bien la cantidad de área de las fichas de ambos rompecabezas está en relación (razón) *doble de…* o *mitad de…* (como en el caso anterior de la medida de capacidades), este conjunto de fichas ofrece la ventaja de ampliar el rango posible de las relaciones sobre las que se puede trabajar (se pueden tener relaciones hasta "32 veces" o "32-avos"). Además, la diferencia en la forma de las figuras permite centrar la reflexión en el área de cada una (la cual es independiente de la forma de la figura), y en la relación (razón) entre la cantidad de área de un par de fichas dadas. Todo esto favorece no solo la comparación cuantitativa de las áreas de las figuras, sino que también permiten una conceptualización del área como independiente de la forma de la superficie y del número que se le asigne en un proceso de medición.

Finalmente, el grupo de tareas sobre la medida de longitudes,[257] de manera similar a

---

[255] Las tareas sobre medida de cantidades área se pueden ver en el "Anexo 7 – Tareas grado cuarto", archivos "Rompecabezas geométricos", "El Tangram y las áreas", "Fracciones y Banderas" y "fracciones y áreas-Bandera de Colombia".

[256] Es importante resaltar que en este conjunto de tareas, similar a las tareas de los volúmenes, hay cierto nivel de confusión entre el Área y la Superficie, pues en ciertos momentos las tareas dicen "comparar las superficies" o "medir las superficies", y en otras "comparar áreas", o "calcular áreas". Esto se puede prestar para confusiones en la conceptualización que los estudiantes puedan lograr del Área o la Superficie, pero de la misma manera que en el caso de las tareas sobre volúmenes, el análisis de las prácticas de los estudiantes con estas tareas no buscará analizar estos posibles problemas en la conceptualización, sino mostrar sus objetivaciones sobre las razones y los números racionales. Dado que la expresión más usual en este grupo de tareas fue "área" entonces, cuando en este documento se refiera a estas tareas se usará la palabra "área", y salvo que se preste para confusiones en el análisis, se usará la palabra "superficie".

[257] El conjunto de tareas sobre la medida de longitudes pueden ser consultadas en el "Anexo 7 - tareas grado 4" archivos "fracciones y longitud", "el juego de las equivalencias" y "miscelánea de juego de equivalencias2".

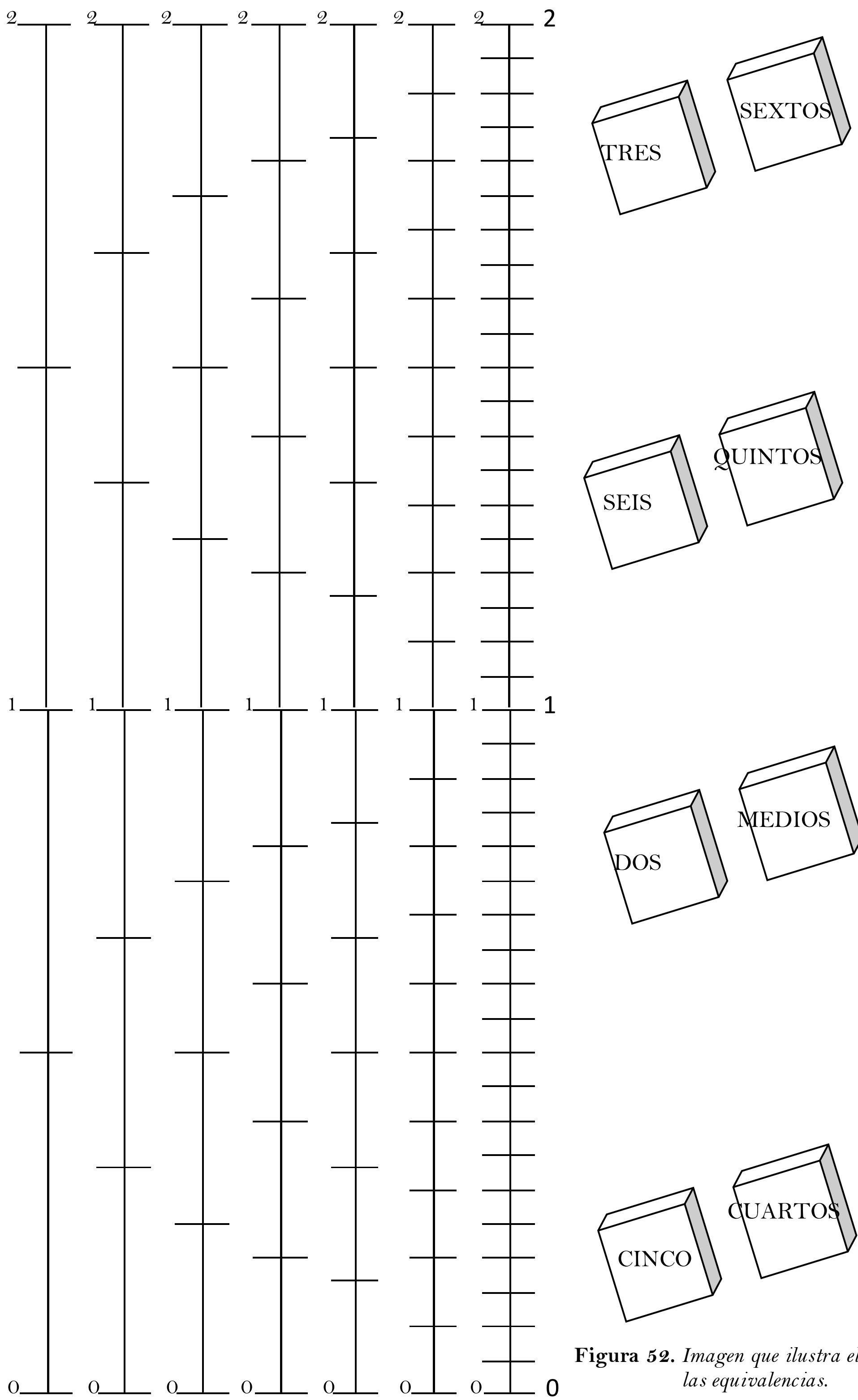


Figura 52. *Imagen que ilustra el juego de las equivalencias.*

las tareas anteriores, inicia un trabajo en el que se utilizan cuatro cintas de papel, y se realiza el proceso de medición del largo de cada una de ellas utilizando como unidad de medida el largo de otra de las cintas. En este caso los largos de las cintas son tales que la de mayor longitud es tres veces la que le sigue en longitud, y ésta a su vez es el doble de la longitud de la más pequeña. Como en las otras tareas, después de la medición física de los largos de las diferentes cintas de papel, y de consignar en el cuaderno las relaciones básicas entre las medidas de las mismas, se da paso a otras tareas donde se proponía a los estudiantes resolver problemas más complejos, pero conservando estas cintas de papel como la referencia (ver figura 50 para un ejemplo de tales tareas).

Otra tarea central en el trabajo con longitudes es el llamado juego de las equivalencias;[258] en esencia es una tabla sobre la cual se han dibujado siete segmentos de 2 unidades de longitud, cada uno de los cuales está dividido en fracciones de unidad (medios en la primera, tercios en la segunda, cuartos en la tercera, quintos en la siguiente, sextos en la otra, y décimos y veinteavos en las dos últimas) y un par de dados, uno marcado con los números del 1 al 6, y el otro marcado con las palabras medios, tercios, cuartos, quintos, sextos y décimos (ver figura 52). Uno de los dos dados nombra una determinada fracción (medios, tercios, cuartos, quintos, sextos y décimos), mientras que el otro determina las veces que se repite la fracción nombrada. El dado que nombra la fracción es el denominador, mientras que el otro, el que cuenta la cantidad de veces que se repite la fracción nombrada, determina el numerador de la misma.[259]

El juego tiene tres variantes, cada una definida al cambiar las reglas con que se juega: en la primera variante, la cantidad marcada en los dados se corre por la pista que está dividida en la fracción determinada por estos;[260] en la segunda variante, la cantidad marcada en los dados se corre por una pista diferente a la de la fracción marcada por los dados;[261] y

[258] Este juego, con algunas adaptaciones, es tomado de Obando (1999) quien, a su vez, realiza una adaptación de un juego propuesto en el artículo "El archipiélago Fraccionario" en Vasco (1994a). Una descripción detallada del juego y las posibilidades en el proceso de aprendizaje que ofrece puede leerse en Obando, Vanegas y Vásquez (2006), específicamente en la unidad 3.

[259] Nótese la diferencia que hay en esta forma de comprender la fracción con la que usualmente se tiene en la escuela, en donde numerador y denominador se definen a partir de las acciones de dividir la unidad en una determinada cantidad de partes (denominador), y contar cuantas partes se toman de esas en que se ha dividido la unidad (numerador), pero a su vez, la similitud con la manera como se nombraban y comprendían las fracciones en las matemáticas de la edad media (ver capítulo 4)

[260] Por ejemplo, si los dados marcan tres cuatros, esta cantidad se corre con la ficha que está en la pista de los cuartos.

[261] Por ejemplo, si los dados marcan dos quintos, esta cantidad se corre con una ficha diferente a la que está en la pista de los quintos, que puede ser, por ejemplo, la ficha en la pista de los décimos o en la pista de los veinteavos.

en la tercera variante, la cantidad marcada por los dados debe ser recorrida en dos pistas diferentes. Las jugadas realizadas a lo largo de una partida se registran en unas tablas (un ejemplo de ellas se puede ver en la figura 71), lo que permite recuperarlas como instrumento de análisis de las discusiones plenarias en el aula de clase. Estas tres variantes del juego (y las tablas de registro tomadas al realizar el juego) permiten un estudio sistemático de la equivalencia entre fracciones, de la suma entre fracciones homogéneas, y un inicio de estudio de la suma entre fracciones heterogéneas.

6.1.3 Operaciones: condiciones para la acción

Por el énfasis en los procesos de medición, la noción de razón se pone entonces en el centro del estudio de las cantidades no enteras. Esto se logra tomando las razones dobles, triples, cuádruples, etc., (entre cantidades en donde la cantidad mayor es un múltiplo entero de veces la menor) como base para estudiar las razones recíprocas entre dichas cantidades, es decir, aquellas en las que la menor es una fracción unitaria de la mayor.[262] Eso es, dadas dos cantidades, la razón *n-veces* de la cantidad mayor a la menor (razón de la mayor a la menor) es la base para comprender la razón (recíproca) de la cantidad menor a la mayor, esto es, la razón *n-ésima parte de…* De esta manera, al introducir la notación $\frac{1}{n}$ para representar simbólicamente la razón *n-ésima parte de…* se logra un sentido muy específico para la escritura fraccionaria de cantidades a partir de los procesos de medición de cantidades. Además, a partir de las fracciones unitarias se procede al estudio de las fracciones no unitarias como la adición de dichas fracciones; esto es, las fracciones de la forma $\frac{m}{n}$ son comprendidas como $\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m-veces}$, o simplemente como $m-veces\frac{1}{n}$.[263] Nótese que el numerador de la fracción, más que ser un cardinal que cuenta partes de un todo, es una especie de operador que actúa multiplicativamente sobre una razón *n-ésima*.

Conservando entonces la estructura general descrita anteriormente, en el primer conjunto de tareas sobre la medida de volúmenes se trabaja sobre parejas de razones de la forma doble-medio, cuádruple-cuarta parte de…, óctuple-octava parte de…, etc., desde donde se pretende conceptualizar las cantidades de la forma $\frac{1}{2^n}$ a partir de la cantidad

262 Nótese la similitud entre esta aproximación al estudio de las razones y las fracciones y la manera como eran comprendidas razones y fracciones en el contexto matemático griego (ver capítulo 4 para detalles).

263 Para detalles sobre esta manera de comprender las fracciones ver Obando (2003).

recíproca 2^n. Igualmente, este conjunto de tareas propone el trabajo con cantidades de la forma $\frac{m}{2^n}$, entendidas desde la repetición aditiva de las fracciones unitarias de la forma $\frac{1}{2^n}$

El conjunto de tareas sobre medida de áreas conserva una estructura similar en la familia de razones y de fracciones que se trabajan, pero ampliando el rango de las mismas. Además, por las facilidades que ofrece la comparación de cantidades de área, estas tareas se aprovechan para introducir unas primeras nociones sobre la equivalencia entre fracciones, y sobre la adición de fracciones homogéneas.

Las tareas sobre medidas de longitudes, conservando la misma estructura antes descrita, introducen de manera sistemática reflexiones sobre parejas de cantidades de longitud que están en relaciones de la forma $3n$ y $\frac{1}{3n}$, lo que permite ampliar el trabajo a una nueva familia de razones, a saber, tercios, sextos, novenos, etc. Igualmente, con este conjunto de tareas se introduce un estudio sistemático de la equivalencia entre fracciones y de la suma entre fracciones homogéneas y heterogéneas. Es importante notar que este conjunto de tareas sobre las medidas de longitudes, en tanto recuperan algunas similitudes con la recta numérica, generan un contexto gráfico en el cual las fracciones pueden ser vistas como puntos sobre dicha recta, y las comparaciones gráficas brindan un contexto para la comprensión de la equivalencia de fracciones. Igualmente este contexto de representación en segmentos de recta, semejando la recta numérica, también es importante para la comprensión de la suma entre fracciones homogéneas en primera instancia, y combinando con lo dicho antes sobre la equivalencia entre fracciones, también genera un contexto a partir del cual comprender la suma de fracciones heterogéneas.

Así, pues en el contexto general de las tareas antes descritas, los estudiantes del grado 4 despliegan su actividad matemática orientada a los primeros aprendizajes de los números racionales a partir de procesos de medición de diferentes tipos de Magnitudes, lo cual pone, entonces, las razones en el centro del proceso de conceptualización de las fracciones, y por ende, las razones son puestas como la puerta de entrada al estudio de los racionales (al lado de la notación fraccionaria para los racionales). Los contextos de medición, las representaciones gráficas y simbólicas que las tareas proponen a los estudiantes, y el estudio sistemático de las relaciones de orden y de equivalencia, y de las operaciones aditivas, son el contexto desde donde los estudiantes organizan las acciones y operaciones que orientan su actividad matemática. A continuación se presenta una descripción detallada de las prácticas matemáticas de este grupo de estudiantes.[264]

6.2 Dos tensiones fundamentales: medir y comparar

Como se expresó en la sección anterior, al presentar la breve reseña de las tareas, los procesos de medición de distintas cantidades de una misma magnitud, como la Longitud, el Área o la Capacidad fueron la base para iniciar el proceso de estudio de los números racionales en su forma de notación fraccionaria. En general, siempre se trató de medidas relativas,[265] pues no había una cantidad de esa magnitud que se fijara previamente como unidad de medida (a la cual se le asignaría el valor de uno) y con respecto a la cual medir las demás y, por lo tanto, dado un par de cantidades de esa misma magnitud, cualquiera de las dos podía ser tomada como unidad de medida para medir la otra. Esto implicaba entonces dos procesos fundamentales de medida: medir la cantidad mayor utilizando la menor como unidad de medida, o a la inversa, medir la cantidad menor utilizando la mayor como unidad de medida. Por la manera como fueron seleccionadas las Magnitudes y las cantidades de magnitud en cada una de las tareas, al menos en las tareas de medición de capacidades y de áreas, las cantidades mayores eran un múltiplo entero de veces las cantidades menores; esto con el fin de facilitar los procesos de medición y la comprensión de la razón *n-ésima parte* (o simplemente, razón *n-ésima*) a partir de la razón *n-veces* (que hemos llamado "*razón entera*"). Sin embargo, como se verá a continuación, el tránsito de la razón *n-veces* (que cuantifica por medio de un número entero de veces la relación de la cantidad mayor a la cantidad menor, o el operador directo que opera sobre la cantidad menor para producir a la mayor), a la razón *n-ésima* (que cuantifica con el inverso o recíproco de un entero la relación de la cantidad menor a la cantidad mayor, o el operador inverso o recíproco del anterior, que aplicado sobre la cantidad mayor produce la menor), si bien fue una fuente de tensión constante en la actividad matemática de los estudiantes, también fue un factor clave en las comprensiones logradas.

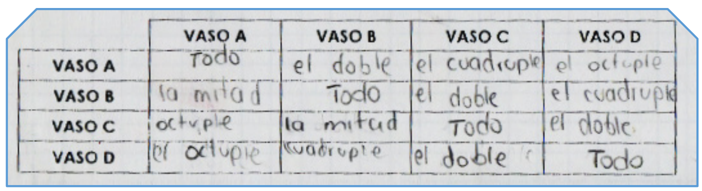
El entero relator *n* o el operador "*n-veces*" se representó siempre por escrito con un numeral indo-arábigo decimal (en base diez) específico como "2", "3", "4", etc. (aunque a veces se usaron las palabras "doble", "triple", cuádruple", etc.), que en este texto se escribe

[264] Las tareas pueden ser consultados en el "Anexo 7 - Tareas Grado 4".
[265] Para una discusión detallada sobre la medida de cantidades ver la sección 5.1, capítulo 5.

genéricamente “*n*” o “*n-veces*”, y que se lee aquí “ene veces”, aunque no se leyó así a los niños, mientras que el relator inverso o recíproco se representó por escrito con un numeral fraccional específico “$\frac{1}{2}$”, “$\frac{1}{3}$”, “$\frac{1}{4}$” etc. (aunque a veces se usaron las palabras “medio” o “mitad”, “tercio” o “tercera parte de”, “cuarto” o “cuarta parte de”, etc.), que en este texto se escribe genéricamente como “*n-ésimo*” o “$\frac{1}{n}$”, y que se lee aquí “un enésimo”, aunque no se leyó así a los niños.

6.2.1 Medir con la mayor: tensión entre la razón n-veces y la razón n-ésima

La imagen mostrada en la figura 53 (en donde se debían consignar los resultados de medir la capacidad de cada uno de los vasos nombrados en la primera columna, tomando como unidad de medida la capacidad de cada uno de los vasos nombrados en el encabezado de las siguientes columnas), evidencia un primer punto de anclaje de esta tensión: la relación entera (o de multiplicidad) tiende a ocultar la relación *n-ésima parte de…*, algo así como si se asumiera que siempre la cantidad menor mide a la mayor. Esta imagen muestra que las relaciones “ser el doble de…”, o “la mitad de…”, entre las capacidades de los vasos A y B, B y C o C y D, están bien identificadas (seguramente porque las relaciones de “ser el doble de”, o “la mitad de” han sido ampliamente trabajadas en otros momentos de la actividad escolar). Pero en las relaciones más complejas, por ejemplo entre las capacidades de los vasos A y C, D y B, o A y D, la relación entera dominó todo el proceso, independientemente de si la cantidad tomada como unidad de medida fuera menor o mayor que la cantidad que se quería medir.



	VASO A	VASO B	VASO C	VASO D
VASO A	Todo	el doble	el cuadiuple	el octuple
VASO B	la mitad	Todo	el doble	el cuadiuple
VASO C	octuple	la mitad	Todo	el doble
VASO D	el octupie	cuadrupie	el doble	Todo

Figura 53. *Ejemplo de respuestas en tareas de medida de volúmenes. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_estudiante_1 (p. 3)*

Esta misma tensión se evidencia en la respuesta dada por un estudiante al resolver una de las tareas propuestas sobre longitudes (ver figura 54), en donde, por ejemplo, las respuestas 3 y 5 son dadas respectivamente a las preguntas “¿cuánto es, de la longitud B, la longitud C?” y “cuanto de la longitud C, es la longitud D”. Nótese entonces cómo en ambos casos se está pidiendo que la cantidad de magnitud menor sea medida tomando como unidad de medida la cantidad de magnitud mayor, pero la respuesta es dada en términos del proceso de medición opuesto: la cantidad menor mide a la cantidad mayor. La expresión

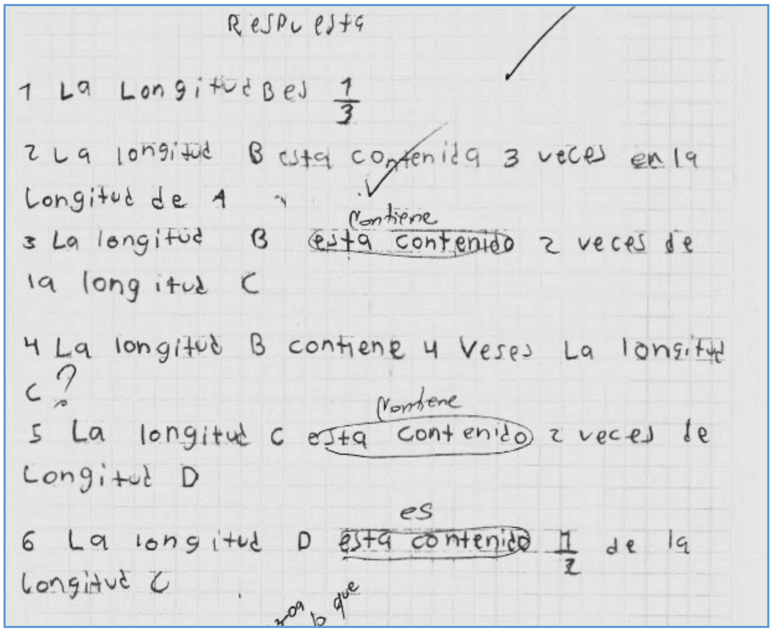


Figura 54. *Ejemplo de respuesta en tarea sobre medición de longitudes. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_1 p.23*

"estar contenido" corregida por el profesor por la expresión "contiene" es indicadora de que en cierta forma el estudiante esta pensando en la relación parte-todo de la cantidad menor con respecto a la mayor, pero al expresar el proceso de cuantificación, lo hace en términos de la cantidad de veces que la cantidad menor está contenida en la mayor.

El siguiente episodio[266] (diálogo 14 y diálogo 15) entre profesor y estudiante es ilustrativo de la situación enunciada en los párrafos anteriores, y a la vez muestra un principio de resolución en esta tensión.

Diálogo 14. *Fragmento tomado del archivo de audio 2008_11_18_09_03*

5:36	P:	mira lo que:- mira la pregunta anterior, la pregunta anterior era, el volumen del vaso C cuántas veces está contenido en el volumen del vaso A. o sea te pregunta:ron por este pequeñito cuántas veces cabe aquí. ahora te están preguntando - te están preguntando - el volumen del vaso C cuánto es del volumen del vaso A.o sea un solo vaso C. - o dicho de otra manera. si tienes un vaso A y vas a llenar el.mir.mira:- mira que la primera pregunta era tienes el vaso C y vas a llenar el vaso A --cuántas veces cabe? - ahora te están diciendo. la pregunta es al contrario. con un vaso A. ((*se oye la voz del estudiante diciendo "el doble::"*)) cuánto del vaso A necesitas para llenar un vaso C
6:21	A:	un cuarto=
	P:	=y porque un cuarto ((*pausa*)) mira ↑cua::tro↑ veces - necesitas cuatro vasos de estos para llenar este. ahora la pregunta es al revés con uno de estos ((*señalando el vaso A*)). - obviamente este es más grande o sea no se necesita un vaso completo, se necesita menos del vaso, la pregunta es cuánto menos o sea cuánto de este vaso ((*señalando el vaso A*))
6:46	A:	la mitad?=
	P:	=la mitad? y porque la mitad?
6:49	( )	la mitad seria e:ste ((*señalando el vaso B*))
6:50	P:	la mitad seria este ((*señalando el vaso B*)) correcto. -- entonces para llenar este ((*señalando el vaso C*)) cuánto de este vaso ((*señalando el vaso A*)) necesitas

[266] Este episodio entre profesor-estudiante, por cuestiones técnicas, quedó separado en dos grabaciones diferentes, y por eso se presenta separado en dos diálogos.

6:57	A:	(tre:s)
7:04	P:	para llenar. - si fuéramos a llenar. o sea si fuera con este ((*señalando el vaso C*)), cuánto de este ((*señalando el vaso A*)) vaso necesitamos para llenar este
7:10	A:	la mitad=
	P:	=la mitad. de este ((*señalando el vaso B*)) sería solo la mitad y ya me habías dicho que este de aquí ((*señalando el vaso C*)) era la mitad de este ((*señalando el vaso B*)) si o sea que para llenar este ((*señalando el vaso C*)) necesitamos la mitad de este ((*señalando el vaso B*)). entonces cuánto de todo este ((*señalando el vaso A*)) necesitamos para llenar uno de estos ((*señalando el vaso C*))
7:29	A:	do::s=
	P	=Um.hu

Diálogo 15. *Fragmento tomado del archivo de audio 2008_11_18_09_11*

0:01	A:	cuatro veces?
0:02	P:	si! este ((*señalando el vaso C*)) cabe cuatro veces en este ((*señalando el vaso A*)) totalmente de acuerdo. De esas cuatro partes que hay aquí ((*en el vaso A*)), cuántas necesitamos para llenar este? ((*señalando el vaso C*)) ((*pausa*))
0:11	A:	(nada::)
0:12	P:	nada?=
	A:	=(nada)
0:14	P:	si::: si se necesita algo. o sea si yo vaseo[267] aquí algo. algo vaseo acá. o sea. yo tengo el vaso lleno ((*el vaso A*)), cuando vaseo el vaso aquí: ((*en el vaso C*)), cuántos - me quedan aquí ((*en el vaso A*))?-- o sea aquí ((*en el vaso A*)) me queda algo y vacié algo aquí ((*en el vaso C*)), esa es la pregunta que me están haciendo, eso que yo estoy vaciando, cuánto es de todo el vaso, es la mitad o menos de la mitad?
0:36	A:	(menos de la mitad)=
	P:	=es menos de la mitad. por qué es menos de la mitad? ((poco audible la respuesta del estudiante))
0:44	P:	claro!, porque con este ((*señalando el vaso A*)) sería la mitad y este ((*señalando el vaso C*)) es el más pequeño. pero qué tanto entonces es esa:- qué tanto menos:- o sea ((*pausa*))
1:00	P:	ahorita miramos

La extensa intervención del profesor en la entrada 5:36 está intentando mostrar la diferencia entre las dos preguntas que aparecen en la tarea: una de ellas, que ya había sido respondida por el estudiante, indaga por la relación de multiplicidad que hay entre el volumen del vaso A y el volumen del vaso C (a saber, el volumen del vaso A es cuatro veces el volumen del vaso C), y la otra, a la que se enfrenta en este momento, está centrada en la

[267] Nota del autor. Esta expresión es de uso coloquial y refiere a la acción de pasar el contenido de un recipiente a otro.

relación recíproca; es decir, cuánto del volumen del vaso A es el volumen del vaso C. Si bien en la entrada 6:21 el estudiante responde "un cuarto", y parece dar a entender que ha comprendido la situación, con la interpelación del profesor pidiendo una explicación, y la respuesta del estudiante en tono interrogativo (entrada 6:46) que denota duda, muestra que no hay tal comprensión. La conversación suscitada entre las entradas 6:46 y 6:50 muestra que el estudiante comprende cuándo entre dos cantidades una es la mitad de la otra. Pero en este caso debe realizar la composición multiplicativa de dos mitades (el volumen del vaso C es la mitad del volumen del vaso B, y este a su vez es la mitad del volumen del vaso A), y esa composición es la que no comprende en el momento, como se evidencia en la entrada 6:49 o 7:10. Después de la explicación dada por el profesor en la entrada las 7:10, una nueva respuesta en la entrada las 7:29, y la inmediata negación del profesor, el estudiante enuncia en un tono interrogativo (denotando duda en la respuesta) "¿cuatro veces?" (entrada 0:01 de la segunda parte del diálogo). En este momento el profesor responde afirmativamente y parafrasea la respuesta, para luego preguntar por la relación en el otro sentido, obteniendo una respuesta un tanto sorprendente por parte del estudiante: "nada" (entrada 0:11). Esto es afirmado en la siguiente entrada cuando el profesor parafrasea lo dicho por el estudiante y en tono interrogativo, obteniendo la misma respuesta del estudiante. Esta respuesta del estudiante es clave, pues ese "nada" en realidad significa que no necesita un vaso completo, pero como en los casos a los que seguramente está acostumbrado, en donde las cantidades menores miden a las mayores, el resultado es uno o más de uno, entonces como en esta situación no alcanza a ser uno, pues no es nada, es cero.

Sigue entonces una extensa intervención del profesor (entrada 0:14) en la cual, a partir de evocar el proceso físico de llenar unos vasos con los otros, intenta mostrar que cuando la cantidad tomada como unidad de medida es mayor que la cantidad que se quiere medir, si bien no se necesita la unidad completa, se requiere una cierta cantidad de esta unidad, y que la pregunta es, entonces, cuánta cantidad de esa unidad de medida se necesita para completar la cantidad de volumen que se quiere medir. Después de esta explicación, en la entrada 0:36 el estudiante estima que necesita menos de la mitad del volumen del vaso A para llenar completamente el vaso C, en tanto el volumen del vaso C es menor que el del vaso B, y el volumen del vaso B es la mitad del volumen del vaso A.

A pesar de que no se logra que el estudiante llegue a una respuesta correcta, la estimación prenumérica de una relación para esta medida (menos de la mitad), como se verá más adelante, es un elemento clave en la comprensión de este tipo de relaciones entre cantidades (relación *n-ésima*) en donde la cantidad mayor es la unidad de medida para medir a la menor. Otro elemento importante que resalta este diálogo es la comprensión de que en este tipo de situaciones opera un cambio en la unidad de medida en el proceso de medición: de medir la cantidad mayor tomando como unidad de medida la menor, a medir la cantidad menor tomando como unidad de medida la cantidad mayor.

Situación similar se puede identificar, por ejemplo, en la transcripción del archivo de audio 2008_11_18_09_03_Grado_4-Fracciones-Volumenes (ver Anexo 3) en donde ante la pregunta de cuánto se llena del volumen del vaso A con el volumen de un vaso C, en primera instancia el estudiante responde "uno" (entrada 3:10), seguramente pensando en que el contenido de un vaso C cabe totalmente en el vaso A (aunque no lo llena por completo), algo así como si el volumen del vaso C siguiera siendo la unidad de medida. Como en el caso anterior, con la referencia a los casos en los que el volumen de un vaso determinado es la mitad de otro vaso (por ejemplo lo vasos A y B) se logra hacer evidente el cambio en la unidad de medida.

El diálogo 16 muestra cómo el profesor busca que los estudiantes comprendan el cambio en la unidad de medida cuando se mide la cantidad menor con la mayor; este cambio es la base para poder pasar de la razón *n-veces* a la razón *n-ésima*. Como puede verse a lo largo de todo el diálogo, la relación de multiplicidad entre un volumen mayor y uno menor es la base para la comprensión de la relación *n-ésima parte de…* del menor al mayor, y lo que sucede entre las entradas 1:27 y 1:43 muestra que para que lo uno pueda ser la base para comprender lo otro, es fundamental "ver" el cambio en la unidad de medida: de indagar por cuántas veces la cantidad menor se necesitan para completar (llenar) la cantidad mayor, se pasa a preguntarse "cuánto de la cantidad mayor completa (llena) la cantidad menor", y la explicación del profesor en la entrada 1:50 recurre a la acción física de llenar los vasos, mostrando que en un caso el vaso se llena con el pequeño, pero que en el otro, es el vaso grande el que se usa para llenar el pequeño (el resto del diálogo usa esta idea para preguntarse quién llena a quién, o con cuánto se llena). Además, la explicación dada por el profesor a los estudiantes en la entrada 1:50 llama la atención sobre otro hecho importante, ya no en función de la relación entre las cantidades y el estatus de unidad de medida de una u otra, sino en función de la forma como se redactan las preguntas a través de las cuales se presenta la tarea: los enunciados de las preguntas a través de los cuales se pide a los estudiantes realizar un tipo u otro de comparación cambian continuamente su estructura gramatical, de tal manera que, por ejemplo, en unas ocasiones el enunciado en sí mismo es una sola pregunta, y en otras se compone de varias afirmaciones y termina con un enunciado en forma de pregunta; si en un momento se pregunta por cuántas veces contiene la cantidad mayor a la cantidad menor, en otro se pregunta por cuántas veces la cantidad menor es contenida en la cantidad mayor, etc. Así podría entenderse el énfasis en las dos explicaciones dadas por el profesor en las entradas 1:50 y 2:36 para llamar la atención sobre la necesidad de leer con cuidado cada enunciado (y la confesión final en la entrada 2: 43 de que "a veces ... la redacción no es buena"), de tal forma que se pueda determinar qué cantidad se está usando como unidad de medida, y qué cantidad es la que está siendo medida (para el caso de este diálogo, en el que se trata de volúmenes, qué vaso se usa para llenar otro vaso, y qué vaso es el que debe ser llenado).

Diálogo 16. *Fragmento tomado del archivo de audio 2008_11_18_09_11*

1:08	A:	cuánto es el volumen del vaso B es. e. en el volumen del vaso D?
1:13	P:	cuánto del vaso B es el volumen del vaso D?, es una pregunta similar a la anterior
1:21	A2:	o sea. con cuá:nto lleno. con con cuanto lleno. con cuánto tengo ((*poco audible*))
1:26	P:	por ahí es la idea
1:27	A:	con cuántos de estos lleno este
1:29	P:	aja::: - no! no, no, no la pregunta no es cuántas de esta llena esta, sino
1:36	A:	cuánto:-
1:37	P:	cuánto del volumen del vaso B es el volumen del vaso D y vas a llenar
1:43	A2:	con cuánto de este ((*señalando el vaso B*)) lleno este? ((*señalando el vaso D*))
1:44	P:	con cuánto de este ((*señalando el vaso B*)) se llena?
1:46	A:	un cuarto
1:48	P:	es similar al anterior=
	A:	=A: ya!
1:50	P:	ojo que es que ahí la. las. la redacción de las preguntas hace que sean, mu::y parecidas. entonces ahí tienen que (leer). leer muy bien para saber quién van a llenar con quién. si llenan el vaso grande con el pequeño. o si es con el vaso grande -- llenar el pequeño o con el vaso pequeño llenar el grande, son las dos
2:14	A2:	por ejemplo si este ((*señalando el vaso B*)) se llena en este ((*señalando el vaso C*)) es la mitad, digo
2:18	P:	si fuera este. si con este ((*señalando el vaso B*)) fuéramos a llenar este ((*señalando el vaso C*)), solo necesitamos la mitad. - pero si con este ((*señalando el vaso C*)) vamos a llenar este ((*señalando el vaso B*))
2:25	A2:	necesitamos dos= ((*al mismo tiempo el otro estudiante dice uno*))
	P:	=necesitamos dos=
	A:	=ah¡ sí¡ dos=

	P:	=necesitamos dos. si con este ((*señalando el vaso D*)) vamos a llenar este ((*señalando el vaso B*))
2:31	():	necesitamos cuatro= ((*al tiempo responden los dos estudiantes*))
	P:	=necesitamos cuatro. pero si con este ((*señalando el vaso B*)) vamos a llenar este ((*señalando el vaso D*))
2:35	A2:	un cuarto
2:36	P:	necesitamos la cuarta parte. el asunto es que que tienen que leer muy bien las preguntas
2:41	A:	si fuéramos a llenar este ((*señalando el vaso D*)) necesitamos un octavo ((*señalando el vaso A*))
2:43	P:	necesitamos un octavo correcto, está muy bien. entonces cual es el asunto, eso está bien entendido por ustedes, el asunto es que cuando están las preguntas redactadas, a veces -- la redacción no es buena.

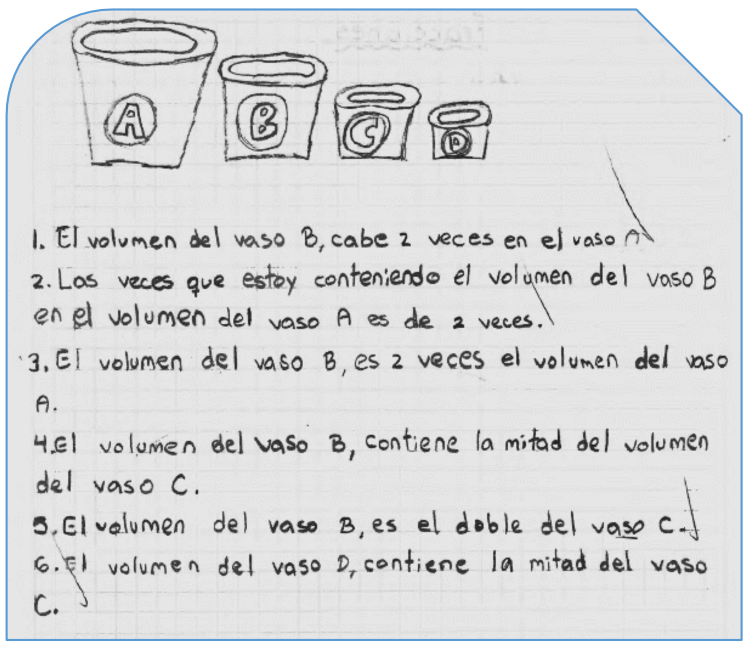


Figura 55. *Ejemplo de respuesta en tareas sobre medición de volúmenes. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_2 p.2*

Las respuestas que se ven en las figuras 54 y 55 evidencian igualmente esta dificultad con la redacción de las preguntas (por ejemplo las respuestas 2, 4 y 6 en la figura 55), pero además, por la manera como los estudiantes redactan las respuestas se evidencia la importancia de variar la estructura sintáctica de la pregunta (de esa forma, sin variar la estructura de las relaciones entre las cantidades, el enunciado hace la misma pregunta de una manera distinta), para evitar respuestas estereotipadas al formato de la pregunta, y por ende, obligar al estudiante a preguntarse por cuál es la cantidad que se toma como referencia (unidad) y cuál la cantidad que debe ser medida.

De lo mostrado se puede entonces concluir que, dadas dos cantidades, una de las cuales es un múltiplo entero de veces la otra, para los estudiantes es relativamente fácil comprender dicha relación de multiplicidad si se establece a través de un proceso en el que la cantidad menor mide a la mayor. Sin embargo, establecer ahora la medida de la cantidad menor, tomando como referencia la cantidad mayor, es un proceso que no es fácil de comprender por los estudiantes, en primer lugar, porque lo que se hace visible a sus ojos es la relación de multiplicidad de la mayor con respecto a la menor, y en segundo lugar, aunque puedan visualizar que la cantidad menor ocupa una cierta cantidad de la mayor, cuantificar cuánto es esta cantidad con respecto a la mayor termina siendo ocultado por la relación entera, expresada en la cantidad de veces que la cantidad menor es contenida en la mayor. Aunque suena obvio, sólo cuando se comprende el cambio en la unidad de medida se logra establecer la cuantificación de la cantidad menor, tomando la mayor como unidad de medida. Dicho de otra forma, la razón *n-veces* entre las dos cantidades, domina a la razón *n-ésima* entre ellas, y en tanto no se comprenda el cambio en la unidad de medida que opera desde cuando se establece la relación de la mayor con respecto a la menor, a cuando se determina la relación de la menor a la mayor, no es posible comprender la relación *n-ésima* a partir de dicha razón entera. Sin embargo, como se mostrará en la sección 6.3.2, esta dualidad entre la razón *n-veces* y la razón *n-ésima* fue fundamental para generar una base firme en la comprensión de un sentido para la segunda a partir de la primera.

6.2.2 Comparar cantidades: tensión entre la percepción numérica y prenumérica de la razón

El otro elemento de tensión importante en este proceso de medición de cantidades, como ya fue brevemente esbozado en párrafos anteriores, tiene que ver con la percepción prenumérica de la relación entre las dos cantidades propuestas cuando la mayor se usa como unidad de medida para medir la menor. Es decir, es claro que los estudiantes logran con facilidad una percepción numérica de la relación entre dos cantidades cuando una cantidad mayor es medida exactamente con una cantidad menor, lo que se expresa, bien a través de una razón (*el doble de*, *el triple de*, etc.) o bien a través de un número (2, 3, 4, etc.), generalmente acompañado de "veces". Sin embargo, cuando se trata de la medición en el sentido inverso, es decir, la mayor tomada como unidad de medida para medir la menor, hay un momento inicial en que dicha relación, o mejor aún dicha razón, es percibida de forma prenumérica, lo que se evidencia en expresiones como "más de la mitad", "menos de la mitad", "como tres veces", etc. Evidencias de este tipo se encuentran, por ejemplo, en el diálogo 15, entrada 0:36 a 0:44, en el diálogo 17, entradas 5:14 a 5:19, en donde las expresiones de los estudiantes refieren que están midiendo el volumen del vaso pequeño tomando como unidad de medida el volumen del vaso grande, lo cual es un indicador de que el estudiante está centrando la mirada en la relación parte-todo de la cantidad menor a la mayor, pero al mismo tiempo indica que el estudiante no logra comprender cómo establecer dicha cuantificación en el sentido contrario, pero sí establece un estimativo de la misma. Esta percepción prenumérica de la razón toma como base las razones que ya están plenamente identificadas por los estudiantes como por ejemplo la razón "un medio de…" (como se puede ver en el diálogo 20, desde la entrada 13:38 hasta la entrada 13:43), en donde la relación "mitad de…" es la base para estimar la relación "un cuarto de…" estimando inicialmente que se trata de menos de la mitad.

Diálogo 17. *Fragmento tomado del archivo de audio 2008_11_18_09_11*

4:13	P:	si vas a llenar este vaso con este ((*señalando el vaso C*)), cuánto del contenido de este vaso ((*señalando el vaso B*)) necesitas?
4:20	A:	si voy a llenar este: ((*señalando el vaso B*))
4:22	P:	no! vas a llenar e:ste ((*señalando el vaso C*)) - usando este ((*señalando el vaso B*))=
	A:	=a.ja=
	P:	=cuánto de todo el vaso necesitas -((*pausa*)) - un momentico, hagámoslo entonces al revés, cuántos de este ((*señalando el vaso C*)) necesitas para llenar este ((*señalando el vaso B*)) -- ese ya lo habían hecho, necesitas dos:: - este lo llenas con dos, entonces - uno de estos ((*señalando el vaso C*)), cuánto del contenido de aquí ((*señalando el vaso B*)) necesitas para llenar este?((*señalando el vaso C*))
4:48	A:	uno
4:49	P:	no necesitas todo el vaso, necesitas un medio del vaso
4:54	A:	la mitad=
	P:	=la mitad, por qué la mitad?
4:57	A:	porque::: este ((*señalando el vaso C*)) es dos ( )
4:58	P:	a.ja claro, entonces para llenar este ((*señalando el vaso C*)) necesitas solo la mitad de este ((*señalando el vaso B*)). - ahora este, cuántas veces cabe aquí? ((*señalando el vaso D*))
5:07	A:	cuatro
5:08	P:	entonces para llenar este de aquí ((*señalando el vaso D*)), cuánto del contenido total necesitas? ((*señalando el vaso B*))
5:14	A:	m:::
5:15	P:	la mitad, más de la mitad, menos de la mitad
5:17	A:	más de la mitad=
5:18	A2:	menos, menos
5:19	P:	menos de la mitad, y como qué tanto? ((*pausa*))
5:28	A:	un cuarto?
5:29	P:	y, por qué un cuarto?
5:33	A:	pues porque necesitamos cuatro veces este para llenar este ((*señalando el vaso B*))
5:40	P:	a.ja, si
5:42	A:	un cuarto?

5:43	P:	si
5:45	A:	y como escribimos un cuarto?
5:46	P:	hay varias maneras, lo puedes escribir en palabras, <un cuarto>
5:51	A:	ah:::
5:53	P:	esa es una manera, si

Así entonces, esta percepción cuantitativa prenumérica de la relación (razón) entre dos cantidades, que también había sido identificada en el análisis realizado sobre las prácticas matemáticas de los estudiantes del grado 3 para el caso de las razones enteras, surge ahora nuevamente como un factor importante en la comprensión de las razones no enteras entre cantidades en el caso de que se tome la mayor como unidad.

Además, y como se analizará a continuación, si bien los diálogos anteriores muestran que la comprensión de la razón entera entre dos cantidades puede ser vista en un cierto momento del proceso como un obstáculo para comprender la razón *n-ésima*; en todo caso, la razón *n-veces* es la base para comprender la razón *n-ésima parte de….*

6.3 Cuantificar la razón: nombrar, representar, operar con las fracciones

6.3.1 La fracción como parte: un obstáculo didáctico

En la tarea de medición de áreas, en donde utilizaron el rompecabezas geométrico, el profesor dictó las preguntas que se muestran en la figura 56, que en esencia contienen una manera típica (al menos en el sistema educativo colombiano) de realizar preguntas a los

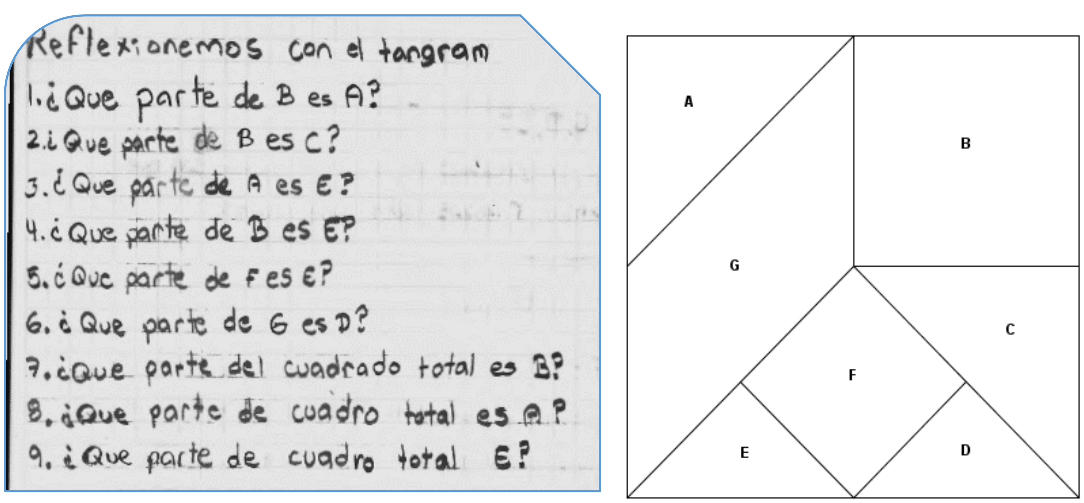


Figura 56. *Ejemplo de preguntas en tares sobre medición de áreas. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_2 p.20*

estudiantes cuando se quiere que establezcan la relación *n-ésima* entre dos cantidades.

Las respuestas dadas por un estudiante (ver figura 57) ponen en evidencia una problemática en la comprensión de la relación *n-ésima* entre las cantidades comparadas, lo cual indudablemente se debe a lo que estas preguntas refieren. Nótese que de la segunda pregunta a la quinta, donde las relaciones son de 1 a 2, y donde es fácil establecer cuántas veces se debe repetir una ficha de menor tamaño para completar la otra (es más: que la repetición de la ficha menor cubre totalmente la ficha mayor), todas las respuestas son dadas en términos de la relación de multiplicidad de la menor con respecto a la mayor, y con expresiones que aluden a la relación espacial entre las fichas. Esto se ve con más fuerza en las últimas tres respuestas, donde se responde específicamente por el lugar que ocupa la ficha en relación al cuadrado formado por todas las fichas.

Nótese entonces como las respuestas dadas son totalmente coherentes con la forma como se realizaron las preguntas: (a) No refieren a un proceso de medición, tampoco refieren a las cantidades sobre las cuales se está pidiendo la comparación. (b) La expresión "qué parte de…" alude más bien a una ubicación espacial de la parte con respecto al todo, y no necesariamente a una cuantificación de la relación (razón) entre ambas. (c) Además, las letras en mayúscula utilizadas en cada una de las preguntas, más que aludir a la cantidad de área de cada una de las piezas del rompecabezas, se refieren más bien al nombre de cada ficha como pieza.

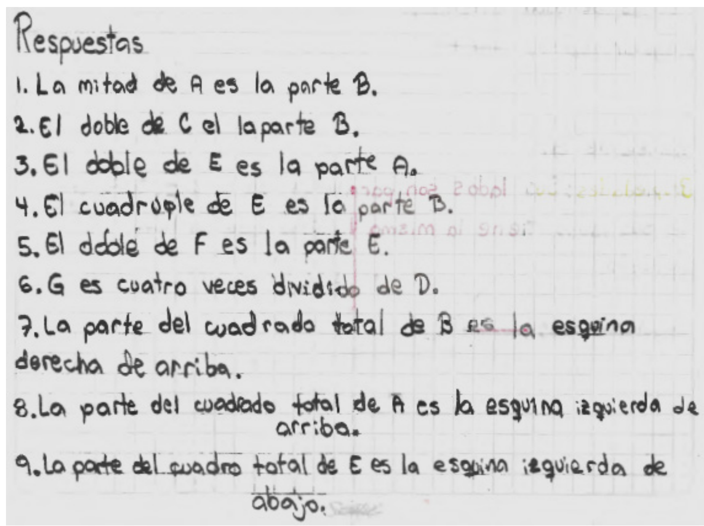


Figura 57. *Ejemplo de respuesta en tarea sobre medición de áreas. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_2 p.20.*

El siguiente diálogo (tomado de una de las tareas sobre las banderas) muestra que esta idea de la fracción como parte es un obstáculo para la comprensión de la razón *n-ésima* que relaciona dos cantidades, pero a su vez, indica una salida fundamentada en la comprensión de los procesos de medición tomando la cantidad mayor como unidad de medida.[268]

[268] Como se puede ver en el capítulo 4 (matemáticas en la antigua China o India), otra salida es determinar cuántas veces contiene la cantidad menor a la mayor (dividir la cantidad mayor entre la menor), y la cantidad que sobra (el residuo), se expresa como una razón de la cantidad menor a mayor (fracción propia),

Diálogo 18. *Fragmento tomado del archivo de audio 2010_01_19_08_34*

0:05 P: qué fracción de la bandera de Chile esta coloreada de rojo, qué es lo que me preguntan?

0:09 A: profe pero no ((*no es entendible*))

0:11 P: qué es lo que nos pregu:ntan?, es que cuando yo digo qué fracción de la bandera de Chile está coloreada de color rojo ((*"es la de abajo" responde el estudiante*)) si, yo sé que es este pedazo de acá abajo es rojo pero que es lo que nos preguntan

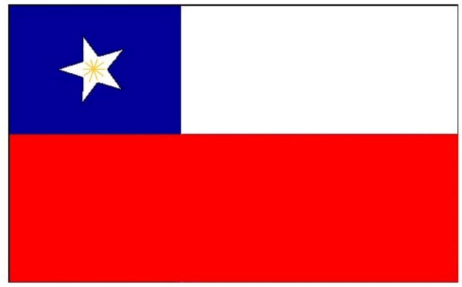


Figura 58. *Bandera de Chile*

0:21 A2: pero pro:.

0:23 P: sí, yo sé que este pedazo de acá es rojo, cierto? cierto? entonces si a mí me dicen, <QUÉ FRACCIÓN de la bande:ra>? a qué se refiere esta pregunta?

0:35 A: qué parte?

0:36 P: qué parte de la bandera. y si yo digo que esta parte de acá abajo es la roja, entonces qué parte de la bandera está coloreada?

0:42 ( ): la. la de abajo. la última ((*varios estudiantes al tiempo*))

0:45 P: qué parte de la bandera es?=

P2: =cuánto es? esto que esta coloreado, cuánto es de toda la bandera?

0:51 ( ): ah:::!!

0:52 P: mírela bien, es esta parte de acá abajo

0:55 A2: la mitad

0:56 A: la mitad=

P: =la mitad

0:57 P2: por qué es la mitad?

0:58 P: por qué es la mitad?

0:59 A2: AH::: porque:- porque:- porque

1:00 A: a: mire:- mire. - haga de cuenta que. es. esto es blanco no. ah!: no:- no:- mentiras esto es más gordo que éste, éste es más chiquito

1:08 P: no:: no se fije en eso ahorita que si es más=

1:11 A2: =es por eso, porque mire éste (   ) hace parte de este ((*señalando la parte de rojo con respecto al resto de la bandera*))- y como es la mi. mitad. es. es. ((*"es la mitad" dice otro estudiante*)) es la mitad. ésta es la mitad de éste

1:22 P: de todo el. de todo

1:24 A: de toda la bandera=

P2: =y cómo sabe que es la mitad?

1:26 P: cómo uno hace para saber que ésta roja es la mitad?

1:30 A: pues porque:: esto hace como una separación ((*refiriendo la separación entre la franja de color rojo y las otras dos franjas de colores*))

1:34 P: si, pero:: cómo hago yo para saber. por ejemplo, si yo cojo esta hoja y la doblo por aquí: ((*doblando la hoja en dos partes*)), aquí la doble por la mitad?

1:42 A: no:

lo que se expresaba en una notación mixta de la forma $a+\frac{m}{n}$. No se encontró evidencia de esta forma de aproximación en las prácticas matemáticas de los estudiantes de este grado.

1:43	P2:	por qué no?
1:44	A:	porque está muy baji:to
1:46	A2:	porque NO ESTÁ EN PARTES IGUALES
1:48	P:	porque no está en partes iguales
1:49	A:	u.ja

Al inicio los estudiantes manifiestan no entender la pregunta que se les está haciendo: "¿qué fracción de la bandera está coloreada de rojo?" En la entrada 0:11 el profesor repite la pregunta, al tiempo que uno de los estudiantes dice que es la parte de abajo de la bandera, lo que el profesor (entrada 0:23) intenta aclarar preguntando a los estudiantes qué entienden cuando se les pregunta "qué fracción…" (pronunciando esta parte de la frase en un tono más alto de lo normal). Uno de los estudiantes parafrasea lo dicho por el profesor (entrada 0:35), lo cual es afirmado por él (entrada 0:36) y reiterado al preguntar "qué parte de la bandera está coloreada…", obteniendo por respuesta, al mismo tiempo por los dos estudiantes: "la de abajo, la última". Nótese que la respuesta dada por los estudiantes es correcta, pues la pregunta alude a la relación espacial de la franja de color rojo en la bandera, con respecto a toda la bandera, pero el profesor rechaza esta respuesta (lo que se evidencia al insistir en la pregunta por la parte, sin respuesta por parte de los estudiantes), pues lo que tiene en mente es la cuantificación de la relación entre la cantidad de área coloreada de rojo con respecto a la cantidad de área total de la bandera. En ese momento se da una intervención del investigador, preguntando a los estudiantes cuánto es lo que está coloreado de rojo de toda la bandera,[269] y la exclamación "Ah...!" de los estudiantes muestra que han comprendido, lo que se ratifica en el cambio de respuesta "la mitad".[270] Cuando se hace referencia al "cuánto es…" en vez de a "qué parte es…", la respuesta muestra un cambio de foco desde la organización espacial de las partes con respecto a la bandera, a la cuantificación de la relación entre la cantidades.

[269] Nótese que la intervención del investigador tiene dos partes, una primera en la que solo pregunta "¿cuánto es?" y la otra en la que expresa su pregunta de manera más amplia, mostrando qué partes de la bandera son las que se deben comparar: "esto… ¿cuánto es de toda la bandera?". Este cambio es el enunciado fue fundamental en la comprensión de la situación por parte de los estudiantes, pues la pregunta inicial del investigador era ambigua y dejaba implícita las cantidades que se debía comparar. Sin embargo, la expresión "cuánto es de la bandera" puede todavía referirse al pedazo rojo y al dibujo de la bandera y la respuesta "la mitad" puede seguirse refiriendo a la mitad física, aunque la palabra "cuánto" no necesariamente implica que el niño que responde ha tomado conciencia que hay una cantidad de cierta Magnitud en juego.

[270] En este mismo archivo de audio se pueden ver otros momentos similares (ver Anexo 3), en donde muestra la misma interpretación de la pregunta por "la parte" como una referencia a la localización de la franja con respecto a la bandera.

En el resto del diálogo se pide a los estudiantes que expliquen por qué es la mitad, y a partir de lo expresado por ellos se ve que la idea de parte sigue produciendo interferencia, en tanto la referencia inmediata es a la cantidad de partes (entrada 1:30, refiriendo que la franja de color rojo ocupa una parte de la bandera y los otros dos colores la otra parte), asumiendo la parte como una región del espacio visual, y por ende, sin considerar de manera explícita la congruencia entre ellas. De ahí en adelante el profesor presenta un ejemplo a los estudiantes en el que divide una hoja en cuatro partes, todas desiguales, para intentar mostrar que es necesaria la igualdad en las partes. La parte final de este diálogo (no presentado aquí, pero que puede ser consultado en el Anexo 3) muestra que la referencia a las partes, incluso contando la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad, y considerando que las partes sean iguales, no es suficiente para comprender la razón *n-ésima* entre la parte y el todo: es necesaria la conciencia de la igualdad en la medida de las partes, medida con respecto a una determinada cantidad de magnitud, y por ende, de un proceso de medición.[271]

De lo dicho anteriormente se evidencian dos hechos significativos: primero, pensar la relación no entera entre un par de cantidades en términos de partes es un obstáculo para la comprensión de la cuantificación de la relación métrica que está efectivamente detrás del proceso de establecer la razón entre dos cantidades, cuando la mayor se toma como unidad para medir a la menor. Segundo, se evidencia que una referencia explícita al "cuánto es" una cantidad con respecto a la otra es una mejor manera de preguntar por la cuantificación de la razón que expresa la relación métrica entre ambas cantidades. Sin embargo, si esta pregunta por la cuantificación no está enfocada en el proceso de medición de cantidades de una magnitud explícitamente resaltada, sino en el conteo de las partes en que se divide la unidad, de nuevo se pierde el foco sobre el proceso de medición así se haga referencia explícita a la necesidad de la igualdad de las partes. Lo anterior en tanto al poner el acento en el proceso de conteo no se hace referencia explícita a la Magnitud sobre la cual se realiza el proceso de medición, y por lo tanto, no hay claridad acerca de cuál es el criterio para

[271] Es importante resaltar que esta forma de referir las partes es suficiente para resolver muchos de los problemas que los niños enfrentan en su vida cotidiana, en donde por ejemplo, distribuir equitativamente una porción de comida entre varios, es una actividad que se hace "a ojo", con base en la comparación espacial de las partes. Lo fundamental es que se vean "como iguales" de acuerdo a cierto criterio espacial de forma y tamaño que centra la atención en un proceso de medición (no numérico). Pero además, en las actividades prácticas de la vida cotidiana, la mitad también alude a referencias espaciales, como por ejemplo, "el de la mitad" o "el centro del campo", en donde la referencia no es a una medida, ni a una división de las partes, ni mucho menos a la congruencia de las mismas.

definir la igualdad en las partes. Esto es, es necesaria la referencia a la medición de la parte como cantidad de alguna magnitud con el todo como unidad para poder cuantificar la relación *n-ésima parte de…* de la parte con el todo. Cuando la "parte" o la relación "parte-todo" son introducidas en el aula de clase sin una noción explícita de la medida de Magnitudes y cantidades se genera un obstáculo didáctico para el estudio de la razones no enteras, pues solo queda el recurso de partir la unidad en partes iguales (igualdad en forma, en tanto no hay posibilidad de medir, que no es lo mismo que igualdad en la medida con respecto a una cierta cantidad de magnitud) y tomar una de esas partes como la fracción $\frac{1}{n}$. Así, la relación *n-ésima parte de…* que cuantifica la razón de la parte al todo se confunde con el operador que parte la unidad en *n-partes* iguales (operador físico), y no se identifica con el operador que produce una cantidad *n-veces* más pequeña de la cantidad unidad (operador matemático), o como se verá a continuación, que produce una cantidad que por ser contenida *n-veces* en la cantidad unidad es la *n-ésima parte* de la cantidad unidad. Además, al no hacer explicita la Magnitud sobre la que se deben realizar las mediciones y posterior comparación de cantidades de tal magnitud, las referencias a las condiciones espacio-temporales de la parte y el todo, y el conocimiento cotidiano sobre la partición de objetos físico se constituye en el único recurso del alumno tanto para comunicarse con el profesor, como para resolver el problema que se le presenta, y ese conocimiento, resistente al cambio, opera ahora como una forma de obstáculo epistemológico.

6.3.2 Composición de razones y razones enteras definen la razón n-ésima

Diálogo 19. *Fragmento tomado del archivo de audio 2008_11_18_08_16*

0:01	P:	si! párate y hablamos. - entonces. para llenar el vaso B:. - cuánto del contenido del vaso A necesita?
0:08	A:	la mita:d=
	P:	=por qué?
0:10	A:	porque el vaso B:. - >se necesitan dos para llenar el A<?=
	P:	=u.ju::
0:16	A:	entonces, la mitad es un. un vaso B y la otra mitad (es un vaso B)
0:19	P:	correcto y entonces a ver por ejemplo aquí en este caso del vaso. - del vaso C?
0:25	A:	es el. la mitad de la mitad
0:27	P:	la mitad de la mitad. o sea cuánto del contenido del vaso A requerías para llenar el vaso C?
0:32	A:	era la mi.-tad. - de la mitad?
0:37	P:	o sea:

0:39	A:	digamos la mitad del vaso B=
	P:	=si=
	A:	=(entre) la mitad. estoy sacando la mitad del vaso B. y la mitad del vaso B es el vaso C. - así
0:48	P:	y hay otra manera de decirlo? para no decir la mitad de la mitad?
0:54	A:	um::: no sé
0:58	P:	bueno dejémoslo por ahora así. pero hay una manera de decirlo más. más fácilmente. - cuántos vasos C necesitas para el A? – o sea del vaso C necesitas:- ( ) no C...
1:11	A:	necesito cuatro
1:12	P:	cuatro vasos para llenar el vaso A
1:16	A:	pero aquí coloco la mitad=
	P:	=si::

Entre las entradas 0:01 y 0:16 se evidencia cómo la relación "ser la mitad de" es comprendida con base en la relación "ser el doble". Esto es, porque se sabe que para llenar el vaso A se necesitan dos vasos B (entrada 0:10), entonces se tiene la certeza de que para llenar el vaso B, se necesita la mitad del contenido del vaso A.[272] El estudiante no está totalmente convencido de saber cuántos vasos B se necesitan para llenar un vaso A, y esto se evidencia en la disminución del ritmo de enunciación cuando pronuncia su respuesta en forma interrogativa, pero la afirmación del profesor le da la seguridad que requiere para decir afirmativamente, en la entrada 0:16, que cada una de las dos mitades del vaso A se llena con un vaso B. Nótese cómo esta última entrada muestra que el estudiante comprende que un vaso A (como unidad) está compuesto por dos mitades, y que cada una de esas mitades es equivalente al contenido del vaso B.

Desde la entrada 0:25 hasta la entrada 0:48 se inicia otro diálogo en el que se indaga por una forma equivalente para la relación "la mitad de la mitad". En la entrada 0:25 se ve que el estudiante tiene claro que el contenido de un vaso C es la mitad de la mitad del contenido de un vaso A (esto seguramente mediado por el hecho de que conoce que el contenido del vaso B es la mitad del contenido del vaso A, y el contenido del vaso C es la mitad del contenido de un vaso B). Luego, en la entrada 0:27 el profesor pregunta cuánto del contenido del vaso A será entonces el contenido de un vaso B (está buscando que el estudiante vea que "*la mitad de la mitad*" es equivalente a "*la cuarta parte de*"), pero el

[272] Este diálogo es ilustrativo de las confusiones entre volumen y capacidad anotadas al inicio de este capítulo. Nótese cómo algunas veces se habla del contenido de un vaso, otras veces del volumen de un vaso, y otras veces se menciona el nombre del vaso (por ejemplo "vaso D") para referir ambiguamente a la capacidad o al volumen.

estudiante responde con una forma interrogativa que denota duda (entrada 0:32). Ante la expresión del profesor “o sea” (en un contexto de enunciación que exige una explicación), el estudiante solo reafirma la relación que hay entre el contenido del vaso C y el vaso B, a saber, que el contenido del vaso C es la mitad del contenido del vaso B. Ante la insistencia del profesor (entrada 0:48) por otra forma de expresar dicha relación, el estudiante responde que no sabe. Es de notar que en esta última forma de interrogar al estudiante, el profesor pregunta por otra manera de expresar la relación “mitad de la mitad”, y no profundiza por la relación cuantitativa entre el volumen del vaso C y el volumen del vaso A. Quizás esta insistencia del profesor en la búsqueda de una expresión nominal para decir lo mismo, y no en la búsqueda de la relación cuantitativa entre los volúmenes de los dos vasos, es lo que impide que el estudiante logre lo que el profesor quiere que haga.

El siguiente diálogo muestra una situación similar, pero en este caso se presenta por parte del profesor una orientación más hacia indagar por la relación cuantitativa entre la parte y el todo, logrando que los estudiantes comprendan por qué “la mitad de la mitad” es lo mismo que “la cuarta parte de”.

Diálogo 20. *Fragmento tomado del archivo de audio 2008_11_18_08_16*

13:08	P:	cuál? ésta?
13:09	A1:	si
13:10	P:	cuánto del volumen del vaso B? cuál es más grande?
13:13	( ):	el B
13:14	P:	entonces le están preguntando, cuánto del volumen de B se llena: - se llena con el volumen de D?
13:20	A1:	o sea:: cuántas veces D cabe en B?
13:22	P:	esa era la otra pregunta
13:24	A2:	si esa sería ésta ((*señalando la pregunta anterior*))
13:25	P:	aquí le están preguntando: si solo echas un vaso D -- en B, cuánto se llena?
13:32	A1:	ah:::
13:33	P:	no te están preguntando [cuánto necesitas] para llenar B, sino,
	A1:	[es la mitad]
	P:	la mitad?
13:37	A1:	no
13:38	P:	o menos de la mitad? [miremos a ver aquí los dibujos] que tenemos=
13:39	A1:	[menos de la mitad]
13:41	A1:	y si menos de la mitad=
13:42	P:	=por qué?
13:43	A1:	porque si éste es menor que é:ste - éste es menor que éste ((*señalando los dibujos de los vasos C y D*))
13:52	P:	y: cómo cuánto- éste cuan:- cuan:- cuánto de éste llenas con éste? ((*señalando el C y el B*))

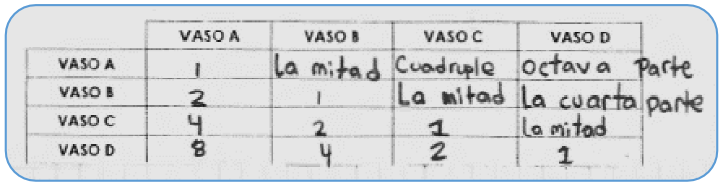
14:00	A1:	la mitad
14:01	P:	la mitad
14:03	A1:	y éste ((*señalando el D*)) sería la cuarta parte. un cuarto. un cuarto. sería un cuarto
14:04	( ):	sería un cuarto
14:07	P:	y por qué un cuarto?
14:08	A1:	porque quedaría un poquito más abajo de la mitad. Si:: este ((*señalando el D*)) llena la mitad ( ) ((*voces*))
14:13	P:	si! es un cuarto. estamos de acuerdo. pero vamos a buscar la razón de por qué. si: - éste es la mitad de éste ((*refiriendo el D con respecto al C*)), o no?
14:21	A1:	si
14:22	P:	entonces, si éste lo hechas aquí, hasta dónde llegaría? ((*echar un vaso D en un vaso B*))
14:26	A1:	hasta:- hasta:-
14:27	A2:	aquí, si hasta:- aquí
14:29	A1:	por ejemplo:.. como hasta por aquí= ((*señalando un nivel abajo de la mitad del vaso*))
	P:	=aja:: cuántos de éstos caben aquí?
14:34	A2:	cuántos de éstos caben aquí?
14:35	P:	ujum=
14:35	A1:	(=cabe uno - dos - tres -)
14:39	P:	cuan:- cuántos de éstos caben acá?
14:42	A1:	(cuatro)
14:43	P:	caben cuatro veces entonces uno sólo -- es la cuarta parte -- porque con cuatro de éstos llenas uno de éstos ((*refiriendo los vasos D y B*)). o sea esas dos relaciones están siempre allí - una con la otra, eso:- es lo que tienen que tener en cuenta siempre - este cabe cuatro veces aquí! uno sólo entonces sería solo la cuarta parte, o como dijeron tus amigas la mitad de la mitad
15:10	A2:	te:acher
15:11	P:	si:- si:- entienden por qué la mitad de la mitad?
15:12	A1:	si
15:13	P:	por qué?
15:15	( )	((*los dos estudiantes responden a la vez*)) porque:- porque cabe cuatro veces en éste y solamente una cabe la cuarta parte
15:20	P:	no!, pero ellas dijeron la mitad de la mitad
15:25	A1:	mm
15:26	P:	lo que dijeron está bien, pero ellas dijeron la mitad de la mitad; si - porque es que mira éste es la mitad de éste ((*señalando D y C*)), y éste es la mitad de éste ((*señalando C y B*)), entonces éste de aquí sería ((*señalando B*))
15:38	A1:	dos veces de la mitad=
	P:	=claro! sería dos veces la mitad

Hasta la entrada 13:43, se evidencian situaciones similares a las descritas en la sección anterior: fijar la atención en la pregunta, identificar quién mide a quién, percepción cuantitativa prenumérica de la relación. A partir de la entrada 13:52 la reflexión se centra en las relaciones cuantitativas entre el volumen de los dos vasos, tomando el volumen del vaso mayor como unidad de medida. Primero se comparan los vasos B y C, llegando a la conclusión de que el vaso C llena la mitad del vaso B. Luego (entrada 14:03) uno de los estudiantes afirma que el vaso D sería la cuarta parte del vaso B. Es importante notar en esta entrada el uso de dos expresiones, que a simple vista parecen ser idénticas, pero que en realidad expresan dos formas distintas de comprender la relación entre los vasos B y D: cuando dice "la cuarta parte de…" está expresando la relación entre los volúmenes de los vasos, a partir de una razón que es expresada como el relator entre esas dos cantidades, pero al afirmar "un cuarto" (en dos ocasiones, y de manera inmediata), ya hay una expresión que cuantifica la razón a partir de una fracción. En la entrada 14:08 aparece de nuevo la percepción cuantitativa prenumérica de la razón entre los volúmenes de los vasos B y D, tomando como referencia la mitad del vaso B, lo que le permite al alumno afirmar que con el contenido del vaso D se llena menos de la mitad del vaso B. Desde la entrada 14:21 hasta la entrada 14:43, se presenta un diálogo en el que los estudiantes, con la ayuda de las preguntas del profesor, y de los dibujos de los vasos (y de sus relaciones representadas en dichos dibujos) que tienen en los cuadernos, llegan a la conclusión de que el contenido del vaso D es la cuarta parte del contenido del vaso B, porque con cuatro veces el contenido del vaso D se llena el vaso B. Eso se evidencia en la respuesta dada por los dos estudiantes en la entrada 15:15 "porque cabe cuatro veces en éste y solamente una cabe la cuarta parte".[273]

La siguientes figuras muestran las respuestas de los estudiantes a diferentes tareas en las que se evidencia que el estudio de las parejas de razones *n-veces* y *n-ésima* se definen mutuamente, y que la una es la base para la comprensión de la otra (lo que no significa que sea fácil para los estudiantes comprender una de las formas de relación entre las cantidades a partir de la otra, como se evidenció en la sección anterior).

[273] En este punto es necesario regresar nuevamente al tratamiento ambiguo que desde este conjunto de tareas se hace de las magnitudes volumen y capacidad, pues como se puede ver en diferentes momentos de este diálogo, los estudiantes, y en las orientaciones del profesor, más que referirse al volumen de los vasos, se refieren al contenido de los vasos (aunque en esta parte del trabajo es un contenido imaginario), contenido que se pueden pasar de un vaso a otro. En estas formas de enunciación sobre los vasos y su contenido, se pueden identificar ideas más cercanas a una noción de capacidad que de volumen. A pesar de esto, como se enunció al inicio de este capítulo, en tanto no se presten para confusiones en los análisis, se seguirá utilizando la palabra "volumen" no tanto porque se asuma que los estudiantes están comprendiendo que es la magnitud Volumen, sino porque era la utilizada en la tareas propuestas a los estudiantes.

La figura 59 muestra un elemento recurrente en todas las tareas: pedir que a la vez se midiera tanto la cantidad menor con la mayor como la mayor con la menor.

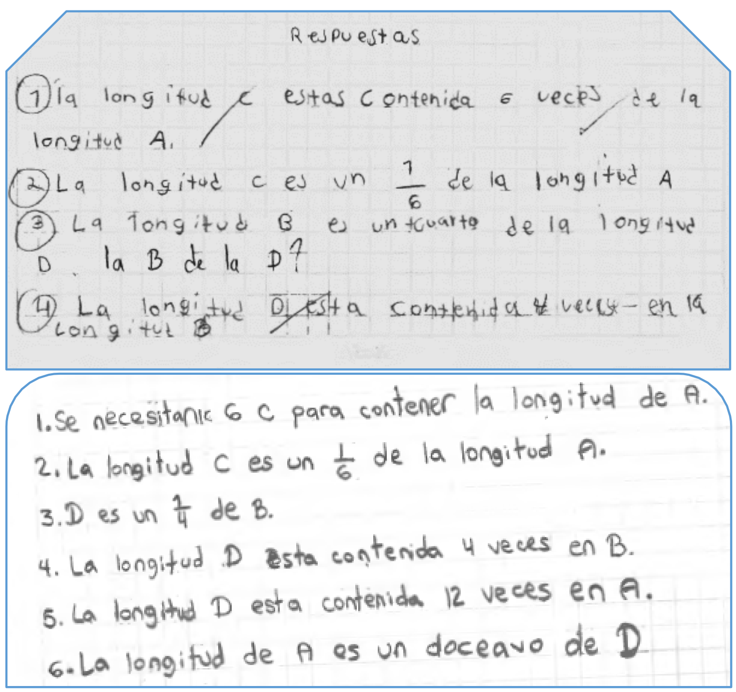


	VASO A	VASO B	VASO C	VASO D	
VASO A	1	La mitad	Cuadruple	octava	Parte
VASO B	2	1	La mitad	La cuarta	parte
VASO C	4	2	1	La mitad	
VASO D	8	4	2	1	

Figura 59. *Ejemplo de respuesta en tarea sobre medición de volúmenes. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_4 p.4.*

De esta manera, se tenían las dos parejas de razones (de la mayor a la menor y de la menor a la mayor) al mismo tiempo, y la razón *n-veces* entre las dos cantidades era la base para comprender la razón *n-ésima*. Nótese, además, cómo en esta tabla, el estudiante usa números naturales para representar la razón (medida) de la cantidad mayor a la menor, mientras que en el caso de las mediciones recíprocas (de la cantidad menor a la mayor) la razón que expresa la medida es presentada a partir de una expresión en donde la razón es un relator entre las cantidades, más que una expresión numérica para la medida.

Por el contrario, las respuestas mostradas en las dos imágenes de la figura 60 evidencian una manera diferente de expresar la razón de una cantidad que es medida con una cantidad mayor que ella. En este caso se trata de respuestas a las tareas de longitudes, que como se reseñó anteriormente, fueron el tercer grupo de tareas trabajadas en clase. En estos casos, expresiones como “la longitud C es un $\frac{1}{6}$ de la longitud A” o “la longitud A es un doceavo de D” muestra unas formas de expresión numérica para la razón. Eso se se evidencia en las palabras “…es un…” que denotan la asignación de un valor numérico a la medida (razón) entre las dos cantidades. Nótese entonces cómo la razón *n-ésima*, que incialmente expresa la relación entre las dos cantidades medidas, da paso a la expresión numérica de esa razón, que para el caso es dada en forma de una fraccion unitaria. Esto en tanto las cantidades que se seleccionan para



Respuestas

1) la longitud C estas contenida 6 veces de la longitud A.
2) La longitud C es un $\frac{1}{6}$ de la longitud A
3) La longitud B es un cuarto de la longitud D . la B de la D?
4) La longitud D esta contenida 4 veces en la longitud B

1. Se necesitan 6 C para contener la longitud de A.
2. La longitud C es un $\frac{1}{6}$ de la longitud A.
3. D es un $\frac{1}{4}$ de B.
4. La longitud D esta contenida 4 veces en B.
5. La longitud D esta contenida 12 veces en A.
6. La longitud de A es un doceavo de D

Figura 60. *Ejemplos de respuestas en tarea sobre medición de longitudes. Fragmentos tomados del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_1 p.23 (arriba) y del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_2 p.26 (abajo)* ser medidas una con la otra guardan una relación de multiplicidad, la mayor con respecto a la menor (la menor es contenida un número exacto de veces en la mayor).

De lo mostrado entonces en este apartado se pueden sacar dos conclusiones importantes. La primera, que la razón *n-veces* entre dos cantidades (medida la mayor con la menor como unidad de medida) es la base para comprender la razón *n-ésima* (cuando la menor es medida con la mayor como unidad de medida). Pero además, esa razón *n-ésima*, en tanto expresión de la razón entre las dos cantidades, cuando la mayor es la unidad de medida, en ocasiones expresa esta medida como una relación, y en otras, lo hace como una expresión numérica asignada a la medida. En segundo lugar, que la composición de razones es otra fuente de sentido para las razones, en tanto se puede ver como las comparaciones entre cantidades no necesariamente se realiza entre las partes y la unidad ya que igualmente se pueden comparar partes entre sí. De esta forma, una parte que está con respecto a otra parte en una razón *n-ésima* (por ejemplo, la mitad) y está al mismo tiempo en una razón *m-ésima* de toda la unidad, entonces permite concluir que la otra parte está en razón una razón *m-n-ésima* como toda la unidad (por ejemplo, cuando se comprende que la mitad de la mitad es la cuarta parte de…).

6.3.3 Nombrar, representar la razón: la palabra cristaliza la acción

4:40	A:	cómo se escribe un cuarto?
4:41	P:	ah:. se escribe así – lo puedes escribir en palabras: un cuarto
4:48	A2:	<un::: cua:rto:::>
4:50	P:	o lo puedes escribir con un simbolito que es así=
	A2:	=uno raya cuatro
4:52	P:	esa rayita significa un cuarto
4:54	A:	gracias
4:56	P:	no pues, la rayita no, el símbolo significa un cuarto

El fragmento anterior (tomado del archivo de audio 2008_11_18_09_03) muestra en la entrada 4:40 una pregunta interesante de uno de los estudiantes "¿cómo se escribe un cuarto?". En la entrada 4:41 el profesor ofrece una posibilidad: la de escribir en palabras, y ante esta sugerencia los estudiantes pronuncian la palabra "un cuarto", mientras la escriben en el cuaderno, alargando la pronunciación de algunas de las vocales mientras lo hacen. En la entrada 4:50 se ofrece otra posibilidad: la de usar el símbolo de la notación usual de la fracción un cuarto ($\frac{1}{4}$), y el estudiante, en el momento de escribir sobre la hoja del cuaderno, pronuncia las palabras “uno-raya-cuatro”. En la entrada 4:52 el profesor explica que esta rayita significa un cuarto, y luego se corrige al darse cuenta de que su expresión es equivocada, explicando que el símbolo completo significa un cuarto. Una pregunta similar por parte del estudiante se evidencia en el diálogo 17, a partir de la entrada 5:45, pero en esta ocasión sólo se brinda una sola opción, escribirlo en palabras.

Como se puede ver, entonces, en los estudiantes surge la necesidad de encontrar distintas formas de expresar esas nuevas cantidades con las que están trabajando, y como lo evidencia la imagen de la figura 61, también existieron esos momentos del trabajo en el aula en los que se consignaban algunas anotaciones, buscando cierto nivel de institucionalización en los procesos realizados. Los dos fragmentos pertenecen al mismo estudiante, y fueron consignados en la misma hoja, copiando lo que el profesor estaba escribiendo en el tablero (acompañado de una serie de explicaciones verbales). Este trabajo en clase se realizó cuando los estudiantes estaban finalizando el desarrollo del primer grupo de tareas sobre la medición de volúmenes.

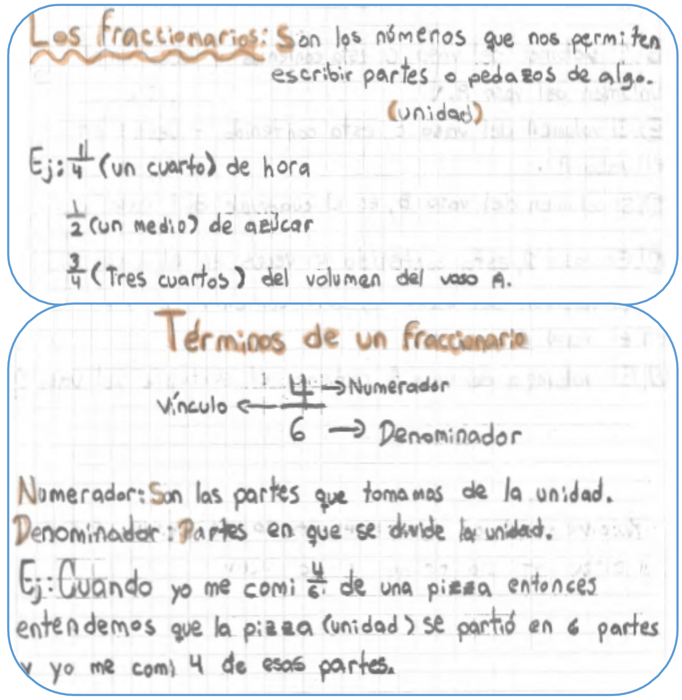


Figura 61. *Ejemplo de definiciones copiadas en el cuaderno. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_2 p.5*

Si se mira con cuidado, esto que se ha consignado en el cuaderno, copiado de lo escrito en el tablero por el profesor, presenta elementos que no son coherentes con la fundamentación que se describió en la sección 6.1, y que se evidencia en las tareas propuestas a los estudiantes: de un lado, referir la fracción como parte de una unidad, y de otro, descomponer el símbolo que representa la fracción en dos números separados por una raya, uno de los cuales representa las partes en que se divide la unidad, y el otro la cantidad de partes en que se divide la unidad. Además, la definición se refiere a la fracción como “números que nos permiten escribir partes o pedazos de algo” y no como una expresión simbólica que nos permite expresar la relación cuantitativa (razón *n-ésima*) entre la parte y el todo, cuando el todo es tomado como unidad de medida. Una idea de la fracción como una forma de expresar la relación cuantitativa entre las dos cantidades es la que se ve en los dos fragmentos descritos al inicio de esta sección, cuando los estudiantes preguntan cómo escribir la relación entre dos cantidades, que ellos han determinado es un cuarto, pero con definiciones como estas escritas en el tablero se limitan las posibilidades de la comprensión de los estudiantes. Como ya se mostró en la sección 6.3.1, al introducir esta idea de fracción se generaron obstáculos importantes en el siguiente grupo de tareas sobre la medición de las áreas, obstáculos que cuando se presentaron fueron salvados recuperando el proceso de medición subyacente entre las dos cantidades comparadas.[274]

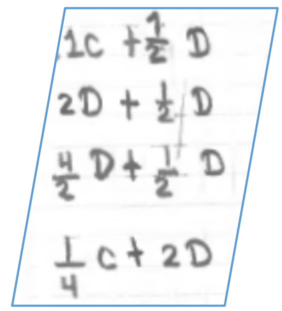


Figura 62. *Ejemplo de respuesta en tarea sobre medición de longitudes. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_4 p.29*

Las imágenes mostradas hasta el momento, y los diálogos transcritos, muestran diferentes formas de nombrar la razón *n-ésima* entre dos cantidades, las cuales evidencian diferentes sentidos para esta razón (en relación con las cantidades), pero sobre todo con respecto al proceso de medición que estarían nombrando y cuantificando. Así, por ejemplo, en la figura 59 (arriba), la tabla en la que se registra la medida del volumen de cada vaso, tomando como unidad de medida el volumen de cada uno de los vasos (incluido el mismo), se ve cómo la razón *n-ésima* es nombrada como “la mitad”, “cuádruple”, “octava parte” expresiones estas que designan a la razón como un relator (en el cual la razón participa de esquemas relacionales de la forma … *es el doble de*…) que permite poner en relación dos cantidades, y para este caso, la razón expresa la medida relativa de la cantidad menor a la mayor. Este tipo de situaciones fueron normales en el primer grupo de tareas, y paulatinamente fueron dando paso a otras maneras de nombrar la razón *n-ésima*, como se puede ver, por ejemplo, en la figura 62 (respuestas dadas en una de las tareas sobre medición de longitudes cuya consigna era: “Se desea obtener dos tercios de la longitud B a partir de las otras longitudes. Encuentra la mayor cantidad de formas

[274] No se puede dejar pasar por alto el error en el ejemplo que se da después de la definición, pues la expresión “$\frac{1}{2}$ (un medio) de azúcar” ni siquiera es apropiada en el lenguaje cotidiano. No sobra decir que todos estos elementos fueron objeto de análisis detallado en las reuniones de planeación que realizaban los profesores de esta institución cada semana, después de las cuales (como se puede ver en el resto del trabajo realizado en el tercer grupo de tareas sobre las longitudes) ya casi no se presentaban este tipo de interpretaciones de la fracción como el conteo de partes en que se divide una unidad, sino a partir del proceso de medición.

para solucionar tal solución"),[275] en donde se asigna una expresión simbólica (en la notación usual) a la razón *n-ésima* (nótese que la letra D al lado de la fracción, si bien es el nombre de una de las cintas, aquí también representa el largo de la misma).

En una breve recapitulación de lo que se ha dicho hasta el momento, se puede decir que las tareas proponen a los estudiantes un acercamiento al número racional a partir de la medida relativa entre dos cantidades, esto es, a partir de un proceso de medición en donde dadas dos cantidades, una de ellas se toma como unidad de medida para medir la otra. Así entonces, dadas dos cantidades, el proceso de medición se puede realizar de dos maneras: medir la mayor tomando la menor como unidad de medida, o medir la menor tomando la mayor como unidad de medida. Dado que las cantidades seleccionadas para estos procesos de medición, al menos en las primeras tareas, eran unas múltiplos enteros de las otras (la mayor de la menor), entonces estos dos procesos de medición quedan expresados, el primero de ellos por una razón *n-veces*, y el segundo por una razón *n-ésima*. Lo que mostró el trabajo realizado por los estudiantes es que inicialmente la razón entera domina la razón *n-ésima*, en términos de que ambos procesos de medición son expresados por la razón *n-veces*, pero, cuando se comprende que de un proceso de medición al otro opera un cambio en la unidad de medida, la razón *n-ésima* empieza a ser usada para expresar el segundo proceso de medición. Pero además, en este último caso, la razón *n-ésima* es comprendida en términos de la razón *n-veces*. Esta tensión entre la razón entera y la razón *n-ésima*, pero a su vez la posibilidad de que la primera defina la segunda, abre el camino para interpretar cualquier razón *n-ésima* (la medida de la cantidad menor tomada la cantidad mayor como unidad de medida) a partir de la razón *n-veces*. En este marco, las fracciones unitarias son introducidas no tanto como una cantidad, como número,[276] sino como una forma de expresar de manera simbólica la razón entre dos cantidades, cuando la menor es referida a la mayor. Hasta este momento, la fracción es una forma de expresar simbólicamente la razón entre dos cantidades, y la razón, como se ha expresado en otros momentos, más que ser una cantidad numérica es un relator o un operador entre las dos cantidades que la definen.

[275] Nótese que en esta forma de realizar la pregunta se confunde la cantidad de longitud de las cintas utilizadas, con el nombre dado a la cinta. Lo anterior, sin contar con el error de redacción al finalizar el enunciado, al expresar "…solucionar tal solución".

[276] Tampoco como nombres para las partes de un todo, como suele ser usual en los libros de texto colombianos.

Como se verá más adelante, solo cuando se empieza a operar con estas expresiones simbólicas (relaciones de orden, relaciones de equivalencia, operaciones aditivas) empiezan a ser tratadas como cantidades numéricas.

6.4 Operar con la fracción: el estatus numérico de la razón

6.4.1 Fracciones no unitarias: la razón n-ésima como unidad para contar

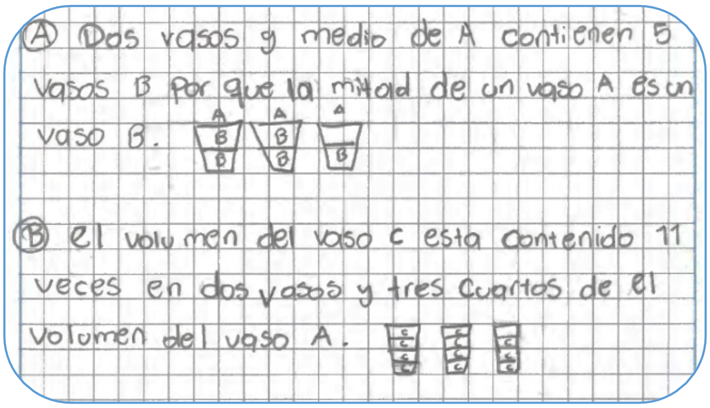


Figura 63. *Ejemplo de respuesta en tareas sobre medición de volúmenes. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_5 p.12*

Las tres imágenes que se muestran a continuación muestran cómo las tareas que se les proponían a los estudiantes, además de remitir a la comparación de la parte con el todo a partir de un proceso de medición, también invitaban a la repetición de la parte un cierto número de veces, para determinar cuánto del todo se completaba a través de dicha repetición. Por ejemplo, en la figura 63 se muestran las respuestas de un estudiante a las preguntas:[277] "¿La medida del **Volumen** de **dos y medio del vaso A** cuántas medidas de **Volumen del vaso B** contiene?" y "¿Cuántas veces está contenida la medida de **Volumen del vaso C** en **dos y tres cuartos del Volumen del vaso A**?"[278] La primera respuesta muestra que la repetición del vaso B se realiza con la conciencia de que cada vaso B es la mitad del vaso A, y que por tanto dos vasos B completan un vaso A. De manera similar, en la segunda respuesta se evidencia cierta comprensión de que el vaso C es la cuarta parte del vaso A, y que por lo tanto repetir cuatro veces el vaso C completa el vaso A, y los tres cuartos del vaso A se corresponden con tres vasos C. Es importante llamar la atención en la manera como el estudiante hace la representación de los cuatro vasos D contenidos en un vaso A, ya que más que hacer una referencia al volumen del vaso, solo se

[277] El resaltado con letra en negrilla es del texto original en la tarea; obsérvese cómo intenta resaltar las cantidades sobre las cuales se hace la medición.

[278] La redacción de esta segunda pregunta presenta una ambigüedad, pues al decir "…dos y tres cuartos…" puede dar a entender que se trata de dos preguntas, una indagando por dos vasos A y otra preguntado por los tres cuartos del vaso A. El estudiante entendió que la pregunta era por una sola cantidad, a saber, "dos veces y tres cuartos", que era la intencionalidad de la tarea.

fija en la altura de los dibujos, es decir, la igualdad de las partes, más que ser igualdad en el volumen es igualdad en la altura en las franjas. No hay evidencia de una discusión sistemática de esta forma de representación a partir de los dibujos, y al no problematizarse en la clase esta forma de representación de la repartición del volumen de un vaso en cuatro partes iguales, queda implícito que esta representación gráfica no coincide con lo que sucedería con los vasos en las actividades prácticas, en donde por lo general, entre más altura en el vaso, para tener igual Volumen la franja sería de menor altura. Desde el punto de vista de la comprensión de la magnitud Volumen este tipo de implícitos pueden ser fuente de posibles dificultades en el aprendizaje de los estudiantes, ya no de las razones y los números racionales, sino de las Magnitudes y sus medidas.

Por su parte la figura 64, muestra respuestas a las siguientes preguntas "Tres veces el **Volumen del vaso C**,…,¿Del **Volumen del vaso A** cuánto completarían?" y "¿Cuánto del **Volumen del vaso C** se completa con **seis veces el Volumen del vaso D**?". Estas respuestas muestran de nuevo la posibilidad que ofrece la razón *n-ésima* de ser considerada como una unidad para contar, por supuesto sobre la base del proceso físico (hipotético) de poder vaciar el contenido de un vaso en cualquiera de los otros. En este caso, repetir tres veces un cuarto completa tres cuartos. La segunda respuesta ofrece una posibilidad de comparación similar, sólo que ahora dos mitades completan una unidad, y por lo tanto seis mitades completan 3 unidades. En relación con esta segunda respuesta se debe llamar la atención sobre la forma gramaticalmente incorrecta de la respuesta del estudiante, pues un vaso D solo completa medio vaso C, y por lo tanto, un vaso D no completa 3 vasos C. Así entonces, si bien la frase es gramaticalmente incorrecta, lo que el estudiante quería decir se corresponde con la respuesta correcta. Sin embargo, no hay evidencia de que se trabajaran de manera sistemática las correcciones de este tipo de errores (se exigía la corrección, o el profesor escribe la corrección en la hoja de trabajo del estudiante, cuando la respuesta no es correcta), lo que, en el sentido estricto de la palabra pasa por alto una situación que debe ser tratada en el proceso de aprendizaje, pues no solo hay que pensar bien, sino escribir correctamente eso que se piensa.

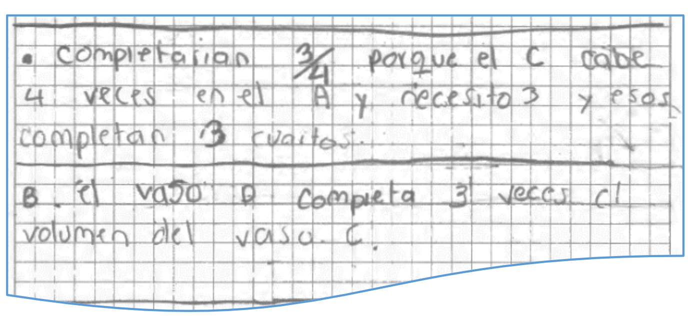


Figura 64. *Ejemplo de respuesta en tarea sobre medición de volúmenes. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_4 p.7*

Nótese entonces que la razón *n-ésima* que expresa la medida del volumen de un vaso pequeño cuando es medido tomando el volumen de uno más grande como unidad, se comporta como una unidad para contar: se cuentan medios, tercios, cuartos etc. Las representaciones gráficas que se pueden ver en la figura 63 o en la figura 65, en donde la repetición del vaso mayor, unido al conocimiento de que *n-veces* el contenido del vaso cuyo volumen es la *n-ésima parte* de ese volumen unidad completan el contenido de dicho vaso, es la clave para saber cuántos de esos vasos unidad se completan con una cierta cantidad de vasos cuyo volumen es la *n-ésima parte de…* Si bien en este punto del trabajo no se ha introducido una referencia explícita a que *n-veces* la *n-ésima parte de…* completa una unidad ($n\ veces\ \frac{1}{n}$) como se verá más adelante, estas ideas con el trabajo sobre el volumen de los vasos fueron determinante para este tipo de comprensión cuando se introdujo un estudio sistemático de las operaciones con fracciones.

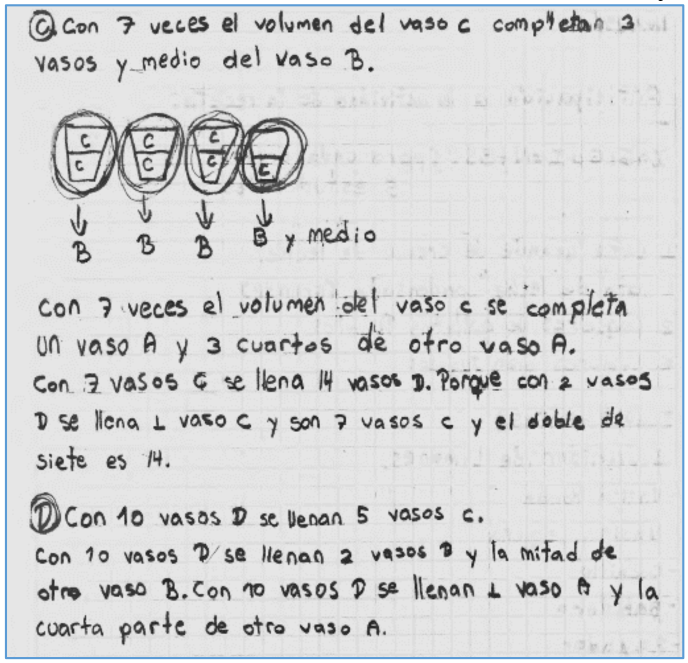
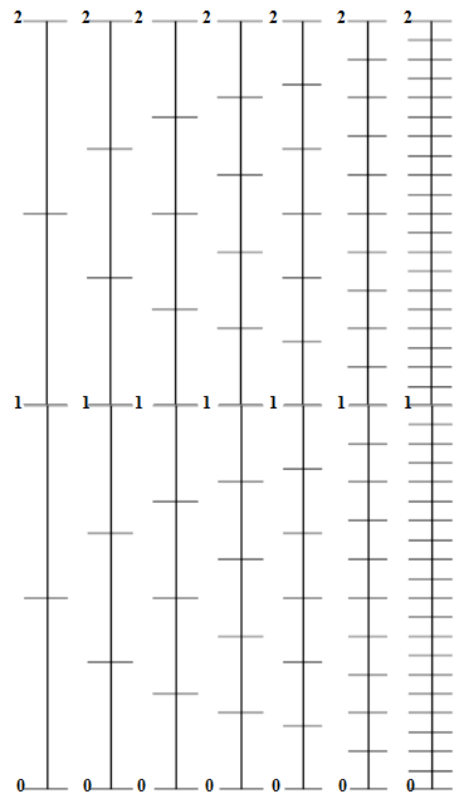


Figura 65. *Ejemplo de respuesta en tarea sobre medición de volúmenes. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_2 p.8*

Así entonces, estas respuestas encontradas en algunas de las tareas iniciales empiezan a mostrar un camino para comprender las fracciones no unitarias (es decir aquellas de la forma $\frac{m}{n}$) a partir de usar la razón *n-ésima* como unidad para contar. Esto permite entonces ver que $\frac{m}{n}$ es *n-veces* $\frac{1}{n}$, lo cual se ve con toda su fuerza en el último grupo de tareas sobre las medidas de longitudes, como se evidencia en el siguiente diálogo, el cual es tomado del juego de las equivalencias (para detalles del juego ver sección 6.1.2), jugando con la primera regla. En él se ve cómo la fracción unitaria es un ítem de conteo, seguramente favorecido por el hecho de que el juego representa las cantidades en segmentos de líneas semejando una recta numérica, pero igualmente ayudado por la comprensión que los estudiantes han logrado al representar la razón *n-ésima* por una fracción, y comprendiendo dicha fracción en relación con la medida entre dos segmentos, a saber el segmento unidad, y el segmento que representa la parte.

Diálogo 21. *Fragmento tomado del archivo de audio 2010_02_01_12_02*

1:00	P:	sabe qué significa sextos?
1:03	A:	e::: seis veces eh. que está dividido en seis partes iguales?
1:08	P:	que está dividido en seis partes iguales, y cuántas coge?
1:11	A:	tres=
	P:	=tres y cuáles de ésas está dividida en seis partes iguales?
1:15	A:	m:.:
		((*pausa*))
1:22	A:	ésta de acá
1:23	P:	aja uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis ((*contando las divisiones de la pista señalada por la estudiante*)), entonces cuántas. tu ficha, cuántos de estas recorrería?
1:29	A:	e::: uno, dos, tres. ahí.
1:31	P:	es correcto tres
		((*pausa*))
1:38	P:	qué dice? -- dos cuartos - entonces dónde recorre usted? - cuál será la que está dividida en cuartos?
1:47	A:	esta! la de ( ) --
1:49	P:	ésta de acá, dos cuartos - dos cuartos, eso es=
	A:	=m::: ya!
1:57	P:	-siga
1:58	A:	bueno
		((*pausa*))
2:06	P:	cinco cuartos --- cinco cuartos, cuál es la que está dividida en cuartos?
2:13	A:	en cuartos? --- ah! en cuartos? - no - uno dos tres, - esta?
2:25	P:	ésa es la que está dividida en cuartos
2:29	A:	cinco?
2:30	P:	cinco
2:32	A:	<uno, dos, tres, cuatro y cinco> (se pasaría)
2:36	P:	se pasaría, claro, por qué se pasa porque la unidad son cuatro cuartos, entonces como le dio cinco, sería la unidad más un cuarto, más. su turno
2:50	A:	dos quintos
2:52	P:	no! uno
2:53	A:	ah
2:55	P:	un quinto
2:57	A:	(uno no. da) - uno dos, tres, cuatro ((*contando las divisiones en una de las pistas*))
3:00	P:	cuál es la que está dividida en quintos?
3:01	A:	ésta



3:02	P:	no!
3:02	A:	ésta
3:03	P:	ésta de aquí?
3:03	A:	si
3:05	P:	no mira, esta esta uno, dos, tres, cua.
3:07	A:	a esta
3:08	P:	esa de ahí=
	A:	=entonces
3:12	P:	uno
		((*pausa mientras lanzan los dados para el siguiente turno*))
3:20	A:	cuatro tercios=
	P:	=eso es más de uno o menos de uno
3:22	A:	um::: - menos de uno
3:26	P:	cuatro tercios?
3:28	A:	menos de uno
3.29	P:	con cuántos tercios completo la unidad
3.33	A:	um::: con cuatro - con cinco
3:37	P:	no! en cuántas partes divide la unidad para tener tercios?
3:41	A:	en tres
3:42	P:	en tres partes iguales, entonces con cuántas partes completa la unidad?
3:45	A:	con tres
3:47	P:	con tres - o sea que eso es más o menos?
3:51	A:	más
3:52	P:	es más! - cuál es entonces la respuesta?
3:56	A:	ésta
3:57	P:	esa de ahí - entonces cuatro tercios
4:02	A:	acá o acá -- uno, dos, tres, cuatro
4:08	P:	cuatro tercios, su turno, - tírelo bien ...
4:22	A:	cuartos
4:23	P:	cinco cuartos - ((*voces*))
4:31	A:	entonces es -- cuánto? cinco? - uno, dos, tres cuatro
4:36	P:	recorrió más de una unidad o menos de una unidad?
4:39	A:	má:s
4:40	P:	más? por qué?
4:42	A:	porque hasta aquí llega la unidad ((*señalando el punto marcado con 1 en la pista*))
4:44	P:	no pero mi. no pero ella empezó desde por acá ((*señalando el punto inicial de la ficha*))
4:47	A2:	si porque estaba aquí ((*"a.ja" responde el estudiante*))
4.50	P:	cinco cuartos son más de una unidad o menos de una unidad?
4:54	A:	más
4:55	P:	por qué más?
4:56	A2:	porque se pasaría de una
4:58	P:	y por qué se pasa de una?
5:00	A:	porque:: ya sería más de una unidad
5:03	P:	pero por qué sabemos?=

	A:	=porque ésta es mayor
5:05	P:	por qué sabemos que es más de una unidad?(("um::" *dice el estudiante*))
5:09	P:	con cuántos cuartos completa la unidad?=
	A:	=tres
5:12	P:	cuatro, con cuatro cuartos completa la unidad y tiene cinco entonces tendría una unidad más un pedacito. eso es lo que tienen que hacer

Desde la entrada 1:00 hasta la entrada 1:31, el profesor realiza una serie de cuestionamientos al estudiante que está realizando una jugada marcada por los dados: en este caso debe recorrer tres sextos. Primero pregunta si sabe qué significa "sextos" (entrada 1:00), y el estudiante responde que está dividido en seis partes iguales. Luego pregunta cuántas de esas partes se deben recorrer, y el estudiante responde tres. Inmediatamente, el profesor le pregunta cuál de las pistas está dividida en seis partes iguales, y después de una pequeña pausa, el estudiante señala una de ellas, y el profesor verifica (contando cada una de las partes) que, efectivamente, esa sea la pista señalada por el estudiante (entrada 1:23). Luego pide al estudiante que corra la ficha la cantidad deseada y afirma que se ha realizado el proceso correctamente (entrada 1:31).[279]

Obsérvese entonces que, en este momento del trabajo de los estudiantes, las fracciones como tres sextos (desde la entrada 1:00 hasta la entrada: 31), dos cuartos (desde la entrada 1:38 hasta la entrada 1:58), cinco cuartos (desde la entrada 2:06 hasta la entrada 2:36) y cuatro tercios (desde la entrada 3:20 a la entrada 4:08) son todas comprendidas a partir del proceso de tratar la fracción unitaria respectiva como una unidad para contar, y de esta manera, entonces, las fracciones de la forma $\frac{m}{n}$ son comprendidas a partir de contar m-

[279] Es importante resaltar que cuando los estudiantes jugaron sus primeras partidas con el juego de las equivalencias, presentaron algunas dificultades con el proceso de contar sobre una recta numérica. Estas dificultades fueron fundamentalmente ligadas al hecho de que contaban la división sobre la que estaba localizada la ficha como uno, en vez de contar el paso de una división en la siguiente como uno. Cuando la ficha está en la posición marcada con el cero (inicio de las pistas), no había problema, pues de alguna manera, contar uno era pasar a la primera división. Este problema se presentaba a partir del segundo movimiento, pues un primer impulso de los estudiantes era contar rayitas, y no el paso de una rayita a otra, y contaban como "uno" la raya en la que estaba localizada la ficha. Otra dificultad fue que a veces se corría la ficha hasta la división de la pista que representaba la cantidad marcada en los dados, que solo coincide con la cantidad marcada en los dados cuando la ficha está en la posición de la pista marcada con el cero. Así, por ejemplo, si los dados marcaban cinco cuartos, y la ficha en la pista de los quintos estaba en dos quintos, se corría la ficha hasta la división de la pista que representa dicha cantidad, lo que implicaba que la ficha solo recorría tres quintos, y no cinco quintos. Una vez comprendido que el proceso de conteo era el paso de una de una división a otra, es decir que se cuentan con los segmentos en que se divide cada pista y no con las marcas que separan los diferentes segmentos, el juego se desarrolló con bastante naturalidad.

veces la unidad de conteo $\frac{1}{n}$.

Es importante hacer notar que en este juego de las equivalencias la forma como los dados expresan las cantidades que deben ser recorridas por las fichas de alguna manera también alude a este conteo de fracciones unitarias, pues como ya se dijo, uno de los dados marca uno de los números del uno al seis, y el otro marca una de las palabras “medios”, “tercios”, “cuartos”, etc. Por lo tanto, el dado que marca los números está indicando que la mitad, la tercera parte, la cuarta parte, etc., debe ser repetida tantas veces como el número entero marcado en dicho dado.

Sin embargo, debe llamarse la atención en un hecho importante con la tarea: hay un olvido sistemático de la Magnitud y las cantidades de magnitud sobre las que se hacen las mediciones y comparaciones. Los dados refieren más a la notación de la fracción que a la cantidad de longitud en un desplazamiento de la ficha, y el conteo de las divisiones en las pistas donde las fichas hacen sus recorridos igualmente olvida el proceso de medición de cantidades de longitud. Si bien ese olvido de las magnitudes de referencia es esencial en el paso de las razones al número racional, como se verá un poco más adelante, en este momento del proceso de aprendizaje de los estudiantes, esta ausencia de la referencia a la Longitud y la medida de cantidades de longitud se constituye en problemático para los estudiantes. Aunque también es importante resaltar que, como se puede ver de lo dicho en esta sección, esta ausencia de la referencia a la Magnitud y las medidas de cantidades es necesaria como parte del proceso de constituir ese carácter de la razón como número, y de dotar de un estatus operatorio a las fracciones usadas para notar las razones entre cantidades, a pesar de las dificultades que se tuvieron que sortear por el olvido de la Magnitud y los procesos de medición de cantidades (como se podrá ver en las secciones que siguen).

6.4.2 Referir a la unidad: fracciones iguales, mayores y menores que la unidad

Tomar la fracción unitaria como una unidad para contar también fue importante para comprender el orden entre las fracciones. De un lado, estaba la posibilidad de mantener el referente a la unidad, en tanto *n-veces* la fracción $\frac{1}{n}$ completa la unidad, y de otro lado, con esta referencia a la unidad era posible determinar cuáles fracciones eran mayores que la unidad (fracciones impropias) y cuáles eran menores que la unidad (fracciones propias).[280] La entrada 2:32 del diálogo anterior muestra esta referencia a la unidad, pues cuando el estudiante cuenta la cantidad de $\frac{5}{4}$ marcada por los dados, al terminar de contar dice "se pasaría", lo que claramente indica que comprendió que la cantidad $\frac{5}{4}$ es más que una unidad. Lo anterior es ratificado por el profesor, quien explica que con cuatro cuartos se completa la unidad, y que al ser $\frac{5}{4}$, sería la unidad más un cuarto. Situación similar se evidencia de la entrada 3:20 en adelante, en donde el estudiante debe recorrer $\frac{4}{3}$, y el profesor pregunta si esa cantidad es más de uno o menos de uno. En la entrada 3:28 el estudiante responde "menos de uno", e inmediatamente replica el profesor preguntando cuántos tercios necesita para completar una unidad. El estudiante dice "con cuatro", "con cinco" (con una entonación que denota indecisión), a lo que el profesor replica preguntando por las partes en que se ha dividido la unidad (entrada 3:37), consiguiendo que el estudiante responde "tres", y el profesor enfatiza que son tres partes iguales (entrada 3:42); con esta claridad el estudiante puede ver que, efectivamente, $\frac{4}{3}$ es más que la unidad.

El resto del diálogo muestra otra situación similar, pero ahora para $\frac{5}{4}$. Sin embargo, llama la atención que el soporte gráfico presentado por la tabla del juego, en donde están dibujadas las pistas sobre las que se mueven las fichas, genera inicialmente un razonamiento erróneo por parte del estudiante al responder que $\frac{5}{4}$ es más que la unidad. En la entrada 4:42 dice que $\frac{5}{4}$ es más que la unidad, porque al recorrer la ficha, ésta pasó del número uno, pero no tuvo en consideración que la ficha ya no estaba en su posición inicial (el número cero). La respuesta dada es correcta, pero el argumento utilizado no lo es, pues el estudiante

[280] Es importante notar que esta forma de comprender las fracciones propias e impropias, incluso refiriendo las fracciones mayores que la unidad como una expresión mixta, es decir como una expresión de la forma $a+\frac{m}{n}$, dónde a expresa la cantidad entera de veces que la cantidad menor es contenida en la mayor, y $\frac{m}{n}$ refiere la razón de la cantidad menor con la parte de la cantidad mayor que sobra, es similar a la manera de nombrar las fracciones que desde la tradición aritmética griega se extiende hasta la Europa de la edad media, pues por ejemplo, la razón superparticular era entendida como una razón $1+\frac{1}{n}$ *veces*, o la razón superpartiens como una razón $1+\frac{m}{n}$ *veces*, o la razón multiplesuperparticular como la razón $a+\frac{1}{n}$ *veces*, etc. Por supuesto los nombres que usamos hoy en día son diferentes, y por ende, el conjunto de formas de acción que transportamos con esos nuevos nombres.

se está fijando en la posición que ocupa la ficha en el tablero, y no en la cantidad que representa el recorrido realizado por ella. En el resto del diálogo el profesor llama la atención sobre esta situación, e intenta mostrar a los estudiantes que cinco cuartos son más que la unidad, porque con cuatro cuartos se completa una unidad, y no porque la posición final de la ficha, después de su recorrido, supere la unidad.

Lo narrado en el párrafo anterior muestra otro de los obstáculos que genera la estructura física del juego, y el énfasis en interpretar las fracciones como partes de la unidad (olvidando los procesos de medición), pues lo que se evidencia es una interpretación de la unidad como un nombre dado a una marca en las pistas, por tanto, si supera esa marca, ya tiene una cantidad mayor que la unidad. Lo interesante del caso es que a veces, en las representaciones de los números racionales en la recta numérica eso es cierto, pues cada marca en la recta donde se pone un número racional, representa tanto un aspecto dinámico (la longitud del desplazamiento desde el cero hasta el punto donde está la marca) y a la vez, un aspecto estático, en donde la marca es asumida como una representación del número. Así entonces el obstáculo no es en la dualidad de la representación de los números en rectas numéricas, sino en la falta de un tratamiento sistemático de esta dualidad, y por ende, es posible que se dejen vacíos en la conceptualización que van logrando los estudiantes. Esto es, si bien la marca en la pista puede representar el número, no se puede olvidar que esta marca lo representa por que la cantidad de longitud desde le cero hasta esa marca tiene ese número como medida. Por el énfasis del juego en conteo de partes, en momentos, pierde de vista este elemento de referencia a la medida de la cantidad de longitud de cada segmento (el segmento entre dos marcas en las pistas, o desde el cero hasta la marca, etc) tomando otro segmento como unidad de medida (el segmento que va desde el cero hasta la marca donde está el numeral 1)

El siguiente diálogo muestra un episodio del juego de las equivalencias, en donde se evidencia tanto el uso del conteo de la fracción unitaria como el apoyo visual que ofrece el juego para realizar los conteos, y la equivalencia con la unidad.

Diálogo 22. *Fragmento tomado del archivo de audio 2010_02_01_12_02*

6:49	P:	cuatro cuartos es más que una unidad o menos que una unidad.
6:53	A:	es que cuatro quintos.
6:55	A2:	cua:tro cua:rtos dan aquí:
6:59	A:	si::=
	A2:	=(es que son cua:tro cua:rtos)
7:00	P:	en el último tiro fueron cuatro cuartos. cuatro cuartos es más de una unidad

		((*uno de los estudiantes dice "yo saqué cuatro quintos"*)) o menos de una unidad
7:07	A:	<cua.tro cua:rtos - está bien>
7:11	P:	cuatro cuartos qué es, más de la unidad, menos de la unidad o igual a la unidad.
7:15	A:	(no es lo mismo?)=
	P:=	qué:
7:17	A:	cuatro cuartos - si: es lo mi:smo
7:19	P:	es lo mismo que qué
7:21	A:	que una unidad=
	P:	=que una unidad, por qué
7:24	A:	porque. – a ver. (usemos una unidad. entonces pongámosla) entonces sería cuatro cuartos. entonces si usted la vuelve a unir da cuatro cuartos que es una unidad.
7:36	P:	muy bien. si entendió lo que ella dijo.

En las entradas 6:55 y 7:07, el estudiante está solicitando confirmación sobre si ha corrido correctamente la ficha que se mueve por la pista de los cuartos, luego de sacar cuatro cuartos al tirar los dados. Por su parte, el profesor no confirma ni niega si el movimiento fue bien o mal realizado, y por el contrario, insiste en la pregunta de si cuatro cuartos son más que la unidad o menos que la unidad (entrada 7:00 y 07: 11). En primera instancia el estudiante manifiesta que no son lo mismo (entrada 7:15), ante la expresión interrogativa del profesor, enunciada casi de manera inmediata, el estudiante expresa que la cantidad recorrida son "cuatro cuartos", hace una corta pausa, y continúa con una expresión tonal que manifiesta seguridad en lo que está respondiendo: "sí, es lo mismo", alargando la entonación de algunas de las vocales. En la entrada 7:19 el profesor reitera la pregunta, pidiéndole que explicite qué es "ser lo mismo". El estudiante responde: "que la unidad", y el profesor replica pidiendo una explicación de por qué cuatro cuartos es lo mismo que una unidad. En la explicación dada por el estudiante en la entrada 7:24 se evidencia que el razonamiento construido por él se soporta visualmente en las pistas numéricas dibujadas en la tabla del juego. Esto en tanto la expresión "usemos una unidad, entonces pongámosla" muestra cómo el estudiante recurre a ubicar la unidad de la pista que está dividida en los cuartos, y luego, el resto de la frase muestra que comprende el doble movimiento de dividir la unidad en cuatro partes iguales para producir cuatro cuartos, pero que su vez, que si se unen los cuatro cuartos se compone nuevamente la unidad. Puede decirse entonces que el juego de las equivalencias, con sus pistas numéricas divididas en dos unidades, cada una dividida en una determinada fracción, y el conjunto de acciones que se constituyen en el momento de realizar el juego, son un soporte fundamental para los razonamientos que los estudiantes van construyendo sobre las fracciones y las acciones que se pueden realizar con ellas.

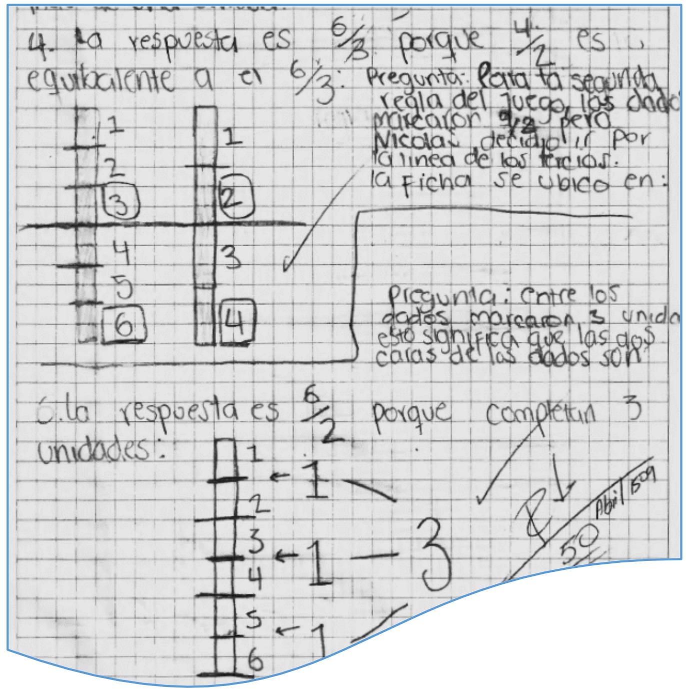


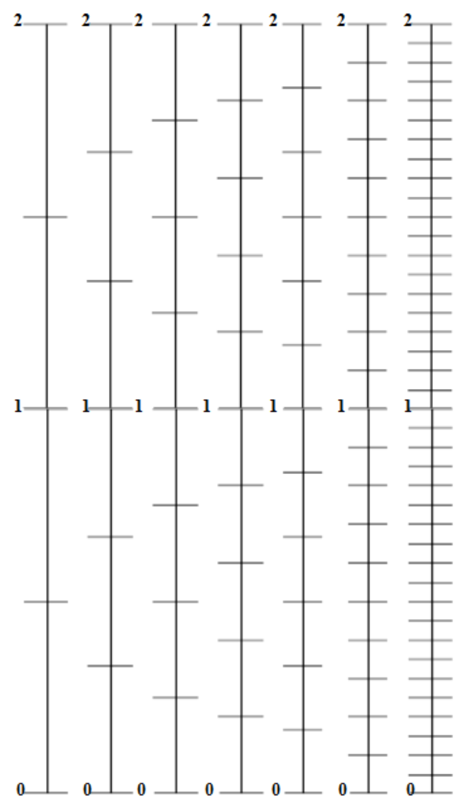
Figura 66. *Ejemplo de respuesta en tareas del juego de equivalencias. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_4 p.16*

La figura 66 muestra dos respuestas dada por un estudiante en la evaluación final del tercer periodo académico (mediados del mes de abril de 2010). Está respondiendo dos preguntas que planteaban situaciones hipotéticas sobre el juego de las equivalencias (las preguntas que estaba respondiendo en cada caso se puede leer en la parte derecha de la imagen). Obsérvese cómo se representan las fracciones que deben ser comparadas en unos rectángulos marcados o franjas (que semejan las cintas o las rectas numéricas con que se ha trabajado en tareas previas), que podríamos llamar “rectángulos numéricos”, y la manera como se realiza el conteo de la fracción unitaria en cada uno de los casos. Así por ejemplo, en la respuesta marcada con el número 4, las dos cintas puestas una al lado de la otra, de 2 unidades cada una, y una de ellas dividida en tercios y la otra en medios, están representando las pistas del juego. La secuencia de números del 1 al 6 en el dibujo de la izquierda y la del 1 al 4 en el dibujo de la derecha representan el conteo de las fracciones unitarias respectivas, y los recuadros dibujados en los números 3 y 6, en el dibujo de la izquierda, 2 y 4, en el dibujo de la derecha, están indicando las fracciones representadas en cada uno de los dibujos: seis tercios en el de la izquierda, y cuatro medios en el de la derecha. De manera similar, en la otra respuesta el alumno representa en una especie de pista numérica los seis medios, en donde la secuencia de números del 1 al 6 representa el conteo de la unidad “un medio” y el número uno puesto al frente de cada pareja 1-2, 3-4 y 5-6 (unido a la pareja por una flecha) significa que con cada dos medios se completa una unidad.

Como se puede ver en este tipo de procedimientos, la fracción unitaria goza de otras propiedades: además de expresar la razón, o medida relativa de la parte con respecto al todo, es un ítem de conteo que permite cuantificar la medida relativa entre otras cantidades que ya no gozan de la relación de multiplicidad por un entero (fracciones no unitarias). En particular, la referencia a la unidad a partir de este proceso de conteo se constituye en un marco potente para la comprensión de dichas fracciones no unitarias.

A pesar de que el juego de las equivalencias permitió un tratamiento más formal de las fracciones, sobre todo de esta equivalencia entre la fracción $\frac{n}{n}$ y la unidad, y que la estructura del juego permitía un soporte visual importante para comprender esta equivalencia, este proceso no fue ni fácil ni inmediato, pues del mismo modo que el soporte visual aportado por el juego ayuda a cierta comprensión sobre las fracciones, ese mismo soporte visual puede imponer ciertas condiciones a la acción de los estudiantes que también puede obstaculizar el aprendizaje deseado, como se evidencia en el siguiente episodio.

Diálogo 23. *Fragmento tomado del archivo de audio 2010_02_02_08_57*



7:23	P:	cinco tercios
7:24	A:	es la unidad=
	P:	=cómo?
7:25	A:	es la unidad
7:26	P:	es la unidad? cinco tercios?
7:31	A:	a::y. uno, dos, tres, - cuatro, cinco
7:39	P:	más de la unidad o menos de la unidad?
7:42	A:	menos ((*casi al mismo tiempo otro estudiante dice "exactamente la unidad"*))
7:43	P:	cuántos tercios se necesita para una unidad? -- si yo le digo que dividí una unidad en tercios, en cuántas partes la dividí? ((*otro estudiante dice "hay cinco liniecitas"*)) - si la dividimos en tercios, en cuántas partes la dividimos?
7:58	A:	te:rcios:::? -- no se.
8:04	P:	eso lo dijeron ahorita
8:06	A:	cinco
8:07	P:	si la dividimos en cinco, entonces estaríamos hablando es de quintos - pero no - estamos hablando de tercios, entonces en cuántos dividimos la unidad?
8:17	A:	en cinco
8:18	P:	si la hubiéramos dividido en cinco estaríamos hablando de quintos
8:22	A:	en tercios
8:24	P:	por eso la dividimos fue en tercios. entonces en tercios cuántas partes hay en una unidad?
8:28	A:	cinco
8:29	A:	no! hay tres

8:31	A2:	tres aquí y tres aquí ((*señalando cada una de las dos unidades que conforman la pista*))
8:32	P:	tres en una y tres en la otra y obtuvo cinco, entonces es más de la unidad o menos de la unidad?
8:36	A:	más
8:37	P:	más, cuánto más?
8:39	A:	dos más
8:40	P:	dos más

Como en los diálogos anteriores, el profesor inicia preguntando si la cantidad marcada en los dados ($\frac{5}{3}$) es mayor o menor que la unidad. Ante la respuesta de un estudiante de que es la unidad (entrada 7:25), el profesor responde con una expresión interrogativa, y el estudiante ratifica su respuesta. En la entrada 7:26 se expresa en tono interrogativo en dos frases: "¿es la unidad?" "¿$\frac{5}{3}$?". En la entrada 7:31 el estudiante realiza un conteo de cuántas divisiones tiene la pista de la tabla que está dividida en tercios, y pronuncia las palabras del uno al cinco mientras cuenta. El profesor, en la entrada 7:39, reitera la pregunta, y el estudiante responde "menos", y el otro estudiante, casi al mismo tiempo, dice que es exactamente la unidad. Nótese entonces cómo, hasta este momento, los estudiantes estaban asumiendo que la unidad es el segmento completo dibujado en la pista numérica, y que los tercios son las divisiones que tiene dicha pista, la cual, por supuesto, al ser de 2 U y estar dividida en tercios, tiene siete rayitas horizontales que marcan la división de la pista en seis tercios. Esta idea de que los tercios son las marcas, y que los alumnos están asumiendo toda la pista como unidad, se ratifica en la siguiente entrada, cuando en el momento en el que el profesor cambia la pregunta por "¿cuántos tercios se necesitan para una unidad?", seguida de una corta explicación, uno de los estudiantes dice "hay cinco liniecitas" (en tanto no está considerando en su conteo, la raya al inicio de la pista, marcada con el cero, ni la raya al final de la misma, marcada con el número 2). Las siguientes entradas muestran que los estudiantes siguen asumiendo que una unidad tiene $\frac{5}{3}$ guiados por la observación visual que están haciendo de la pista. En la entrada 8:18 el profesor explica que si la unidad se hubiera dividido en cinco partes entonces estaría hablando de quintos y no de tercios (nótese que, al parecer, el profesor no ha tomado conciencia de que los estudiantes al hablar de cinco se están refiriendo a las cinco marcas –interiores– en la pista de los tercios, y no a dividir la unidad en cinco partes). En la entrada 8:22 uno de los estudiantes pronuncia "en tercios" como para reafirmarse en lo que le están preguntando, y en la entrada 8:24 el profesor ratifica la pregunta y ratifica que se trata de los tercios. En la entrada 8:28 de nuevo uno de los estudiantes responde "cinco", enseguida cambia, y dice enfáticamente que hay tres, y ante esto, el otro estudiante responde "tres aquí y tres aquí" señalando cada una de las 2 unidades de que está compuesta la pista. El profesor (entrada 8:32) parafrasea lo dicho por el estudiante y reafirma la pregunta, a lo que uno de los estudiantes responde "más", y luego el profesor ratifica preguntando cuantos más (entrada 8:37), y el estudiante responde "dos más".

Así entonces, se ve que para los estudiantes aprender la equivalencia de cuántas fracciones unitarias componen 1 unidad, o a la inversa, descomponer la unidad en el número de fracciones unitarias que la componen, si bien se muestra potente para la comprensión que ellos puedan lograr de las fracciones, su aprendizaje no es fácil ni inmediato, y el soporte físico sobre el que se propongan las tareas puede tanto ayudar a la comprensión como obstaculizarla. Para el fragmento que se acaba de analizar, el obstáculo puede provenir de la forma de organización espacial de las pistas (por ejemplo, la cantidad de marcas en cada pista, que la fracción pareciera el nombre para la marca y no la cantidad de longitud entre marcas, etc.), pero también del hecho de que este juego pone los procesos de medición en un segundo plano y acentúa el proceso de contar con una fracción unitaria (esto es necesario en este punto del trabajo pues se requiere mayor nivel de formalización sobre las conceptualizaciones alcanzadas en relación con las fracciones, pero al dejar de lado la medición, puede generar dificultades para la comprensión de los estudiantes).

Es importante resaltar que el énfasis que se ha puesto en las fracciones unitarias y en el conteo de las mismas a partir de interpretar la fracción como partes de la unidad (favorecido por el soporte gráfico de las pistas dibujadas en el tablero de juego) tiene un costo en relación con el trabajo realizado en las tareas previas sobre las áreas y las capacidades: se deja de lado el énfasis en la medición de Magnitudes, y la fracción como la expresión que cuantifica la razón entre dos cantidades. No hay evidencia empírica en este momento del trabajo que documento si este olvido es debido a las características intrínsecas del juego que representa partes de la unidad como entidades estáticas,[281] o si por el contario,

[281] En donde contar las partes de la unidad es una actividad evidente que hace innecesario el proceso de medición, y por ende, donde cada división en una pista pareciera estar representando la fracción en sí misma, olvidando que la fracción expresa la razón entre dos cantidades, a saber, la cantidad de longitud en la parte, tomada la longitud del segmento 0-1 como unidad de medida

este olvido es por la forma como se hace el diseño de las preguntas que orientan las tareas que se proponen a los alumnos y por la manera como se orientan las discusiones entre maestros y alumnos (o incluso, si es por ambas cosas). Es importante este reconocimiento, pues si bien el trabajo con el juego de las equivalencias, como se mostrará en las siguientes secciones, tienen bondades en la comprensión de ciertos aspectos de las fracciones más formalizados y unidos a la comprensión de las relaciones de equivalencia y a la operación aditiva, este enfoque mostrado en contar partes de la unidad también introduce ciertas problemáticas que rompen con la línea de trabajo realizado en las primeras tareas.

6.4.3 Fracciones equivalentes

El estudio de las fracciones tuvo en el juego de las equivalencias una fuente importante para dotar de significado al cambio de una fracción por otra, pero conservando la misma cantidad. El siguiente diálogo es tomado de una de las tareas en la que se pedía a los estudiantes llenar los valores faltantes de una tabla de registro de jugadas hipotéticas en el juego de las equivalencias, jugado con la segunda regla[282]. En la primera parte del diálogo (hasta la entrada 11:20) la tabla proporcionaba la cantidad marcada por los dados, a saber $\frac{2}{5}$, y el resto de casillas estaban vacías (cantidad recorrida por la ficha, posición inicial, posición final y operación realizada). Para la segunda parte del diálogo (a partir de la entrada 11:29), la tabla proporcionaba la posición inicial de la ficha, a saber $\frac{2}{4}$, y la cantidad recorrida por esta ficha, también $\frac{2}{4}$.

Diálogo 24. *Fragmento tomado del archivo de audio 2009_03_31_09_14*

9:06	P:	listo, entonces. los dados marcan dos quintos, por donde vas recorrer? – o sea, esto ((*mostrando la cantidad dos quintos en la pista respectiva*)) es lo que deberíamos recorrer, pero no lo vamos a recorrer por acá, lo vamos a recorrer por dónde?
9:18	P:	entonces, cuánto vamos a recorrer?
9:21	A:	(recorrer cuatro décimos)
9:22	P:	bueno, entonces vamos a recorrer cuatro décimos -- listo! cuatro décimos. Entonces para recorrer cuatro décimos podemos inventar este valor – entonces, cuál es la posición inicial?
9:43	A:	um: es cuatro deci. es cero cuartos?
9:45	P:	estamos en los décimos– no. puede ser cualquiera, no importa – dónde quieres poner la ficha? – pongámosla aquí -- supongamos que la posición inicial fuera

[282] Esta regla decía que la cantidad marcada por los dados debía ser recorrida en una pista diferente a la de la fracción marcada por éstos.

		ésta
10:06	A:	entonces sería cuatro
10:10	P:	no! aquí en qué posición inicial estaría
10:14	A:	siete décimos?
10:15	P:	siete décimos, entonces supongamos que la posición inicial fuera siete décimos - -- entonces si la posición inicial son siete décimos y yo recorro cuatro décimos. hasta dónde llego? -((*pausa mientras el estudiante corre la ficha*))- y ese cuánto es?
		((*no es audible lo que dice el estudiante*))
10:35	P:	cuánto?
10:45	A:	diez décimos=
	P:	=diez décimos no!, aquí no son diez décimos ((*se oye el murmullo del estudiante mientras cuenta de nuevo*))
10:54	A:	once=
	P:	=once décimos -- es la posición final ( )
		((*una pausa mientras el estudiante escribe llena los datos faltantes en la tabla*))
11:20	A:	igua:l -- once – décimos
		((*breve pausa mientras el estudiante escribe en el cuaderno*))
11:29	A:	Ahora este
11:31	P:	ahora éste
11:38	A:	la cantidad inicial - aquí está
11:40	P:	no! dos cuartos dice acá=
	A:	=ah! si dos cuartos
11:43	P:	u.jum::
11:45	A:	y=
	P:	=y recorrió dos cuartos
11:48	A:	(o sea que uno dos cuartos - aquí)
11:52	P:	uno, dos, cuartos. o sea que de aquí pasó hasta aquí. listo entonces ahora la pregunta es, cuál es la posición final?
12:01	A:	dos cuartos?- a:: no! porque lo puedo cambiar
12:04	P:	no la posición final, la ficha se recorrió dos cuartos. entonces llegó hasta aquí, cuál es esta posición?
12:12	A:	cuatro cuartos
12:14	P:	cuatro cuartos. la posición final es cuatro cuartos --- y ahora si viene la pregunta clave, cuan:- qué marcaron los dados?
12:26	A:	e:: cuatro cuartos?
12:28	P:	no=
	A:	=entonces dos cuartos=
	P:	=no! los dados no marcaron eso, porque acuérdate que yo recorro por una pista y la pista es la que marca los dados, o sea, los dados marcaron esta misma cantidad pero la marcaron en otra pista - en cuál? en cuál pudo haber sido? hay varias opciones - como
12:52	A:	aquí? - a no! en ésta (aquí: y me daría aquí)
12:59	P:	sería todo esto, cuánto es? esto ((*"tres, tres sextos" responde el estudiante*)) tener esto aquí:: ((*señalando dos cuartos en la pista de los cuartos*)) es lo mismo que tener esto acá ((*señalando tres sextos en la pista de los sextos*))

		-- o sea que pudieron haber marcado tres sextos. qué otra opción pudieron haber marcado los dados?
13:17	A:	ésta?
13:18	P:	también pudo haber marcado ésta, cuánto?=
	A:	=cinco:: decimos?
13:21	P:	hay otra opción todavía más -- cuál?
13:28	A:	diez=
	P:	=diez veinteavos ((*al tiempo que el estudiante dice "veinteavos"*)), y acá::
13:33	A:	un. - un medio
11:36	P:	un medio, o sea que el dado pudo haber marcado cualquiera de éstos
13:40	A:	un medio
13:41	P:	un medio

En la entrada 9:06, el profesor llama la atención sobre la cantidad marcada por los dados ($\frac{2}{5}$) y apoyado en la tabla del juego, muestra dicha cantidad en la pista respectiva, aclarando que en virtud de la regla, esa cantidad no se recorrerá en dicha pista, sino que deberá ser recorrida en otra pista, e interroga al estudiante sobre por qué pista podría recorrerse dicha cantidad. El estudiante dice que puede recorrer $\frac{4}{10}$, y dado que no hay más datos en esa fila de la tabla, entonces la posición inicial de la ficha puede ser cualquier valor en la pista de los décimos. Después de una breve discusión con el profesor, se acuerda suponer que la posición inicial de la ficha sea $\frac{7}{10}$ (entrada 10:14), y el estudiante hace el conteo respectivo de los cuatro décimos para saber cuál sería la posición final de la ficha. Este error en el conteo puede tener su causa en las dificultades de los estudiantes, ya mencionadas antes, cuando realizan el conteo de la cantidad de fichas recorridas con el apoyo de la tabla del juego: cuentan como uno la raya en la que está la ficha, por eso cuatro más siete da 10. Sin embargo la intervención del profesor solo corrige la respuesta equivocada, pero no indaga por las causas de la misma.

De otra parte, en el diálogo que se inicia a partir de la entrada 11:29, en donde se tiene la posición inicial de la ficha ($\frac{2}{4}$) y la cantidad recorrida por esta ($\frac{2}{4}$), se muestra que el apoyo visual de las pistas en la tabla del juego permite una amplia variedad de posibilidades de equivalencia para la cantidad $\frac{2}{4}$ Desde la entrada 11:52 y 12:28 se muestra un corto diálogo entre profesor y estudiante en el que se evidencia que hay cierta duda acerca de cuál es la cantidad que debe ser cambiada por otra equivalente (la confusión se agranda en tanto las dos cantidades son $\frac{2}{4}$). Después de que se aclara que la cantidad que va a ser cambiada es la cantidad recorrida ya que, en virtud de la regla del juego, la cantidad recorrida por la ficha debe ser en una fracción diferente a la fracción marcada por el dado, con el apoyo de la tabla el estudiante da la primera posibilidad de respuesta, a saber, $\frac{3}{6}$ En la entrada 13:18 el profesor muestra que el dado pudo haber marcado una fracción en décimos, señalando la pista de los décimos, el estudiante responde "$\frac{5}{10}$". En la entrada 13:21 el profesor invita al estudiante a buscar otras opciones, y el estudiante responde con la cantidad "$\frac{10}{20}$", lo que es ratificado por el profesor y casi de manera inmediata muestra la pista de los medios y el estudiante dice "un medio".

De estos cortos fragmentos se puede ver cómo la estructura del juego no sólo obliga a cambiar una fracción por otra que le sea equivalente, sino que presta un soporte visual para realizar dicho proceso, en tanto las divisiones en cada una de las pistas hacen que visualmente se vean a la misma altura las fracciones equivalentes, por ejemplo, a un medio. De esta manera los estudiantes constituyen una idea de equivalencia entre fracciones como aquellas que representan la misma cantidad (en este caso, segmentos de igual longitud), pero que tienen una expresión numérica diferente, y las condiciones del juego, las acciones que permite y que exige el juego a partir de las distintas reglas, prestan el soporte necesario para dicha comprensión. Sin embargo, esta forma de comprender la equivalencia hace ver la fracción como expresión para el objeto, (el segmento que es parte de la unidad) y no como expresión para la razón entre la cantidad de longitud en el segmento que representa la parte, y la cantidad de longitud en el segmento que representa la unidad (es decir confunde la cantidad con el objeto); y por lo tanto, la equivalencia entre dos fracciones, es más la igualdad entre dos objetos, y no la igualdad en la razón entre dos parejas de cantidades, que podría ser una interpretación más apropiada y coherente con el trabajo sobre medidas de Magnitudes que había sido la base de las primeras tareas propuestas a estos grupos de alumnos.

En cierta forma, esta idea de equivalencia de fracciones como igualdad entre partes se ve expresada en lo que consignaron los estudiantes, a modo de definición, copiando lo que el profesor les había escrito en el tablero (figura 67). En esta figura, el primer ejemplo, semejando los dibujos realizados en las tareas sobre volúmenes, se representa la mitad del contenido de un vaso de diferentes maneras. Sin embargo, por la definición escrita, y por lo dibujado en el cuaderno, el énfasis esta en las partes en que se divide la unidad, y no en la medida de las dos cantidades representadas en dicho dibujo.

Es de notar algunas imprecisiones importantes en lo consignado en los cuadernos (pasando por alto el que la frase inicia con un "la" en singular). En primer lugar, la definición expresa que las fracciones equivalentes tienen distinto denominador, pero que significan la misma parte de la unidad, sin embargo, se pueden tener fracciones equivalentes con el mismo denominador (y tendrían el mismo numerador) y se puede tener fracciones con diferente denominador y no ser equivalentes. La clave estaría en la expresión "significan la misma parte", pero al poner el énfasis en la parte, se ve la equivalencia como si fuera una propiedad de dicha parte, y no como expresiones diferentes para una misma razón. Además, si bien en el juego de las equivalencias hay un énfasis visual en la igualdad entre las partes que representan dos fracciones equivalentes (en dos pistas distintas), esta comparación visual no se utiliza para una reflexión sistemática de que la equivalencia en las dos fracciones es porque en ambos casos la longitud del segmento que representa la parte y el segmento unidad están en la misma razón.

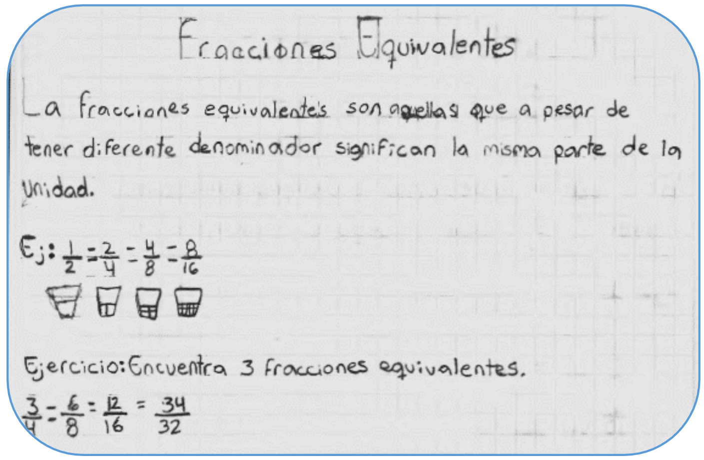


Figura 67. *Ejemplo respuestas en tarea sobre medida de volúmenes. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_2 p.17*

En segundo lugar, se debe llamar la atención en que las representaciones gráficas de las fracciones que se han propuesto como fracciones equivalentes identifican la equivalencia entre fracciones no tanto a partir de la igualdad en las partes (como ya se anotó en el juego de las equivalencias) sino con base en una idea que proviene de las primeras actividades en las que se realizaban los procesos físicos de medición (de hecho los dibujos se parecen a los vasos usados en las tareas de medición de volúmenes): si una fracción se divide en partes más pequeñas, para este caso mitades, se pueden obtener otras fracciones que sean equivalentes a esta. En este caso, si la mitad se divide en dos, cada una de esas mitades es un cuarto de la unidad, y $\frac{2}{4}$ completan un medio; y si los cuartos se dividen en dos mitades, entonces cada una será un octavo de la unidad, y cuatro cuartos completarían un medio; y así sucesivamente.

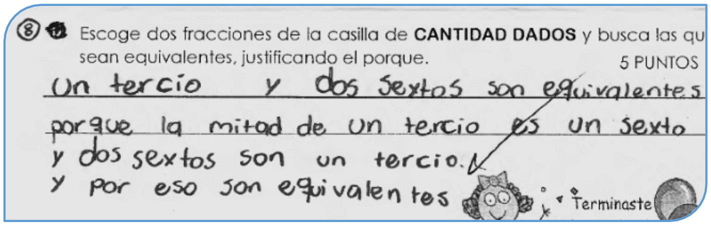


Figura 68. *Ejemplo de respuesta en tarea sobre el juego de equivalencias. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_5 p.44*

Esta idea de partir una fracción en mitades fue usada de manera amplia en diferentes tareas a lo largo de todo el proceso, como se puede ver, por ejemplo, en la figura 68, en donde la equivalencia entre dos tercios y dos sextos se justifica a partir de la idea de que el sexto es la mitad de un tercio, y por lo tanto, dos sextos completan un tercio, o en la figura 69, en donde tres cuartos se hace equivalente a seis octavos, dividiendo directamente los cuartos en octavos (el profesor refería este tipo de procedimiento en clase como calcular mentalmente la fracción equivalente). Nótese entonces que en estos casos, la equivalencia entre fracciones se realiza sobre la base de buscar otras formas de expresión (otra fracción) para la misma razón: diferentes fracciones que son todas "*un medio de…*".

Es importante notar que, sin negar la importancia de este juego de las equivalencias en la comprensión de las fracciones y sus equivalencias (o de la suma como se verá en la sección siguiente), por el énfasis en interpretar la fracción como partes de una unidad, y no como la expresión para la razón entre dos cantidades, no es seguro que en esta parte del trabajo los estudiantes estén interpretando que dos fracciones equivalentes son dos expresiones diferentes para una misma razón o la igualdad en la razón entre dos parejas de cantidades. Podría decirse que hay un olvido de la razón como soporte conceptual detrás de las fracciones, y que las fracciones sustituyen a las razones, pero igualmente este olvido puede generar complicaciones en el aprendizaje de los estudiantes si este implica el abandono de la idea de razón como el soporte conceptual, y por el contrario, no es el resultado de la objetivación de las razones en nuevas formas de representación (las fracciones) que ahora en virtud de las operaciones y relaciones que se hacen con ellas alcanzan el estatus de cantidad, y por ende se muestran como instrumentos más potentes en la actividad matemática. El capítulo 4

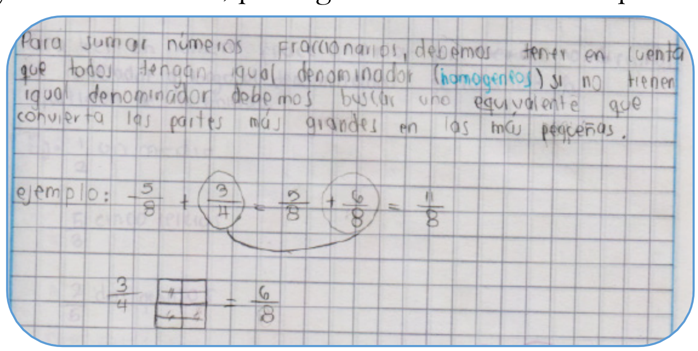


Figura 69. *Ejemplo de suma de fracciones. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_1 p.17*

muestra con gran amplitud cómo las fracciones pasan de ser formas de expresión de las razones, a representaciones que objetivan la razón en nuevo estatus como cantidad, y finalmente, con todo lo anterior, la razón es objetivada en el concepto de número real. Pero en estos tránsitos no operó un abandono de la idea de razón, sino un proceso en el que ciertas ideas de razón quedaban como formas cristalizadas para la acción en las formas de objetividad posterior, hasta la llegada al número real, en donde pareciera que la idea de razón ha sido olvidada. El gran salto que se da desde las primeras tareas basadas en la medición de Magnitudes, a estas basadas en el juego de la equivalencia, en donde el énfasis es en las partes de la unidad, pareciera romper con estos procesos de objetivación, pero para una afirmación categórica en este sentido serían necesarios estudios más detallados de las practicas matemáticas de estos estudiantes.

6.4.4 Suma de fracciones homogéneas

Desde el inicio del trabajo con las tareas sobre medición de capacidades, los estudiantes estaban enfrentados a situaciones en las que *n-veces* el contenido de un vaso (previamente medido tomando la capacidad de un vaso mayor como unidad de medida) era medido tomando como unidad el volumen de otro vaso (por lo general el mismo con el que se había medido el vaso cuyo contenido era repetido), lo cual se calculaba a partir de la razón inicial entre la cantidad que se repite y la cantidad tomada como unidad. Así, son ejemplos de este tipo de tareas lo mostrado en la figura 63, donde se debía calcular cuántos vasos C se completan con 2 veces y medio del volumen del vaso A, o en la figura 64, en donde se debía determinar cuánto del volumen del vaso A se completa con tres cuartos del volumen del vaso C, o en la figura 65, en donde se debía calcular cuánto del volumen del vaso A se completa con siete veces el volumen del vaso C (problemas similares debían responder en las tareas sobre mediciones de áreas y de longitudes). Si bien en estos casos no puede hablarse en sentido estricto de que hay una suma de fracciones, entre otras cosas porque en ese momento, el trabajo de los estudiantes aún no tiene una representación en forma de fracción para la razón que expresa la medida de la capacidad de un vaso tomando como unidad medida la capacidad de un vaso mayor, estos procesos acumulativos de cantidad de área, de cantidad de volumen, o de cantidad de longitud, generan un contexto en el que el proceso físico de acumulación definido en cada uno de los problemas planteados va mostrando la posibilidad de la repetición de una razón *n-ésima* para completar cantidades, a veces mayores que la unidad de medida o a veces menores que dicha unidad. Estos procesos de acumulación sucesiva en una determinada cantidad, como se ha mostrado en secciones anteriores, no solo fueron claves en la constitución de una idea de fracción no unitaria, sino que también fueron constituyendo la base para pensar la suma de fracciones homogéneas, como se puede ver en las respuestas mostradas en las figuras ya mencionadas.

El primer contacto formal con la suma de fracciones se presentó con el tercer grupo de tareas sobre la medida de longitudes, especialmente a partir del trabajo con el juego de las equivalencias, entre otras cosas, porque en este momento del trabajo ya hay un uso sistemático de las fracciones para representar la razón que expresa la medida entre dos cantidades, y porque las condiciones en las que se realiza el juego permiten pensar la suma de fracciones a partir del conteo de fracciones unitarias, tal como se indicó en secciones anteriores.

El juego de las equivalencias, jugado con la primera regla,[283] facilitaba el trabajo sobre la suma de fracciones homogéneas, y para poder tener una reflexión sistemática sobre dichas sumas, las jugadas se registraban en una tabla como la mostrada en la figura 70. En tablas como esta debían registrar la cantidad marcada en los dados, la posición inicial de la ficha en la pista, la cantidad recorrida por dicha pista al realizar una jugada, la posición final alcanzada por la ficha después del movimiento, y en una última columna debían registrar la operación realizada. Como se verá en los dos diálogos siguientes, estas condiciones del juego, y el registro de las jugadas en la tabla fueron factores claves para pensar la suma entre fracciones homogéneas.

Diálogo 25. *Fragmento tomado del archivo de audio 2010_02_15_10_50*

9:12	P:	un tercio si -- cuál es la de los tercios?, ésta - aja ((*pausa*))
9:29	A:	pero es que yo estaba aquí, cierto?
9:31	P:	tú estabas aquí exactamente, entonces ya la posición inicial no es esa, la posición inicial es?
9:37	A:	tres?
9:38	P:	no!. estabas aquí, en cuánto?- en dos tercios, entonces tu posición inicial es dos tercios
9:44	A:	m::: ya! ((*pausa*))
9:50	P:	cuánto corrió?
9:52	A:	una=
9:53	P:	=uno, un qué?=

[283] Correr la cantidad marcada en los dados por la pista que está dividida en la fracción que estos marcaron

9:54	A:	=un tercio=
9:55	P:	=un tercio, recorrió un tercio, se recorrió una sola casillita. - y la posición final?
10:03	A:	una unidad=
10:03	P:	=una unidad, porque mira son uno, dos, tres tercios una unidad - bueno, entonces ahora si la operación, cuál sería la operación? --- cuál sería la operación?
10:18	A:	dos tercios más un tercio (da una unidad)=
10:21	P:	=dos tercios más un tercio da una unidad - si queda claro por qué? estabas en dos tercios. y le a:gregaste un tercio más, entonces al estar en dos tercios y agregarle un tercio más. llegas a los tres tercios y tres tercios son una unidad.
10:37	A:	(y por qué es una unidad?)
10:38	P:	esa es la operación
		((*pausa*))
10:44	P:	entonces ahí sería dos tercios
		((*pausa mientras el alumno escribe*))
10:50	P:	más
		((*pausa mientras el alumno escribe*))
10:54	P:	un tercio, es igual a
		((*pausa*))
10:59	A:	tengo que sumar esto?
11:01	P:	no::! no mira, estabas en dos tercios y le sumaste un tercio y te dio qué?
11:08	A:	una unidad=
11:09	P:	=te dio una unidad, te dio tres tercios

Diálogo 26. *Fragmento tomado del archivo de audio 2010_02_15_10_50*

11:32	P:	mira. mira. mira lo que va a hacer ella cuatro quintos
		((*pausa*))
11:41	P:	cuatro quintos, entonces ponle cuidado
		((*pausa*))
11:46	P:	corrió cuatro quintos, posición inicial? estabas aquí=
	A:	=ah! – tres quintos=
	P:	=posición inicial tres quintos=
	A:	=uno dos tres
11:58	A:	ahora corremos uno (dos tres)
12:02	P:	cuánto recorrió? desde aquí hasta allá donde está su ficha. Cuánto recorrió? recorrió cuatro, uno, dos, tres, cuatro
12:12	A:	ah:: si=
12:13	P:	=su ficha es la mora:da no la ve:rde
	A:	((*no es audible*))
12:25	P:	mira ponme cuidado, posición final cuál fue?
	A:	((*no es audible*))
12:36	P:	siete. cinco hasta aquí que es la unidad seis y siete. entonces siete quintos. cuál fue la operación que usted hizo?
12:48	A:	( ) debía recorrer cuatro quintos y me quedaba en siete quintos
12:52	P:	entonces ya cuáles son los números que va a sumar?
12:55	A:	el tres quintos más cuatro quintos
12:57	P:	el tres quintos el. tenía tres quintos - y a esos tres quintos le suma - cuatro quintos,

13:05	P:	entonces tres quintos que tenía [más cuatro quintos que ella sumó] cuánto le dio?=
	A:	[más cuatro quintos es siete quintos]
13:09	P:	=le da siete quintos
13:11	A:	ah:::
13:13	P:	ya?

La primera parte del diálogo 25 muestra una situación que fue recurrente en las primeras partidas jugadas por los estudiantes: el manejo de la tabla de registros no fue fácil, lo que hizo necesaria una serie de intervenciones a través de las cuales aprendieran a utilizar la tabla; es decir, que aprendieran a identificar qué tipo de cantidades iban en las casillas de cada una de las filas. Nótese, por ejemplo en la entrada 9:37, que el estudiante confunde la posición inicial con la posición final de la ficha (por eso responde tres cuando se le ha preguntado por la posición inicial), y las intervenciones del profesor en las entradas 9:38 9:50 se enfocan en que identifique precisamente qué cantidad es posición inicial, qué cantidad es posición final y qué cantidad es la recorrida por las fichas. En la entrada 10:03 el profesor pregunta entonces por la operación realizada (que debe ser consignada en la última columna de la tabla), y el estudiante responde "dos tercios más un tercio", y luego en la entrada siguiente resulta una extensa explicación de por qué sucede esto. A partir de la entrada 10:37 acompaña al estudiante en el proceso de escribir la operación realizada en el cuaderno. Nótese cómo en la entrada 10:59, cuando el estudiante estaba escribiendo en su hoja de registro la operación realizada, y al momento de escribir el signo "=" (después de escribir en notación de fracciones la suma de dos tercios más un tercio) deja de escribir y pregunta: "¿tengo que sumar esto?" (algo así como "¿y ahora qué hago?"), el profesor lo remite a lo realizado en la tabla. Esto le permite recuperar la respuesta a partir de las acciones realizadas en el juego: "mira, estabas en dos tercios y le sumaste un tercio, ¿y te dio qué?" (entrada 11:01). El estudiante responde "una unidad", lo que es parafraseado por el profesor, y después expresa "tres tercios".

Por otra parte, en el diálogo 26 se presenta una situación similar, pero ahora para la suma $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$. Al igual que en el caso anterior desde la entrada 11:32 hasta la entrada 12:48, las intervenciones del profesor están orientadas a que el estudiante tenga claridad del significado, en relación con el juego, de cada una de las cantidades involucradas. Luego, a partir de la entrada 12:52, el profesor inicia el proceso de impulsar a pensar la operación realizada, teniendo como referencia las acciones realizadas en la jugada que se acaba de hacer. En la entrada 12:52 pregunta por la operación que se debe realizar: "entonces, ¿cuáles son los números que va a sumar?" El estudiante responde: "tres quintos más cuatro quintos". En la entrada 12:57 el profesor en esencia parafrasea dicha respuesta, y en la entrada 13:05 intenta una recapitulación de lo dicho, recapitulación que casi en simultáneo es repetida en algunos apartes por el estudiante. La expresión del estudiante en la entrada 13:11 "Ah!" alargando la pronunciación de la vocal, es señal de que ha comprendido el proceso.

La figura 70 muestra una tabla de registro en la que se consignan las primeras jugadas registradas en un juego completo, realizado con la primera regla. Obsérvese la referencia a la unidad en diferentes jugadas, la cual tiene varias formas de ser utilizada en este juego: como resultado de contar *n-veces* la fracción unitaria $\frac{1}{n}$, en el proceso de mover físicamente las fichas en el tablero de juego (cuando la ficha queda en una o dos unidades), o cuando en los dados uno marca el número n y el otro marca la fracción $\frac{1}{n}$, o como el resultado de la suma de dos fracciones cuyo resultado es una fracción de la forma $\frac{n}{n}$.

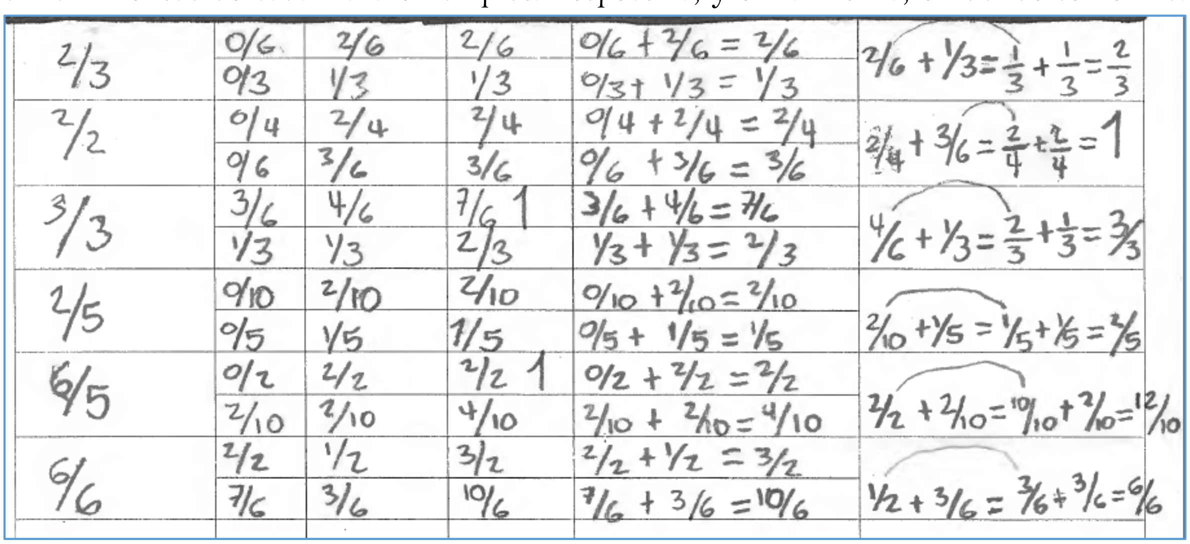
CANTIDAD MARCADA POR LOS DADOS	POSICIÓN INICIAL	CANTIDAD A RECORRER	POSICIÓN FINAL	CALCULOS
$\frac{2}{10}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{0}{10}+\frac{2}{10}=\frac{2}{10}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{0}{6}+\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}=1$	$\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$ unidad
$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}+\frac{4}{10}=\frac{6}{10}$
$\frac{6}{6}$	1 unidad	$\frac{6}{6}$	2 unidades	$\frac{6}{6}+\frac{6}{6}=2$ unidades.
$\frac{4}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{4}{2}=2$	2 unidades	$\frac{0}{2}+\frac{4}{2}=2$ unidades
$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Figura 70. *Ejemplo de tabla de registro en el juego de las equivalencias. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_5 p.38*

La figura 69 muestra cómo los estudiantes consignaban en el cuaderno una especie de definición del procedimiento para sumar fracciones, que de alguna manera intentaba sintetizar algunos de los aspectos trabajados a partir de los juegos.

6.4.5 Suma de fracciones heterogéneas

El juego de las equivalencias, cuando era jugado con la tercera regla (mover la cantidad marcada por los dados en dos pistas diferentes), generaba un contexto para pensar la suma entre fracciones heterogéneas, pues, de un lado, para poder mover la cantidad marcada por los dados en dos pistas, esta cantidad tiene que ser descompuesta en dos fracciones, y al menos una de ellas tiene que ser de denominador distinto al de la fracción que expresa la cantidad originalmente marcada en los dados. Luego, como este par de cantidades deben cumplir la condición de que si se vuelven a juntar, deben dar como resultado la cantidad inicial, entonces, las acciones realizadas con las fichas sobre las diferentes pistas de la tabla de juego brindan un soporte visual para la transformación de una de las fracciones en su equivalente. Esta transformación genera la posibilidad de sumar las dos cantidades en las que se descompuso la cantidad inicial. Que el resultado de esta suma sea igual a la cantidad originalmente marcada en los dados es el mecanismo de control de que el procedimiento ha sido correctamente realizado. La figura 71 muestra una tabla de registro de una partida jugada con esta tercera regla, y cómo en las dos últimas columnas se registran los dos tipos de operaciones realizadas: en la penúltima, la de las fracciones homogéneas que representan los movimientos de cada ficha en su pista respectiva, y en la última, en donde se verifica



2/3	0/6	2/6	2/6	0/6 + 2/6 = 2/6	2/6 + 1/3 = 1/3 + 1/3 = 2/3
	0/3	1/3	1/3	0/3 + 1/3 = 1/3	
2/2	0/4	2/4	2/4	0/4 + 2/4 = 2/4	2/4 + 3/6 = 2/4 + 2/4 = 1
	0/6	3/6	3/6	0/6 + 3/6 = 3/6	
3/3	3/6	4/6	7/6 1	3/6 + 4/6 = 7/6	4/6 + 1/3 = 2/3 + 1/3 = 3/3
	1/3	1/3	2/3	1/3 + 1/3 = 2/3	
2/5	0/10	2/10	2/10	0/10 + 2/10 = 2/10	2/10 + 1/5 = 1/5 + 1/5 = 2/5
	0/5	1/5	1/5	0/5 + 1/5 = 1/5	
6/5	0/2	2/2	2/2 1	0/2 + 2/2 = 2/2	2/2 + 2/10 = 10/10 + 2/10 = 12/10
	2/10	2/10	4/10	2/10 + 2/10 = 4/10	
6/6	2/2	1/2	3/2	2/2 + 1/2 = 3/2	1/2 + 3/6 = 3/6 + 3/6 = 6/6
	7/6	3/6	10/6	7/6 + 3/6 = 10/6	

Figura 71. *Ejemplo de tabla de registro en el juego de las equivalencias. Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_5 p.38*

que la suma de las dos cantidades en las cuales se descompuso la cantidad inicial marcada por los dados efectivamente es igual a dicha cantidad inicial.

Como se expresó en sesiones anteriores, el apoyo visual ofrecido por la organización de las pistas en el tablero de juego ofrecía el soporte necesario para que los estudiantes pudieran realizar las transformaciones necesarias en el desarrollo de una partida de juego. Este trabajo, en el que se construía una base intuitiva para pensar la suma de fracciones homogéneas y heterogéneas, era acompañado de los procedimientos más formales. Dichos procedimientos, sobre la base de estos trabajos intuitivos, tenían una base sólida a partir de la cual dotarlos de significado, y permitían operar con otros tipos de cantidades diferentes a las tratadas en los juegos, como se puede ver en la figura 72 (parte inferior). Allí el estudiante, para sumar $\frac{1}{3}+\frac{4}{7}$, multiplica numerador y denominador de la primera fracción por 7 y de la segunda por 3, obteniendo dos fracciones equivalentes a las anteriores, ahora de igual denominador. Estos métodos más formales, enseñados por el profesor en el tablero, son utilizados por los estudiantes en combinación con los métodos elaborados a partir de las tareas de medición (si se quiere menos formales, pero más intuitivos), lo cual amplía su capacidad de operar con las fracciones, enriqueciendo el conjunto de sentidos y significados que los estudiantes tienen para las fracciones.

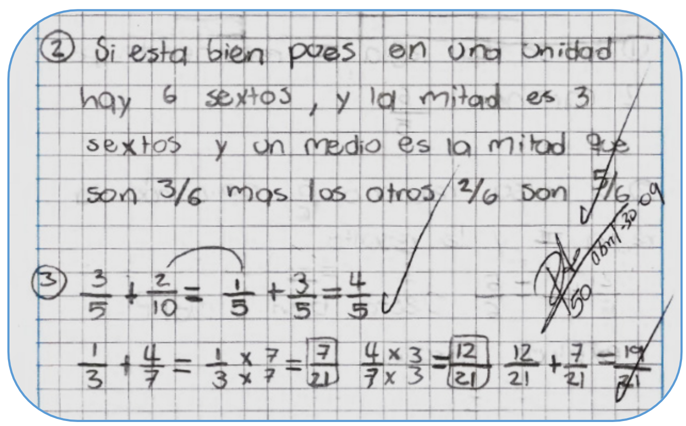


Figura 72. *Respuesta examen de periodo.*
Fragmento tomado del archivo de imagen Grado_4_Estudiante_5 p.48

Es cierto que los estudiantes aún tienen muchas cosas que aprender sobre las fracciones y sus operaciones, sobre todo en el sentido de formalizar y generalizar ciertos conocimientos que aún pueden ser locales o insuficientes para enfrentar problemas más complejos. Pero, aun siendo este su primer encuentro con el estudio de las fracciones, deja lecciones importantes sobre cómo las prácticas de medición son una base fundamental sobre la cual construir una noción de número racional sólida. Nótese cómo estos estudiantes construyen la base conceptual sobre la noción de razón, y utilizan la fracción como una notación para expresar la razón, por cierto potente, en tanto sobre ella se puede constituir un estatus operatorio no presente en las otras formas de expresión para la razón. Este estatus operatorio del que se dotan esos símbolos les da entonces estatus de cantidad. Nótese que cuando los estudiantes entran en esta etapa de operar con las fracciones, ya no es tan necesaria la referencia explícita a la razón desde la cual nacieron, y desde donde se constituyó una base fenomenológica firme para dotarlas de sentidos y significados.

7 Conclusiones[284]

Para facilitar la escritura en este capítulo, se usarán las siguientes convenciones para denotar las *cantidades* o los *sistemas de cantidades*. Las letras del abecedario, en minúsculas (acompañadas de subíndices cuando se requiera) denotarán *cantidades* pertenecientes a algún *sistema de cantidades*, y las letras griegas en minúscula (preferiblemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$) denotarán una razón entre dos cantidades. Las primeras letras del abecedario, en mayúsculas y acompañadas de unos subíndices donde se requieran, se usarán para representar un *sistema de cantidades* cualquiera.

7.1 Sobre los conceptos y objetos de conocimiento matemático

7.1.1 Sobre la noción de cantidad

Como se expresó al inicio del capítulo 5, la noción de *sistema de cantidades*, ampliamente usada en la descripción de las prácticas matemáticas de los estudiantes, da a entender que sobre una clase de objetos, eventos o fenómenos se ha definido una manera genérica o punto de vista de atribuir una *cantidad* a cada uno de ellos, punto de vista que llamamos *Magnitud*;[285] que en relación con dicha atribución se han definido clases de equivalencia (bajo una cierta relación de equivalencia); que cada clase de equivalencia define una *cantidad* (los objetos del sistema), y que el conjunto de cantidades, estructurado por una determinada relación de orden, conforma un sistema ordenado (bajo una determinada relación de orden).

[284] Un artículo donde se resumen los principales hallazgos de la tesis, y presentados en este capítulo fue publicado en junio del 2013, en el Volumen 26 de Las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa (Obando, Vasco, & Arboleda, 2013).

[285] Es importante notar como se dijo en el capítulo 5 (nota al pie de página número 201), estamos usando la "M" en mayúscula para referir de manera genérica al punto de vista que hace la atribución de cantidad sobre los objetos, eventos o fenómenos (por ejemplo, la *Longitud*, el *Volumen*, etc.), mientras que se usará en minúscula para referir una *cantidad de magnitud* específica en el punto de vista de dicha atribución de cantidad (por ejemplo, la *cantidad de longitud*, la *cantidad de volumen*, etc.).

Por simple que esto parezca, el paso de la Magnitud como tipo de atribución de cantidad (numérica o no numérica), a la cantidad y sus representaciones (desde las icónicas hasta las simbólicas) y sus operaciones (basadas en esas representaciones), y de estas a los sistemas de cantidades, es un proceso lento y complejo. Ello pudo evidenciarse en los estudiantes del grado 3 en el paso de la percepción no numérica de la razón entre cantidades hasta la razón como una expresión numérica, o con los estudiantes del grado 4, en el proceso de comprensión de las razones no enteras como cantidades a partir de, o en oposición a, las razones enteras, o incluso, como se muestra el capítulo 4, en el proceso vivido por la noción de razón hasta que dio paso a una concepción cercana al concepto moderno de número real.

Como se evidenció en los capítulos 5 y 6, el paso de la percepción no numérica de la razón a la cuantificación numérica de las mismas está mediado por factores como: los procesos de medición de cantidades; la percepción de la relación de multiplicidad entre cantidades (…es o está *n-veces* en…) y su recíproca (…es o está $\frac{1}{n}$-*veces* en…); la operación unaria ($x = n \cdot y$ o $y = \frac{1}{n} \cdot x$) y la relación de equivalencia (…estar en la misma razón…); las formas de representación (registros semióticos) de la cantidad; y por la capacidad operatoria que dichos registros (analiticidad de los registros) brindan a los sujetos que actúan (analiticidad que finalmente permite dotar a las representaciones con el estatus de objetos cuyas relaciones y operaciones se hacen en lugar de las acciones físicas sobre las cantidades). Esto muestra que la comprensión de la razón como cantidad es un proceso de alta complejidad, que además de los factores propiamente epistémicos y representacionales, involucra la dimensión fenomenológica del aula en la cual la percepción de la cantidad se presenta en unidad sintética con la acción (la cantidad como síntesis a partir de, y que orienta, la acción). En un nivel superior de complejidad asociado al logos, la razón se instala en un nuevo sistema (nuevos instrumentos, procedimientos, relaciones, operaciones), a partir de los problemas que se deben resolver, de los medios de objetivación y las formas discursivas que se movilizan en el curso de la acción misma. En lo que sigue esta complejidad epistémica y representacional es el objeto de análisis.

7.1.2 La noción de razón identificada en las prácticas

La noción de razón fue un pilar fundamental en la organización de los procesos de estudio de los primeros aprendizajes sobre la multiplicación (en el caso de los estudiantes del grado 3º), y de los primeros aprendizajes sobre los números racionales (en el caso de los estudiantes del grado 4º). En el estudio de las prácticas matemáticas de los estudiantes se logra caracterizar de forma general un tipo de ideas sobre la razón, presentes, por ejemplo, cuando los estudiantes del grado 4º se enfrentaban a las tareas que les exigían expresar las medidas relativas entre dos cantidades de volumen, de área o de longitud. Estas ideas de razón también estuvieron presentes en el proceso de estudio de la multiplicación (estudiantes del grado 3º), por ejemplo, en los diferentes procedimientos para objetivar el proceso de variación entre dos cantidades, y por ende, para realizar las multiplicaciones o divisiones que exigían los problemas que tenían que resolver.

Si intentamos formular una aproximación lo más general posible a la idea de razón presente en las prácticas matemáticas de los estudiantes, se puede decir que dadas dos *cantidades* $x \in A_1$ e $y \in A_2$ (con A_1 y A_2 dos *sistemas de cantidades* no necesariamente diferentes), la razón entre las dos *cantidades* x e y nos permite expresar la relación por cociente entre las dos cantidades.[286] Si ambas cantidades son de la misma naturaleza, la razón expresa la medida relativa de una de ellas con respecto a la otra (como por ejemplo en las tareas propuestas para el inicio del estudio de los números racionales), pero en caso de que las cantidades x e y sean de naturaleza distinta, la razón expresa la normalización[287] de una de las *cantidades* con respecto a la otra (como por ejemplo, en la coordinación de los procesos de conteo en el aprendizaje de la multiplicación, cuando la razón era interpretada como constante de proporcionalidad).

Esta idea de razón en las prácticas matemáticas de los estudiantes es coherente con ideas similares de razón identificadas en el estudio histórico-epistemológico de prácticas matemáticas, en donde la razón estuvo presente, incluso sin una palabra explícita para nombrarla, pero en todo caso, en el marco de eventos o fenómenos en los que se debían enfrentar procesos de medición, o el intercambio y distribución de bienes y servicios. En todos estos casos, y en relación con los procedimientos a través de los cuales se resolvían

[286] Otro tipo de relación entre cantidades, como la relación por diferencia, no fue estudiada en esta investigación. Las cantidades que expresan este tipo de relaciones, que entre otras cosas también fueron llamadas razones en la antigüedad griega (razones aritméticas) abrirían el paso hacia al concepto de negativo o positivo, y sería un campo de investigación abierto a trabajos futuros.

[287] Con esta expresión queremos dar a entender el caso en que la razón, al establecerse entre dos cantidades heterogéneas, expresa cuánta cantidad hay en una de ellas, por cada unidad de cantidad presente en la otra. Si las cantidades son medidas en el marco de un sistema de medidas estandarizadas, entonces se puede hablar de cuántas unidades hay en una de las cantidades por cada unidad de medida en la otra. Es el caso, por ejemplo, del precio por unidad de un producto en un supermercado, o de magnitudes físicas como la velocidad (distancia por unidad de tiempo) o la aceleración (cambio en la velocidad por unidad de tiempo).

los problemas, se identifica una idea de razón asociada a los procesos de medición relativa entre cantidades, o a las tasas de intercambio o distribución.

A pesar de lo simple de la idea (y de lo evidente que parece hoy en día en las matemáticas formalizadas) de que las razones se expresen en forma numérica, el trabajo realizado evidenció que la noción de razón no siempre estuvo unida a una de noción de *cantidad* (o al menos la cuantificación expresada en la razón no se hacía en forma numérica). Esto en tanto objetivar la razón como cantidad es un proceso que se constituye, que implica el paso a formas de percepción de la cantidad, de las relaciones por cociente entre cantidades al igual que de su representación, de tal forma que se puedan comparar razones, igualarlas y operar con ellas (ver por ejemplo, en el capítulo 4, la sección 4.3; en el capítulo 5, la sección 5.3; o todo el capítulo 6). Obsérvese que en las prácticas matemáticas de estos dos grupos de estudiantes la precepción y representación de las *Magnitudes* y los procesos de medición de sus respectivas *cantidades de magnitud* no fue problemático. Pero si lo fue la percepción de la razón, su función con respecto a las cantidades de las cuales emerge, los procesos de representación de la misma, y en sí, comprender la razón como cantidad.

En una primera precepción, la razón se objetiva en unas formas de expresión verbal que cuantifican de manera no numérica la relación entre las dos *cantidades* que ésta permite comparar. Por ejemplo, cuando los estudiantes dicen "es más grande que…", "es como dos veces", "menos de la mitad", etc. A partir de allí y en función de la necesidad de expresar de manera más precisa la razón entre las dos cantidades comparadas, se da paso a expresiones verbales que cuantifican la razón en forma prenumérica. Por ejemplo, al decir…*es el doble de…*, …*es la mitad de…*, etc. Por último se emplean formas de expresión numérica, como por ejemplo, "…es $\frac{1}{2}$ de…".

Estas formas de objetivación de la relación entre dos cantidades van de la mano de unas acciones (operaciones) sobre las *cantidades* comparadas, acciones que permiten obtener una de ellas a partir de la otra. Por ejemplo, cuando se dice que entre dos *cantidades* x e y (homogéneas) se da la relación "*x es el doble de y*", es porque sobre la *cantidad y* se ha realizado una especie de operación (unaria) que la extiende dos veces sobre la *cantidad x*, y esta operación unaria que *duplica* una *cantidad* para igualar a la otra se codefine con la relación binaria …*es el doble de*… Este doble movimiento entre la relación y la operación permite la objetivación de la razón en unas formas de expresión (desde las no numéricas hasta las numéricas), y otorga a la razón así objetivada un sentido específico –la razón expresa la medida relativa entre las dos cantidades– y una doble función lógica –la razón como relator o como operador– con respecto a las cantidades sobre las que se define.

Así entonces, en la relación *x es el doble de y* que relaciona las dos *cantidades x* e *y* a partir de la razón *doble*, la razón se objetiva bien en la expresión *el doble de* del esquema relacional "…*el doble de*…" o bien en la acción de producir una cantidad a partir de *duplicar* la otra. En el primer caso, la razón es un *relator* con respecto a las dos cantidades comparadas, en el segundo caso un *operador*.[288] Nótese entonces que a este nivel de objetivación la razón no necesita ser un número. Puede ser un sintagma nominal (que expresa la razón en forma prenumérica) y formar parte de un sintagma relacional binario ("es el doble de") o de un sintagma nominal compuesto ("el doble de *x*") en donde la acción representada por "el doble" se aplica sobre la cantidad representada por *x*. Esta dualidad en las funciones de la razón con respecto a las *cantidades* de las cuales expresa su medida relativa es una fuente de complejidad epistemológica en la comprensión de este concepto. Como se muestra en los capítulos 5 y 6, dicha dualidad unida a otros factores de orden representacional, que se describirán más adelante, fueron claves en la constitución de una noción de razón como cantidad.

Además de lo anterior, dado que la medida relativa entre dos *cantidades* se puede dar en dos sentidos, a saber, tomando la *cantidad* menor como unidad de medida para medir la *cantidad* mayor, o tomando la *cantidad* mayor como unidad de medida para medir la *cantidad* menor, entonces, dadas dos cantidades *x* e *y*, se pueden definir en sentido estricto dos razones (que podemos llamar "razones orientadas", o "dirigidas"), a saber, "la razón de *x* a *y*", y la "la razón de *y* a *x*", o en términos de la notación clásica para las razones $x:y$ o $y:x$ Es más, como se evidenció ampliamente en el recorrido histórico-epistemológico, o en las prácticas de los estudiantes, dado que ambos procesos de medición son el uno recíproco del otro, entonces, si una de ellas tiene cierta objetividad, esta razón objetivada se puede usar para constituir procesos de objetivación de la otra (la reciprocidad entre estas dos parejas de razones fue clave en el estudio inicial de los racionales, como se verá más adelante).

No obstante que la reciprocidad permite definir una razón orientada a partir de la otra, el trabajo con los estudiantes mostró que el tránsito de una a la otra no es un proceso

[288] Estas dos funciones de la razón, como relator o como operador, de alguna forma ya habían sido documentadas por el Dr Carlos Vasco, en la documentación que respaldo el proceso de reforma curricular adelantado en el país en la década de los años 80. Ver por ejemplo, Vasco (1994a, 1994f, 1994g).

transparente. Así por ejemplo, la razón entera que compara la cantidad mayor con respecto a la menor, y que expresa que la cantidad mayor es un número exacto de veces la cantidad menor (relación de multiplicidad), no solo fue de más fácil percepción por los estudiantes, sino que en un primer momento del proceso dominó y ocultó la razón *n-ésima* (que expresa ahora la relación de la cantidad menor a la mayor). Diferenciar los dos procesos de medición, identificando en cada caso la cantidad unidad de medida y la cantidad que debe ser medida, unido a los procesos de percepción no numérica y numérica de la cantidad antes descritos, y a la dualidad operador-relator de las funciones de la razón, permitieron a los estudiantes comprender los dos tipos de razón, pero sobre todo, comprender el papel que juega la razón entera para dotar de sentido a la razón *n-ésima*: una cantidad es la *n-ésima* parte de otra cantidad (la razón como relator) si *n-veces* dicha cantidad iguala a la otra (la razón como operador).

Por último, es necesario llamar la atención que lo dicho sobre la razón en los párrafos anteriores solo aplica para los casos en los que la razón se define sobre dos *cantidades* homogéneas. Hay por lo tanto un campo de indagación abierto a la exploración para el caso en el que la razón se defina sobre *cantidades* heterogéneas pues la evidencia empírica recogida aun no es suficiente para sacar conclusiones al respecto, pero si para enunciar algunas ideas que a manera de hipótesis orienten trabajos futuros.[289] Cómo se puede ver en el capítulo 4 (en especial la sección 4.3), o en el capítulo 5 (en especial la sección 5.5), cuando las *cantidades* son heterogéneas, la razón entre ellas cumple igualmente dos funciones: una como *correlator*, es decir, estableciendo la correspondencia entre dos *cantidades* pertenecientes a dos sistemas de *cantidades* diferentes (o mejor, entre dos familias de cantidades, como se explicará más adelante), y otra como *transformador*, que es el caso en el que aplicada sobre una de las *cantidades* la transforma en la *cantidad* que se le corresponde en el otro sistema. Esta dualidad en la función de la razón (correlator-transformador) abre entonces preguntas sobre los procesos que permiten su objetivación, en particular, sobré cómo es que los estudiantes logran objetivar la razón como una constante de proporcionalidad. Cómo se verá un poco más adelante, estos procesos implican una nueva comprensión de la razón, el recurso a nuevos instrumentos y representaciones (por ejemplo,

[289] Es necesario mencionar que las dos tesis de maestría dirigidas en el periodo del desarrollo de la tesis (Sánchez Ordoñez, 2011; Torres Jaramillo, 2013), y que se apoyaron en los instrumentos conceptuales y metodológicos constituidos en este proceso de investigación, abordaron este problema de la razón como constante de proporcionalidad.

el uso instrumental de las tablas) y, por ende, el paso a las propiedades analíticas de la función lineal que permiten modelar la proporcionalidad directa entre las cantidades estudiadas. Además, como se enunció ampliamente en el capítulo 5, el trabajo con las razones entre cantidades heterogéneas implica un análisis dimensional de las unidades de la razón, y este aspecto, queda igualmente abierto a la investigación.

7.1.2.1 Proporción (analogía) entre razones

La proporción estuvo presente en los procedimientos de los estudiantes para resolver ciertos tipos de problemas, y en las formas de enunciación constituidas alrededor de tales procedimientos, aunque no en la forma de una teoría explícita de razones y proporciones, e incluso, sin la palabra técnica "proporción" para nombrarla. Así por ejemplo, los estudiantes del grado 3º realizan los procedimientos basados en razonamientos por analogía (sección 5.4 del capítulo 5) se fundamentaron en una idea simple: dados dos sistemas de cantidades homogéneas, la relación (razón) entre un par de *cantidades* (en el primer sistema) es igual a la razón entre el par de *cantidades* correspondientes (en el segundo sistema),[290] y por lo tanto, las funciones de la razón (como operador o como relator) con respecto a uno de los dos pares de cantidades se pueden trasladar en analogía al otro par de cantidades. Esta idea de igualdad en la razón entre los pares de cantidades correspondientes, y de analogía entre las funciones de la razón con respecto a cada par de cantidades, en general se presentó bajo la forma de enunciados del tipo "si la relación entre *a* y *b* es *n-veces*, entonces la relación entre *c* y *d* también es *n-veces*" o de la forma "como *a* es *n-veces b*, entonces *c* también es *n-veces d*", estableciendo que la medida relativa entre los dos pares de cantidades es la misma.[291]

Nótese además que la analogía entre las funciones de la razón con respecto a las

[290] Esta idea de la proporción como analogía también se identificó en los estudiantes de grado 4 (capítulo 6), y en el estudio histórico-epistemológico (capítulo 4).

[291] Por supuesto, existen otras formas de enunciados en los que las razones son el sujeto de la enunciación. Si estas formas no fueron identificadas en el trabajo de los estudiantes es porque pertenecen a unas esferas de enunciación más formales propia de una teoría explícita de razones y proporciones. En ese tipo de enunciados, en forma general se puede afirmar que las razones participan de (se objetivan en) enunciados tetrádicos (y de segundo orden) cuya forma básica es $P\left(R_\alpha\left(x_1,y_1\right),R_\beta\left(x_2,y_2\right)\right)$ donde x_1,y_1,x_2,y_2 son *cantidades* (las cuatro pueden estar en el mismo sistema, o dos de ellas en uno y las otras dos en otro), y la razón R_α de x_1 a y_1 es la misma que la razón R_β de x_2 a y_2. Dicho de otra forma un par de *cantidades* se compara con otro par de *cantidades* al poner en identidad las razones definidas entre cada par. La identidad, la equivalencia, entre las dos razones expresa que la medida relativa entre un par de ellas es la misma que la medida relativa entre el otro par (ídem para la relativización a la unidad si fueran cantidades heterogéneas).

cantidades también implica movimiento: la razón primero se establece entre un par de cantidades, la razón como relator, y luego, esta razón y sus funciones se traslada al otro par de cantidades con las cuales están relacionadas las cantidades del par inicial.[292] Este movimiento desde un par de cantidades hacia el otro par (de los que se asume están en la misma razón) se realiza según un principio o ley que garantiza la validez de este movimiento. Este principio se establece empíricamente a partir de las condiciones de las actividades realizadas (por ejemplo, a partir de los juegos realizados en donde los estudiantes podían verificar empíricamente que el doble de fichas implicaba el doble de puntos) o puede inferirse a partir de conocimientos previos (como por ejemplo, el conocimiento de los hechos multiplicativos sistematizados en las tablas de multiplicar), o incluso, en la conjunción de ambos procesos.

No se puede dejar pasar por alto el uso instrumental de esta noción de proporción en los procedimientos de los estudiantes para resolver problemas que exigían calcular una cuarta proporcional desconocida. En estos problemas (por ejemplo, al determinar el puntaje de una cierta cantidad de fichas conocido el puntaje de otra cantidad de fichas), los estudiantes primero definían la razón entre un par de cantidades conocidas, por lo general de la misma naturaleza (la razón como relator). Luego, asumiendo que el otro par de cantidades (una de ellas desconocida) están en la misma razón, procedían a aplicar esta razón sobre la tercera cantidad conocida (la razón como operador) para encontrar el valor de la cuarta cantidad desconocida. Es en este sentido de la doble función como operador o relator en el que se puede afirmar el carácter dinámico en la comprensión de la proporción entre cuatro cantidades como igualdad en la medida relativa de los dos pares de cantidades que están en la misma razón. Esta igualdad, dependiendo de cuáles sean las cantidades conocidas y las desconocidas, permite poner en juego la doble función de la razón (como relator o como operador), y trasladar por analogía las funciones de la razón desde un par de cantidades al otro. Este tipo de procedimientos, que aquí llamados procedimientos por analogía (ya que, como se ha dicho en líneas anteriores, se basan en una idea de proporción como analogía en la medida relativa entre dos pares de cantidades, y en las funciones de la razón como operador o como correlator), han sido ampliamente documentados en las

[292] Esta distinción es importante, porque la idea de proporción moderna, basada en la identidad $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si y solo si $a\cdot d=b\cdot c$ es estática: la proporcionalidad aritmética que esta expresa se nos presenta como algo dado, algo cuya existencia se asume.

investigaciones realizadas sobre el desarrollo de razonamiento proporcional[293] (ver por ejemplo, la amplia documentación que al respecto se referenciada en el capítulo 1, en especial la sección 1.2), en particular aquellas que se basan en la noción del Campo Conceptual de las Estructuras Multiplicativas, pero en nuestro caso, la noción de razón como proporción, y las funciones de la razón sobre las cantidades (como relator o como operador) permitieron identificar una serie de mecanismos elementales no solo para realizar el análisis relacional entre las cantidades involucradas en el evento en fenómeno estudiado, sino en los procedimientos necesarios para resolver el problemas propuesto, y los mismos no han sido documentados antes en investigaciones previas.

Lo dicho en los párrafos anteriores es una buena muestra de la unidad sintética entre el mundo de las acciones humanas objetivamente orientadas a un fin (percepción de la cantidad, tratamiento de la cantidad, prácticas de medición, reglas de distribución, etc.) en relación con los dispositivos lógicos instaurados en las prácticas y que permiten la emergencia de nuevos objetos de conocimiento (objetos, relaciones, operaciones, sistemas, etc.).

Finalmente, esta idea de proporción no siempre estuvo presente en el trabajo de los estudiantes, sino que, en algunos momentos, se identificó que antes de la proporción se percibía la no proporción, o la "des-proporción". Es el caso de elaborar la tarea de bandera de Colombia (ver anexo 3, archivo de audio 2009_12_04_Grado 4) en donde la selección de las medidas de las bandas hizo que esta quedara más ancha que larga. Aunque los estudiantes se manifiestan inconformes con la bandera así elaborada (pues no se ve como la bandera usual), no logran definir (tomando como base una bandera usual bien dibujada) cuál es la razón entre el largo y el ancho (condición necesaria para poder dibujar dos banderas, que siendo de tamaños diferentes, conserven la misma proporción en sus medidas). Situación similar se evidencia en otros momentos del trabajo con las banderas, por ejemplo, en el caso en que la bandera es dividida en tres franjas de distinto color, se manifiesta que cada una de las franjas no es la tercera parte de la bandera porque una de ellas es como más que las demás. Casos similares se pueden identificar en los aspectos denotados como la percepción "cuantitativa no numérica de la cantidad", en donde hay una primera percepción de razón diciendo "es más que…", "es menos que…", "es como…", etc., pues estas expresiones denotan que la razón buscada no es como otra ya conocida, sino

[293] Aunque han recibido otros nombres, como por ejemplo, procedimientos escalares

mayor o menor, pero aún no se logra definir con precisión cuál es esa razón.

A pesar de que se podría alegar que es necesaria más evidencia empírica, con lo analizado de las prácticas matemáticas de los grados 3 y 4 si se puede afirmar, a manera de hipótesis para trabajos futuros, la importancia de centrar la mirada de los procesos escolares no solo en la proporción sino también en la "desproporción", en tanto bajo ciertos contextos, ésta es incluso la base sobre la cual se puede percibir posteriormente la proporción. También es posible afirmar, a manera de hipótesis, que estudiar la desproporción, antes, o en conjunción con la proporción, es posible gracias al trabajo realizado con base en la medida de magnitudes, en donde la idea de proporción no es estática (identidad aritmética entre razones) sino dinámica, ligada al movimiento propio de trasladar por analogía, desde un par de cantidades en una razón dada a otro par que están en la misma razón, las funciones de la razón con respecto a dichos pares de cantidades.

7.1.2.2 Números racionales

El paso de la razón como expresión de la relación entre dos cantidades, a la razón como *cantidad*, o más allá, a la razón como número, no fue ni evidente ni inmediato.

Así se ve en el barrido epistemológico presentado en el capítulo 4, en donde se muestra que reconocer la razón como entidad numérica fue un proceso tardío en la historia misma de las matemáticas, que se consolidó gracias a cambios en la forma de la actividad matemática: nuevo concepto de número, nuevas formas de representación, nuevos problemas, nuevas técnicas, etc. El proceso de constitución de la razón como entidad numérica, al menos en occidente, estuvo fuertemente unido a su simbolización (la fracción fue una de ellas), a la constitución de un campo operatorio en relación con esas formas de representación simbólica, pero sobre todo, a la posibilidad de asignar el número 1 a la *cantidad* tomada como referente, es decir, a la posibilidad de realizar mediciones en el sentido moderno. Esto muestra que hay una noción de razón en la base de toda la fenomenología asociada al concepto mismo de número (al menos de los números positivos):[294] si las cantidades comparadas son conmensurables, la razón da origen al número racional, pero si no son conmensurables, entonces el número es el irracional (por supuesto, con los estudiantes de estos grados solo se trabajó con parejas de cantidades

[294] Freudenthal (1983) propone que la fenomenología asociada al número racional está en las fracciones, pero de acuerdo a lo expresado hasta el momento, siendo las fracciones una forma de notación para expresar la razón, este planteamiento tiene que ser formulado de otra manera, asumiendo la fenomenología del número en general, y el número racional en particular, sobre la base de una idea de razón.

conmensurables).

En las prácticas de los estudiantes se identificaron procesos similares: se evidenció que de las diferentes formas de representación de la razón, aquellas basadas en representaciones simbólicas dan mayor capacidad operatoria a los sujetos, y por ende, permiten objetivaciones de la razón como cantidad. Además, al ver la razón como cantidad, al lado de prácticas de medición de cantidades donde se toma una determinada cantidad como unidad, se dieron los primeros pasos en la constitución de la razón como número racional, y para esto fue fundamental la posibilidad de expresarla en términos de la notación fraccionaria.[295]

Las prácticas matemáticas de los estudiantes del grado 4 muestran algunos elementos importantes en ese proceso de constitución del número racional, mediado por ese tránsito de la razón como expresión anumérica o prenumérica de la medida relativa entre dos cantidades, a la razón como cuantificación numérica de dicha medida relativa (por ejemplo, en las tareas sobre medición de volúmenes). Esto fue posible gracias al uso de unas formas de notación para la razón, para el caso, la notación en forma de fracciones, que permitieron a los estudiantes mejores posibilidades de operar con las cantidades representadas en las razones, y por ende, una comprensión de la razón como cantidad. Será a través de estas formas de notación que, una vez olvidada la razón desde la cual tuvo su origen (por ejemplo, en el juego de las equivalencias), las razones dejarán de ser medidas relativas para volverse cantidades absolutas, y adquieren así el estatus de números (por supuesto, como se expresó antes, estos estudiantes aún tienen un largo camino que recorrer para que pueda hablar de los números racionales en toda la extensión de la palabra).

En este largo tránsito de la percepción no numérica de la razón a la razón como número, del cual los estudiantes del grado 4 solamente recorrieron los primeros pasos, medir fue la base fundamental del proceso:

(1) Se realiza la medida relativa entre parejas de *cantidades* que están en relación de multiplicidad una de la otra (es decir una de ellas mide exactamente a la otra).

[295] En este punto se puede hacer notar un aspecto no trabajado en estas clases: la notación decimal como otra forma de expresión de la razón entre dos cantidades, y por ende, del número racional. Esto deja abierto un camino interesante, pues si las fracciones son una forma de notación para representar las razones, ¿qué aportes a la comprensión de la razón como número conlleva su expresión en notación decimal? ¿Son estos aportes complementarios a los que da la notación en forma de fracción, o por el contrario son excluyentes? ¿Podría establecerse la prioridad o primacía de una forma de notación sobre la otra, en términos de la objetivación de la razón como cantidad y como número racional?

(2) En el proceso de medición de este par de *cantidades*, la razón *n-veces*, y la razón *n-ésima*, se codefinen. Así por ejemplo, la razón *doble* define la razón *mitad*, la razón *triple* define la razón *un tercio*, etc.[296]

(3) La repetición de *m-veces* la razón *n-ésima* permite definir la razón de la forma $\frac{m}{n}$ - *veces*. [297] Es decir, $\frac{m}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m-sumandos}$

El estudio de las prácticas de los estudiantes mostró que en la comprensión de la razón *n-ésima* fue fundamental el recurso a la razón *n-veces*. Igualmente mostró que esta razón, incluso cuando el proceso tendía a anular a la razón *n-ésima*, antes que ser un obstáculo para la comprensión de la razón no entera fue una parte importante del proceso, ya que obligó a comprender la direccionalidad de la relación entre las dos *cantidades* sobre las cuales se define la razón, y por ende, a fijar la atención en cuál *cantidad* es la unidad de medida, y cuál la *cantidad* que debe ser medida.

Ese tránsito de una percepción "cuantitativa no numérica" de la relación entre dos cantidades cuantificada por la razón, a la razón como número, fue mediado por las siguientes modalidades de objetivación: las diferentes formas de representación de la razón (ver por ejemplo, la sección 4.2 del capítulo 4, la sección 5.3 del capítulo 5, el capítulo 6, la sección 6.3); los procedimientos que permitieron tales formas de representación (ver la sección 5.4 del capítulo 5, o en el capítulo 6, la sección 6.3); la comprensión de la razón como aquello que cuantifica la relación entre dos *cantidades* (ver por ejemplo, la sección 4.3

---

296 En este punto es importante hacer notar que autores como Steffe (2010b), Confrey *et al.* (2009), Obando (2003), Thompson y Saldanha (2003), entre otros, han documentado anteriormente la complementariedad entre las fracciones de la forma $\frac{1}{n}$-*veces* y la relación *n-veces*, pero en todos estos casos, la complementariedad se refiere a las fracciones y no a las razones, y además, tienen en mente son las relaciones parte todo, los procesos de equipartición de las cantidades, y por ende, no es la medida de cantidades la que orienta la actividad matemática de los estudiantes, sino los procesos de conteo entre partes.

297 Esta forma de ver la razón $\frac{m}{n}$-*veces*, es un caso particular de un problema más general (no presente en el trabajo de aula realizado con los estudiantes de esta institución educativa) que consiste establecer la medida relativa entre un par de *cantidades* (conmensurables entre sí) en donde las dos *cantidades* no están en relación de multiplicidad una con respecto a la otra. En este caso se debe encontrar una tercera *cantidad* que mide exactamente a ambas, y dado que esta tercera cantidad es la *n-ésima* parte de una de ellas (la cantidad tomada como unidad de medida), y *m-veces* esa *cantidad n-ésima* completa la otra cantidad (la cantidad que debe ser medida), entonces la razón de la cantidad que se desea medir con respecto a la cantidad que se toma como unidad de medida es $\frac{m}{n}$-*veces*.

del capítulo 4, o la sección 6.4 del capítulo 6), o incluso, familias de *cantidades* que se relacionan a partir de la misma razón (sección 4.4 del capítulo 4, o las secciones 5.5 y 5.6 del capítulo 5).

En ese proceso de objetivación de la razón como cantidad, la emergencia de formas de expresión simbólicas para las razones, que brindan mayor poder operatorio a los estudiantes, en especial la forma de notación de las fracciones como razón entre dos cantidades, fue fundamental en la constitución de ciertas nociones numéricas ligadas a los números naturales y a los racionales. Sin embargo se debe reconocer que las prácticas matemáticas de los estudiantes solo evidencian unos primeros pasos en la constitución de los números naturales y racionales como sistemas numéricos.

De las discusiones precedentes emerge entonces otro nivel de complejidad de ese tránsito de la razón al número racional asociado con la semiótica de las representaciones usadas, y con la capacidad operatoria (de los individuos) ligada a tales representaciones semióticas. Esto se ve por ejemplo, en el paso de las representaciones icónicas de la relación entre dos cantidades a las numéricas (capítulo 4) o en el paso de la representación de la razón en formas de enunciación verbal a la representación de la razón en notación fraccional (capítulo 5). En ambos casos los estudiantes no solo dispusieron de formas más eficientes para realizar sus cálculos, sino que constituyeron nuevos niveles de objetivación en su conceptualización sobre el número.

Antes de terminar esta sección es necesario hablar de dos aspectos importantes: el primero es un hallazgo en el trabajo de los estudiantes, y el segundo, un aspecto no trabajado que, a manera de hipótesis, puede ser un campo importante de indagación para ampliar la comprensión de los estudiantes sobre los números racionales.

1. El obstáculo que se genera para el aprendizaje de los racionales en su notación de fracciones, cuando el proceso de estudio se centra en las relaciones parte todo sin la referencia específica a una determinada atribución de cantidad, como por ejemplo, en el caso de las actividades de las banderas estudiadas en el grado 4, en donde se pregunta por las partes y el todo, ignorando que la relación parte-todo comporta diferentes formas de atribución de cantidad, a saber, la cantidad de área total de una bandera o el área de las diferentes franjas de color en que ella se divide (dificultades similares también se evidenciaron en las tareas sobre el juego de la equivalencia). Esta ausencia de la referencia a la atribución de cantidad (Magnitud) sobre la cual se establecen las

razones entre las cantidades que se comparan (para el caso de estas tareas evidenciado en preguntas como "que parte es…") hace que los estudiantes usen las referencias espaciales y temporales (de la relación entre las partes y el todo) como medio para comunicarse con el profesor en relación a las partes sobre las que está fijando la atención.

Esto es, cuando la tarea no explicita la Magnitud sobre la que se centra la atención, ni advierte que la razón es entre cantidades en esa Magnitud, por ejemplo, cantidad de volumen (de objetos o fichas tridimensionales), o cantidad de área de regiones bien delimitadas (en figuras dibujadas en un papel, o en fichas u objetos de muy poco grosor), o cantidad de longitud en segmentos (trazos transversales u objetos tridimensionales en los que se pueda hacer abstracción de su anchura y profundidad), etc., entonces a los estudiantes no les queda más que la referencia a las condiciones espacio-temporales de la parte y el todo, y a su conocimiento cotidiano sobre la partición de objetos físicos, que por lo general, se basa en una percepción de igualdad en la forma, lo que garantiza de entrada la igualdad con respecto a la cantidad de magnitud (que ha estado todo el tiempo implícita en la tarea). Pero esta referencia oculta la medición y la razón entre cantidades de magnitud, lo que limita las posibilidades de compresión en los estudiantes. Es el caso, por ejemplo, de las tareas típicas que se encuentran en los libros de texto que presentan figuras geométricas (por lo general regulares) partidas en partes iguales, en donde la igualdad se da en forma, pues no se hace referencia explícita a la Magnitud con respecto a la cual se desea establecer la razón entre la parte y el todo (que para el caso sería la cantidad de área presente entre una de las partes y la cantidad de área que hay en el todo), y por supuesto, la igualdad en forma, un aspecto que no es esencial en la comprensión de la razón entre la parte y el todo, al no hacerse explícita la Magnitud sobre las que se comparan las cantidades, es la única referencia que queda. Esto lleva entonces a una ausencia de la medición de cantidades, de la razón entre cantidades para dar sentido a la notación en fracción (y de paso al número racional), y sobre todo, a que la fracción sea vista como el nombre o propiedad de la parte, y no como una forma de expresar la razón, de acuerdo a una determinada cantidad de magnitud, entre una cantidad tomada como parte y otra que es considerada como la unidad (el todo).

Se puede concluir entonces que esta forma de introducir la enseñanza de los racionales en su notación fraccionaria, a partir de tareas que se centran en las relaciones parte-todo sin una referencia al punto de vista de una atribución de cantidad (una Magnitud), moviliza un obstáculo tanto didáctico como epistemológico. Didáctico por que introduce un proceso de estudio sobre los racionales que deja de lado la atribución del punto de vista de una Magnitud, y por ende, no hay proceso de medición ni establece razones entre cantidades de magnitud en dicha atribución de cantidad, lo que lleva a los estudiantes a fijar la atención en el objeto, sus partes, la igualdad en forma de las partes y en las relaciones espacio-temporales entre las partes y el todo. Y es epistemológico porque al centrar la atención en el objeto y sus partes, ese conocimiento sobre las particiones de objetos físicos, sobre las relaciones espacio-temporales entre objetos y sus partes, es un obstáculo para poder establecer equiparticiones con respecto a una magnitud. En efecto, la forma, la posición, el color, etc., por lo general no es lo esencial, sino que lo esencial está en los medios que se puedan movilizar para determinar cuándo hay igualdad en la cantidad de magnitud sobre la cual se hace la comparación, incluso a veces en contra de la intuición generada en aspectos como la forma, la posición, etc.

2. En el trabajo realizado con los estudiantes del grado 4 se hizo un fuerte énfasis en la notación en forma de fracción para representar las razones entre cantidades, pero no se presentaron tareas orientadas al uso de la notación en numeración decimal para las razones. Si bien en esta institución educativa estos aspectos de la notación decimal para los números racionales se estudian en el grado 5º, se puede preguntar a manera de hipótesis, en tanto la numeración decimal es una forma de notación al igual que lo es la notación en forma de fracción, por las posibilidades (y también por los obstáculos) que esta notación ofrecería en la comprensión de las razones entre cantidades y, por ende, de los números racionales, si en paralelo a la notación fraccionaria para las razones se hiciera uso de la notación en forma de numeración decimal. Por supuesto que introducir la notación en numeración decimal para los racionales implica un tratamiento sistemático de las fracciones decimales, pero el hecho de disponer de dos sistemas de notación en paralelo para los mismos objetos de estudio, amplía las posibilidades del campo operatorio de los individuos, muestra bajo qué circunstancias es mejor o más potente un sistema sobre el otro, y sobre todo, como lo manifiesta Raymond Duval (2004a), disminuye las posibilidades de confundir el objeto de estudio

con sus representaciones en un determinado registro de representación.

7.1.3 Proporcionalidad directa

El proceso de estudio sobre la multiplicación adelantado por los estudiantes del grado 3 se organizó a partir de tareas que requerían de la coordinación del proceso de variación de *cantidades* en dos *sistemas de cantidades* diferentes (tareas organizadas, por ejemplo, a partir del juego de los bolos, de la canasta y del tiro al blanco), proceso de variación regido por una tasa de variación constante, a saber, la cantidad de puntos por cada ficha (o en ocasiones, la cantidad de puntos por *n* fichas). En consecuencia esta iniciación al estudio de la multiplicación fue en esencia una primera aproximación al estudio de la proporcionalidad directa.[298]

En líneas generales estas tareas tenían la siguiente estructura. Se disponía de dos *sistemas de cantidades*, a saber, uno a partir del cual se determinaba la cantidad de fichas, bolos, canicas etc. (que para abreviar, en adelante siempre referiremos como fichas), y el otro que permitía determinar la cantidad de puntos que se correspondían con una cierta cantidad de fichas. Cada que el juego se realizaba, se seleccionaban de cada sistema un conjunto específico de *cantidades*, los cuales se ponían en correspondencia uno a uno. Es decir, de cada *sistema de cantidades* se selecciona una *familia de cantidades* de tal forma que a cada *cantidad* en una de las familias se le hacía corresponder una única *cantidad* en la otra, y cada pareja de estas *cantidades* estaría representando un evento posible dentro del juego. Dado que cada pareja de *cantidades* está en la misma la razón, "cantidad de puntos por cada ficha", entonces la correlación entre estas dos *familias de cantidades* es lineal, y por lo tanto, esta correlación define, entre las dos familias, una proporcionalidad directa.

En esta forma de comprender la proporcionalidad el punto de partida no es la proporción entre parejas de cantidades, a partir de la cual se define una constante de proporcionalidad, la cual a su vez permite definir la función lineal que modela el proceso de variación de dichas cantidades. Por el contrario, reconociendo que existe una razón constante que regla el proceso de variación conjunta de las cantidades en los dos sistemas, se puede llegar a las proporciones, o a la idea de constante de proporcionalidad, que permite

[298] En esto se difiere de la forma usual de organizar el estudio de la multiplicación en nuestras instituciones escolares, el cual en esencia se reduce al estudio del algoritmo clásico para efectuar el cálculo de una multiplicación.

resolver los diferentes problemas que se presentan en relación con este proceso de variación conjunta.

Lo que el trabajo puso en evidencia, es que una manera de tratar tales problemas pasa por identificar una unidad para contar en cada sistema de cantidades, y por coordinar los dos procesos de conteo de dicha unidad en cada sistema. Simbólicamente la coordinación de este doble conteo se puede expresar como sigue:

1. Definir los dos sistemas de cantidades: sean A_1 y A_2 los dos *sistemas de cantidades.*
2. Identificar las dos unidades de conteo en cada *sistema de cantidades*, y correlacionar la variación de las cantidades a partir de dichas unidades de conteo:
   a. Sean $u_1 \in A_1$ y $u_2 \in A_2$ las dos unidades de conteo, con $u_2 = f(u_1)$. Las situaciones multiplicativas más simples son aquellas en las que $u_1 = 1$ y tanto u_1 como u_2 son números naturales (como en los casos presentados en los juegos de puntajes).
   b. La correlación de la variación entre cantidades de los *sistemas de cantidades* implica: $\forall a \in A_1, a = n \cdot u_1, \exists b \in A_2, b = n \cdot u_2$ tal que $f(a) = b$. O dicho de otra forma: $n \cdot u_1$ en A_1 implica $n \cdot u_2$ en A_2.
3. En la correspondencia que a la cantidad $n \cdot u_1$ en A_1 le asocia la cantidad $n \cdot u_2$ en A_2, está la coordinación de los dos procesos de conteo descritos anteriormente, y las representaciones icónicas o las simbólicas, o la combinación de ambas (como se analizó ampliamente en el capítulo 5), brinda a los estudiantes los medios para objetivar tanto las unidades de conteo, como la relación entre ambas, y por ende, la comprensión de la covariación entre las cantidades en los sistemas de cantidades.

Esto evidencia entonces que la comprensión de las situaciones multiplicativas de proporcionalidad directa requiere: identificar los dos sistemas de cantidad que se correlacionan; identificar las dos unidades de conteo, una en cada *sistema de cantidades* implicado en la situación; objetivar la razón que gobierna el proceso de covariación de ambas cantidades (definida como una razón entre las unidades de conteo) y definir un procedimiento que permita controlar y coordinar los dos procesos de variación de ambas cantidades. En este sentido, los llamados building-up/building-down, descritos en trabajos previos (Kaput & West, 1994; Nabors, 2003; Pantziarra & Pitta-Pantazi, 2005) no son una manifestación de razonamiento pre-proporcional, o precursores del razonamiento proporcional propiamente dicho, sino por el contrario, una genuina manifestación de razonamiento proporcional en situaciones multiplicativas de isomorfismo de medida, en donde los dos sistemas de cantidades que se correlacionan en la situación son de naturaleza discreta, y la coordinación de los dos procesos de conteo implicados en la situación, y por supuesto, las diferentes formas de representarlos, constituyen procesos de objetivación necesarios para su comprensión.

Adicionalmente, esta coordinación de los dos procesos de conteo permite una comprensión de los procesos multiplicativos que trasciende las limitaciones de la interpretación usual de la multiplicación como una suma de sumandos iguales, mostrando que lo que se coordina son dos procesos de variación de *cantidades* en dos *sistemas de cantidades* diferentes, y que por lo tanto, detrás de la multiplicación esta una proporcionalidad entre dos *sistemas de cantidades*, y no la abreviación de una suma de sumandos iguales.

A pesar de lo importante que fue identificar la coordinación del doble conteo como un dispositivo que permitió "ver" la covariación entre *cantidades*, comprender la razón que gobierna este proceso de covariación, y dotar de un sentido y una función a la razón (con respecto a las *cantidades* que permite comparar), es necesario llamar la atención sobre otro camino para la comprensión de la proporcionalidad directa que apenas si quedó esbozado en las prácticas matemáticas de los estudiantes, aunque plenamente identificado en el desarrollo histórico epistemológico trazado en el capítulo 4. Se trata de la comprensión de la razón que gobierna la covariación entre los dos *sistemas de cantidades* como constante de proporcionalidad. El punto es que la coordinación del doble conteo fue clave en la comprensión de los procedimientos basados en razonamientos por analogía, en donde dadas cuatro cantidades en proporción (analogía), se relacionan dos a dos a partir de la misma razón, pero al cambiar de cantidades, cambia la razón que las relaciona. Estas razones se establecen entre cantidades homogéneas, y dependen de las cantidades seleccionadas. "Ver" la razón como constante de proporcionalidad implica una mirada distinta de la razón con respecto a las *cantidades* de los dos *sistemas de cantidades*, pues ahora esta se establece entre pares de cantidades heterogéneas (una en cada sistema de cantidades) y es independiente de la pareja de cantidades sobre la cuales se define.

De esta manera la razón correlaciona dos familias de cantidades cuyas cantidades están en correspondencia uno a uno según esta razón (*la razón como correlator*) y, por ende, al aplicar la razón sobre una cantidad en una de las familias se obtiene la cantidad correspondiente en la otra familia de cantidades (*la razón como transformador*). De esta manera, la razón como constante de proporcionalidad favorece la mirada analítica de función lineal que modela la proporcionalidad directa existente entre las cantidades presentes en este tipo de situaciones.

El desarrollo histórico-epistemológico presentado en el capítulo 4 muestra que es posible un estudio sistemático de la proporcionalidad directa sin el recurso a una teoría explícita de las razones y las proporciones, como en el caso de las matemáticas babilonias, en donde los problemas que tenían que ver con tasas de intercambio, distribución de bienes y servicios (en general, problemas de proporcionalidad directa) se trataban a partir del conocimiento de la linealidad que gobierna este tipo de situaciones, lo que les permitía saber que si se conocía la razón que regla la tasa de intercambio o transformación de una cantidad en otra, entonces, dada una de las cantidades se puede obtener la otra a partir de una multiplicación o una división, según el caso (si α es la razón que gobierna la transformación o intercambio de cantidades del sistema A_1 en cantidades del sistema A_2, entonces dadas $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$ o $a_1 = \alpha \cdot a_2$ o $a_1 = \dfrac{a_2}{\alpha}$).

En las prácticas de los estudiantes del grado 3 se dieron algunos esbozos de este tipo de tratamiento, pero como se explicó en su momento, estos no fueron explotados lo suficiente para ver su poder en la comprensión de la razón como constante de proporcionalidad. Sin embargo se puede plantear, a manera de hipótesis para trabajos futuros, que los procesos de estudio centrados en aspectos como los que se describen a continuación pueden otorgar elementos de base importantes para comprender la razón como constantes de proporcionalidad:

- el estudio de las tablas de multiplicar (como se ha realizado en el grado 3, a partir del análisis de regularidades familias de cantidades numéricas),
- la razón como transformador (como en los casos donde el valor de cada ficha se aplica a la cantidad de fichas para obtener el puntaje correspondiente a dicha cantidad de fichas),
- el análisis dimensional de las cantidades que se multiplican o dividen (análisis no realizado en el trabajo de las clases estudiadas), o en situaciones de compra-venta o intercambio de productos, bienes o servicios en donde el precio por

unidad es la razón constante (constante de proporcionalidad) que correlaciona *cantidades* de un *sistema de cantidades* con *cantidades* de otro sistema.[299]

Lo anterior además plantea la hipótesis de que no hay una línea de continuidad entre los procedimientos por analogía en relación con los procedimientos analíticos, sino más bien que son caminos paralelos que se encuentran en la medida que se consolidan los conceptos propios de la linealidad (característicos de la función lineal que modela una situación de proporcionalidad directa) que están en la base de los procedimientos analíticos ya descritos, y en una teoría explicita de razones y proporciones, lo cual está en la base de los razonamientos por analogía. Sobre este aspecto es necesario más investigación empírica, pero lo realizado hasta el momento hace pensar que puede ser un camino productivo en la comprensión de la proporcionalidad en contextos escolares.

7.2 Posibles campos abiertos de investigación

En algunos apartes de lo discutido en las páginas previas de este capítulo se han presentado aspectos que pueden formular campos abiertos a futuras investigaciones. Estos campos abiertos derivan o bien de aspectos que no fueron objeto de estudio en las prácticas matemáticas de los estudiantes (lo que no debe interpretarse como deficiencia en los procesos de estudio que esta institución propone a sus estudiantes), o bien desde un ejercicio de proyección de los resultados obtenidos. A continuación se amplían algunos de ellos, o se discuten otros campos problemáticos aun no discutidos.

7.2.1 Sobre el estudio de las Magnitudes

Como se enunció en su momento, tanto en el capítulo 5 como en el 6, la medida de cantidades estuvo en la base de las tareas que se proponía a los estudiantes. Sin embargo, como también se mencionó en su momento, las tareas como tal, sobre todo las que se proponían en el grado 4⁰, no hacían un tratamiento cuidadoso de las Magnitudes para las que pedía medir y comparar ciertas cantidades. Esto plantea entonces al menos dos lecciones importantes para trabajos futuros. Una, relacionada con el concepto de mismo de Magnitud que pueden llegar a aprender los estudiantes (ver por el archivo de audio

[299] Este tipo de situaciones no fueron estudiadas con los alumnos de los grados reportados en este tesis, pero si se realizaron unas exploraciones preliminares en este sentido en las dos tesis de maestría ya mencionadas y que fueron dirigidas mientras se realizaba el estudio principal aquí reportado.

2009_05_19_10_52, en el anexo 3, en donde se detecta este problema), y otra, en relación con el aprendizaje de los números racionales (esta segunda lección, relacionada con la necesidad de centrar el estudio de los racionales y sus formas de notación en las Magnitudes y las medidas de cantidades de magnitud ya fue documentada ampliamente en secciones anteriores, y por tanto, en lo que sigue se desarrolla el otro aspecto relacionado con el aprendizaje de las Magnitudes).

Sobre el estudio de las Magnitudes, si bien esta investigación no documentó que nivel de comprensión lograron los estudiantes en relación a las magnitudes Longitud, Área, Volumen, es indudable que los estudiantes debieron aprender algo sobre ellas. Como se mostró en su momento, es posible que el tratamiento no cuidadoso y sistemático que a través de las tareas se dio a las Magnitudes generara en los estudiantes aprendizajes no apropiados sobre las mismas. Así entonces, es necesario tener cuidado con el diseño de las tareas para que, sin abandonar la intención de iniciar el estudio de los números racionales, no se dé pie a que los estudiantes constituyan conocimientos sobre las Magnitudes y las mediciones de cantidades de magnitud que después sean obstáculos para estudios posteriores. Un ejemplo de ello puede ser el caso en donde la razón se establece entre cantidades heterogéneas, y se usa como el operador que transforma una de las cantidades en la otra (como en el caso de las tablas de multiplicar, en donde la razón doble permitía calcular el valor de puntos a partir de la cantidad de fichas), y el análisis se centra en la acción de la razón (como si fuera un número sin unidades) sobre las cantidades (igualmente consideradas como números sin unidades). Esto facilita que los estudiantes de estas edades puedan realizar los cálculos necesarios, pero de otra parte, no deja ver el problema central que se está resolviendo: una razón, al ser aplicada sobre una cantidad, la transforma en otra cantidad de naturaleza distinta. La pregunta que queda abierta es entonces sobre cómo introducir, desde estos grados, el estudio de estos procesos de transformación, mostrando que las cantidades no son solo números sino que también están acompañadas de unas unidades, y que estas unidades toman parte de los cálculos para poder explicar las transformaciones que operan en la naturaleza de las cantidades cuando estas se multiplican o dividen entre sí.

7.2.2 Sobre la constante de proporcionalidad y los procedimientos analíticos

Como se puede ver en los análisis presentados, el lugar de la razón y sus funciones con respecto a las cantidades quedó suficientemente documentado en el caso de los procedimientos basados en razonamientos por analogía, al igual que el papel de las diferentes formas de representación de las cantidades y sus relaciones que, al lado de estos procedimientos, permitieron conceptualizaciones importantes en relación con las razones y las proporciones, la multiplicación, y los números (fundamentalmente naturales y racionales). Pero en relación con la proporcionalidad, la razón como constante de proporcionalidad, y por ende, los procedimientos analíticos, el camino apenas si quedó esbozado.

El trabajo realizado con los estudiantes mostró caminos posibles para lograr la comprensión de la razón como constante de proporcionalidad, relacionados por supuesto, con las funciones de la razón como correlator o como transformador (la razón como una función que correlaciona cantidades en dos sistemas de cantidades o que transforma cantidades de uno de los sistemas en cantidades en el otro). Se evidenció que el uso de tablas de valores que organizan las parejas de valores que se corresponden pueden ser un instrumento útil para alcanzar la comprensión de estas dos funciones de la razón con respecto a las cantidades, pero este es un proceso que implica, incluso, aprender a usar las tablas en sí mismas. Muy unido al problema del uso de las tablas de valores estuvo el estudio de las tablas de multiplicar, que también se mostró como otro camino posible en el estudio de las funciones de la razón como correlator o como transformador. Otro camino que igualmente se mostró con posibilidades para profundizar en el estudio de la razón y sus funciones como correlator y transformador fue el que se trazó con las situaciones de compra venta de productos, en donde el precio por unidad se constituye como una razón constante que permite transformar, bien cantidad de producto en dinero, o a la inversa, una cierta cantidad de dinero en una determinada cantidad de producto.

Sin embargo, el estudio solo logró mostrar que los caminos delineados en el párrafo anterior pueden ser promisorios en la comprensión de la razón como constante de proporcionalidad, y por ende se hace necesaria más investigación empírica que logre mostrar con detalle cómo es que la funciones de la razón como correlator y como transformador permiten la constitución de una noción de constante de proporcionalidad (si es que lo permiten) y por ende, de la constitución de una noción clara sobre los procesos de linealidad detrás de la proporcionalidad directa que modela este tipo de situaciones. El estudio epistemológico presentado en el capítulo 4 muestra que es posible tener nociones claras sobre la linealidad sin el recurso a una teoría explicita de razones y proporciones, y lo expresado en el párrafo anterior muestra que es posible tener en la escuela este tipo de apuestas en los procesos de estudio de la proporcionalidad directa, pero es necesario profundizar en las condiciones que permiten objetivar la razón como constante de proporcionalidad a partir de procesos de estudio de este tipo.

7.2.3 Sobre los tipos de problemas multiplicativos elementales

Como se dijo en el capítulo 1, muchas de las investigaciones que se han realizado en los últimos años sobre el desarrollo del razonamiento proporcional han elaborado propuestas de categorización de los tipos de problemas que se proponen a los estudiantes en la escuela, y que estarían en la base de los aprendizajes necesarios para el desarrollo del razonamiento proporcional. En dicho capítulo se expresaba que estas formas de tipificación de los problemas eran objeto de múltiples críticas pues los criterios para tales clasificaciones mezclaban los aspectos matemáticos de las razones, las proporciones y la proporcionalidad, con los aspectos relacionales de las cantidades implicadas en los problemas, o incluso, con las características del fenómeno físico sobre el cual trata el problema.

Si bien el análisis de las prácticas de aula de los estudiantes no muestra evidencia suficiente para que se puedan proponer tipologías alternas a estas que ya se conocen en la literatura especializada, los hallazgos realizados, y resumidos en las secciones anteriores, permiten proponer algunos elementos que pueden servir de base para futuras investigaciones que profundicen y decanten lo relativo a estas tipologías. Así entonces, las ideas que se expondrán a continuación son más bien hipótesis de trabajo futuro que conclusiones derivadas del trabajo investigativo que soporta esta tesis, pero por supuesto, proyectan los hallazgos en escenarios posibles.

En las secciones iniciales de este capítulo se habló de las funciones de la razón con respecto a las cantidades sobre las cuales ella se define. En total se habló de cuatro funciones: como relator y operador, cuando la razón se define sobre cantidades homogéneas, y como correlator o transformador, cuando la razón se define sobre familias de cantidades, por lo general heterogéneas. También se mostró que estas funciones son fundamentales para los procedimientos basados en razonamientos por analogía o en razonamientos analíticos. Sin embargo, el trabajo no permitió profundizar más en estas cuatro funciones de la razón con respecto a las cantidades, y quedan entones abiertas reflexiones en torno a elementos como los siguientes: ¿son estas las únicas funciones de la razón con respecto a las cantidades?, o ¿existirán otras funciones, y que características tendrían?

Hasta el momento se puede postular que estas relaciones son las más elementales que estarían en la base de la comprensión de las relaciones multiplicativas en situaciones de proporcionalidad directa (que en otros contextos se han llamado situaciones de isomorfismo de medidas), pero cabe la pregunta, ¿son efectivamente estas y no otras las relaciones elementales de base en los procesos de aprendizaje de lo relativo a la proporcionalidad directa?

Es más, suponiendo que la anterior hipótesis fuera cierta, se podrían anticipar posibles reorganizaciones en las tipologías de los problemas, por las siguientes consideraciones:

- No tendría sentido decir que existen tipos de problemas de razón o de número racional, pues de un lado, y como se pudo evidenciar en el trabajo realizado con los estudiantes de estos dos grados de la Educación Básica, una idea de razón está presente en todos los problemas que impliquen la covariación lineal de dos cantidades, y de otro lado, fracciones, numeración decimal, porcentajes, en tanto formas de notación para las razones entre cantidades, igualmente hacen que los números racionales estén presentes en cualquier tipo de situación. Así entonces, cualquier situación de covariación directamente proporcional implica el tratamiento de las razones, y por ende, del número racional en sus diferentes formas de notación, y del cociente o la multiplicación de diferentes cantidades.
- De manera similar a lo anterior, tampoco sería pertinente decir que existen tipos de situaciones de medida o de cociente pues siempre que se trate con una razón, esta tiene detrás de sí un proceso de medición de cantidades, y una comparación por cociente de las medidas de estas cantidades. Y además, en virtud de las funciones de la razón con respecto a las cantidades, y del problema que se tenga que resolver, será necesaria una división o una multiplicación.
- Como consecuencia de lo anterior, se puede proponer que al hablar de situaciones de tasas, ratas, densidad, concentración, los nombres remiten a las características físicas del fenómeno que se estudia, y no a las relaciones y operaciones entre las cantidades involucradas. Así por ejemplo, en una situación de densidad de población, las diferentes funciones de la razón interactúan continuamente para resolver los problemas que se

pueden presentar: al determinar la densidad de población en una determinada región, se calcula una razón que funge como correlator; si luego se pide calcular la cantidad de población en una determinada superficie, o la superficie requerida por una determinada cantidad de población, la razón funge ahora como transformador, pero al proceder de esta manera se asume la invarianza de la razón que expresa la densidad de población, independientemente de la cantidad de superficie o de población considerada (la razón debe ser considerada como una constante de proporcionalidad, y la situación es en esencia una situación de transformación lineal). De manera similar pasaría con los otros tipos de situaciones.

Así entonces, las funciones de la razón con respecto a las cantidades (relator-operador, transformador-correlator) no solo están presentes en cualquier problema que implique la variación directamente proporcional entre dos (o más) cantidades, sino que se intercambian de una a otra función dependiendo de los problemas que se deban resolver. Por supuesto esta afirmación debe ser sometida a más investigación empírica que permita verificar si efectivamente con estas cuatro funciones de la razón con respecto a las cantidades se agotan los problemas elementales multiplicativos en situaciones en donde dos cantidades se correlacionan a partir de una covariación directamente proporcional. Confirmar esta hipótesis podría dar aportes importantes a la comprensión de los problemas asociados con la enseñanza o el aprendizaje de razones, proporciones y proporcionalidad en los contextos escolares.

7.2.4 Sobre la proporcionalidad inversa

En el contexto de las prácticas matemáticas de los alumnos de tercero y cuarto reportadas en esta tesis no se realizó un proceso de estudio de situaciones donde las cantidades se correlacionaran a partir de una proporcionalidad inversa (ni tampoco de proporcionalidades compuestas). Si desde los hallazgos de esta tesis (los principios invariantes, las correspondencias lineales, los tipos de problemas elementales) se quisieran proyectar algunos elementos que orienten el estudio sobre otros tipos de proporcionalidad, en particular, sobre la variación inversamente proporcional, se podrían proponer las siguientes problemáticas:

1. En primer lugar, las situaciones en las que dan origen a una proporcionalidad inversa no relacionan dos cantidades a partir de una función lineal, sino que relaciona tres

cantidades, una de las cuales covaría bilinealmente con respecto a las otras dos. Esto es, en la proporcionalidad directa, las dos cantidades se relacionan a partir de una relación funcional de la forma $y = f(x) = \alpha \cdot x$, con α la constante de proporcionalidad (la cantidad y covaría linealmente con respecto a x), mientras que en las situaciones de proporcionalidad inversa la relación funcional entre las tres cantidades es de la forma $z = f(x, y) = \alpha \cdot x \cdot y$. En este caso la cantidad z tiene una covariación bilineal con respecto a las cantidades x e y (la cantidad z es directamente proporcional al producto de las cantidades x e y, o lo que es lo mismo, es lineal con respecto a cada una de las cantidades x e y), y si la cantidad z se hace constante, entonces las cantidades x e y tienen una covariación inversamente proporcional. Un caso típico de covariacion bilineal se puede presentar al estudiar el Área de un rectángulo como una función que depende las longitudes de sus lados (en este caso $\alpha = 1$), y si el área del rectángulo se fija en un valor determinado, entonces las longitudes de los dos lados se correlacionan de manera inversamente proporcional.

2. De lo dicho anteriormente se colige entonces que el principio invariante que se conserva en una situación de covariación inversamente proporcional es el producto de dos cantidades (y no una razón –cociente– entre ellas, como en el caso de la proporcionalidad directa). Esto es, en una situación típica de proporcionalidad inversa, hay una cantidad que es constante, y las otras dos varían de tal forma que su producto siempre es esa cantidad constante.[300] Por ejemplo, en el caso del rectángulo de área constante, si uno de los lados cambia en una determinada razón ($x' = \alpha \cdot x$), entonces el otro lado cambia en el recíproco[301] de dicha razón ($y' = \alpha^{-1} \cdot y$), lo que garantiza que $x \cdot y = x' \cdot y' = k$, donde k es el valor constante del área. En el tratamiento usual en la escuela de este tipo de situaciones no se pone suficiente atención a esta tercera cantidad, quizás por ser constante, pero es precisamente en ella en donde reside el principio fundamental para comprender la forma de covariación entre las dos cantidades que cambian en la situación, y por ende, para comprender los procedimientos que permiten

[300] Esta diferencia entre los principios que gobiernan la variación directamente proporcional o inversamente proporcional ya estaban prefigurados en Newton, como se mencionó en el capítulo 4.

[301] Por el hecho de que en una situación de variación proporcional inversa, la variación en una de las cantidades es proporcional al recíproco de la variación en la otra, en la edad media se llamó a este tipo de problemas, problemas de variación inversa.

resolver los problemas que se presentan en este tipo de situaciones.

Basten pues estas breves ideas para mostrar cómo a partir de nuestra investigación sobre la proporcionalidad directa se dibujan nuevos caminos para comprender los procesos de estudio de la proporcionalidad inversa en contextos escolares, caminos que deben ser investigados a profundidad para elucidar su significación en la comprensión de los estudiantes sobre estos objetos de conocimiento.

Referencias

Acerbi, F. (2003). Drowning by multiples. Remarks on the fifth book of Euclid's Elements, with special emphasis on Prop. 8. *Archive for History of Exact Sciences*, *57*(3), 175-242. doi: 10.1007/s00407-002-0061-y

Adjiage, R. (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial.* (Thèse de Doctorat inédit), Université Louis Pasteur, Strasbourg, France.

Adjiage, R. (2005). Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 95-129. http://irem.u-strasbg.fr/data/publi/annales/articles/Vol10PDF/Adjiage.pdf

Adjiage, R. (2007). Rationnels et proportionnalite: complexite et enseignement au debut du college. *Petit X*, *74*, 5-33.

Adjiage, R., & Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(2), 149-175. doi: 10.1007/s10649-006-9049-x

Arboleda, L. C. (2011). Objetividad matemática, historia y educación matemática. En L. C. Recalde & G. I. Arbeláez (Eds.), *Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica.* Cali: Universidad del Valle.

Aristóteles. (1994). Metafísica. In T. Calvo Martinez (Ed.). Madrid: Editorial Gredos.

Arquimedes. (1970). Sobre las espirales (F. Vera, Trad.). In F. Vera (Ed.), *Científicos Griegos* (Vol. 2, pp. 147-183). Madrid: Editorial Aguilar.

Azzouni, J. (2006). How and why mathematics is unique as a social practice. En R. Hersh (Ed.), 18 unconventional essays on the nature of mathematics (pp. 201-219). New York, NY: Springer. Recuperado desde http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F0-387-29831-2_11. doi: 10.1007/0-387-29831-2_11

Bajtin, M. (1990). El problema de los géneros discursivos (T. Bubnova, Trad.). En M. Bajtin. (Ed.), *La estética de la creación verbal.* (10 ed., pp. 248-293). México D. F.: Siglo XXI Editores.

Bajtín, M. (1993). ¿Qué es el lenguaje? (A. Bignani, Trad.). En A. Silvestri & G. Blanck (Eds.), *Bajtin y Vigotski: la organización semiótica de la conciencia* (pp. 217-243). Barcelona: Anthropos.

Balacheff, N., & Kaput, J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

Behr, M., Harel, G., & Post, T. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York, NY: Macmillan Publishing Company.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a Rational-Number-as-Operator task. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 48-69.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Ilany, B.-S. (2012). *Ratio and Proportion: Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education (Pre- and In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes)* doi:10.1007/978-94-6091-784-4

Benoit, P., Chemla, K., & Ritter, J. (1992). D'Orient en Occident: le moyen age des fractions. En P. Benoit, K. Chemla & J. Ritter (Eds.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire.* Berlin:

Birkhauser Verlag Basel.
Bhascara. (1817). Lilavati (H. Colebrooke, Trad.). In H. T. Colebrooke (Ed.), *Algebra, with arithmetic and mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara* (pp. 1-127). London: John Murray.
Bhaskaracarya. (2001). Lilavati of Bhaskaracarya. A treatise of mathematics of vedic tradition (K. S. Patwardhan, S. A. Naimpally & S. L. Singh, Trad.). Dheli, India: Motilal Banarsidass Publishers.
Bibhutibhushan, D., & Narayan, A. (1962). *History of Hindu mathematics: A source book* (Vol. 1 & 2). Bombay, India: Asia Publishing House.
Boethius. (2006). De institutione arithmetica (M. Masi, Trad.). In M. Masi (Ed.), *Boethian number theory: a translation of the De institutione arithmetica.* Amsterdam: Editions Rodopi.
Boethuis. (1974). Arithmetic. In E. Grant (Ed.), *A source book in medieval science* (pp. 17-24). Cambridge: Harvard University Press.
Bolea, P., Bosch, M., & Gascon, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21*(3), 247-304.
Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva de la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* (Tesis de Doctorado no publicada), Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.
Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-74. http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=40518203
Botero, O. (2006). *Conceptualizacion del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación.* (Tesis de Maestría no publicada), Universidad de Antioquia, Medellín.
Bourbaki, N. (2007). *Éléments d'histoire des mathématiques.* Berlin: Springer Berlin Heidelberg.
Bourdieu, P. (1977). *Outline of a theory of practice* (R. Nice, Trad.). Cambridge: University Press.
Bourdieu, P. (2007). *El sentido práctico* (A. Dilon, Trad.). Buenos Aires: Siglo XXI Editores.
Bourdieu, P., & Johnson, R. (1998). *Practical Reason: On the Theory of Action.* California, CA: Stanford University Press.
Brahmegupta. (1817). Algebra (H. Colebrooke, Trad.). In H. Colebrooke (Ed.), *Algebra with Arithmetic and Mensuration* (pp. 277-378). London: John Murray.
Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Course Doctoral. Montreal Universite. Montreal. Retrieved from http://perso.orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf
Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. *The Journal of Mathematical Behavior, 23*(1), 1-20. doi: 10.1016/j.jmathb.2003.12.001
Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 2: From rationals to decimals. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(4), 281-300. doi: 10.1016/j.jmathb.2007.09.001
Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2008). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 3: Rationals and decimals as linear functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*, 153-176. doi: 10.1016/j.jmathb.2008.07.006
Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. M. (2013). *Teaching fractions through situations: A fundamental experiment* (pp. 215). doi:10.1007/978-94-007-2715-1
Bryant, P., & Nunes, T. (2009). Multiplicative reasoning and mathematics achievement. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidi (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 217-224). Thessaloniki, Greece: PME.
Calderón, D. (2003). Género discursivo, discursividad y argumentación. *Enunciación*(8).
Carnot, L. (1797). Refléxions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. In J. Decker (Ed.), *Oeuvres*

mathématiques du citoyen Carnot (pp. 127-204). Paris: J. Decker.

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: Una Empresa Docente.

Cauchy, A.-L. (1821). Cours D'Analyse. Analyse algebraico. In Gauthiers-Villars (Ed.), *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy*. París: Gauthiers-Villars.

Caveing, M. (1992). Le statut arithmetique du quantieme egyptien. En P. Benoit, K. Chemla & J. Ritter (Eds.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire* (pp. 39-52). Berlin: Birkhäuser Verlag.

Clagett, M. (1999). *Ancient egyptian science a source book: Ancient egyptian mathematics* (Vol. 3). Philadelphia, PA: American Philosophical Society.

Clark, K. M. (2012). History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics, 81*, 67-84. doi: 10.1007/s10649-011-9361-y

Clements, M. A., Bishop, A., Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K.-S. (Eds.). (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*. New York, NY: Springer.

Cobb, P. (2006). Supporting a discourse about incommensurable theoretical perspectives in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, (19). http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome19/index.htm

Cole, M. (1999a). Cultural psychology: some general principles and a concrete example. En Y. Engestrom, R. Miettinen & R.-L. Punamaki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 87-106). New York, NY: Cambridge University Press.

Cole, M. (1999b). *Psicología cultural: una disciplina del pasado y del futuro* (T. d. Amo, Trad.). Madrid: Ediciones Morata.

Cole, M., & Wertsch, J. (1996). Beyond the individual-social antinomy in discussions of Piaget and Vygotsky. *Human Development, 39*(5), 250-256. doi: 10.1159/000278474

Comin, E. (2002). L'enseignement de la proporcionalité à l'école et au Collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2-3), 135-182.

Confrey, J., & Carrejo, D. (2005). Ratio and fraction: The difference between epistemological complementarity and conflict. En D. Carraher & R. Nemirovsky (Eds.), *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, Vol. 13* (Vol. 13). Reston, VA: NCTM.

Confrey, J., & Maloney, A. (2008). From fraction to rational number: Diagnostic e-learning trajectories approach (DELTA) to rational number reasoning. Recuperado en abril, 2011, desde http://cse.edc.org/dr-k12/Docs/Confrey_Presentation.pdf

Confrey, J., Maloney, A., Nguyen, K., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. En M. Tzekaki & M. Kaldrimidou (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 345-352). Thessaloniki, Greece: PME.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2/3), 135-164. doi: 10.1007/BF01273661

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66-86.

Cortina, J., & Zúñiga, C. (2008). Ratio-like comparisons as an alternative to equal-partitioning in supporting initial learning of fractions. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 385-392). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Cullen, C. (2007). The Suàn shù shu , "Writings on reckoning": Rewriting the history of early Chinese mathematics in the light of an excavated manuscript. *Historia Mathematica, 34*, 10-44. doi: 10.1016/j.hm.2005.11.006

Chaiklin, S. (2011). The Role of Practice in Cultural-Historical Science. En M. Kontopodis, C. Wulf & B. Fichtner (Eds.), *Children, Development and Education: Cultural, Historical, Anthropological Perspectives*. Dordrecht: Springer Netherlands.

Chaiklin, S. (2013). Research knowledge production and educational activity: A 'research path' approach. En V. Farnsworth & Y. Solomon (Eds.), *Reframing educational research: resisting the 'what works' agenda* (pp. 166-181). New York: Routledge.

Chemla, K. (1992). Les fractions comme modèle formel en Chine ancienne. En P. Benoit, K. Chemla & J. Ritter (Eds.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire* (pp. 189-208). Berlin: Birkhäuser Verlag.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática* (M. I. F. Pinilla, Trad.). México, DF: Editorial Reverte.

D'Amore, B., & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 191-218.

Daniels, H. (2003). *Vygostky y la pedagogía* (G. Sánchez Barberan, Trad.). Barcelona: Ediciones Paidos.

Daniels, H. (2008a). Reflections on points of departure in the development of sociocultural and activity theory. En B. v. Oers, W. Wardekker, E. Elbers & R. v. d. Veer (Eds.), *The transformation of learning: advances in cultural-historical activity theory* (pp. 58-75). New York, NY: Cambridge University Press.

Daniels, H. (2008b). *Vygotsky and research.* New York, NY: Routledge.

Dauben, J. W. (2007). Chinese mathematics. En V. Katz (Ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam* (pp. 187-384). New Jersey, NJ: Princenton University Press.

Dauben, J. W. (2008). Suan Shu Shu a book on numbers and computations: English translation with commentary. *Archive for History of Exact Sciences, 62*(3), 91-178. doi: 10.1007/s00407-008-0023-0

Davidov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico, Investigación psicológica teórica y experimental* (M. Shuare, Trad.). Moscú: Editorial Porgreso.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschafel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics, 50*(3), 311-334. doi: 10.1023/A:1021205413749

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschafel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement* (Vol. 41). New York, NY: Springer.

De Bock, D., Verschafel, L., & Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning, 4*(1), 65-89. doi: 10.1207/S15327833MTL0401_3

De Morgan, A. (1836). *The connexion of number and magnitude: an attempt to explain the fifth book of Euclid.* London: Taylor and Walton.

Deliyiani, E., Panaoura, A., Elia, I., & Gagatsis, A. (2008). Structural model for fraction understanding related to representations and problem solving. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 399-406). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Descartes, R. (1637/1954). The Geometry of Rene Descartes (D. E. Smith & M. L. Latham, Trad.) *The Geometry of Rene Descartes.* New York: Dover Publications, Inc.

Descartes, R. (1686). La geometrie. Paris: A. Hermann, Librairie Scientifique.

Descartes, R. (1701/1996). Reglas para la dirección del espíritu (J. M. Navarro, Trad.) (3 ed.). Madrid: Alianza Editorial.

Detlefsen, M. (2005). Formalism. En S. Shapiro (Ed.), *The Oxford handbook of philosophy of mathematic and logic* (pp. 236-317). New York, NY: Oxford University Press.

Dewey, J. (1960). *Experiencia y Educación* (7ma ed.). Buenos Aires: Editorial Losada.

Díaz, C. J., Álvarez, J., Torres, L., & Guacaneme, E. (1997). *Tercer estudio internacional de*

matemáticas y ciencias: Análisis y resultados prueba de matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2).
Duval, R. (2004a). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. (M. Vega Restrepo, Trad. 1 ed.). Cali: Universidad del Valle.
Duval, R. (2004b). *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Vega Restrepo, Trad. 2 ed.). Cali: Universidad del Valle.
Engeström, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. En Y. Engeström, R. Miettinen & R.-L. Punamaki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 19-38). New York, NY: Cambridge University Press.
Engeström, Y. (2009). The future of activity theory: A rough draft. En A. Sannino, H. Daniels & K. D. Gutiérrez (Eds.), *Learning and expanding with activity theory*. New York, NY: Cambridge University Press.
Epple, M. (2004). Knot Invariants in Vienna and Princeton during the 1920s: Epistemic configurations of mathematical research. *Science in Context*, *17*, 131-164.
Euclid. (1806). Data. In R. Simpson (Ed.), *Euclid's Data*. Philadelphia, PA: WM. F. M'laughlin.
Euclid. (1908). Elements (T. L. Heath, Trad.). In T. L. Heath (Ed.), *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vol. 2). Cambridge: The Cambridge University Press.
Fandiño, M. (2009). *Las Fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Editorial Magisterio.
Federici, C. (2001). Sobre cuestiones relativas al analisis dimensional. *Revista de la Escuela Colombiana de Ingeniería*, *11*(42), 37-40.
Fernández, A., & Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *5*(2), 397-416. http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2002_05_2_04.pdf
Fernández, C., & Llinares, S. (2008). Implicative analysis of strategies in solving proportional and nonproportional problems. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 1-8). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.
Fernández, C., & Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y mutiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes Educacionales*, *15*(1), 11-22.
Fernández, C., & Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(1), 129-142.
Fernández, C., Llinares, S., Dooren, W. V., De Bock, D., & Verschafel, L. (2010). How do proportional and additive methods develop along primary and secondary school? En M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), Proceedings of the 34th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 353-360). Belo Horizonte, Brazil: PME.
Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschafel, L. (2009). Effect of the number structure and the quantity nature on secondary school students' proportional reasoning. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidi (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3). Thessaloniki, Greece: PME.
Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2011). Effect of number structure and nature of quantities on secondary school students proportional reasoning. *Studia Psychologica*, *53*(1), 69-82.
Ferreirós, J. (2010). Mathematical Knowledge and the Interplay of PracticesEPSA Philosophical Issues in the Sciences. En M. Suárez, M. Dorato & M. Rédei (Eds.), *EPSA Philosophical Issues in the Sciences* (pp. 64-64). Dordrecht: Springer Netherlands.

Fowler, D. (1992). Logistic and fractions in early Greek mathematics: a new interpretation. En P. Benoit, K. Chemla & J. Ritter (Eds.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire*. Berlin: Birkhäuser Verlag.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Hingham, MA: Kluwer Academic Publishers.

Friberg, J. (2007). *A remarkable collection of Babylonian mathematical texts. Manuscripts in the Schøyen Collection: Cuneiform Texts I*. New York, NY: Springer.

Galilei, G. (1976). Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias relativas a los movimientos de traslación (J. Sadaba, Trad.). In C. Solis & J. Sadaba (Eds.), *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Madrid: Editora Nacional.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* (Tesis de Doctorado no publicada), Universidad de Jaén, Jaén, españa.

García, F., Gascón, J., Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education, 38*(3), 226-246. doi: 10.1007/BF02652807

García, G., & Serrano, C. (1999). *La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva cultural*. Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

Giaquinto, M. (2005). Mathematical activity. En P. Mancuso, K. F. Jørgensen & S. A. Pedersen (Eds.), Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics (Vol. 327, pp. 75-87). Netherlands: Springer. Recuperado desde http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F1-4020-3335-4_5. doi: 10.1007/1-4020-3335-4_5

Gillings, R. (1982). *Mathematics in the time of the Pharaohs*. New York, NY: Dover Publications, Inc.

Giusti, E. (2000). *La naissance des objets mathématiques* (G. Barthélemy, Trad.). Turin: Ellipses.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1-2), 125-137. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático y la instrucción matemática*. Paper presentado en Seminario del Doctorado Interinstitucional de Educación, Universidad del Valle.

Godino, J. D., & Font, V. (2007). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol.20* (1 ed., Vol. 20, pp. 376-381). Mexico: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Goldin, G., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Asociates Publishers.

Gómez, B. (2007). La razón en semejanza: El caso del perrito. En E. Castro & J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en educación matemática: Pensamiento numérico* (pp. 237-257). Granada, España: Editorial Universitaria de Granada.

Gómez, B., & Contreras, M. (2009). Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. *PNA, 3*(4), 169-183. http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Gomez2009Sobre.pdf

Grouws, D. A. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (1 ed.). New York, NY: Macmillan Publishers.

Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA, 7*(1), 3-42.

Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.* (Tesis de Maestría sin

publicar), Universidad del Valle, Cali.
Guershon, H., & Confrey, J. (Eds.). (1994). *Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (1 ed.). New York, NY: State University of New York Press.
Gueudet, G., & Trouche, L. (2012). Teachers' work with resources: documentational geneses and professional geneses. En G. Gueudet, L. Trouche & B. Pepin (Eds.), *From text to 'Lived' resources: mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 23-41). Dordrecht: Springer.
Harel, G., Behr, M., Lesh, R., & Post, T. (1994). Invariance of ratio: the case of children's anticipatory scheme for constancy of taste. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 321-315.
Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 198-219). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.
Heath, T. L. (1921). *A history of greek mathematics* (Vol. 1). Oxford: Clarendon Press.
Heath, T. L. (2003). *A manual of Greek mathematics.* New York, NY: Dover Publications, Inc.
Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments. *For the Learning of Mathematics, 30*(1), 26-31.
Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2011). The emergence of mathematical structures. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 369-388. doi: 10.1007/s10649-010-9297-7
Hersant, M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. (Thèse de Doctorat inédit), Universite Paris 7 - Denis Diderot, Paris.
Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Revue Repères IREM,* (59), 5-41. http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/59_article_407.pdf
Hersant, M., & Perrin-Glorian, M.-J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the Theory of Didactic Situations. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 113-151. doi: 10.1007/0-387-30451-7_5
Hiebert, J., & Behr, M. (Eds.). (1988). *Number concepts and operations in the middle grades* (1 ed. Vol. 2). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.
Hodgen, J., Kuchemann, D., Brown, M., & Coe, R. (2010). Multiplicative reasoning, ratio and decimals: a 30-year comparison of lower secondary students' understandings. En M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 89-96). Belo Horizonte, Brazil: PME.
Howe, C., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Intensive quantities: Why they matter to developmental research. *British Journal of Developmental Psychology, 28*(2), 307-329. doi: 10.1348/026151009X410362
Howe, C., Nunes, T., & Bryant, P. (2011). Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 391-417. doi: 10.1007/s10763-010-9249-9
Høyrup, J. (2007). The roles of Mesopotamian bronze age mathematics tool for state formation and administration – carrier of teachers' professional intellectual autonomy. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 257-271. doi: 10.1007/s10649-007-9090-4
Iamblichus, & Waterfield, R. (1988). *The theology of arithmetic: on the mystical, mathematical and cosmological symbolism of the first ten numbers* (R. Waterfield, Trad.). Michigan, MI: Phanes Press.
Iannece, D., Mellone, M., & Tortora, R. (2010). Early multiplicative thought: a kindergarten path. En M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 121-127). Belo Horizonte, Brazil: PME.
ICFES. (2010). *SABER 5º y 9º 2009. Resultados nacionales. Resumen ejecutivo.* Bogotá.
Jankvist, U. T., & Kjeldsen, T. H. (2010). New Avenues for History in Mathematics Education: Mathematical Competencies and Anchoring. *Science & Education, 20*, 831-862. doi: 10.1007/s11191-010-9315-2

Kaptelinin, V. (2005). The object of activity: making sense of the sense-maker. *Mind, Culture, and Activity, 12*(1), 4-18. doi: 10.1207/s15327884mca1201_2

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 265-281. doi: 10.1016/S0364-0213(99)80062-7

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: factors affecting informal reasoning patterns. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 235-290). Albany, NY: State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolecents. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Adquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York, NY: Academic Press.

Keller, A. (2006a). *Expounding the mathematical seed: A translation of Bhaskara I on the mathematical chapter of the aryabhatiya* (Vol. 1). Berlin: Birkhäuser Verlag.

Keller, A. (2006b). *Expounding the mathematical seed: The supplements a translation of Bhaskara I on the mathematical chapter of the Aryabhatiya* (Vol. 2). Berlin: Birkhäuser Verlag.

Kieren, T. (1980). The rational numbers construct - Its elements and mechanism. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* (pp. 125-150). Columbus, OH: ERIC Publications; Reports - Research.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 162-181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge* (1 ed.). New York, NY: Oxford University Press.

Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (E. Brann, Trad.). New York, NY: Dover Publications, Inc.

Koellner-Clark, K., & Lesh, R. (2003). Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science & Mathematics, 103*(2), 92-98. doi: 10.1111/j.1949-8594.2003.tb18224.x

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos. La educación desde una perspectiva sociocultural* (G. S. Barberán, Trad.). Barcelona: Ediciones Paidos.

Kozulin, A. (2003). The concept of activity in Soviet psychology: Vygotsky, his disciples and critics. En H. Daniels (Ed.), *An Introduction to Vygotsky* (pp. 99-121). London: Routledge.

Kula, W. (1980). *Las medidas y los hombres* (W. Kuss, Trad.). Madrid: Siglo XXI Editores.

Kuutti, K., & Engeström, R. (2006). Activity theory. In K. Brown (Ed.), *Encyclopedia of language and linguistics* (2 ed., pp. 44-47). Amsterdam: Elsevier Ltd.

Lachance, A., & Confrey, J. (2002). Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 503-526. doi: 10.1016/S0732-3123(02)00087-1

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. En H. Guershon & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 89-120). Albany, NY: State University of New York Press.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook Of Research On Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 1, pp. 629-667). New York, NY: Information Age Pub Inc.

Lamon, S. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3 ed.). New York, NY: Taylor & Francis.

Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica.* Barcelona: Paidos.

Leonardo (de Pisa). (1202/1872). Il Liber Abaci. In B. Boncompagni (Ed.), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo pubblicati da Baldassarre Boncompagni: Il Liber abbaci di Leonardo Pisano*. Roma.

Leonardo (de Pisa). (1202/2003). Liber abaci (L. Sigler, Trad.). In G. J. Toomer (Ed.), *Fibonacci's*

Liber Abaci. A translation into modem english of Leonardo Pisano's book of calculation. New York, NY: Springer.

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality.* New Jersey, NJ: Prentice-Hall.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1-3), 87-113. doi: 10.1023/A:1014031004832

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hierbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 93-117). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matematica. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia.* Barcelona: Editorial Gedisa, S. A.

Lundberg, A. (2011). Proportion in mathematics textbooks in upper secondary school. En M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 336-345). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Mamede, E. (2010). Early years mathematics – the case of fractions. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the sixth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2607-2616). Lyon France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Mamede, E., & Nunes, T. (2008). Building on children's informal knowledge in the teaching of fractions. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 345-352). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Martin, M., Mullis, I., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International mathematics report: Findings form IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eight grades.* Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Martínez, M. C. (2005). *La argumentación en la dinámica enunciativa del discurso.* Cali: Universidad del Valle.

Martzloff, J.-C. (2006). *A history of chinese mathematics* (S. S. Wilson, Trad.). Berlin: Springer-Verlag.

Maza, C. (2009). *Matemáticas en Mesopotamia* Recuperado desde http://www.bubok.es/libros/10528/Matematicas-en-Mesopotamia

Michel, C. (1992). Les fractions dans les tablettes économiques du début du second millénaire en Assyrie et en Babylonie. En P. Benoit, K. Chemla & J. Ritter (Eds.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire*. Berlin: Birkhäuser Verlag.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas: Lineamientos Curriculares.* Bogotá: Recuperado desde http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadania.* (pp. 46 - 94). Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A., & Spanoudis, G. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39*(3), 313-324. doi: 10.1080/00207390701691541

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, *27*(1), 75-92. doi: 10.1080/01443410601061462

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2009). Proportional reasoning: the strategies behind the percentages. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, *9*, 25-40. Recuperado desde Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics (ADUC-M), sitio web: http://www.ddm.fmph.uniba.sk/ADUC/files/Issue9/03-Modestou&Gagatsis.pdf

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 36-53. doi: 10.1080/10986060903465822

Moreno-Armella, L., & Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM Mathematics Education, 41*(4), 505-519. doi: 10.1007/s11858-009-0200-x

Mosvold, R., Jakobsen, A., & Jankvist, U. T. (2014). How Mathematical Knowledge for Teaching May Profit from the Study of History of Mathematics. *Science & Education, 23*(1), 47-60. doi: 10.1007/s11191-013-9612-7

Muḥammad ibn Mūsā al-Khuwārizmī, & Rosen, F. (1831). The Algebra of Mohammed Ben Musa (F. Rosen, Trad.). In F. Rosen (Ed.), *The algebra of Mohammad ben Musa*. London: J. L. Cox.

Muḥammad ibn Mūsá Khuwārizmī, & Robert (of Chester). (1143/1915). Robert of Chester's Latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi (L. C. Karpinski, Trad.). In L. C. Karpinski (Ed.), *Latin traslation of the Algebra of Al-Khowarizmi with an introduction, critical notes and an english version*. London: The Macmillan Company.

Mullis, I., Martin, M., Olson, J., Berger, D., Milne, D., & Stanco, G. (Eds.). (2008a). *TIMSS 2007 encyclopedia: A guide to mathematics and science education around the world* (Vol. 2 M-Z). Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Mullis, I., Martin, M., Olson, J., Berger, D., Milne, D., & Stanco, G. (Eds.). (2008b). *TIMSS 2007 encyclopedia: A guide to mathematics and science education around the world.* (Vol. 1 A-L). Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Nabors, W. K. (2003). From fractions to proportional reasoning: a cognitive schemes of operation approach. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(2), 133-179. doi: 10.1016/S0732-3123(03)00018-X

Nemirovsky, R. (2009). A reading of the volume from the perspective of symbol-use. En C. Andersen, N. Scheuer, M. d. P. Pérez Echeverría & E. V. Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools*, (pp. 281-296). Rotterdam: Sense Publishers.

Nemorarius, J. (1230/1981). De numeris datis (B. B. Hughes, Trad.). In B. B. Hughes (Ed.), *Jordanus de Nemore: De numeris datis*. Los Angeles, CA: University of California Press.

Newton, I. (1720). Universal Arithmetick: or, a treatise of arithmetical composition and resolution (M. J. Raphson, Trad.) *Universal Arithmetick: Or, A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. To which is Added, Dr. Halley's Method of Finding the Roots of Equations Arithmetically*. London: J. Senex.

Newton, I. (1972). Universal Aritmetic. In D. T. Whiteside (Ed.), *The Mathematical papers of Isaac Newton* (Vol. 5). Cambridge: Cambridge University Press.

Nicomachus (of Gerasa). (1926). Introduction to arithmetic (M. L. D'Ooge, Trad.) *Introduction to arithmetic, translated into English by Martin Luther D'Ooge; with studies in Greek arithmetic, by Frank Egleston Robbins and Louis Charles Karpinski*. New York: The Macmillan Company.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept part I - differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217-253. doi: 10.1007/BF00304357

Nunes, T. (2010a). Continuities and discontinuities between informal and scientific mathematical thinking: insights for education. En M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 328-332). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Nunes, T. (2010b). Reaction to Brent Davis' plenary: what concept studies tell us about mathematics education. En M. Pinto & T. kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 103-106). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Nunes, T., & Bryant, P. (2008). Rational numbers and intensive quantities: Challenges and insights to pupils´ implicit knowledge. *Anales de Psicología, 24*(2), 262-270.

Nunes, T., Desli, D., & Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research, 7*, 651-657. doi: 10.1016/j.ijer.2004.10.002

Obando, G. (1999). *La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo*. (Tesis de Maestría sin publicar), Universidad del Valle, Cali.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA, 8*(2), 157-182.

Obando, G. (2005). Lo pedagógico y lo didáctico: Elementos para la comprensión de las relaciones escolares. En E. Lopera (Ed.), *Escritos sobre aprendizaje, enseñanza y diversidad cultural* (pp. 169-197). Medellín: Editorial Marin Vieco Ltda.

Obando, G., & Múnera, J. J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista educación y pedagogía, XV*(35), 183-200.

Obando, G., Vanegas, M. D., & Vásquez Lasprilla, N. L. (2006). *Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos* (1 ed.). Medellín: Artes y Letras Ltda.

Obando, G., Vasco, C., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 59-81. doi: 10.12802/relime.13.1713

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2013). Razón, proporción y proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la Educación Básica. En R. Flórez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 977-986). Mexico, DF.: Comite Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantic of fractions and related concepts. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (1 ed., Vol. 2, pp. 53-92). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Oresme, N., & Grant, E. (1965). Part I of Nicole Oresme's Algorismus proportionum. *ISIS, 56*(3), 327-341.

Pantziarra, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005). The development of informal proportional thinking in primary school. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 363-373). Sant Feliu de Guíxols, Spain: Universitat Ramon Llull.

Park, J.-H., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development, 16*(3), 763-773. doi: 10.1016/S0885-2014(01)00058-2

Piaget, J., & Inhelder, B. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence* (A. Parson, Trad.). United Stated: Basic Book, Inc.

Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2009). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2637-2646). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Platón. (1988). *República* (C. E. Lan, Trad. Vol. IV). Madrid: Editorial Gredos.

Ponte, J. P., & Marques, S. (2005). Proportion in school mathematics textbooks: a comparative study. En D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2443-2452). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Pontón, T. (2008). *Una propuesta multirregistro para la conceptualización inicial de las fracciones*. (Tesis de Maestría sin publicar), Universidad del Valle, Cali.

Pontón, T. (2012). *La comprensión de enunciados de problemas en la enseñanza y el aprendizaje inicial de los números racionales*. (Tesis de Doctorado sin publicar), Universidad del Valle, Cali.

Pulos, S., & Tourniaire, F. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204.

Rabardel, P. (2003). From artefact to instrument. *Interacting with Computers, 15*, 641-645. doi: 10.1016/j.intcom.2003.09.004

Rabardel, P. (2005). Instrument subjectif et développement du pouvoir d'agir. En P. Rabardel & P. Pastré (Eds.), *Modèles du sujet pour la conception: Dialectiques activités développement* (1 ed., pp. 9-29). Toulouse, France: OCTARÈS Éditions.

Rabardel, P., & Bourmaud, G. (2005). Instruments et systèmes d'instruments. En P. Rabardel & P.

Pastré (Eds.), *Modèles du sujet pour la conception: Dialectiques activités développement* (1 ed., pp. 211-229). Toulouse, France: OCTARÈS Éditions.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70. doi: 10.1207/S15327833MTL0501_02

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa., Numero especial*, 103-120.

Radford, L. (2008). The etics of being an knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathemathics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215-234). Rotherdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 111-126. doi: 10.1007/s10649-008-9127-3

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19. doi: 10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44. doi: 1 0.4471/redimat.201 3.1 9

Rajeswara, S. (2002). Rule of three and its variations in India. En B. v. Dalen, J. W. Dauben, Y. Dold-samplonius & M. Folkerts (Eds.), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas* (pp. 133-156). Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Rashed, R., & Vahabzadeh, B. (1999). *Al-Khayyam mathématicien*. Paris: Editions Albert Blanchard.

Restivo, S., & Collins, R. (2010). Mathematics and civilization. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, (25). Recuperado desde Philosophy of Mathematics Education Journal, sitio web: http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome25/index.html

Ricoeur, P. (2001). *Del texto a la acción. Ensayos de hermenéutica II* (P. Corona, Trad. 1 ed.). Angentina: Fondo de Cultura Económica.

Robson, E. (2007). Mesopotamian mathematics. En V. Katz (Ed.), *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: a sourcebook* (pp. 57-186). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (12), 55-81. Recuperado desde HAL-SHS (Hyper Article en Ligne - Sciences de l'Homme et de la Société), sitio web: http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/34/97/64/PDF/2007_Roditi_Annales-didactique-sciences-cognitives_12.pdf

Rogoff, B. (2003). *The cultural nature of human development*. New York, NY: Oxford University Press.

Rojas, P., Romero, J., Mora, L. O., Bonilla, M., Rodirguez, J., & Castillo, E. (2011). *La multiplicación como cambio de unidad: estrategias para promover su aprendizaje*. Bogotá: Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas.

Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A Cultural-Historical perspective on mathematics teaching and learning*. Rotterdam: Sense Publishers.

Sáenz-Ludlow, A. (2006). Classroom Interpreting Games with an Illustration. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 183-218. doi: 10.1007/s10649-006-5760-x

Sáenz-ludlow, A. (2007). Signs and the process of interpretation: sign as an object and as a process. *Studies in Philosophy and Education, 26*(3), 205-223. doi: 10.1007/s11217-007-9028-4

Sánchez Ordoñez, E. A. (2011). *Razones, Proporciones y Proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes: una posible forma para comprender la construcción de dichos objetos matemáticos*. (Tesis de maestria sin publicar), Universidad del Cauca, Popayán - Colombia.

Saxe, G. B. (2004). Practices of quantification from a socio-cultural perspective. En A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.), *Cognitive Developmental Change: Theories, Models and Measurement* (pp. 241-263). Cambridge: Cambridge University Press.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2000). From quantities to ratio, functions, and algebraic relations. Recuperado en mayo, 2009, desde http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/publications/2000-earlier/quantitiesRatios.pdf

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic. En J. Hierbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 41-52). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Silvestri, A., & Blanck, G. (1993). *Bajtín y Vigotski: la organización semiótica de la conciencia* (Primera edición ed.). Barcelona: Anthropos.

Smagorinsky, P. (2011). *Vygotsky and literacy research: A methodological framework* (pp. 304). doi:10.1007/978-94-6091-696-0

Smith, D. E. (1923). *Mathematics*. Boston, MA: Marshall Jones Company.

Smith, D. E. (1925). *History of mathematics* (Vol. 2). Boston, MA: Ginn and Co.

Spinillo, A., & Bryant, P. (1991). Children's Proportional Judgments: The Importance of "Half". *Child Development*, *62*(3), 427-440. doi: 10.1111/j.1467-8624.1991.tb01542.x

Spinillo, A., & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: part–part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition*, *5*(2), 181-197. doi: 10.1080/135467999387298

Sriraman, B., & English, L. (Eds.). (2010). *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg.

Steffe, L. (1994). Children's Multiplying Schemes. En H. Guershon & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 3-40). Albany, NY: State University of New York Press.

Steffe, L. (2010a). *Children’s Fractional Knowledge*. New York, NY: Springer.

Steffe, L. (2010b). Perspectives on children’s fraction knowledge. En L. Steffe & J. Olive (Eds.), Children’s Fractional Knowledge (pp. 13-25). New York, NA: Springer. Recuperado desde http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-1-4419-0591-8_2. doi: 10.1007/978-1-4419-0591-8_2

Steiner, H.-G. (1969). Magnitudes and Rational Numbers: A Didactical Analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *2*(2/3), 371-392. doi: 10.1007/BF00303470

Stetsenko, A. (2005). Activity as object-related: resolving the dichotomy of individual and collective planes of activity. *Mind, Culture, and Activity*, *12*(1), 70-88. doi: 10.1207/s15327884mca1201_6

Stevin, S. (1634). L'Arithmetique. In A. Girard (Ed.), *Les Oeuvres mathematiques de Simon Stevin de Bruges*. Leyden: Bonaventine et Abraham Elsevier.

Swetz, F. (1992). *The sea island mathematical manual: surveying and mathematics in ancientn China*. Pensylvania, PA: The Pensylvania Statates University Press.

Théon (de Smyrne). (1892). Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de platon (J. Dupuis, Trad.) *Oevres de Théon de Smyrne*. Paris: Librairie Hachette.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. Recuperado en Marzo de 2012, desde http://pat-thompson.net/PDFversions/2004FracsMultRsng.pdf

TIMSS. (2009). *TIMSS 2007 user guide for the international database*. Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Torres Jaramillo, M. C. (2013). *Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional*. (Tesis de maestría sin publicar), Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in Elementary School. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(4), 401-412. doi: 10.1007/BF00311327

Trouche, L. (2002). Genèses instrumentales, aspects individuels et colletifs. En D. Guin & L. Trouche (Eds.), *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique* (Primera ed., pp. 391). Grenoble, France: La Pensée Sauvage Éditions.

Valsiner, J. (2009). Cultural psychology today: Innovations and oversights. *Culture Psychology, 15*(1), 5-39. doi: 10.1177/1354067X08101427

Van Dooren, W., & De Bock, D. (2008). Pupils' reasoning on proportionality: solving versus classifying missing-value word problems. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 369-376). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Van Dooren, W., De Bock, D., Gillard, E., & Verschaffel, L. (2009). Add? or multiply? a study on the development of primary school students' proportional reasoning skills. En M. Tzekaki & M. Kaldrimidou (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 281-288). Thessaloniki, Greece: PME.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86. doi: 10.1207/s1532690xci2301_3

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., & Verschaffel, L. (2004). Students' overreliance on proportionality: evidence from primary school pupils solving arithmetic word problem. En M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4). Bergen, Norway: PME.

van Galen , F., Feijs , E., Figueiredo Nisa , Gravemeijer , K., van Herpen , E., & Keijzer, R. (2008). Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6. Rotterdam: Sense Publisher.

Vasco, C. (1989). Dos nuevos grupos piagetianos en la lógica elemental. *Academia Colombiana De Ciencias Exactas, Físicas Y Naturales, 17*(64), 29-39.

Vasco, C. (1990). El aprendizaje de las matemáticas elementales como proceso condicionado por la cultura. *Comunicación, Lenguaje y Educación*(6), 5-25.

Vasco, C. (1994a). El archipiélago fraccionario. En A. C. Castiblanco (Ed.), *Un nuevo enfoque para la didactica de las matematicas* (Vol. 2, pp. 23-45). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C. (1994b). El concepto de sistema como clave del currículo de matemática. En A. C. Castiblanco (Ed.), *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas* (Vol. 1, pp. 7-18). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C. (1994c). El enfoque de sistemas en el nuevo programa de matemáticas. En A. C. Castiblanco (Ed.), *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas* (Vol. 2, pp. 7-21). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C. (1994d). El enfoque de sistemas para las matemáticas de preescolar y primaria. En A. C. Castiblanco (Ed.), *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas* (Vol. 1, pp. 19-28). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C. (1994e). La Educación Matemática: una disciplina en formación. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 3*(2), 59-75.

Vasco, C. (1994f). Relaciones, operaciones y sistemas. En A. C. Castiblanco (Ed.), *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas* (Vol. 1, pp. 29-37). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C. (1994g). Relatores y operadores. En A. C. Castiblanco (Ed.), *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas* (Vol. 1, pp. 63-86). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C. (1994h). Sistemas Geométricos. En A. C. Castiblanco (Ed.), *Un nuevo enfoque para la didactica de las matematicas* (Vol. 2, pp. 47-112). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Vasco, C. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. En D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. Maxwell West & M. Stone Wiske (Eds.), *Software goes to school: teaching for understanding with new technologies* (pp. 56-69). New York, NY: Oxford University Press.

Vasco, C. (2011). La cronotopía, antes y después de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 9*, 77-91.

Vasco, C. (2013). La interacción entre modelos y teorías en la enseñanza de la cronotopía. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*, 133-148.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (L. O. Segura, Trad.). México D.F.: Trillas.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? En H. Guershon & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (1 ed., pp. 41-60). Albany, NY: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52*, 83-94. doi: 10.1159/000202727

Viete, F. (1630). Introduction en l'art analytic, ou nouvelle algèbre (J.-L. Vaulezard, Trad.). In J. Jacquin (Ed.), (pp. 79). Paris: Chez Lulian Lacquin.

Viete, F. (1630/1983). The analytic art (T. R. Witmer, Trad.) *The analytic art. Nine studies in algebra, geometry and trigonometry from the opus restitutae mathematicae analyseos, seu algebra nova.* New York, NY: Dover Publications Inc.

Vogel, K. (2002). A surveying problem travels from China to Paris. En Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts & B. van Dalen (Eds.), *From China to Paris: 2000 Years Transmission Of Mathematical Ideas* (pp. 2-7). Stuttgart, Alemania: Franz Steiner Verlag.

Volkov, A. (2010). Commentaries upon commentaries: The translation of the Jiu zhang suan shu 九章算術 by Karine Chemla and Guo Shuchun. *Historia Mathematica, 37*, 281-301. doi: 10.1016/j.hm.2009.07.010

Vygotski, L. S. (1995). *Obras escogidas* (Vol. 3). Madrid: Visor.

Vygotsky, L. (1993). Pensamiento y lenguaje (J. M. Bravo, Trad.) *Obras escogidas II* (Vol. 2, pp. 348). Madrid: Visor.

Vygotsky, L. (1994). The development of thinking and concept formation in adolescence (T. Prout & R. v. d. Veer, Trad.). En R. van der Veer & J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader* (pp. 185-265). Cambridge , MA: Blackwell Publishers.

Vygotsky, L. (1995). Problemas del desarrollo de la psique (L. Kuper, Trad.) *Obras escogidas III* (Vol. 3, pp. 380). Madrid: Visor.

Wertsch, J. V. (1988). *Vygostki y la formación social de la mente* (J. Zanón & M. Cortés, Trad. 1 ed.). Barcelona: Paidos.

Whitney, H. (1968). The Mathematics of Physical Quantities. Part I & II. *The American Mathematical Monthly, 75*, 115-138; 227-256.