

APROXIMACIONES AL CONCEPTO DE VARIABLE¹

MÓNICA MENA Y EDUARDO MORENO

El presente artículo aborda el significado de la letra como representación de una variable en una expresión algebraica. Se realiza un análisis acerca de los errores y dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse y resolver situaciones que involucran la letra como variable. La metodología para abordar este problema, fue la de investigación-acción la cual, tuvo una planeación a lo largo de seis meses para tener como producto final una secuencia de ocho horas de clase, que posteriormente fue implementada con los estudiantes. A través de los argumentos y conclusiones verbales, se vio que los estudiantes utilizaron las letras para representar variables: usaron la letra como una herramienta para expresar matemáticamente cantidades desconocidas y tomaron consciencia de la variación que pueden tener estas letras.

PRESENTACIÓN

Este artículo es producto de un trabajo de investigación-acción desarrollado en el Colegio Gabriel Echavarría, entre 1995 y 1996, en el que participamos como profesores investigadores. El marco de nuestro trabajo fue Prime I², proyecto liderado por “una empresa docente”, centro de investigación en educación matemática de la Universidad de los Andes, Colombia.

El objetivo principal del proyecto era obtener mejores resultados —de los que usualmente logramos— en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un concepto determinado. La metodología utilizada en el trabajo fue la de investigación-acción que se caracteriza por ser un proceso de indagación metódica y crítica acerca de un tema de interés para la práctica de quien hace la investigación-acción (Kemmis et al., 1992). En nuestro caso, el tema que nos interesaba abordar y comprender está relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de la interpretación y uso de las letras en una expresión algebraica.

Para llevar a cabo el proyecto se planeó una estrategia metodológica que se desarrolló con 28 estudiantes de grado octavo entre los 12 y 14 años. El objetivo de la estrategia era favorecer la construcción significativa del concepto de variable, propiciando en los estudiantes la argumentación sobre sus

1. Este artículo fue editado por Mauricio Castro, investigador de “una empresa docente”.

2. PRIME I recibió apoyo financiero de la Fundación Corona, el Ministerio de Educación Nacional, Colciencias, el IDEP y el B.I.D.

concepciones con respecto a la representación de variables con letras en expresiones algebraicas.

En este artículo se exponen los principales resultados de la implementación de dicha estrategia metodológica.

ANTECEDENTES

Preocupado por el deficiente rendimiento académico de sus estudiantes en el área de las matemáticas, el Colegio Gabriel Echavarría inició, en 1995, la realización de talleres de refuerzo como solución al problema detectado. Dichos talleres tenían dos objetivos principales. Por un lado, se quería reforzar el manejo de las operaciones básicas en el conjunto de los números enteros ya que la mayoría de los estudiantes presentaban un manejo deficiente de ellas. Por otro lado, se quería que a través de estos talleres los estudiantes percibieran las matemáticas como una actividad divertida e interesante para lo cual era importante darles la oportunidad de que trabajaran con juegos y acertijos; de esa manera, se esperaba cambiar la actitud pasiva de los estudiantes en la clase de matemáticas.

Aunque con los talleres no se logró que los estudiantes superaran los errores y dificultades en el manejo de las operaciones básicas con los enteros, sí se logró un diagnóstico de varias de esas dificultades y que los estudiantes adoptaran una actitud más dinámica frente a las matemáticas. Ese diagnóstico hizo evidente, por ejemplo, el uso inapropiado de los contenidos previos (conceptos y procedimientos) en la resolución tanto de problemas como de ejercicios; y, las dificultades de los estudiantes para elaborar información y analizarla durante la resolución de los ejercicios y problemas.

Teniendo en cuenta estos resultados, consideramos que realizar talleres para el cambio de actitud frente a las matemáticas no era suficiente para que los estudiantes pudieran superar sus dificultades de comprensión; nos faltaba crear estrategias con una planeación específica y rigurosa para así obtener mejores resultados. La invitación que recibió el Colegio para participar en el proyecto PRIME I fue, entonces, una oportunidad para concretar la idea que teníamos en relación con el tipo de solución que se requiere para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en nuestro colegio.

MARCO DE REFERENCIA

En la mayoría de los estudiantes del grado octavo, se detectaron dificultades y errores en el manejo de los sistemas de representación (lenguaje matemático, gráfico y verbal) y en la traducción entre sistemas; se eviden-

ció además un uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos en la resolución de problemas y ejercicios en los que hay involucradas expresiones algebraicas. Cuando los estudiantes se enfrentan a la resolución de un problema o ejercicio que contiene expresiones algebraicas, consideran que las variables son letras que, obligatoriamente, deben ser sustituidas por números; no se detienen a pensar que en geometría, por ejemplo, las variables representan puntos, rectas, etc.

Los estudios de Küchemann y Socas pueden servir en nuestro análisis como preámbulo para describir las formas de interpretación de las letras como variables y las dificultades que se presentan en el manejo de las expresiones algebraicas. Con respecto a las dificultades en el álgebra, Socas (1989, pp. 23, 76 y 99) señala que:

[...] dificultades que se presentan en el álgebra no son tanto dificultades del álgebra misma sino errores que quedan sin corregir en la aritmética y que luego se traducen erróneamente al campo algebraico [...]

[...] la poca comprensión de lectura entre el lenguaje cotidiano y el matemático y viceversa generan diferentes interpretaciones de los símbolos y de las letras [...]

En el álgebra, las letras aparecen como símbolos que pueden significar cualquier clase de objetos, lo que permite considerar diferentes tipos de álgebra: álgebra de conjuntos, álgebra de funciones, etc.

Así mismo, Socas cita a Küchemann (1989, pp. 28-31) quien clasifica, en seis categorías, el significado que las letras de una expresión algebraica pueden tener. Esas categorías son:

Letras evaluadas. Esta categoría se refiere a casos en los que las letras de una expresión algebraica tienen asignado un valor numérico desde el principio. Por ejemplo, en la pregunta “¿Cuál es el valor de a , en la expresión $a + 5 = 8$?”, la letra a tiene un valor específico; es, inicialmente desconocido, pero evaluable.

Letras ignoradas. Esta categoría se refiere a casos en los que no se asigna significado alguno a las letras dentro de la expresión algebraica. Por ejemplo, en la pregunta “¿Qué valores hacen cierta la expresión $x + y = 43$?”, el estudiante ignora las letras y responde la pregunta sin utilizar las letras.

Letras como objeto. Esta categoría incluye casos en los que las letras son vistas como un objeto concreto (frutos, lados de un polígono, etc.) lo que sustituye el significado abstracto de las letras por algo más concreto y real; en estos casos, es esencial distinguir entre los objetos mismos y su cantidad.

Letras como incógnitas específicas. En esta categoría se incluyen los casos en que las letras son consideradas como números específicos que se desconocen, y cuyo valor se puede encontrar manipulando la expresión en la que aparecen. Cuando se pide a los estudiantes que calculen el área de un polígono, la respuesta correcta a esta cuestión requiere el uso de las letras como incógnitas genuinas.

Letras como generalización de números. En esta categoría se incluyen los casos en que se ven las letras de una expresión algebraica como representación de varios valores numéricos y no de exactamente uno. Por ejemplo, dada la pregunta “¿Qué valores puede tomar c , si $c + d = 10$ y c es inferior a d ?” es posible que el estudiante evalúe la expresión $c + d$ para distintos valores de c y d —teniendo siempre en cuenta que el valor que puede asignar a d debe ser mayor que el que haya asignado a c — y compare el resultado obtenido con 10. En este tipo de solución, el estudiante está manejando un significado de las letras como números generalizados.

Letras como variables. En esta categoría se incluyen los casos en que las letras son consideradas como representación de conjuntos de valores no especificados y se ve una relación sistemática entre dos conjuntos de valores. El concepto de variable implica claramente el concepto de la incógnita y de sus posibles valores. El siguiente ejemplo implica el manejo de letras como representantes de variables. Los lápices azules cuestan \$10 cada uno y los lápices rojos, \$12 cada uno. Compró algunos lápices rojos y algunos azules y en total pago \$180. Si A es el número de lápices azules y R el número de lápices rojos, ¿qué expresión puedo usar para representar la relación de la cantidad de lápices y su costo?

Teniendo como referencia el anterior marco, iniciamos el trabajo de diseño de la estrategia. Como parte del análisis previo al diseño de la estrategia metodológica consideramos algunos errores típicos de los estudiantes en los que se evidencia una clara tendencia a sustituir las letras por números. A continuación presentamos una breve descripción de tales errores.

Errores típicos de los estudiantes

Ligados con el manejo e interpretación de expresiones algebraicas, los estudiantes frecuentemente cometen muchos errores, entre los que se pueden destacar los siguientes:

1) $a x^2 + b - (a x) + b = 2 b$

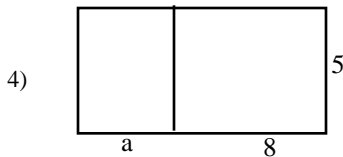
$$a x^2 + b$$

2)

$$\frac{a x + b}{2 a x^2 + b^2}$$

3) $(a x + b) (a x - b) = 2 a x^2 + 2 b$

Hallar el área del siguiente rectángulo



$$A = (8a) (5) = 40$$

$$A = (8) (5) = 40 a$$

$$A = 8 + a + 5$$

En las respuestas a los tres primeros casos se evidencian errores que tienen que ver con el manejo de conceptos y procedimientos que se han tratado en la aritmética: el uso de signos de operaciones y de paréntesis; las potencias y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Pero consideramos que en esos errores se refleja además un uso de las letras en el que las combinan y manejan indiferentemente debido a que ellos no han construido el concepto de variable.

En las respuestas dadas al cuarto caso, quizás, la idea que tienen los estudiantes es que la letra a es una forma de nombrar uno de los lados del rectángulo; no ven la letra a como representación de una longitud desconocida cuyo valor puede variar, y, al tener que manejar los datos de la figura para expresar el área, los estudiantes los juntan u operan con ellos indiferentemente. Cabe anotar que la tercera respuesta, además, refleja una deficiencia en el manejo de la “fórmula” del área de un rectángulo.

Creemos que en buena medida los estudiantes manejan deficientemente las expresiones algebraicas debido a las mínimas oportunidades que les

ofrecemos sus profesores para posibilitar la construcción significativa con relación a la interpretación y uso de las letras como variables.

EL PROBLEMA

De la situación descrita se destaca que nuestros estudiantes no tienen una significación conceptual de las letras en una expresión algebraica, lo que les impide identificar e interpretar las letras como variables. Se crea así, la necesidad de planear una estrategia que posibilite la construcción significativa del concepto de variable junto con el desarrollo de habilidades y destrezas para el manejo de expresiones algebraicas en la solución de problemas que las involucran.

LA ACCIÓN

La metodología de trabajo en el proyecto

Como lo mencionamos al inicio del artículo, la metodología de trabajo que seguimos para realizar este proyecto fue la de investigación-acción; así, pues, hicimos la reflexión inicial y la planeación de la acción y de la observación a lo largo de seis meses; la implementación de la acción y la observación se hizo en aproximadamente ocho horas de clase; el análisis de la información y la elaboración del reporte se hizo a lo largo de tres meses; y finalmente, la escritura de este artículo se realizó en interacción con uno de los coordinadores del proyecto PRIME I a lo largo de tres meses.

Nuestra intención detrás de la estrategia

A continuación se describe la idea general que guió nuestra acción. La actividad se planeó para que los estudiantes realizaran un proceso constructivo por descubrimiento: se les debía plantear una situación cuya solución representara un reto para ellos y que los motivara a observar, a preguntarse, a conjeturar. Se quería, también, que la situación formulada les permitiera plantear alternativas de solución con una argumentación válida, los llevara a realizar conexiones de las matemáticas con su entorno y con los conocimientos ya adquiridos. Se esperaba que la situación planteada los impulsara a representar los resultados de manera clara y en la forma más conocida posible. Pero, sobre todo, se quería dar a los estudiantes una oportunidad para que **interpretaran el uso y sentido de variable ligado a las letras** en una expresión algebraica en un contexto real.

Descripción de la estrategia

Para el diseño de la estrategia metodológica tuvimos en cuenta la motivación de los estudiantes a partir de sus propias relaciones con las matemáticas y su entorno. Para esto, se hizo un estudio minucioso de las actividades cotidianas que estaban generando mayor interés en los estudiantes. En 1996, los estudiantes de grado octavo —20 varones y 8 mujeres—, tuvieron a su cargo el proyecto “Cultivos hidropónicos”, proyecto institucional en el que ellos participaron activamente. Esta información nos llevó a decidir el contexto de la situación que les plantearíamos. Pensamos que elegir ese contexto posibilitaría la construcción significativa del concepto de variable en la medida en que los estudiantes pudieran involucrarse en él desde diversos puntos de vista y pudieran asociar el número de ramas y el número de granos de café con expresiones algebraicas.

La actividad fue planeada para ser ejecutada en tres bloques (sesiones) de dos horas escolares cada una.

En la primera sesión, se dio a cada grupo (conformado por tres estudiantes), una guía de trabajo en la que se planteaba un problema para:

- encontrar formas de expresar cantidades desconocidas de ramas y granos de cualquier número de cafetos;
- usar las letras como una posibilidad de expresión matemática.

Las preguntas debían ser respondidas en la misma hoja de la guía, en el orden en que se presentaban y con base en la información que daban los gráficos, de modo que los estudiantes manipularan valores diferentes para un mismo atributo (representados en el número de ramas de los cafetos y en el número de granos de los cafetos) y así pudieran apreciar el concepto de variable (número de granos de café), o, su valor constante (número de ramas) en un contexto específico (los cafetos del cultivo hidropónico).

En la segunda sesión, los estudiantes hicieron una breve exposición de sus soluciones en una transparencia, y, argumentaron sus respuestas verbalmente y respondieron las preguntas formuladas por sus compañeros.

En la tercera y última sesión, el profesor titular del curso realizó una puesta en común con el grupo y evaluó la actividad, en donde verificó si los estudiantes habían utilizado las letras como planteamiento para la solución al problema propuesto en la guía y si la argumentación hacía referencia a lo que representaban las letras, lo que podría dar indicios sobre el proceso de construcción de significado del concepto de variable.

Nuestro papel durante la actividad en clase

En la planeación de la actividad nos esforzamos por explicitar nuestras ideas acerca de los procesos inconscientes de aprendizaje, como son la motivación, la relación profesor-alumno, las formas de presentación de un nuevo tema y su conexión con los conceptos previos y el entorno del estudiante.

En la implementación de la estrategia —durante el desarrollo de la actividad—nos esforzamos por ser principalmente, orientadores para los estudiantes. Así, pues, mantuvimos una actitud de continua comunicación con los estudiantes a través de la que los invitábamos a explorar aspectos relacionados con el tema, en particular, a utilizar conceptos previamente estudiados en el curso. Observamos la generación de ideas en la solución de problemas y cuestionamos a los diferentes grupos de trabajo para identificar sus dificultades. Nuestra posición caracterizada más por escuchar que por hablar, permitió que los mismos estudiantes detectaran incoherencias en sus razonamientos y argumentaciones dadas como respuestas, y que verificaran la comprensión de las instrucciones, el enunciado de las preguntas, los términos desconocidos, etc. Nuestra posición también animó a los estudiantes a explorar cualquier idea o estrategia que pudiera ayudarles a entender y/o resolver el problema sin censurar las ideas generales del grupo de trabajo, propiciando el equilibrio en sus discusiones.

LA OBSERVACIÓN

Las preguntas que nos formulamos con respecto al trabajo de los estudiantes durante el desarrollo de la guía fueron las siguientes: ¿Cómo traducen el problema? ¿Cómo lo abordan? ¿Qué motivación hay? ¿Cómo desarrollan el trabajo en equipo? ¿Cómo aplican los conocimientos previos? ¿Qué análisis hacen? ¿Qué secuencias utilizan? ¿Cómo argumentan por escrito y oralmente?

Consideramos que el análisis de estas observaciones permiten establecer si los estudiantes construyen el concepto de variable, teniendo como principal factor la riqueza de relaciones que están en la base de cualquier concepto. Se analizó el ensayo, la invención, la creatividad en la interpretación y el uso de las letras así como, la significación dentro de un contexto, y tantos otros aspectos que los procedimientos matemáticos permite observar.

Para recoger la información se utilizaron grabaciones de audio por grupo de trabajo, la respuesta a la guía de trabajo y la grabación de audio de la puesta en común. En un principio, se consideró la posibilidad de recoger esta información a través de grabaciones de video, pero se ha comprobado

que existen influencias psicológicas en las personas cuando están frente a una cámara de video cambiando que hace que cambie parte de sus actitudes normales y no haya una completa sinceridad en sus respuestas. Aunque las grabaciones de audio pueden influir también en el comportamiento de los estudiantes, creemos que esa influencia es menor. Así, pues, la grabación de audio fue el instrumento que nos permitió recoger información que difícilmente se puede recordar o plasmar en un papel en el momento de realizar las observaciones, y se constituyó en el más importante instrumento de observación para la evaluación de nuestros objetivos propuestos.

Al inicio de la actividad los estudiantes estuvieron ansiosos por escuchar sus voces grabadas y la atención estuvo más dirigida hacia las grabadoras de audio que a la comprensión del trabajo propuesto. Sin embargo, la disposición hacia el trabajo fue normal al transcurrir la clase.

Después de atender las instrucciones, los estudiantes en las primeras cuatro preguntas tenían que ubicarse en el contexto, comprender el problema y responder preguntas en donde debían usar las operaciones aritméticas básicas y representar gráficamente la cantidad de granos y ramas de los cafetos. La elaboración de respuestas fue de manera casi mecánica. Pero al llegar a la parte de la guía, donde se les planteaba expresar matemáticamente una cantidad cualquiera de granos o ramas, los grupos detuvieron su ritmo de trabajo y se evidenció el momento de mayor actividad cognitiva. Surgieron diferentes tipos de ideas y planteamientos interesantes como el de relacionar números de granos con las letras y diferenciarlas con las ramas. Algunos de estos planteamientos se muestran en los siguientes ejemplos:

granos = X; # árboles = Y; X > Y (Porque los granos de café aunque no conozcamos su cantidad siempre estarán contenidos en cualquier cantidad de arboles de café).

Representaríamos el total de números de granos con letras ya que no sabemos el valor que tienen.

n = total de granos de café; a = cualquier cantidad de árboles (lo represento así ya que las letras representan cualquier número).

Igualmente, necesitaron apoyo y supervisión constante por parte de los profesores para corroborar la comprensión de las preguntas y posibles respuestas. Manejaron con bastante versatilidad conceptos previos de uso común y diario como el conteo, las operaciones básicas junto con la representación gráfica.

Durante la sustentación de respuestas (segunda sesión) hubo un poco de falta de atención al iniciarse las exposiciones, ya que ellos no están acostumbrados a escucharse. En general, los grupos expositores defendieron tímidamente sus respuestas fomentándose la discusión en la justificación de respuestas de manera clara y lógica para el grupo.

En la puesta en común (última sesión) la participación del grupo fue alta: desecharon las respuestas incoherentes para ellos mismos y concluyeron a nivel de grupo el uso e interpretación de las letras para representar cantidades desconocidas.

RESULTADOS

De acuerdo con los resultados obtenidos en la implementación de la estrategia consideramos que los objetivos planteados se cumplieron en un alto grado porque tanto en las respuestas a la guía de trabajo como en las argumentaciones en la puesta en común y en las exposiciones, los estudiantes usaron las letras como una forma para expresar matemáticamente cantidades desconocidas, teniendo en cuenta la variación de las mismas. Encontraron a las letras como herramienta para solucionar el problema propuesto, concluyendo con sus propias palabras “aquellas letras en matemáticas pueden utilizarse para representar cantidades desconocidas, que pueden variar o permanecer constante su valor”. Además, manipularon y dieron un uso apropiado a las letras para referirse a objetos diferentes en un mismo contexto.

Así mismo, los argumentos y conclusiones verbales de los alumnos les permitieron darse cuenta de que para expresar cantidades desconocidas, tanto de ramas como de granos de cualquier número de cafetos, (que podían variar en un mismo contexto), lo podían hacer a través del concepto de variable, representado en una letra y que tenía más sentido que contar grano por grano de cada cafeto.

Por otro lado, la estrategia posibilitó el trabajo en equipo, el intercambio de ideas, la discusión y selección de respuestas de modo compartido. Se evidenció que los estudiantes no tienen confianza en sus razonamientos y soluciones dadas a nivel individual y grupal, lo que genera dificultad para plasmar sus ideas y procedimientos en forma escrita de manera clara y coherente. Esto se detectó al encontrar diferencias entre lo que se discutió en el grupo (registrado en las grabaciones de audio) y lo que quedó escrito en la guía de trabajo.

CONCLUSIONES

Como investigadores de este proyecto podemos afirmar que plantear una estrategia didáctica y metodológica para ayudar a superar las dificultades detectadas en nuestros estudiantes es una tarea difícil de concretar, ya que requiere de tiempo y dedicación para tener presentes los procesos que condicionan la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (i.e. la motivación, la relación profesor-alumno, las formas de presentación de un nuevo tema y las conexiones con los conceptos previos y el entorno del estudiante).

Por otra parte, queremos destacar que, desde el punto de vista de la institución, este trabajo de investigación ayudó a consolidar un equipo de trabajo en el que se formalizaron reuniones para coordinar, planear y llevar a cabo actividades de capacitación, y, para el seguimiento y evaluación de la enseñanza-aprendizaje del área. Igualmente, se inició la reestructuración del área en cuanto contenidos por curso, indicadores de logro, evaluación, formas de trabajo, estrategias pedagógicas, actividades extracurriculares y complementarias.

Si nuestra responsabilidad consiste en planificar y llevar a cabo la enseñanza de las matemáticas debemos mantener vivo el espíritu de observación, análisis y planificación de nuestra actividad profesional y desarrollar un mejor saber, sobre nosotros mismos y nuestra práctica. Debemos dejar un espacio para nuestras reflexiones (a nivel personal y a nivel de trabajo de equipo con nuestros colegas), con respecto a la enseñanza y aprendizaje para poder planear estrategias de investigación-acción y superar las dificultades de nuestros estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Kemmis, S. y McTaggart, R. (1992). *Cómo planificar la investigación-acción*. España: Laertes.
- Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *"Iniciación al álgebra"*. Madrid: Síntesis.

Mónica Mena
Eduardo Moreno
Colegio Gabriel Echavarría
Calle 10B No. 11-25
Tel.: 918250753 Fax: 918250745
Madrid, Cundinamarca