ANÁLISIS HISTORICO-EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE NÚMERO IRRACIONAL Y LOS OBSTÁCULOS PRESENTES EN SU TRANSPOSICIÓN TEXTUAL

Presentado por el estudiante:

NELSON JESÚS VÉLEZ ARÉVALO

Proyecto de trabajo de grado para optar al título de:

Licenciado en Matemáticas y Física

Director:

SERGIO IVÁN VALENCIA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI

2011

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme concluir esta etapa, que espero marque el inicio de nueva y mejores oportunidades, a mis padres por su apoyo incondicional y permanente a lo largo de estos años, a mis familiares por respaldar a mi familia (y por supuesto a mi) en los momentos en que las circunstancias no se mostraron favorables. También le doy gracias al profesor Sergio Iván Valencia por su labor como tutor, una tarea que desempeño más allá del deber, a las profesoras Ligia Amparo Torres, Maribel Anacona y Gabriela Arbeláez por aceptar el compromiso de evaluar el presente trabajo de grado y sus valiosas aportaciones en procura de contribuir a la calidad del mismo. Además, a los profesores Fernando Gálvez y Luis Recalde por propiciar espacios desde los cuales se hicieron importantes contribuciones para el mejoramiento del presente escrito y finalmente pero no menos importante a mis compañeros por su amistad.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Universidad del Valle

Instituto de educación y pedagogía

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *Diligencie el formato con una letra legible.*

Título del Trabajo:	Análisis Histórico-Epistemológico Del Concepto De Número Irracional Y Los Obstáculos Presentes En Su Transposición Textual						
Se trata de:	*Proyecto*		*Informe Final*	X			
Director:	Sergio Iván Valencia Marín						
1er Evaluador:	Gabriela Arbeláez Rojas						
2do evaluador:	Ligia Amparo Torres						
Fecha y Hora	*Año:*	2011	*Mes:*	09	*Día:*	09	*Hora:*

Estudiantes

Nombres y Apellidos Completos	*Código*	*Programa Académico*
Nelson Jesús Vélez Arévalo	200534891	3487

Evaluación *Aprobado*	x	*Meritorio*		*Laureado*	
Aprobado con recomendaciones		*No aprobado*		*Incompleto*	

*En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ________ (máximo un mes) **ante**:*

Director del Trabajo		*1er Evaluador*		*2do Evaluador*	

*En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da una plazo máximo de ________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:*

Año:		*Mes:*		*Día:*		*Hora:*	

*En el caso de que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente)*

Firmas:		
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Observaciones: [X] ***Recomendaciones:*** [ ] ***Razón del desacuerdo-Alternativas:*** [ ]

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

Observaciones de la profesora Gabriela Arbeláez Rojas

En el trabajo se aborda un tema complejo, de mucha pertinencia en la educación media y el autor se dota de unas herramientas teóricas muy pertinentes, como son las de obstáculo epistemológico y transposición didáctica; herramientas que le permitirán hacer un seguimiento al concepto de número real en algunos textos del bachillerato. Quisiera entonces dejar por sentado que el documento presentado por el estudiante Vélez tiene el nivel requerido para ser un trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas y en este sentido puede ser convocado a sustentación.

Sin embargo quisiera hacer algunas recomendaciones con el ánimo de mejorar el trabajo:

- Se debe hacer una revisión general del documento en cuanto a ortografía y redacción pues ya en las primeras páginas se encuentran errores como el siguiente: "arriesgo de caer en anacronismos" (página 8). La palabra "develar" que es usada insistentemente no existe; creo que en su lugar debería hacer uso de la palabra "desvelar". En la página 13 aparece "concepción lucida de los objetos", que no sabemos a qué se refiere. En la página 14 se debe colocar "intención" y no "intensión".
- En la página 9 refiriéndose a Eudoxo dice que, "formuló una teoría en la cual definía razones entre magnitudes conmensurables e inconmensurables sin emplear números…". Creo que esta afirmación no es del todo cierta, pues la definición de proporción conlleva una comparación y allí aparecen claramente los números (naturales). Pienso que ese párrafo se debe revisar en su totalidad.

- En la página 14 aparece una alusión a la demostración del Teorema del valor intermedio, que a mi juicio, es incorrecta. Ese párrafo debe aclararse también en su totalidad.
- Considero que en la introducción del capítulo II no se expone de manera clara lo que realmente se desarrolla allí.
- Aunque entendí lo que el autor quería expresar en la página 50 por la lectura posterior, en una primera lectura no queda claro cuando afirma: "correspondencia uno a uno entre la estructura aritmética de los números reales y la estructura geométrica de líneas en el espacio". Creo que esto se puede decir de una manera más clara. No entiendo tampoco porque la proposición 1 del libro I de Euclides es tan vital para la propiedad de la continuidad.
- No entendí el sentido del ejercicio de la página 55, pues las dos expresiones son idénticas.
- En la página 57 hay afirmaciones que no se entienden: ¿Cantor asociaba el continuo con Dios? (citar referencia). ¿Qué es asumir la independencia del continuo?
- La primera conclusión general me parece demasiado fuerte, bastante polémica y sobretodo discutible, pero me parece que está muy débilmente sustentada.
- En alguna parte debe aparecer el criterio para la selección de los textos.

Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Observaciones:	X	***Recomendaciones:***		***Razón del Desacuerdo – Alternativas:***	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

Observaciones profesora [illegible] A. Torres
1. Escribir el documento utilizando formas verbales en presente o pasado. Unificar espacios y forma de citar.
2. Aclarar algunos términos o conceptos para que el documento sea más legible.
3. Poner nombres a los capítulos para darle mayor claridad al documento. De igual forma revisar los nomencladores.
4. Incluir párrafos al final de cada sección que recojan o concluyan sobre lo expuesto a manera de guiar al lector en lo siguiente. Se expone pero no es clara la apreciación personal del autor (estudiante) en el proceso constructivo de $\mathbb{R}$
5. Los obstáculos tienen caracterizaciones diferentes: desde lo histórico epistemológico (matemático) y desde lo curricular y didáctico. Esto hace confuso el tratamiento de estos.
6. Reescribir las conclusiones dando fuerza a lo realizado en el trabajo.
7. El trabajo es pertinente a la formación de profesores de matemáticas y su desarrollo da cuenta de la confluencia de diferentes aspectos de la formación en la licenciatura articulados de manera coherente.

Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

Gdo

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido 7

RESUMEN 9

INTRODUCCIÓN 10

PRINCIPALES CONSTRUCCIONES DE LOS NÚMEROS REALES DURANTE EL SIGLO XIX 13

1. El problema de la emergencia de los irracionales: antecedentes. 13

2. ¿Por qué construir los números irracionales? 17

2.1 Teorema del valor intermedio en Cauchy. 19

3. Las construcciones tempranas de los números reales: Weierstrass, Méray. 24

3.1 Los agregados de Karl Weierstrass. 24

3.2 Los números ficticios de Charles Méray 27

3.3 Las construcciones de Cantor y Dedekind. 29

3.3.1 La construcción de Dedekind. 29

Breve descripción de la construcción de Dedekind. 29

3.3.2 La construcción de Cantor. 35

El concepto de cardinalidad en la obra de Cantor. 37

3.4 La noción de cardinalidad y su importancia en la obra de cantor 39

3.5 El papel de las fracciones continúas en el trabajo de cantor 41

3.6 La caracterización de los irracionales a través de las fracciones continuas. 44

3.6.1 Fracciones continuas 44

3.6.2 Ventajas de esta representación. 46

3.7 La noción de número irracional en Cantor 47

3.7.1 ¿Qué es un irracional para Cantor? 48

3.7.2 Propiedades de los irracionales en la obra de Cantor. 48

NOCIONES FUNDAMENTALES EN LA CONSTITUCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES Y LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS QUE SUSCITARON. 51

1. El proceso de objetivación del conjunto de los números reales visto a través de la teoría de situaciones. 51

2. Definición de obstáculo desde la perspectiva de Brousseau. 58

2.1 Obstáculos epistemológicos 58
2.2 Principales obstáculos presentes en la constitución de los números reales. 61
2.2.1 Recta vs. Número 61
2.2.2 Operatividad en los Reales. 65
2.2.3 El Continuo.. 69
2.2.4 Infinito actual. 73
2.2.5 Cardinalidad. 77
REVISIÓN DE ALGUNOS TEXTOS ESCOLARES DE MATEMÁTICAS 80
1. La relevancia de I (y R) en la escuela... 80
1.1 Aspectos curriculares.. 80
1.2 Aspectos teóricos en relación con el reto para la educación matemática sobre la construcción en el aula de los números reales.. 85
2. El fenómeno de la Transposición Didáctica mediada por los textos.............................. 91
3. Una revisión de tres textos de grado 11 sobre la introducción y estudio de los irracionales. 94
3.1 Criterios de revisión 95
Texto 1 95
Texto 2 96
Texto 3 99
3.2 Conclusiones de la revisión de los textos. 105
4. Conclusiones generales. 106
BIBLIOGRAFÍA 109
Anexo n°1 116
Anexo n°2 139

RESUMEN

En el presenta trabajo se desvela algunos de los posibles obstáculos epistemológicos presentes en el proceso de constitución de los números reales, obstáculos que *resisten* los sucesivos intentos de autores y educadores por desentrañar su naturaleza y acercarla a los estudiantes, a la vez que reaparecen en los textos escolares.

Esa problemática se aborda desde la perspectiva de un estudio histórico-epistemológico, el cual se basa en algunos de los artículos de Dedekind y Cantor respecto a la construcción de los números reales, para identificar ciertos obstáculos epistemológicos. Dicha identificación permitió conformar la rejilla de revisión empleada en el capitulo II para contrastar si los obstáculos caracterizados se movilizan o no en los textos escolares de matemáticas de grado 11 (específicamente los seleccionados).

A partir de la mencionada revisión se encontró que en los textos escolares las nociones como infinito actual y continuidad se hallan en una fase paramatemática, dado que son usadas para estudiar otros conceptos como límites y continuidad de funciones respectivamente. De otra parte, la exposición que de los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ se hace en dichos textos limita la diferenciación de estos a su forma de representarlos (notación) y reduce la conceptualización a presentar las propiedades algebraicas que distinguen un conjunto de otro.

Palabras clave: número real, Cantor, Dedekind, obstáculo epistemológico, revisión de textos, transposición didáctica.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se realizó un estudio histórico-epistemológico de la constitución de los números reales como objeto de estudio. Prestando especial atención a los trabajos de Richard Dedekind y Georg Cantor, en cuyos escritos (particularmente los fechados en 1872) se construye formalmente el conjunto de los números irracionales y, por tanto, el de los reales. La constitución del objeto *número irracional* es de vital importancia en el desarrollo del presente documento, debido a la trascendencia del conjunto de números irracionales en áreas como Cálculo, Topología, Análisis, etc. Concretamente, esta última disciplina puede considerarse como la principal beneficiaria de los logros alcanzados durante el siglo XIX en la historia de las matemáticas, puesto que fundamentar lógicamente la existencia de los irracionales requirió del esfuerzo de talentosos matemáticos a lo largo de 23 siglos.

A pesar de la rica historia de los números irracionales y su importancia en el desarrollo de las matemáticas, la manera como se aborda este objeto matemático en el aula por extensión algebraica (generalmente) caracteriza a este conjunto asumiendo *a priori* la existencia de la totalidad de los reales y, asimismo, estas presentaciones presuponen las diferentes representaciones: como fracción, como decimal, o bien, su representación en la recta *geométrica*. Esta estrategia de aproximación a los diferentes conjuntos numéricos es fomentada por los textos escolares, razón por la cual esta metodología goza de amplia difusión en la secundaria, debido a la fuerte influencia que ejercen los textos escolares, tanto en el docente como en el estudiante.

De otra parte, las interacciones entre estudiante, profesor y saber (este último representado en el texto escolar) profundizada por Brousseau en su *teoría de situaciones didácticas* aportó nuevos elementos que enriquecen el presente análisis con la incorporación de una noción central en el progreso del mismo como es la de *obstáculo epistemológico* (dada a conocer por Bachelard y extendida por Brousseau a la educación matemática) junto a la teoría de la *Transposición Didáctica*, propuesta por Chevallard. Estas nociones se transformaron en los principios desde los cuales se busca una respuesta al modo en que se presenta, en los textos escolares, el conjunto de los números irracionales.

Así pues, identificadas las señales de que efectivamente se está presentando un fenómeno en la enseñanza y aprendizaje de los números reales, es necesario buscar las causas a las que puede atribuirse la manifestación de dichos obstáculos y los puntos desde los cuales puede plantearse una explicación. Así pues, la problemática que suscitó el presente trabajo, redunda en la pregunta *¿Qué es lo que caracteriza, intrínsecamente, a los números irracionales y cómo estas propiedades internas influyen en su aprendizaje y/o enseñanza?* Con la formulación de la dificultad se da el primer paso en la búsqueda de su respuesta en tanto ésta se sitúa como punto neurálgico en la construcción de los reales, específicamente, en la fundamentación matemática de los números irracionales y sus propiedades.

En consecuencia, para responder a la pregunta central de este trabajo es necesario desentrañar la naturaleza misma de los irracionales en procura de indagar su evolución conceptual y temporal, para ubicar en este proceso los momentos claves donde aparecen los diferentes obstáculos epistemológicos; pero más importante aún, es posible que dicha respuesta permita desvelar la(s) noción(es) matemática(s) cuya intervención es necesaria para poder superar dicho obstáculo. Contando con este importante insumo, se procede a revisar en algunos textos escolares de matemáticas (de grado 11) en busca de aquellos obstáculos epistemológicos que son reflejados en estos textos. Reflejados, en la medida que *no es el texto* el lugar donde se originan ni manifiestan estos obstáculos (puesto que estos se gestan en el seno de la teoría misma), pero sí constituye algo así como una caja de resonancia que los evoca.

El presente trabajo de grado inicia con un sucinto recorrido historiográfico en torno a la construcción de los números reales en objeto matemático durante el siglo XIX (Capítulo I), donde se estudian los escritos de Dedekind y Cantor como los principales exponentes del periodo conocido como de la *aritmetización del análisis*. A continuación, se efectúa un estudio epistemológico de algunos obstáculos epistemológicos asociados a la constitución de los números reales (Capítulo II) y, cómo la superación de estos obstáculos significó un salto cualitativo en la formalización del conjunto de los reales. Para finalizar, se revisan algunos textos escolares de matemáticas de secundaria (Capítulo III) en consonancia con los hallazgos teóricos de índole epistemológico que deben enfrentar estudiantes y profesores en relación con este objeto matemático, aspecto que ha sido abordado en el Capítulo II.

PRINCIPALES CONSTRUCCIONES DE LOS NÚMEROS REALES DURANTE EL SIGLO XIX

En este capítulo se hace un breve recorrido historiográfico por los principales acontecimientos que rodearon la construcción formal de los números reales, prestando particular atención a las contribuciones hechas por matemáticos en diferentes momentos. Sin embargo, el objetivo principal que se quiere alcanzar en este capítulo es desglosar las principales construcciones de los números reales a partir de la segunda mitad del siglo XIX, enfatizando en la construcción hecha por Georg Cantor y la incidencia de ésta en la obra de dicho autor.

1. El problema de la emergencia de los irracionales: antecedentes.

Para la consideración de los antecedentes, se tuvo en cuenta la diferenciación hecha por Mora y Torres (2007) de las etapas en el proceso de constitución de los números irracionales. Estas autoras dividen el periodo de tiempo que tomo fundamentar lógicamente la teoría de los números reales en cuatro etapas las cuales son: descubrimiento de la inconmensurabilidad, fracciones decimales y fracciones continuas, distinción de los números trascendentes y formalización de los números reales. Es importante considerar (para los propósitos de este capítulo) estas etapas porque sirven de marco de referencia en la historiografía que aquí se propone.

Podría creerse que en la antigua Grecia se encuentran trazos de lo que modernamente se conoce como números irracionales, subyacentes en la relación de inconmensurabilidad entre segmentos, descubierta por los pitagóricos. Ellos concebían los números como una especie de átomos[1], con existencia propia y los

[1] Con relación a esta última afirmación, (…) L. Brunschvig anota que es necesario considerar la influencia de las doctrinas de los pensadores jónicos y caldeos durante sus viajes por Egipto y Asia. En los trabajos astronómicos de estos últimos, la clasificación zodiacal y la tabla de constelaciones

cuales relacionados entre si constituían el mundo real, además del carácter y las propiedades místicas atribuidas a ellos (Mora y Torres, 2007, pp. 60-61). Pero el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables sacudió las bases más profundas de las concepciones pitagóricas y en adelante la naciente disciplina matemáticas giraría entorno de superar la dificultad que implicaban estas magnitudes.

Sin embargo, la crisis desatada en la escuela pitagórica (por el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables) solo era la punta del iceberg, como lo mostró más tarde Zenón con sus paradojas, este problema remitía a algo más profundo; la separación entre lo discreto y lo continuo. En la escuela platónica se dio un paso significativo en la solución de este problema desligando la experiencia de la matemática, estableciendo la distinción entre número numerado y número aritmético[2], lo que permitió que miembros de esta escuela estudiaran estos "números".

Uno de los miembros de esta escuela fue Eudoxo quien formuló una teoría en la cual definía razones entre magnitudes conmensurables e inconmensurables sin apoyarse de forma explícita en los números para expresar tales razones, como se puede observar en el libro V de los *Elementos* de Euclides atribuido a este autor. La labor de este matemático consistió en abordar este problema desde la geometría (a través de magnitudes) y de esta forma eludió la naciente discusión respecto a la naturaleza de estos nuevos. Ya desde la antigua Grecia algunos matemáticos, específicamente Eudoxo, comenzaron a buscar las estrategias matemáticas más

---

reposan sobre principios inmutables: el **número** y la **forma**. "Una constelación tiene dos características: el número de astros que la constituyen y la figura geométrica que la representan en el ciclo" (Recalde *et al.* 1999, p. 25).

[2] (…)Platón distingue entre número numerado y número aritmético; el primero, útil para contar, y el segundo, un ente ideal de naturaleza abstracta, formado por la agrupación de unidades iguales; por tanto, los números deben estudiarse simplemente como números en sí mismos y no como entes incorporados a la realidad sensible (Mora y Torres, 2007, pp. 65-66).

adecuadas para sortear la dificultad que generó el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. Así, la suma de los resultados obtenidos por los pitagóricos y la labor de Eudoxo, le proporcionaron a Aristóteles los elementos para separar número y magnitud.

La segunda etapa contempla el acercamiento a los números irracionales a través de las fracciones decimales y las fracciones continuas, los cuales son sistemas de representación empleados en la aproximación de estos números, entre los cuales se da mayor relevancia al método de fracciones continuas. En Europa, a finales de la edad media se emplearon las fracciones decimales en el estudio de los irracionales, en este sentido las fracciones decimales tuvieron importantes implicaciones; se usaron en la elaboración de tablas para aproximar algunas raíces cuadradas, también permitieron dividir números expresables como potencias de diez (Mora y Torres, 2007). Las fracciones continuas, aunque se basan en el algoritmo de Euclides, tuvieron un desarrollo paralelo a las fracciones decimales. Se emplearon similarmente en la representación de racionales, algunos irracionales cuadráticos y posteriormente unos pocos trascendentes (π y e). Matemáticos como Bombelli y Cataldi, figuran entre los principales referentes a la hora de hablar acerca de fracciones continuas, al primero se atribuye la creación de algunos algoritmos para aproximar raíces cuadradas y al segundo se le considera como el creador de estas porque desarrollo simbolismo y algunas propiedades.

Subsiguientemente, en el siglo XVIII, aparece Euler quien hizo importantes contribuciones en el desarrollo de las fracciones continuas; demostró que todo número racional se puede representar como una fracción continua finita, todo irracional como una infinita. Al llegar a la segunda mitad del siglo XIX, Cantor emplea las fracciones continuas, en tanto que, a diferencia de la fracciones decimales, las continuas permiten expresar de manera única un número irracional, paso fundamental en el desarrollo del artículo de 1877, en el cual este autor demuestra que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos continuos de igual o diferente dimensión.

La tercera etapa que Mora y Torres (2007) mencionan (*distinción de los números trascendentes*), comprende eventos importantes en la constitución de los números reales durante los siglos XVII y XVIII, en los cuales a pesar de no tener certeza acerca de si los números irracionales eran números o no, se utilizaban libremente. La figura de Descartes aparece durante este periodo incorporando un cambio epistemológico sustancial al presentar el segmento unidad no sólo como unidad de medida o como unidad indivisible, sino como elemento neutro de la multiplicación, contribuyendo así con el reconocimiento de los números irracionales como tales[3].

Posteriormente el interés se trasladó a la demostración de irracionalidad y trascendencia de algunos números. Fue necesario fundamentar el análisis sobre bases sólidas que no dependieran de otro tipo de disciplinas. En este sentido, fue Cantor quién en 1872 planteó a Dedekind la posibilidad de la numerabilidad de los números reales, pero en 1874 demostró que no era posible, de lo cual se puede inferir teniendo en cuenta la numerabilidad de los números algebraicos, y que los números reales se pueden expresar como la unión de los números algebraicos y los trascendentes[4], que la no numerabilidad de los reales se debe a los números trascendentes (aunque este resultado no muestre ningún trascendente). No obstante el descubrimiento de la no numerabilidad de los números trascendentes,

---

[3] La importancia de definir el segmento unidad de manera convencional y no cómo punto de partida (forma en que se consideraba en la aritmética euclidiana) en la geometría cartesiana contribuyó al reconocimiento de los números irracionales como tal, en tanto le permitió a Descartes extraer raíces cuadradas, cúbicas, etc., lo cual era imposible bajo la tradición griega porque implicaba un problema de tipo conceptual. (Recalde, *sf* ,pp. 173-174)

[4] Números algebraicos: Un número algebraico es: cualquier número que es solución de un polinomio no nulo con coeficientes racionales.

Números trascendentes: Un número trascendente (o trascendental) es un tipo de número irracional que no es raíz de ningún polinomio (no nulo) con coeficientes enteros (o racionales).

(Fuente: http://es.wikipedia.org)

en contraste con la numerabilidad de los números algebraicos, se dio a la par de la necesidad de formalizar una teoría de números reales en la cual participaron matemáticos como Cauchy, Weierstrass, Dedekind, Cantor e Hilbert, a finales del siglo XIX.

En la cuarta y última etapa del proceso de formalización del número real, se da a través de los sucesivos esfuerzos de muchos matemáticos desde la antigüedad griega hasta la época moderna, que se manifiestan en la constitución de una teoría de los números reales, no con la intención de dar cuenta de algunos elementos particulares, sino de fundamentar lógicamente las bases sobre las cuales se apoyarían las nuevas ramas de la matemática como el álgebra y el análisis, además de brindar cimientos firmes a conceptos como límite, continuidad de funciones, convergencia, entre otros (Mora y Torres, 2007, pp. 95).

2. ¿Por qué construir los números irracionales?

A principios del siglo XIX inicio un movimiento dentro de las matemáticas denominado "aritmetización del análisis", este tenía como propósito fundamentar el análisis (o lo que más tarde se conocería como análisis) sobre bases propias, es decir, que no tomaran elementos (nociones) de disciplinas diferentes a la matemática como movimiento y tiempo, y que no apelara a la evidencia geométrica para demostrar sus resultados. El matemático alemán Bernard Bolzano fue uno de los primeros en intentar reestructurar los cimientos del análisis, para ello llamó la atención sobre lo que a su juicio era deducir verdades matemáticas de resultados particulares o aplicados.

De ahí que, en varios de sus trabajos identificara como un factor decisivo en el proceso de aritmetización la construcción de los números reales (pese a que él no lo hace). Así lo deja ver en uno de sus resultados más conocido, *el teorema del valor* *intermedio*, donde se evidencia esta necesidad, puesto que la demostración de este teorema se sustenta en el dominio de los números reales (dominio que hasta ese momento no contaba con la fundamentación lógica necesaria para desligarlo de la geometría) (López, 1994, p.5).

El teorema del valor medio fue publicado en 1817 como parte de la obra: *Demostración puramente analítica del teorema: entre dos valores cuales quiera que dan dos resultados de signos opuestos se encuentra al menos una raíz real de la ecuación* escrita por Bolzano.

En este articulo plantea que: toda función continua de x que es positiva para *x=a* y negativa para *x=b*, debe anularse para cierto valor intermedio situado entre *a* y *b*. Posteriormente afirma que, “reflexionando de manera más precisa sobre ello” en el fondo esta proposición es idéntica al teorema sobre el que versa su memoria.

Los lectores encontraran que en la demostración puramente analítica del teorema, afirma la existencia de una raíz de la ecuación entre dos valores cualesquiera que dan dos resultados de signos opuestos. Bolzano utiliza un lema que establece la existencia de una cota superior mínima para un conjunto de números reales. Este lema esta formulado en estos términos:

> **Teorema.** *Sea M una propiedad que no se cumple para todos los valores de un intervalo, pero que se cumple para todos aquellos que son menores que u. Es posible entonces encontrar un valor U que es el mayor de los que cumplen con la propiedad de que M se cumple para todos los que son menores que U.*
>
> Si se toma una función continua y *m* y *m+n* son valores de los cuales *f(m)<0* y *f(m+n)>0*, entonces, por la propiedad de continuidad definida, es posible que existan valores *s* tales que *f(m+s)<0.* Sea *M* la propiedad que caracteriza a los valores s de que *f(m+s)<0.* Se sabe que la propiedad *M* no es válida para todos los valores. Sea *U* el valor cuya existencia asegura el teorema auxiliar. Si *f(m+U)<0*, entonces la propiedad de continuidad de la función permite asegurar que hay un valor *s*, suficientemente pequeño tal que *f(m+U+s)<0* y en ese caso *U* no sería el valor máximo asegurado por el teorema.

> Si ahora se supone que *f(m+U)>0,* entonces, por la misma razón de continuidad, existe un valor *s* que satisface *f(m+U-s)>0* y *U* nuevamente no tendría las propiedades aseguradas por el teorema auxiliar. Sólo resta la posibilidad de que *f(m+U)=0* lo que demuestra el teorema central (Cauchy, 1994, pp. 100-101) [5]

Sin embargo, en su trabajo sobre convergencia de series infinitas, Bolzano introduce para la sucesión de funciones con x fijo, $F_1(x)$, $F_2(x)$,..., $F_n(x)$,..., $F_{n+r}(x)$,..., el teorema que afirma que la diferencia entre su término n-simo $F_n(x)$ y todo termino ulterior $F_{n+r}(x)$, por alejado que este del n-esimo termino, es más pequeña que toda cantidad dada, si *n* sea tomado lo suficientemente grande; existe siempre, según Bolzano, una cierta *cantidad constante,* y una sola, a los que se aproximan cada vez más los términos de esta serie lo suficientemente. Su demostración no es completamente rigurosa, porque la determinación de esta «cantidad constante» exige una concepción clara del conjunto numérico al cual tienden los términos de la serie, es decir, los números reales.

2.1 Teorema del valor intermedio en Cauchy.

En el *Curso de Análisis* de Cauchy de 1821, se observa el intento por fundamentar el análisis definiendo de manera rigurosa sus objetos, desligándolos de aspectos tomados de otras disciplinas. También demostró con mayor rigor teoremas importantes para el análisis cuyas pruebas anteriores se basaban en evidencias geométricas y conceptos físicos.

Particularmente, la demostración de Cauchy del teorema del valor intermedio refleja la preocupación de Bolzano porque dicha prueba fuera "puramente analítica". Sin embargo, su demostración no es enteramente rigurosa, por que no

[5] Teorema demostrado por Bolzano, consignado como pie de página en el libro de Cauchy; Curso de análisis.

conocía el concepto de continuidad uniforme. Al definir la integral sin recurrir a la derivada de la función, Cauchy se vio obligado a demostrar la relación fundamental entre la derivada y la integral sirviéndose del teorema de la media. *Si f(x) es continua en un intervalo cerrado [a, b] y diferenciable en el abierto (a, b), entonces existe al menos un* x_0 *tal que* $a < x_0 < b$ *y* $f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$.

A continuación se citará el teorema del valor intermedio demostrado por Cauchy, consignado en su obra (Cauchy, 1994, p.98):

> **Teorema 4.** *Si la función f(x) es continua respecto a la variable x entre los límites* $x=x_0$, $x=X$, *y si se designa por b una cantidad indeterminada entre* $f(x_0)$ *y* $f(X)$, *se podrá siempre satisfacer la ecuación*
>
> $$f(x)=b$$
>
> *para uno o varios valores reales de x comprendidos entre* x_0 *y X.*
>
> **Demostración.** Para establecer la proposición precedente, basta hacer ver que tiene por ecuación
>
> $$y=f(x)$$
>
> cruzará una o varias veces a la recta que tiene por ecuación
>
> $$y=b$$
>
> en el intervalo comprendido entre las ordenadas que comprenden a las abscisas x_0 y X; es evidente que esto tendrá lugar bajo la hipótesis admitida. En efecto, al ser continua la función $f(x)$ entre los límites $x=x_0$, $x=X$, la curva que tiene por ecuación $y=f(x)$, y que pasa 1° por el punto correspondiente a las coordenadas x_0, $f(x_0)$; 2° por el punto correspondiente a las coordenadas X, $f(X)$ será continua entre estos dos puntos, y como la ordenada constante b de la recta que tiene por ecuación $y=b$ se encuentra comprendida entre las ordenadas $f(x_0)$, $f(X)$ de los dos puntos que estamos considerando, la recta pasará necesariamente entre estos dos puntos, lo que no se puede hacer sin reencontrar en el intervalo a la curva mencionada.

Aunque el anterior razonamiento pretende no recurrir a la evidencia geométrica como argumento para la demostración del teorema, es posible percibir que de forma implícita Cauchy utiliza argumentos de naturaleza geométrica para expresar la conclusión a la que llega, esto se aprecia en las líneas finales de la cita anterior. (Bergé, 2003, p.180).

También Cauchy presenta otra demostración de teorema anterior, la cual fue añadida en una nota final de su *Curso de análisis*. Esta demostración tiene un sentido aritmético (analítico) y con ella este matemático pretende subsanar la falta de rigor de la anterior. Demostrar el teorema 4 por un método directo y puramente analítico, que tiene la ventaja de dar la solución numérica de la ecuación

$$f(x)=b.$$

> **Teorema**. *Sea f(x) una función real de variable x que permanece continua respecto a esta variable entre los límites $x=x_0$, $x=X$. si las dos cantidades $f(x_0)$ y $f(X)$ son de signos contrarios se podrá satisfacer a la ecuación*
>
> *(1) $f(x)=0$*
>
> *para uno o varios valores reales de x comprendidos entre x_0 y X.* (Cauchy, 1994, pp. 99-100)

Para la demostración de ese teorema Cauchy divide en *m* segmentos iguales la distancia ($h=X-x_0$) que separa los límites entre los cuales la función permanece constante x_0 y X. luego obtiene una sucesión de valores cuyos términos son

$$f(x_0),\ f(x_0+\frac{h}{m}),\ f\left(x_0+2\frac{h}{m}\right), \ldots,\ f(x_0-\frac{h}{m}),\ f(X)$$

las imágenes de los puntos pertenecientes al intervalo [x_0 , X]. Conformar esta sucesión le permitió a Cauchy comparar dos a dos los términos de la misma hasta encontrar dos de ellos consecutivos que fueran de signo contrario $f(x_1)$ y $f(X')$, esto hizo posible establecer sus respectivas pre-imágenes x_1 y X', los cuales cumplirán con

$$x_0<x_1<X'<X, \text{ y}$$

$$X'-x_1=\frac{h}{m}=\frac{1}{m}(X-x_0).$$

Una vez determinados x_1 y X' Cauchy procedió nuevamente a encontrar entre ellos otros dos valores de x, x_2 y X'', cuyas imágenes tengan signos contrarios y que sean propios para verificar las condiciones

$$x_1<x_2<X''<X', \text{ y}$$

$$X''-x_2==\frac{1}{m}(X'-x_1)=\frac{1}{m^2}(X-x_0).$$

De manera semejante, obtuvo un aserie de valores crecientes de x, a saber

$$(2)\ \ x_0, x_1, x_2, \ldots$$

y una serie de valores decrecientes

$$(3)\ \ X, X', X'', \ldots$$

Los términos generales de las series (2) y (3) convergían a un límite común *a*. A su vez las imágenes de *x* por ser continua desde $x=x_0$ hasta $x=X$, conformaron las siguientes series

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$$

$$f(X), f(X'), f(X''), \ldots$$

que convergen igualmente al límite común *f(a)*; y como al aproximarse a este límite serán siempre de signos contrarios, la cantidad *f(a)*, es finita, y no puede ser diferente de cero. En consecuencia se verifica la ecuación

$$(1)\ f(x)=0,$$

al asignarle a la variable *x* el valor *a* comprendido entre x_0 y *X*.

$$(4)\ \ x=a$$

es una *raíz* de la ecuación (1).

A pesar de todo el rigor introducido por Bolzano y Cauchy en el análisis quedan todavía puntos por clarificar: la relación entre función continua y la función diferenciable no está comprendida perfectamente. La eliminación de frases vagas como "llegar a ser y sigue siendo más pequeña que toda cantidad dada" para ser reemplazadas por una formulación más aritmética, la elaboración de una definición rigurosa del concepto de "número", en una palabra, la aritmetización del análisis estaba por hacer.

Autores como Bergé (2003) mencionan las faltas de rigor en las que incurrieron (desde su perspectiva) tanto Bolzano como Cauchy en la demostración del mencionado teorema. La demostración del teorema del valor intermedio de Bolzano se basa en la proposición auxiliar que plantea la existencia del ínfimo del conjunto de los valores del intervalo en los que la función es positiva. Sin embargo, esta demostración descansa sobre el criterio de convergencia de sucesiones[6], hasta ese momento no demostrado (Bergé, 2003, p. 181). Con relación a la demostración alterna de la nota III del libro de *Análisis* de Cauchy, esta autora afirma: se encontró que la convergencia de dichas sucesiones a un límite común *a* y que la cantidad *f(a)* no podrá ser diferente de cero, gracias a la continuidad de la función. No obstante, no se justifica la existencia del límite común *a*, lo cual no puede probarse sin utilizar

---

[6] Después de determinar los valores extremos que toma la función y comparar los términos entre estos (dos a dos), se encuentran las pre-imágenes, tales que dos términos consecutivos sean de signos contrarios. De esta forma se obtienen las dos sucesiones de elementos del dominio (una de ellas decreciente y la otra creciente) y sus respectivas imágenes que forman igual número de sucesiones con características similares, así: "Por lo que acabarán por diferir de esos primeros valores en tan poco como se quiera. Se debe concluir que los términos generales de las series

(2) $x_0, x_1, x_2, \ldots$

y

(3) $X, X', X'', \ldots$

convergerán a un límite común, sea *a* este límite Puesto que la función *f(x)* es continua desde $x=x_0$ hasta $x=X$, los términos generales de las siguientes series

$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$

$f(X), f(X'), f(X''), \ldots$

convergerán igualmente al límite común *f(a)*" la completitud del dominio de la función (Bergé, 2003, p.180). Es decir, en la demostración se asume la existencia de *a* y *f(a)*, pero se desconoce su naturaleza (racional o irracional), en ese sentido parece que el argumento de la autora apunta a que esa naturaleza no se cuestionó, porque se asumía la continuidad de la función lo cual garantizaba que sin conocer mayores detalles de estos límites, estos existían.

Las objeciones de Bergé (por nombrar solo un autor) son un indicador de la importancia y necesidad de construir los números irracionales que se manifestó en los primeros años del siglo XIX. Durante esta época se centra la mirada en Bolzano quien llamó la atención acerca de cimentar desde la aritmética las bases de la matemática. Cauchy atendiendo a este planteamiento se encontró en medio de un "circulo vicioso" (tal vez sin saberlo) al proponer la existencia de ciertas cantidades (*a*, *f(a)*), en el marco de la demostración del teorema del valor medio, cuya naturaleza desconocía.

Las situaciones de Bolzano y Cauchy se dan en circunstancias en que la necesidad de construir $\mathbb{R}$ se imponía por si sola, puesto que el avance de las matemáticas específicamente de disciplinas como el cálculo y el análisis así lo demandaban. Pes a que Bolzano y Cauchy no lograron construir los reales, sus contribuciones sentaron las bases del movimiento denominado "aritmetización del análisis".

3. Las construcciones tempranas de los números reales: Weierstrass, Méray.

3.1 Los agregados de Karl Weierstrass

La contribución de Weierstrass a la aritmetización del análisis, partió de definir el número (entero positivo) como formado por varias unidades o agregados. De manera similar definió el numero racional, el cual estaba comprendido por una parte entera y sus partes exactas, estas expresadas de la forma 1/n, donde n es un entero. Los agregados considerados por Weierstrass fueron supuestos, y estos contenían un número finito de elementos. Posteriormente consideró los que contenían infinitamente más elementos y desecho aquellos cuyo valor era infinito[7] (Boniface, 2007, pp. 324-325).

> La pregunta que llevó a Weierstrass a interesarse por los elementos que posteriormente se conocerían como los números irracionales fue: si los agregados hechos infinitamente de muchos elementos y que tenían un valor finito eran nuevos números. Gracias a la demostración de la irracionalidad del numero *e*, se pudo responder favorablemente a este interrogante (Boniface, 2007, p. 325).

Weierstrass se encontró con que había infinitas formas de expresar un número, por esta razón introdujo una relación de equivalencia[8] y demostró que era simétrica y transitiva (Boniface, 2007, p. 324). La relación propuesta por este autor consistía en comparar dos magnitudes numéricas componente a componente, y estas serian iguales si cualquier componente del uno podía transformarse en un componente del otro y viceversa.

La caracterización de los reales para Weierstrass se da de acuerdo a una posible representación de un número real en fracciones sucesivas, los cuales llama agregados, de estos distingue entre finitos e infinitos y establece relaciones de orden entre ellos que permiten compararlos:

> La introducción de Weierstrass de los números reales positivos parte de "agregados" (*Agregate*) finitos o infinitos *a* de una fracciones positiva *1/n*, es decir, las colecciones de (posiblemente múltiples) copias de tales fracciones. Finitamente, muchos múltiplos positivos de varios *1/n* se

[7] Se considera que, cuando se habla de agregados cuyo valor es infinito, se está haciendo referencia a series divergentes.

[8] En el momento histórico en que se introdujo esta relación, no se planteo como una relación de equivalencia, o al menos no en esos términos.

> pueden transformar en un múltiplo de *1/d*, por un denominador común *d*. Efectivamente, esta definición de igualdad de agregados finitos y su ordenación lineal: $a_1 \leq a_2$ si a_1, es transformable por la fracción aritmética en un sub-agregado de a_2. En general, los agregados infinitos no admiten un común denominador. Para dos de ellos, Weierstrass define $A_1 \leq A_2$ de modo tal que cada agregado finito que es igual, en el sentido anterior, a un sub-agregado finito de A_1, también es igual a un sub-agregado finito de A_2. Si $A_1 \leq A_2$ y $A_2 \leq A_1$, se dice que estos dos agregados infinitos son iguales. Si todos los agregados finitos son menores o iguales a A, entonces A es igual al *infinito*. Todos los otros agregados (los finitos y los agregados infinitos que no son el *infinito*) constituyen un dominio de números reales positivos de Weierstrass. Los negativos se obtienen al trabajar con dos unidades opuestas entre sí; los números complejos etc. requieren más unidades (Petri y Schappacher, 2007, pp. 351-352)[9].

En este fragmento, se observa el tratamiento conjuntista dado por Weierstrass a los agregados infinitos, en la medida en que la relación de orden así definida puede verse como una relación de inclusión entre conjuntos. Puesto que hace una especie de partición de los agregados de tal suerte que le permita comparar un agregado finito dado con alguno de los sub-agregados de A_1 y si son iguales, por la relación de orden también lo será a un sub-agregado de A_2.

[9] Traducción libre del siguiente pasaje (el énfasis es del autor del presente trabajo): "Weierstrass's introduction of positive real numbers starts from finite or infinite "aggregates" (*Aggregate*) a of positive fractions $1/n$, i.e., collections of (possibly multiple) copies of such fractions. Finitely many positive multiples of various $1/n$ can be transformed into a multiple of $1/d$, for a common denominator d. This effectively defined equality of finite aggregates and their linear ordering: $a_1 \leq a_2$ if a_1 is transformable by fractional arithmetic into a subaggregate of a_2. Infinite aggregates will in general not admit a common denominator. For two of them, Weierstrass defined $A_1 \leq A_2$ to mean that every finite aggregate which is equal, in the above sense, to a finite subaggregate of A_1, is also equal to a finite subaggregate of A_2. If $A_1 \leq A_2$ and $A_2 \leq A_1$, the two infinite aggregates are said to be equal. If all finite aggregates are less than or equal to A, then A equals infinity. All other aggregates (the finite ones and those infinite aggregates which are not infinity) make up Weierstrass's domain of positive real numbers. Negatives are obtained by working with two units opposite to each other; the complex numbers etc. require even more units".

La caracterización que hace Weierstrass de los números reales parte de la representación de los enteros positivos como series convergentes (finitas o infinitas) las cuales se podían comparar termino a termino (en el caso de agregados finitos) o a partir de la relación de inclusión que podía establecerse entre los conjuntos formados por sus partes exactas (términos de la forma 1/n, n $\in \mathbb{N}$), dicha comparación le permitió a Weierstrass determinar relaciones de orden y equivalencia entre los agregados.

3.2 Los números ficticios de Charles Méray

Méray publicó en 1869 una memoria titulada *Remarques sur la nature des quantités par la condition de servir de limite à des variables données* (*Observaciones sobre la naturaleza de las cantidades definidas por la condición de servir de límite a variables dadas*) (Collette, 1998, p. 364). Teoría rigurosa de los números irracionales en la cual se indicaba que eran dos los principios fundamentales de todas las partes de la matemática donde intervenía la noción de límite. *El primero era que una sucesión creciente (decreciente) acotada superiormente (inferiormente) tiene límite. El segundo que una sucesión de Cauchy tiene límite* (López, 1994, p. 24). Puesto que en los trabajos realizados hasta ese momento por matemáticos como Bolzano y Cauchy (particularmente este último), se definía al número irracional como el límite de una sucesión de números racionales, sin tener demasiado en cuenta que la existencia misma del límite presupone una definición de los números reales (Collette, 1998, p. 364).

Respecto a los aportes hechos por Méray a la construcción de una teoría formal de los números reales en el siguiente fragmento tomado del volumen II de la obra de Collette (1998), nos muestra *grosso modo* en qué consiste el trabajo de este matemático:

> Méray emplea la palabra «número» para designar el número racional, y una cantidad μ es llamada «variable progresiva» si puede tomar un número infinito de valores sucesivos de un conjunto $\{\mu_n\}$; Méray define a continuación la convergencia de la variable progresiva μ en términos de $|\mu_{n+p} - \mu_n| \to 0$ con 1/n, cualquiera que sea el valor asignado al límite. Así, existen dos tipos de sucesiones convergentes. La primera verifica la condición de que existe un N tal que para todo ε>0 existe un n tal que para todo m ≤ n, $|N - \mu_m| < \varepsilon \to |\mu_{n+p} - \mu_n| \to 0$ con 1/n[10], la segunda corresponde a la condición siguiente: el N definido anteriormente no existe y μ no tiene límite pero puede verificarse $|\mu_{n+p} - \mu_n| \to 0$ con 1/n, las sucesiones convergentes sin límite se llaman «límites ficticios» y, en términos de números, Méray las llama «números ficticios» (Collette, 1998, p. 362).

Se observa pues que Méray introduce términos como el de número para designar elementos del conjunto de los racionales, y de variable progresiva, que es una sucesión $\{\mu_n\}$, de términos racionales con límite μ también racional. Pero hay sucesiones racionales de Cauchy sin límite racional (i.e. $(1 + 1/n)^n$ la cual es una sucesión de Cauchy, pero el límite al que tiende no es racional), o sucesiones que no son de Cauchy, en el primer caso Méray dice que tales sucesiones convergen hacia un límite ficticio, en el segundo caso el límite no existe.

La participación de Méray en la construcción de los reales se basó en la existencia de cantidades a las que él denominó límites ficticios o números ficticios, expresiones que empleó este matemático para referirse a los límites de las sucesiones de Cauchy que no eran racionales. Este hecho puede interpretarse como una petición de principio en tanto que se necesita conocer de antemano la naturaleza de esos límites ficticios, conceptos que no estaban lógicamente fundamentados hasta ese momento.

[10] Al parecer Méray al incluir el término (1/n) en su definición, quiere señalar que la diferencia entre los elementos de la sucesión (tomados dos a dos) a partir de cierto n, se acercará a cero de modo semejante a como lo hará (1/n), también a medida que n crezca.

3.3 Las construcciones de Cantor y Dedekind.

Las construcciones de Cantor y Dedekind, aparecen en la segunda mitad del siglo XIX, como resultados de la necesidad de fundamentar sobre bases solidas el análisis, y que los condujo hasta un círculo del cual solo se pudo salir con la construcción de una teoría formal de los números reales.

3.3.1 La construcción de Dedekind.

Alrededor de 1858, Dedekind se dio cuenta de que la aritmética de los números reales no poseía fundamento lógico adecuado. Más específicamente, se recurría a la evidencia geométrica para demostrar teoremas aritméticos, propios del análisis. Desde el punto de vista didáctico encontraba útil el recurrir a la intuición geométrica con el fin de no perder demasiado tiempo, pero en ningún caso este recurso, según Dedekind, podía considerarse científico.

Antes de abordar el estudio de los números irracionales. Dedekind presupone el desarrollo de la aritmética de los números racionales, pero llama la atención sobre ciertas características comunes que él juzga importantes entre los números racionales y los puntos de la recta numérica. A continuación, presenta su estudio de la continuidad de la línea recta, haciendo notar, desde el comienzo, el hecho de que en una línea recta L existe una infinidad de puntos que no corresponde a ningún número racional. Por consiguiente, la recta L es infinitamente más rica en puntos individuales que el dominio **R** de los números racionales en números individuales. Esto nos conduce, según dice, a completar **R** creando nuevos números de manera que el campo de los números adquiera la misma compleción o, como puede decirse, la misma continuidad que la línea recta.

Breve descripción de la construcción de Dedekind.

En su obra *Continuidad y números irracionales 1872*, Dedekind buscaba dar cuenta del concepto de una magnitud variable que tiende hacia un valor límite y demostrar un teorema que a su juicio es de suma importancia, el cual dice que toda magnitud que crece constantemente; pero no más allá de todo límite debe necesariamente tender hacia un valor límite. Además intentaba encontrar en la aritmética elementos que dieran cuenta de la continuidad, elementos sugeridos por la geometría. (Dedekind, 1872, p. 79)

Dedekind parte de la existencia de los números racionales, en consecuencia da por sentadas varias de sus propiedades:

> Este sistema, que quiero denotar [designaré por] con ***R***, posee ante todas las cosas la propiedad de ser cerrado y completo, rasgo [propiedad] que yo he señalado en otro lugar como característico de un cuerpo numérico, y que consiste en que las cuatro operaciones fundamentales siempre se pueden efectuar con cualquier par de individuos en ***R***, i.e., que el resultado de estas es siempre a su vez un individuo determinado en ***R***, si se excluye el único caso de la división por el número cero (Dedekind, 1872, p. 81).

Algunas de estas las caracteriza como la cerradura bajo la suma y el producto, además designa a este sistema como un dominio ordenado, i.e., establece las propiedades orden (=, <, >). Luego formula tres leyes que deben cumplir los términos como: propiedad transitiva de la desigualdad, densidad y define la cortadura que produce un número racional.

A continuación, compara el dominio numérico de los números racionales con los puntos de una línea recta; relaciona el “ser mayor o menor” (propiedades de orden) en el conjunto de los racionales con “estar a la derecha o izquierda” (en la recta geométrica) respectivamente. De manera similar ha como lo hace con los números racionales, formula tres leyes que los puntos de la recta geométrica deben cumplir: propiedad transitiva del posicionamiento, densidad de la recta geométrica y la partición de la recta por un punto.

Una vez establecidas estas comparaciones, Dedekind asevera que existen puntos en la recta que no tiene correspondencia con los racionales, y se apoya en los trabajos conocidos con relación a las longitudes inconmensurables. Por esta razón el autor advierte la necesidad de "crear" nuevos números tales que permitan dotar al dominio aritmético de la continuidad de la recta. En esta dirección, Dedekind afirma encontrar la esencia de la continuidad en el siguiente principio que puede resultar trivial (para algunos lectores), pero él lo considera como un axioma:

> Si se reparten todos los puntos de la recta en dos clases, tales que cada punto de la primera clase está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un único punto que determina esta partición de todos los puntos en dos clases, esta corte de la recta en dos partes (Dedekind, 1872, p. 85).

Una vez identificada la necesidad de completar el conjunto de los números racionales, Dedekind parte de la tercera ley enunciada para los números racionales, en el cual define la cortadura debido a un número racional, pero tomando en cuenta los resultados obtenidos a partir de comparar el dominio de **R** (los racionales) y la línea recta, identificando así puntos en la recta sin un número correspondiente; deduce que hay cortaduras que no son producidas por números racionales y cada vez que se da una de estas cortaduras se "crea"[11] un nuevo número.

A continuación, establece las propiedades de orden entre cortaduras a través de cinco casos. Con esto busca fundamentar la ordenación de todos los números reales, i.e., con este propósito analiza las relaciones entre dos cortaduras cualesquiera.

---

[11] Con relación al término "crear" empleado por Dedekind en su artículo *Continuidad y números irracionales*, Arboleda (2007) afirma:

> …Al margen de esta retórica sobre los números como creación libre del entendimiento, lo importante es que Dedekind concibe la extensión gradual de los sistemas numéricos como una introducción de objetos nuevos mediante una cascada de sucesivas abstracciones basadas en niveles previos de existencia y, cuestión más importante aún, reduciendo siempre tales existencias a predicaciones sobre los naturales (Arboleda, 2007, p. 224).

Por esta razón, al comparar este nuevo conjunto numérico con la recta, Dedekind encuentra que estos números no son suficientes para captar la riqueza conceptual contenida en ella, es por esto que nuevamente utiliza la noción de "crear" para dar origen a los números irracionales y darle a esta unión la completitud de la recta.

Además, basado en las propiedades características de las cortaduras introduce un supuesto en el que se apoyará para mostrar uno a uno los cinco casos mencionados antes:

> Ahora, para obtener una base sobre la que fundamentar la ordenación de todos los números *reales*, i.e., de todos los números racionales e irracionales, debemos investigar en primer lugar las relaciones entre dos cortadura cualesquiera (A_1, A_2) y (B_1, B_2), determinadas por dos números cualesquiera α y β. Es evidente que una cortadura (A_1, A_2) ya está completamente dada si una de las dos clases, p.ej., la primera A_1, es conocida, porque la segunda A_2 consiste en todos los números racionales no contenidos en A_1, y la propiedad característica de una tal primera clase A consiste en que, si el número a_1 está contenido en ella, entonces también contiene a todos los números menores que a_1 (Dedekind, 1872, p. 88).

Por tanto, una vez se tiene una de las clases en las que se divide la cortadura, por la propiedad característica de estas se puede establecer la naturaleza de los elementos que conforman la restante clase. De esta forma, para los siguientes cinco casos[12], Dedekind compara entre sí las dos primeras clases A_1 y B_1 de dos cortaduras cualesquiera (A_1, A_2) y (B_1, B_2). En el *caso I* considera cuando las primeras clases señaladas antes sean idénticas, en cuyo caso las segundas clases también lo serán (A_2 y B_2), y por ende los números que las determinan α y β. El *caso II*, supone que una de las clases iníciales A_1 ó B_1 difiera de la otra en un elemento. Lo hace partiendo de la existencia de un elemento $a'_1=b'_2$, tal que $a'_1 \in A_1$ y $a'_1 \notin B_1$ por lo que $a'_1 \in B_2$, pero todos los b_1 que pertenecen a B_1 están contenidos en A_1. Para todos los $a_1 \in A_1$ y $a_1 \in B_1$, deben cumplir con la condición de ser menores que a'_1 y así se establece que a'_1 es igual a α. Respecto a la otra cortadura, se tiene que, todos los $b_2 \in B_2$ deben ser mayores que b'_2, por ser este el elemento mínimo de B_2 de lo contrario,

[12] Pero solo se mencionaran los tres principales, puesto que los casos iv y v, son los recíprocos de los casos ii y iii, respectivamente.

todos los b_2 serian menores que a'_1 y pertenecerían a A_1 y por lo tanto a B_1, de ahí que $\beta = b'_2 = a'_1 = \alpha$.

En el *caso III*, se supone la condición en que las clases A_1 y B_1 difieren en dos elementos $a'_1=b'_2$ y $a''_1=b''_2$ que pertenecen a A_1 y no están contenidos en B_1, por la segunda ley enunciada en el capítulo 1 (densidad de los números racionales) hay infinitos términos entre a'_1 y a''_1 que pertenecen a A_1y no a B_1, en cuyo caso las cortaduras producidas por los números α y β son diferentes y $\alpha > \beta$. El *caso IV* retoma la condición tratada en el caso II, solo el elemento en que difieren las clases, se encuentra en B_1 y no en A_1. Finalmente el *caso V* de forma similar al *caso III*, presenta la situación en que las clases A_1 y B_1 difieren en dos elementos, solo que esta vez los elementos en cuestión están contenidos en B_1, entonces $\alpha < \beta$[13].

Hasta este punto Dedekind ha expuesto algunas generalidades de las cortaduras generadas por un número racional, pero cuando relacionó el dominio de los números reales con la recta geométrica, estableció que había puntos faltantes,

---

[13] Caso I:

(i) En este se considera que las cortaduras A_1 y B_1 son perfectamente idénticas.
$\forall a_1 \in A_1$ *se tiene* $a_1 \in B_1$ *y* $\forall b_1 \in B_1$ *se tiene* $b_1 \in A_1$, *entonces* $A_2 = B_2$

(ii) Cuando A_1 y B_1 no son idénticas
$\exists a'_1 \in A_1;\ a'_1 = b'_2$ *y* $b'_2 \notin B_1$, *entonces* $b'_2 \in B_2$. Luego, $\forall b_1 \in B_1$ *se tiene* $b_1 < a'_1 = b'_2$
$\therefore\ \forall b_1 \in A_1$

Caso II:

(i) $\exists a'_1 \in A_1;\ a'_1$ *es* único *y* $a'_1 \notin B_1$, *entonces* $\forall a_1 \in A_1,\ a_1 \in B_1$ *y* $a_1 < a'_1$
$a'_1 = max\{(A_1, A_2)\}$, con lo que $(A_1, A_2) = \alpha,\ \alpha = a'_1 = b'_2$

(ii) $\forall b_1 \in B_1,\ b_1 \in A1 ;\ b_1 < a'_1 = b'_2 \in B_2$
$\exists b_2 \in B_2;\ b'_2 < b_2$, *de lo contrario* $b_2 < a'_1$ *y* $b_2 \in A_1$*y* $b_2 \in B1$ luego
$b'_2 < b_2 \in B_2$, *y por consiguiente* $(B_1, B_2) = \beta,\ \beta = a'_1 = b'_2 = \alpha$,
Las cortaduras son inesencialmente diferentes.

Caso III:

(i) $\exists a'_1, a''_1\ ;\ a'_1 = b'_2\ y\ a''_1 = b''_2\ , a'_1, a''_1 \in A_1\ y\ a'_1, a''_1 \notin B_1$, entonces hay infinitos de ellos porque todos los infinitos números que están situados entre ellos están contenidos en A_1 pero no en B_1.
En este caso α y β correspondientes a estas cortaduras$(A_1, A_2) = \alpha$, $(B_1, B_2) = \beta$ son diferentes y se dice $\alpha > \beta$ o $\beta < \alpha$.

puntos que no correspondían a números racionales. Entonces supuso la existencia de un número *D* entero positivo, que no se pudiera expresar como el cuadrado de ningún entero, y lo acoto entre dos números enteros cuadrados ($\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2$). A continuación busca relacionar a *D* con los elementos de una cortadura (A_1, A_2), asume todos los elementos de A_2 serán mayores, en ese caso los elementos de A_1 serán menores o iguales a *D*, (puesto que todos los elementos de A_1 son menores que los de A_2 de acuerdo a la definición), de esta forma demuestra por reducción al absurdo la existencia de cortaduras generadas por irracionales. A partir de esta definición (demostración) se crean los números irracionales, los cuales completan la recta geométrica dotándola de continuidad, propiedad fundamental para el nuevo conjunto numérico que se estaba fundando (los reales).

Finalmente, Dedekind une el sistema de los números racionales y los recientemente creados irracionales, junto con sus propiedades. Estableciendo el sistema de todos los números reales, el cual constituye un dominio bien ordenado unidimensional, i.e., las leyes *I, II, III*[14] enunciadas para los números racionales y los puntos de la recta geométrica respectivamente, son validos para todos los números que pertenezcan al sistema de todos los números reales. Pero además de estas propiedades, el dominio $\mathfrak{R}$ posee continuidad, característica de la cual el autor buscaba dotar al conjunto de los números racionales y gracias a la cual el siguiente teorema es válido:

[14] I. Si $\alpha>\beta$, y $\beta>\gamma$, entonces también $\alpha>\gamma$. Queremos decir que el número β está situado entre los números α y γ.
II. Si α y γ son dos números diferentes, entonces hay siempre infinitos números diferentes que están situados entre α y γ.
III. Si α es un número determinado, entonces todos los números del sistema $\mathfrak{R}$ se subdividen en dos clases, $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase $\mathfrak{A}_1$ comprende todos los números α_1, que son $< \alpha$, la segunda clase $\mathfrak{A}_2$ comprende todos los números α_2, que son mayores que α.

> Si el sistema $\mathfrak{R}$ de todos los números reales se subdivide en dos clases, $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ tales que cada numero α_1 de la clase $\mathfrak{A}_1$ es menor que cada numero α_2 de la clase $\mathfrak{A}_2$, entonces existe un y solo un numero α por el cual esa división está determinada (Dedekind, 1872, p. 90).

A través de este teorema se extiende la definición de cortadura a un dominio más amplio, en el cual es posible su formulación y posterior demostración gracias a la *continuidad*, propiedad del nuevo dominio numérico ($\mathfrak{R}$).

Un factor determinante en la construcción de Dedekind fue visualizar a la continuidad (completitud) como una propiedad fundamental del nuevo dominio numérico que se proponía construir, propiedad característica de la línea recta y que debió ser extrapolada del contexto geométrico al aritmético. El primer paso para dicha extensión se dio al redefinir los números racionales a través de cortaduras y compararlos con la línea recta, situación que reveló la existencia de puntos que no tenían representación racional. A continuación Dedekind demostró aritméticamente la existencia de cortaduras generadas por números no racionales (irracionales), a los cuales dotó de las propiedades que poseían los racionales (algunas) y dedujo que la unión de los números racionales e irracionales formaría un nuevo dominio llamado los reales, conjunto dotado de completitud y gozaba de todas las propiedades heredadas de los conjuntos que lo conformaban.

3.3.2 La construcción de Cantor.

Uno de los problemas importantes durante la segunda mitad del siglo XIX consistía en establecer la unicidad del desarrollo trigonométrico[15] de algunas series, a

---

[15] Este trabajo una extensión del teorema según el cual una función no puede ser desarrollada más que de una sola manera en serie trigonométrica.
Cantor demuestra en el *Journal de Crelle* t. 72, pág. 139 que dos series trigonométricas:
$\frac{1}{2}b_0 + \sum(a_n + \sin nx + b_n + \cos nx)$ y $\frac{1}{2}b'_0 + \sum(a'_n + \sin nx + b'_n + \cos nx)$
tales que, para todos los valores de *x*, convergen y tienen la misma suma, tienen los mismos coeficientes; después mostró, en una nota relativa a este trabajo, que este teorema sigue siendo

propósito de las series generales, es decir, aquellas cuyos coeficientes no tienen necesariamente la forma integral de Fourier, (Collette, 1998, p. 369). Este parece ser el motivo que condujo a Cantor, a buscar construir una teoría sólida (desde el punto de vista lógico) para los números reales y que le permitiera dar cuenta de los resultados a los que había llegado en esta dirección.

En su artículo *Extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométrica* de 1872, Cantor considera al sistema *A* constituido por el conjunto de los números racionales (el cual considera como dado) incluido el cero. Continúa construyendo varias sucesiones ((1) $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$,) y ((1') $a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots$,) de Cauchy o fundamentales cuyos límites[16] denota con las letras *b* y *b'* respectivamente; luego identifica tres casos al comparar dichas sucesiones y sus límites: compara el límite de una sucesión dada con un número racional arbitrario *a*, de dicha relación resultan tres casos mutuamente excluyentes; $a = b$, $a < b$ o $a > b$.

Se designa por *B* el sistema de todas las de las magnitudes numéricas *b*; las operaciones elementales de los racionales se extienden a la unión de A y B. El sistema A engendra al sistema B y la unión de estos engendra mediante el mismo procedimiento (se define una sucesión de Cauchy con elementos del dominio $A \cup B$ cuyo límite sea un *c* tal que $c \in C$) el sistema C, a este nuevo sistema se extienden las

verdadero, si, para un número finito de valores de *x*, se renuncia, sea a la convergencia, sea a la igualdad de las sumas de las dos series.
La extensión que se quiere considerar consiste en que para un número infinito de valores de *x* en el intervalo [0… (2π)] se puede renunciar a la convergencia o a la concordancia de las sumas de las series, sin que el teorema deje de ser verdadero.

[16] Es importante aclarar que Cantor no emplea la palabra *límite*: en el artículo citado se habla del *símbolo asociado* a determinada sucesión, y se denota por b, b', b'', etc. No se emplea directamente este término porque, al afirmar que *b* es el límite de la sucesión $\{a_n\}$, se está incurriendo en una petición de principio: se supone que la sucesión converge, lo cual no he probado y, que en efecto, sería cierto si se considera *a priori*, la completez. No obstante, se usará el término límite por comodidad.

definiciones de orden, equivalencia y las operaciones elementales entre elementos del conjunto C y aquellos de A∪B.

Cantor considera por este medio al conjunto de los números reales designándolos como límites de sucesiones fundamentales dadas mediante una “ley”, a este nuevo sistema lo ha llamado B, los sistemas obtenidos mediante este mismo proceso serán isomorfos a B. Otra de las características que se dan entre estos sistemas es la de poder igualar los términos de un sistema a otro, i.e., un elemento *a* a un *b*, pero no un *b* a un *a,* un *b* a un *c* y *c* a *b* y en adelante todos los conjuntos derivados[17]cumplen con esta condición excepto el A. Aunque la identidad entre los sistemas no implica la identidad entre los elementos, sino una determinada relación entre los términos de las sucesiones que los originan.

Posteriormente, establece una relación entre la línea recta y los términos de los diferentes sistemas (teniendo en cuenta las operaciones que les dieron origen). Cantor enuncia un axioma con el cual pretende completar la conexión entre los sistemas de magnitudes numéricas (definidas en el primer capítulo de su obra) y la geometría de la línea recta, este axioma dice:

> A cada magnitud numérica le corresponde también, recíprocamente, un punto determinado de la recta, cuya coordenada es igual a esta magnitud numérica en el sentido expuesto en este (capítulo) (Cantor, 1871, p. 5).

El concepto de cardinalidad en la obra de Cantor.

La noción de cardinalidad en Cantor es crucial en su teoría de conjuntos. Esta aparece de forma explícita como parte de las ideas preliminares en un artículo

[17] Los conjuntos derivados, son los conjuntos de puntos límites. En este sentido lo que se quiere dar a entender en esta afirmación es la manera como una sucesión de puntos del conjunto A tiene un límite en el conjunto B y una sucesión de puntos del conjunto B tiene un límite en C y viceversa, pero entre cualquier otro conjunto de puntos y A no se da esta relación inversa.

titulado *Una contribución a la teoría de conjuntos*, publicado en 1877. Esta se defina como una correspondencia biunívoca que se establece entre dos conjuntos bien definidos A y B, si esta relación se da, se dice que A y B son equipotentes o que tienen igual cardinalidad.

Puesto que la noción de cardinalidad supone, en cierto sentido, poder comparar los conjuntos dados A y B, es necesario conocer su naturaleza. Siguiendo este planteamiento, Cantor define la *parte integrante* de un conjunto[18] (lo que se conoce actualmente como subconjunto), esto le permite establecer cuándo la cardinalidad de un conjunto es mayor o menor que la de otro, de lo cual se desprenden dos casos: (i) A tendrá la misma cardinalidad que un subconjunto de B ($\#(A) < \#(B)$) o (ii) B tiene la misma cardinalidad que un subconjunto de A ($\#(B) < \#(A)$). La cardinalidad descrita de este modo, en el contexto de los conjuntos finitos, hace referencia al número de elementos que pertenece al conjunto y la equipotencia se entiende como la igualdad en el número de elementos de dos conjuntos finitos.

Ahora bien, entre los conjuntos finitos se cumple que la cardinalidad de un subconjunto es menor que la del conjunto que lo contiene. Sin embargo, “este hecho no tiene lugar en los conjuntos infinitos, i. e., compuestos de un número infinito de elementos” (Cantor, 1877, p. 23). Entonces, la noción de cardinalidad extrapolada a los conjuntos infinitos no puede entenderse igual:

> Sólo de la circunstancia de que un conjunto infinito *M* sea una parte integrante de otro *N* o de que se puedan hacer corresponder uno a uno los elementos de *M* a una parte integrante de *N*, mediante una operación unívoca [biunívoca], no se puede en modo alguno concluir que su potencia sea menor que la de *N*; esta conclusión no está justificada, más que si se sabe que la potencia de *M* no es igual a la de *N*; del mismo modo, siendo *N* una parte integrante de *M* o tal que sus elementos correspondan uno a uno unívocamente [biunívocamente] a una parte

[18] Llamaremos *partes integrantes* [en el original Cantor dice *Bestandteil* que podría ser traducida por “parte propia"] de un *conjunto* a todos los otros conjuntos *M'*, cuyos elementos sean al mismo tiempo elementos de *M* (Cantor, 1877, p.23).

> integrante de *M*, esta circunstancia no es suficiente para que la potencia de *M* sea mayor que la de *N* (Cantor, 1877, p. 23).

Al extender la noción de cardinalidad al dominio de los conjuntos infinitos, la posibilidad de comparar el número de elementos de dos conjuntos dados a través de la enumeración de los mismos se ve obstaculizada por la idea del infinito, la cual exige un cambio. Es precisamente en este marco, donde Cantor partiendo del conjunto de los naturales como referencia[19], se intereso en probar si este conjunto podía ponerse en correspondencia biunívoca con otros conjuntos numéricos. Así es como llegó a demostrar que el conjunto de los números naturales es equipotente con el de los números pares ($\#(N) = \#(2N)$), entre otros[20]. Pero, como lo demostró luego, este tipo de correspondencia no puede ser establecida siempre, como es el caso de los naturales y los reales, demostrado por Liouville en 1851.

3.4 La noción de cardinalidad y su importancia en la obra de cantor

En la introducción al artículo *Sobre una propiedad del sistema de todos los números reales algebraicos*, Cantor pretende demostrar la correspondencia biunívoca entre los números reales algebraicos y los enteros positivos. Para ello establece un criterio que le permite organizar en forma de lista los números reales algebraicos. Además, determina apoyado en este resultado la razón por la cual no se puede establecer

[19] La sucesión de los números enteros positivos *v* brinda, como es fácil mostrarlo, la *mínima* de todas las potencias que se presentan en los *conjuntos infinitos*. No obstante la *clase* de los conjuntos que tienen esta mínima potencia es *extraordinariamente rica* y *extensa*. (Cantor, 1877, p. 24)

[20] A propósito del interés de Cantor por probar si el conjunto de los números naturales se podía poner en correspondencia con otros conjuntos numéricos infinitos, hoy se sabe que es posible establecer tales correspondencias entre los naturales y cualquier subconjunto infinito de los racionales, incluso con los reales algebraicos.

correspondencia uno a uno entre los números enteros positivos y los números reales que constituyen un sistema continuo de números.

El autor define la altura ((3) $N=n-1+|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|$)[21] de un número real algebraico ω, como la ley que le permitirá disponer a los números del sistema (ω) en una sucesión infinita ((2) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\upsilon, \ldots$), sin omitir ningún número de dicho sistema. Así logra demostrar la correspondencia existente entre los dos conjuntos numéricos antes mencionados. A continuación, los números de la sucesión ((4) $u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$) puesto que están agrupados de acuerdo a una ley determinada deben ser reales algebraicos, entonces lo que el autor plantea es que "Se puede, en cada intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ dado de antemano, determinar un número η que no se halla en la sucesión (4); existe, por consiguiente, una infinidad de tales números".

La demostración emplea el método de los intervalos encajados donde se parte del intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, se van tomando elementos α', β' que pertenecen a la sucesión (4) y al intervalo, a demás de cumplir $\alpha' < \beta'$, según esta misma ley se van formando intervalos subsiguientes[22] de tal suerte que los términos $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$, forman una sucesión creciente, de forma similar los términos $\beta, \beta', \beta'', \ldots$, forman una sucesión decreciente. Entonces sólo pueden presentarse dos casos:

i. El número de intervalos que se forma es finito y puesto que en el último de estos (α^ν, β^ν) hay máximo un número de la sucesión (4) se puede tomar un número η que no pertenece a la sucesión $(\eta = \frac{\alpha^\nu+\beta^\nu}{n}; n \in \mathbb{N})$ y, así el teorema queda demostrado (Valencia, 2009, p.11).

[21] Algunos ejemplos: (i) $9x^5+3x^3+7x+5$, (ii) $-9x^5+3x^3-4x^2+7x-5$, la altura de (i) y (ii) N=28 y N=31 respectivamente. De acuerdo con el criterio de la altura se ubicarían en sitios diferentes.

[22] Intervalos encajados:

$$(\alpha,\beta) \supset (\alpha',\beta') \supset (\alpha'',\beta'') \supset \cdots \supset (\alpha^{\nu-1},\beta^{\nu-1}) \supset (\alpha^\nu,\beta^\nu) \supset \cdots$$

ii. El número de intervalos que se forma es infinito, entonces la sucesión creciente α, α', α'', …, tiene un cierto límite, de manera similar la sucesión decreciente β, β',β'', …. Si los límites son iguales, por la definición de los intervalos este límite corresponde a un $\alpha^{\infty} = \lim_{v\to\infty} \alpha^{v} = \beta^{\infty} = \lim_{v\to\infty} \beta^{v} = \eta$ que no puede estar incluido en la sucesión (4). Pero si ocurriera que el límite de la sucesión de los α, α', α'', …,es menor que el de la sucesión β, β',β'', …, $\alpha^{\infty} = \lim_{v\to\infty} \alpha^{v} < \beta^{\infty} = \lim_{v\to\infty} \beta^{v}$ entonces η estaría entre estos límites o seria igual a uno de ellos $\eta \in (\alpha^{\infty}, \beta^{\infty})$, en cualesquiera de los dos casos pertenecería a la sucesión (4) (Valencia,2009, p.12).

Finalmente, Cantor plantea una proposición basada en las proposiciones anteriores que le permiten diferenciar los números trascendentes de los reales algebraicos.

> Sea v_1, v_2,. . ., v_v,. . . una sucesión finita o infinita de números linealmente independientes, i.e., de números tales que no existe entre ellos ninguna ecuación de la forma
>
> $$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$$
>
> siendo los coeficientes a_1, a_2,. . . , a_n enteros que no son al mismo tiempo nulos; concibamos el sistema (Ω) de todos los números - que puedan ser representados mediante funciones racionales con coeficientes enteros de los números dados v_1, v_2, . . . , v_v, . . . , entonces, en todo intervalo (α...β), hay una infinidad de números que no están incluidos en el sistema (Ω) (Cantor, 1873, pp. 18-19).

Este teorema permite afirmar que la no numerabilidad de los reales se debe a los reales trascendentes, cuya cardinalidad s superior a la de los números naturales. Determinar si la cardinalidad de $\mathbb{R}$ correspondía a $\aleph_1$, el número transfinito que le sigue a $\aleph_0$ (el símbolo que representa la cardinalidad de $\mathbb{N}$), es lo que se conoce como la hipótesis del continuo, problema propuesto inicialmente por Cantor.

3.5 El papel de las fracciones continúas en el trabajo de cantor

Como se mencionó brevemente en el inicio del presente capítulo, las fracciones continuas desempeñaron un papel importante durante el siglo XIX en la aproximación de raíces y algunos números trascendentes (al menos los conocidos). En el segundo capítulo del artículo *Una contribución a la teoría de conjuntos*, Cantor emplea este método como paso auxiliar en la representación un número irracional, puesto que le garantizaba la unicidad de tal representación. El documento inicia con la definición de conjuntos equivalentes o conjuntos con la misma potencia. En el caso de conjuntos infinitos, la potencia se relaciona con el número de elementos. Por consiguiente, los subconjuntos propios (parte integrante) de conjuntos finitos tienen una potencia menor que la del conjunto con el cual comparten elementos. Mientras que en los conjuntos infinitos la potencia de sus subconjuntos propios no necesariamente es menor que la del conjunto en el cual están incluidos. Para ejemplificar este punto, Cantor menciona algunos conjuntos en los cuales se puede observar este comportamiento, entre ellos se encuentran los naturales y los números pares, los naturales y los números reales algebraicos (ω). La primera de estas relaciones no la demuestra, mientras que la demostración de la segunda constituye la idea principal en su artículo *Sobre una propiedad del sistema de todos los números reales algebraicos,* tratado anteriormente.

Un poco más adelante en el desarrollo de este documento Cantor hace explícita su intención:

> Como lo mostrará nuestro trabajo, se pueden incluso determinar los elementos de un *conjunto continuo* de extensión *n* mediante una *única* coordenada real y continua por medio de una operación *unívoca* [biunívoca]. Se sigue de ahí que, si no se hace ninguna suposición con respecto a la *naturaleza* de la *correspondencia*, el *número* de las coordenadas reales continuas e independientes que pueden servir para la determinación unívoca de los elementos de un *conjunto continuo de extensión n*, puede ser *cualquier número dado m* y por consiguiente *no se le puede* considerar como *carácter invariable* de un conjunto dado (Cantor, 1877, p. 25).

Cantor plantea la posibilidad de establecer una correspondencia entre conjuntos continuos de extensiones (dimensiones) diferentes, particularmente uno de extensión n y otro unidimensional: demostrar que es posible establecer tal correspondencia es la base este artículo.

De ahí que, exprese esta intención a través de los teoremas A[23] y B. Este último es la generalización del primero, y se constituye en el objetivo principal de esta obra.

> (B). “Se puede hacer corresponder de una manera completa [exhaustiva] y unívoca [biunívoca] un conjunto continuo de dimensión n a un conjunto continuo de una dimensión; dos conjuntos continuos, uno de dimensión n y el otro de dimensión m, siendo n>=<m, tienen la misma potencia; los elementos de un conjunto continuo de n dimensiones pueden ser determinados unívocamente por una única coordenada t continua y real; pero también pueden ser determinados unívocamente por un sistema de m coordenadas continuas $t_1, t_2, \ldots, t_n$." (Cantor, 1877, p. 26).

Pero, antes de demostrar el teorema anteriormente enunciado, recurre a un teorema que permite representar un número irracional $0 < e < 1$ bajo la forma de una fracción continua infinita. Una vez se cuenta con esta herramienta, se definen *n* magnitudes variables e independientes en el intervalo (0, 1) y se define una variable más cuyos términos conservan cierta relación de dependencia con las anteriores, de esta manera se demuestra el teorema C[24]. No obstante, en el desarrollo del artículo enuncia el teorema D, el cual se apoya en la relación que se puede establecer entre las n+1 magnitudes variables designadas en el teorema C y las magnitudes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *y* t. como se consta en el siguiente fragmento:

> Pues una vez demostrado este teorema, (aplicándolo) representemos como correspondientes a las $n+1$ magnitudes variables designadas en el §2 por $e_1, e_2, \ldots, e_n$ y d, las otras variables $x_1, x_2, .$

[23] (A). “*Sean* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *n magnitudes reales, variables, independientes entre sí, de las que cada una puede tomar todos los valores* ≥ 0 *y* ≤ 1, *y sea t otra variable incluida en los mismos límites* $(0 \leq t \leq 1)$, *entonces se puede hacer corresponder esta magnitud t al sistema de las n magnitudes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *de tal modo que a cada valor determinado de t pertenece un sistema de valores determinados* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *y, viceversa, a cada sistema de valores determinados* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *un cierto valor de t*.”

[24] *(C). ’’Sean* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *n magnitudes variables independientes entre sí, de las que cada una puede tomar todos los valores numéricos irracionales del intervalo (0…1) y sea d otra variable irracional con los mismos límites, entonces se pueden hacer corresponder de una manera completa [exhaustiva] y unívoca [biunívocamente] esta magnitud d y el sistema de las n magnitudes* $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*”*

. . , x_n y t, asociadas a las primeras mediante una operación unívoca [biunívoca], pudiendo tomar cada una de las últimas variables, sin restricción, todos los valores reales ≥0 y ≤1. Puesto que hemos establecido una correspondencia completa [exhaustiva] y unívoca [biunívoca] entre la variable d y el sistema de las n variables $e_1, e_2, \ldots, e_n$ en el §2, se obtiene de esta manera una asociación completa [exhaustiva], determinada y unívoca [biunívoca] de la variable continua t y del sistema de las n variables continuas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lo cual demostrará la verdad del teorema (A). (Cantor, 1877, p. 27)

3.6 La caracterización de los irracionales a través de las fracciones continuas.

3.6.1 Fracciones continuas

Al realizar el rastreo histórico de las fracciones continuas, las diferentes fuentes coinciden en señalar el algoritmo de Euclides (para hallar el máximo común divisor) como la prefiguración del algoritmo que se usa modernamente para calcular las fracciones continuas. Inicialmente se empleo en la aproximación de raíces y de números trascendentes como π y e, y en la solución de ecuaciones diofanticas.

Dentro de los primeros intentos por formalizar la teoría de las fracciones continuas, se encuentra a Fibonacci y Bombelli (quién escribió *L'Algebra parte maggiore dell'aritmetica divisa in tre libri*, en el cual da a conocer un método para la extracción de raíces cuadradas). Pero es a Pietro Antonio Cataldi, a quién se le da el crédito por descubrir las fracciones continuas. Aunque siguió el método de Bombelli; para extraer raíces cuadradas, incorporó notación y algunas propiedades (Brezinski, 1991, p.65).

A Wallis se le atribuye la denominación de fracción continua a la aplicación sucesiva del algoritmo de Euclides. Asimismo, calculó lo que modernamente sería la integral $\int_0^1 (1-x^2)^i \, dx$ cuando $i=1/2$, a través de su método de interpolación, y así solucionar el problema de la cuadratura del círculo. Pero sólo logró obtener el producto infinito

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}$$

En su trabajo *Arithmetica infinitorium* publicado en 1655, denota $\frac{4}{\pi}$ por □ y utiliza una palabra en latín "*latus*" para describirlo. Igualmente, se le concede haber encontrado la fórmula de recurrencia para los convergentes de una fracción continua, dio el primer paso hacia una prueba de convergencia al señalar que los convergentes de la fracción continua de Brouncker[25] son sucesivamente más grandes y más pequeños que □ y afirmó (sin prueba) que el proceso convergía.

No obstante, la edad de oro en el desarrollo de las fracciones continuas tuvo que esperar hasta el siglo XVIII. Período en el cual los trabajos de Euler, Lambert y Lagrange, impulsaron considerablemente esta teoría. Dentro de los aportes de Euler, se encuentra el libro titulado *De fractionibus continuis* publicado en 1737. Además, demostró que todo número racional se puede representar a través de una fracción continua finita, mientras que un número irracional da lugar a una fracción continua infinita. En su célebre libro *Introductio in analysin infinitotrium* publicado en 1748, se encuentra la primera exposición extensa y sistemática de la teoría de fracciones continuas, muestra como transformar una fracción continua en serie y de manera reciproca demuestra que una serie infinita se puede transformar en una fracción continua, cuyas convergentes son idénticas a las sumas parciales de la serie (Brezinski, 1991, p.98). Edmond Nicolas Laguerre y Thomas Jan Stieltjes, retomaron las ideas de Euler y fundaron la teoría analítica de las fracciones continuas.

El interés de Lambert en las fracciones continuas se debió a consideraciones prácticas, esta representación le proporcionó los elementos para tratar problemas como; la rapidez de convergencia de las funciones trigonométricas expresadas a través de series infinitas y la pequeñez del intervalo de convergencia de *log (1+x)*.

[25]El método de Brounker se puede consultar en: SANG, E. On the extension of Brouncker's method to the comparison of several magnitudes. Trans. Edinburgh Roy. Soc, A) 26 A869 - 1870), 59-67.

Además dio el primer paso en encontrar la respuesta negativa de la cuadratura del círculo con regla y compás.

Lagrange, por su parte utilizó el método de las fracciones continuas en *Nouvelle méthode pour approcher des racines des áquations numériques*[26]. Este algoritmo aparece en el capítulo III de *Résolution des équations numériques* (1879). Posteriormente, Cantor empleó este método para representar los números irracionales, porque a diferencia de las fracciones decimales, la representación de un real en fracción continua es única (como se expresa en el teorema 2 citado en el siguiente numeral).

3.6.2 Ventajas de esta representación.

El 20 de junio de 1877 Cantor envió una carta a Dedekind, en la que anexaba una demostración de su más reciente e inédito trabajo en teoría de conjuntos, con esta prueba Cantor buscaba dar fuerza a su postura según la cual se podía poner en correspondencia univoca dos dominios continuos de diferente dimensión. El caso considerado por Cantor planteaba la correspondencia entre un dominio continuo de dimensión ρ y otro de una sola dimensión. Cantor formuló a Dedekind el siguiente interrogante:

> ¿Es entonces posible coordinar las ρ variables $x_1, x_2, \dots x_\rho$ con la *y*, de modo que a cada sistema de valores concreto $(x_1, x_2, \dots x_\rho)$ le corresponda un cierto valor *y*, y también a la inversa, a cada valor concreto *y* le corresponda un y sólo un sistema de valores $(x_1, x_2, \dots x_\rho)$? (Ferreirós, 2006, p. 189).

Dos días después (22 de junio) Dedekind respondió la carta de Cantor, en ella le comunica que hay problemas en el método empleado para representar de manera única los números irracionales por medio de fracciones decimales infinitas (ver anexo 2). Cantor considera acertada la observación de Dedekind, aunque algo

[26] Traducción libre: Nuevo método para aproximar las raíces de las ecuaciones numéricas.

desafortunada pues afecta la demostración. Sin embargo, no el asunto de fondo (la correspondencia entre dominios continuos de diferente dimensión). Esto llevó a Cantor a emplear otra demostración en la que había trabajado y en la cual utilizaba fracciones continuas, las cuales le permitían representar de manera única los números irracionales, como lo expresa en su artículo titulado; una contribución a la teoría de conjuntos. Aunque en el mencionado artículo no se explicita el (o los) teorema(s) en el (los) que se apoya, en la búsqueda antecedentes se encontraron los siguientes resultados (una versión moderna) que pueden ser estudiados por el lector:

Teorema 1.
Toda fracción continua periódica terminada representa un único número racional positivo, y todo número racional positivo es el único representado únicamente por una fracción continua periódica terminada donde el último denominador parcial es ≥ 2 (o donde el último denominador parcial es 1).

Teorema 2.
Todo fracción continua periódica no terminada representa converge un número irracional positivo, y para todo número irracional positivo hay una única fracción continua regular no terminada convergiendo a ese número[27].

3.7 La noción de número irracional en Cantor

[27] Theorem 1 Every terminating regular continued fraction represents a unique positive rational number, and every positive rational number is uniquely represented by a terminating regular continued fraction where the last partial denominator is ≥ 2 (or where the last partial denominator is 1).

Theorem 2 Every non-terminating regular continued fraction represents (converges to) a positive irrational number, and to every positive irrational number there is a unique, non-terminating regular continued fraction converging to that number (Lorentzen, 1992, pp. 404)

3.7.1 ¿Qué es un irracional para Cantor?

En la teoría de Cantor, las magnitudes numéricas (números irracionales) no tienen un objeto en ellas mismas, "no intervienen más que como elementos de teoremas que tienen una cierta objetividad, e. g., del teorema, de que la magnitud numérica sirve de límite para la sucesión correspondiente" (Cantor, 1871, p. 4). Estas magnitudes numéricas son los limites de algunas sucesiones fundamentales denotados por signos particulares *b, b', b'',...,* diferentes adscritos a sucesiones diferentes, pero de la misma especie, tal que la reunión de ellos forma un conjunto *B* y las equivalencias que se puedan establecer entre ellas no hace referencia a la igualdad entre estas magnitudes, sino a la manera como se relacionan los elementos de las sucesiones que ellos representan.

Lo que le permitió a Cantor fundamentar dicha identificación entre número y magnitud, fue el teorema demostrado por Heine, el cual dice:

> "cuando b es el límite de la sucesión de Cauchy en Q, entonces $b - a_v$ se hace infinitamente pequeño a medida que aumenta v. Que a su vez presupone los lemas siguientes: si $b > 0$, entonces existe un número racional a tal que $0 < a < b$, y, si (a_v) es una sucesión de Cauchy en Q, entonces (a_v) es una sucesión de Cauchy en R" (comentario de Bares y Climent en Cantor (1872, p. 11))

3.7.2 Propiedades de los irracionales en la obra de Cantor.

En la teoría de proporciones, consignada en el libro VII de los *Elementos* de Euclides, se pueden encontrar algunos fundamentos que vistos a través del lente de los racionales pueden considerarse como prefiguraciones de estos números. Los matemáticos de épocas posteriores no problematizaron la existencia de los números racionales, por esta razón se observa que en las diferentes construcciones de los números reales, independientemente del método, este conjunto se toma como punto de partida. Cantor en la búsqueda de "sacar a la luz las diversas maneras de las que se pueden comportar las magnitudes numéricas en número finito o infinito" (Cantor, 1872, p. 1), construye un conjunto de signos (b, b', b'',..., números

$$a_1, a_2, \ldots$$

irracionales) que junto con los números racionales conforman el nuevo dominio numérico: los números reales.

La prueba de la influencia de las propiedades algebraicas y de orden de los racionales en los irracionales, está en la manera en que Cantor definió algunas propiedades de estos últimos. Dentro de las propiedades identificadas en algunos de los trabajos de Cantor se encuentran:

- Densidad (de los racionales)

  Esto se percibe cuando se organiza "mediante una ley de sucesión infinita de números racionales", compara los términos de dicha sucesión dos a dos de tal *modo que la diferencia entre ellos se haga infinitamente pequeña* (Cantor, 1872, p. 2), pero no necesariamente cero, puesto que no en todos los casos el límite de la sucesión es racional.

- Propiedad de orden

  Una vez definido el nuevo sistema B, límites de sucesiones racionales, se procede a comparar los términos de dos sucesiones dadas cuyos límites se representan con los signos b y b' respectivamente. A partir de las relaciones de *orden* que pueden establecerse entre los elementos de ambas sucesiones se concluye que estos signos también los cumplen. Luego, se establecen estas mismas relaciones de orden entre un elemento del sistema B y un racional dado.

- Operaciones elementales

  Cantor extiende las operaciones elementales del conjunto de los números racionales (adición, multiplicación y división) a los símbolos del sistema B:

  > Sean en efecto *b*, *b'*, *b''* tres magnitudes numéricas del sistema *B*, entonces las fórmulas:
  >
  > $$b \pm b' = b'', bb' = b'', \frac{b}{b'} = b''$$
  >
  > Sirven para expresar que entre las sucesiones correspondientes a los tres números *b*, *b'*, *b''*:
  >
  > $$a_1, a_2, \ldots$$

$$a'_1, a'_2, \ldots$$
$$a''_1, a''_2, \ldots$$

se verifican las respectivas relaciones:

$$lím(a_n \pm a'_n - a''_n) = 0,$$
$$lím(a_n a'_n - a''_n) = 0,$$
$$lím\left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) = 0$$

donde ya no tengo necesidad, según lo que precede, de explicar más extensamente el significado del signo *lím* (Cantor, 1872, p. 3).

De modo similar, se puede definir operaciones semejantes para los casos en los que uno o dos de los tres números pertenecen al sistema *A* (los números racionales).

- Principio de continuidad

  Una vez conformado el nuevo dominio numérico, Cantor establece *el principio de continuidad* como una de las principales propiedades de los reales, "expresado por: Cualquier sucesión de Cauchy de números reales es convergente". Este principio en su versión geométrica se conoce como axioma de la continuidad y dice: "Cualquier sucesión de Cauchy de puntos de una línea recta converge a un punto de la misma" (Cantor, 1871, p. 12).

- No numerabilidad

  Este teorema se encuentra consignado en el escrito; *Sobre una propiedad del sistema de todos los números reales algebraicos*. En este importante resultado Cantor demuestra que no es posible poner en correspondencia biunívoca a los enteros positivos y los reales contenidos en un intervalo arbitrario (como se mostró en la pp. 30-31 del presente trabajo).

NOCIONES FUNDAMENTALES EN LA CONSTITUCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES Y LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS QUE SUSCITARON.

En el presente capitulo se realizará un paralelo entre el proceso de objetivación de los números reales y las situaciones adidácticas propuestas por Brousseau, se iniciará con el descubrimiento (accidental) por parte de la escuela pitagórica de las magnitudes inconmensurables, el papel que desempañaron los fracciones decimales y continuas en la representación de algunos números irracionales y la formalización por parte de Cantor y Dedekind de dicho dominio numérico. Periodos de la historia de las matemáticas durante los cuales los números reales evolucionaron principalmente por la superación de obstáculos de carácter epistemológico, categoría introducida por Bachelard y ampliada por Brousseau en su teoría de situaciones.

Esta teoría es un pilar fundamental en el desarrollo de este capitulo (y del trabajo de grado en general) en tanto que, a porta una valiosa perspectiva desde la cual es posible caracterizar algunos de los principales obstáculos epistemológicos asociados a conceptos fundamentales para la construcción de los números reales. a partir del recorrido historiográfico del capítulo anterior.

1. El proceso de objetivación del conjunto de los números reales visto a través de la teoría de situaciones.

Aunque el titulo indica que se hablará de los números reales, el lector encontrará en el desarrollo de la temática solo referencias a los números irracionales. Esto se debe a que en la constitución de los números reales, los irracionales fueron un punto crítico, puesto que, como se comentó en el capitulo I, todas las teorías acerca de los reales suponen de antemano la existencia del conjunto de los números racionales.

Pero antes de estudiar el proceso de objetivación de los números reales, es necesario establecer lo que se entenderá como *objetivación* en el presente documento. En esta dirección, Sfard (1991) plantea como ejemplo, el proceso de constitución del concepto de número y el de función. A partir de estas dos situaciones propone que todo objeto matemático pasa (en la mayoría de los casos) por una transformación similar:

> Permítanos resumir nuevamente lo que ha sido observado tan largamente. En todos nuestros ejemplos, el mismo fenómeno pudo ser distinguido una y otra vez: varios procesos tuvieron que ser convertidos en totalidades estáticas y compactas para llegar a ser las unidades básicas de un nuevo nivel superior de la teoría. Cuando ampliamos nuestra visión y miramos las matemáticas (o al menos una gran porción) como un todo, nos damos cuenta que es una clase de jerarquía, en la cual lo que es concebido en forma puramente operacional en un nivel podría ser concebido estructuralmente en un nivel superior. Tal jerarquía emerge en una larga sucesión de cosificaciones[28], cada una de ellas comenzando donde la anterior termina, cada una de ellas adicionado un nuevo compuesto al sistema complejo de nociones abstractas (Sfard, 1991, p. 14).

Esta cita refleja *grosso modo* la intención detrás del desarrollo de la presente sección. En tanto que en esta se analizará la evolución conceptual del número real como un proceso de objetivación, separado en tres fases: como noción protomatemática, como noción paramatemática y, por último, como objeto

[28] El término *cosificación* es introducido por Sfard como la última de tres etapas presentes (las otras dos son *interiorización* y *condensación*) en el proceso de constitución de los objetos abstractos. Específicamente, para Sfard es el salto cualitativo que se da desde el momento que un concepto matemático no está consolidado (es decir, solo es una *herramienta* pero no hay una teoría que lo estudie y, por tanto, es eminentemente operacional), hacia una concepción estructural del mismo. Esta fase se delimita como: "…un salto cuántico instantáneo: un proceso se solidifica en un objeto, en una estructura interna estática. Varias representaciones del concepto llegan a ser unificadas semánticamente por este constructo, abstracto, puramente imaginario. La nueva entidad es rápidamente separada del proceso del cual es producto y comienza a dibujar su significado a partir del hecho de su existencia como un miembro de una cierta categoría" (Sfard, 1991, p.17).

matemático[29]. Aunque estas etapas se presentan de forma independiente, pueden ocurrir de manera simultánea en la interacción estudiante-saber (particularmente las dos primeras). La división del proceso de objetivación en los tres momentos antes señalados se da con el propósito de facilitar su estudio como se verá a continuación.

Como se exhibió a lo largo del Capítulo I de forma panorámica, la historia de los números irracionales (y de las nociones que, con el tiempo, se transformarían en los actuales números irracionales) puede rastrearse desde la escuela pitagórica, y estos, a través de aproximadamente veintitrés siglos, han estado sujetos a diferentes cambios tanto en la forma de representarlos (inicialmente geométrica y luego numéricamente) como en su estatus epistemológico. Éste último alcanzó su clímax durante la segunda mitad del siglo XIX. Tomando en cuenta el extenso período de tiempo que se estudiará, será necesario fraccionarlo en tres etapas importantes en el proceso de construcción de este objeto matemático para facilitar su estudio, y se hará de la siguiente forma:

i. Manifestaciones tempranas de los números irracionales.
ii. La evolución conceptual de los números irracionales desde los pitagóricos hasta Euler.
iii. Los números irracionales, la aritmetización del análisis y la teoría de conjuntos.

Esta fragmentación de la historia de los números reales, tiene como propósito tender lazos que faciliten conectar lo histórico con lo didáctico en el análisis de este importante objeto matemático.

[29] Gascón *et al.* (1997).

El estudio del proceso de objetivación de los números reales se hace estableciendo un paralelo entre las etapas antes mencionadas de la evolución conceptual-temporal del número real y las situaciones adidácticas propuestas por Brousseau ((a) Situación adidáctica de acción, (b) Situación adidáctica de formulación y (c) Situación adidáctica de validación). La importancia de efectuar esta analogía para el presente trabajo de grado esta en que a través de cada una de estas situaciones es posible recrear el proceso de constitución y transformación (*cuasi* histórica) de dicho objeto matemático.

Primero, se comparará la *situación adidáctica de acción*[30] con lo que se denominó *manifestaciones tempranas de los números irracionales*. Porque al igual que en la situación adidáctica de acción algunas civilizaciones de la Antigüedad (egipcios, babilonios, entre otros) se enfrentaron a problemas de la vida cotidiana como delimitar terrenos para vivienda, cultivo y la construcción de edificios. Para los cuales tal vez contaban con algoritmos, cuya efectividad había sido probada en numerosas ocasiones. Sin embargo, en algún momento se hallaron con uno de estos problemas cuyas condiciones iniciales no se diferenciaban de problemas anteriores, pero al proceder a solucionarlo se encontraron con una situación inusual, soluciones que involucraba procesos infinitos (divisiones infinitas), lo que generaba más interrogantes de los que resolvía, y que debería esperar algunos siglos para hallar una respuesta satisfactoria.

En la búsqueda de respuestas los pitagóricos lograron identificar numerosas situaciones que los conducirían a comparar magnitudes inconmensurables[31],

[30] En la clase, el estatuto de las nociones que aparecen en un modelo implícito es el de nociones protomatematicas, esto es, nociones cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio siquiera como instrumento útil para el estudio de otros objetos (Gascón, 1997, p. 222).

[31] Ver el §1 en el Capítulo I del presente trabajo (pp. 8-11).

emplearon nuevos métodos tales como unidades de medida diferentes (múltiplos y submúltiplos). La interacción de estos pueblos con este tipo de problemas les permitió adquirir pericia en identificar las condiciones que desencadenarían en una situación de estas, más no en la manera de solucionarlas. Ante la inexistencia de una teoría que diera cuenta de las soluciones usuales e inusuales, solo contaban con sus algoritmos para reconocer las situaciones problema y de algunas técnicas particulares dependiendo de las condiciones.

Ahora bien, la *situación adidáctica de formulación*[32] da un paso más en relación con la primera situación, en tanto que el modelo implícito del cual se servían los pueblos de la antigüedad para conjeturar soluciones que respondieran el interrogante planteado, se hace explicito bajo la forma de un procedimiento rutinario o propiedad de ciertos objetos. Sin embargo, no se ve como un fin sino como un medio. Por esta razón la situación adidáctica de formulación ofrece el lente adecuado para estudiar la segunda etapa del desarrollo histórico de los números reales en tanto que se estudia algunas de las circunstancias en las que se les fue abriendo paso a los irracionales (aproximaciones de estos) como resultados útiles aunque no tuvieran estatuto dentro de las matemáticas: *la evolución conceptual de los números irracionales desde los pitagóricos hasta Euler.*

Continuando con el seguimiento de las huellas históricas que han dejado los números irracionales en la historia de las matemáticas, vale la pena situarse en la Antigua Grecia en tiempos de los pitagóricos, pues fue en esta escuela de pensadores donde se produjo un descubrimiento de suma trascendencia para el desarrollo de las matemáticas. Para los pitagóricos, la idea de número se traduce en

[32] El estatuto que tienen en la clase las nociones de un modelo explicito es el de nociones paramatemáticas: esto significa que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos que sirven para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en sí mismas (Gascón, 1997, p. 223).

los actuales naturales, además conocían prefiguraciones de las actuales fracciones (magnitudes conmensurables) aunque no les concedían el estatus de número.

Por esta razón, al descubrir las magnitudes inconmensurables, su visión del mundo se sacudió. No obstante, fue otro pitagórico, Eudoxo, quien intentó solucionar el problema de la inconmensurabilidad entre magnitudes con su teoría de proporciones, posteriormente incluida como el libro V de los *Elementos* de Euclides. Transcurrido algún tiempo, el interés en las magnitudes inconmensurables se manifestó en Oriente Medio y la India, donde matemáticos de estas tierras crearon algoritmos que les permitieron trabajar con estas magnitudes[33]. Aunque estos métodos no eran propiamente geométricos, sino algebraicos, tampoco daban cuenta de aspectos generales, solo respondía a la necesidad de calcular y no se ocupaba de la rigurosidad de tales métodos.

Pese a los avances logrados en Oriente, persistía un problema de fundamentación en los métodos heredados de los matemáticos árabes e hindúes. Con el propósito de subsanar estas carencias se buscó la forma de aproximarse al valor de estas magnitudes inconmensurables comparándolas con magnitudes conmensurables cuyo valor fuera más cercano. Con esta intención se emplearon las fracciones

---

[33] "Bhaskara (1114-1185), por ejemplo, dice: "Llamemos la suma de dos irracionales al mayor número irracional, y dos veces su producto al menor de ellos. La suma y la diferencia de ellos se efectúa como si fueran números enteros" (Kline. *Op*. *Cit.*, p. 125); es decir, dados los irracionales $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$, por ejemplo, la suma se obtiene así: $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{(2+3)+2*\sqrt{2*3}}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

De manera similar, Bhaskara da reglas para multiplicar, dividir y extraer la raíz cuadrada de expresiones irracionales. Otra regla de Bhaskara para la suma de dos raíces irracionales es la siguiente: "la raíz del cociente del mayor irracional dividida por el menor, aumentada en una unidad; la suma elevada al cuadrado y multiplicada por la menor cantidad irracional es igual a la suma de las dos raíces irracionales" (*Ibíd*., p.252); para nuestro ejemplo: $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{(\sqrt{\frac{3}{2}}+1)^2*2}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$" (Mora *et al.*, pp.71-72).

decimales o fracciones continuas dependiendo de la necesidad y el grado de precisión requerido.

Finalmente, la situación adidáctica de validación cierra el paralelo propuesto en este apartado. En este momento histórico (siglos XVII y XVIII), los trabajos de Bolzano, Cauchy, Weierstrass, Méray, Dedekind y Cantor (entre otros) hicieron posible constituir los números reales en objeto de estudio. Objetos que en el momento de su surgimiento fueron tomados como casos aislados en el marco de situaciones rutinarias en la vida de los pueblos, y que posteriormente pasaron a formar parte de procedimientos más elaborados.

Hasta este punto se ha efectuado el ejercicio de clarificar las etapas del proceso de objetivación (caracterizadas por Chevallard) en las circunstancias histórico-epistemológicas que rodearon la constitución de los números reales. Dentro de los sucesos mencionados (sucesos de orden epistemológico) se encuentran algunos cuya generalidad se reveló gradualmente, a medida que un cambio en las concepciones acerca de los objetos que estudiaban (y como aproximarse a ellos) fue necesaria.

Las circunstancias que suscitaron tales saltos en la forma de abordar los números reales, fueron caracterizadas inicialmente por Bachelard y luego por Brousseau como obstáculos epistemológicos. El punto de vista desde el cual se tocará dichos obstáculos en el presente escrito será desde la *teoría de situaciones didácticas.*

En este sentido, el aporte de esta teoría en el desarrollo del presente pasaje, específicamente de las situaciones adidácticas en el paralelo aquí formulado es el de recrear el camino trazado por los reales en su transformación conceptual en objetos de estudio. Evocar las diferentes fases de la construcción de los reales por medio de las situaciones adidácticas permite situar en el paso de una situación adidáctica a otra un cambio de concepción, en el cual se ubica según Brousseau el origen de los obstáculos epistemológicos.

2. Definición de obstáculo desde la perspectiva de Brousseau.

2.1 Obstáculos epistemológicos

Desde la perspectiva de Brousseau, una *concepción* en matemáticas es una manera de organizada y particular de tratar una noción. Estas concepciones entendidas como conjunto de saberes se caracterizan por poseer cierta *estructura lógica interna*; ser empleadas con frecuencia, mostrarse eficientes en la resolución de situaciones, además de hallarse presentes en un gran número de sujetos (en un contexto especifico) (Brousseau, 1991, p.17).

La importancia del estudio de dichas concepciones en *la teoría de situaciones didácticas*, se centra en la complejidad que involucra el cambio de una concepción a otra, en tanto que implica la reorganización de los conocimientos anteriores: "algunas de las concepciones adquiridas no desaparecen inmediatamente en provecho de una mejor concepción. Resisten, provocan errores y se constituyen así en *obstáculos*" (Brousseau, 1991, p.18).

El concepto de obstáculo epistemológico fue introducido por Bachelard[34], pero él no creía que estos se hallaran en las matemáticas. Sin embargo, Brousseau observó

---

[34] Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de *que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos*. No se trata de considerar los obstáculos externos, como complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de

algunas situaciones que lo condujeron a pensar lo contrario y decidió reelaborar la definición dada por Bachelard:

> El concepto de obstáculo epistemológico se debe a Bachelard, que no cree que se puede observar en las matemáticas. La modelación de situaciones me llevó a pensar de otra manera y para desarrollar una definición adecuada:
>
> • Un obstáculo es un "conocimiento" en el sentido que le dimos una "forma regular para tratar una variedad de situaciones".
>
> • Este conocimiento le da resultados correctos y ventajas significativas en un área determinada pero falsa o inadecuada en un área totalmente nueva o más grande.
>
> • El conocimiento nuevo, verdadero, o válido sobre un dominio más vasto, no se establece “a partir” del antiguo conocimiento sino contra él. Utiliza otros puntos de vista, otros métodos, etc. No tienen entre ellas relaciones “lógicas” evidentes que permitirían desacreditar fácilmente el error antiguo con nuevo conocimiento. En cambio son competidoras sobre el dominio antiguo.
>
> • Estas estructuras de conocimiento no son variables personales. Estas respuestas son “universales” en áreas especificas. De este modo, parece casi inevitable en la génesis del conocimiento. Ya sea génesis histórica o didáctica[35].

---

estancamientos y hasta retrocesos, es ahí donde discernimos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos (Bachelard, 1948, p.15).

[35]Le concept d’obstacle épistémologique est dû à Bachelard, qui ne croyait pas que l’on puisse en observer en mathématiques. La modélisation des situations m’a conduit à penser le contraire et à aménager une définition appropriée :

• Un obstacle est une “connaissance”, au sens que nous lui avons donné de “manière régulière de traiter un ensemble de situations”.

• Cette connaissance donne des résultats corrects ou des avantages appréciables dans un certain domaine mais se révèle fausse ou tout à fait inadaptée dans un domaine nouveau ou plus vaste.

• La connaissance nouvelle, vraie, ou valide sur un domaine plus vaste, ne s’établit pas “à partir” de l’ancienne connaissance mais contre elle. Elle utilise d’autres points de vues, d’autres méthodes etc. Elles n’ont pas entre elles de relations “ logiques ” évidentes qui permettraient de discréditer facilement l’erreur ancienne avec la nouvelle connaissance. Par contre elles sont concurrentes sur le domaine ancien.

• Ces connaissances ne sont pas des constructions personnelles variables. Elles sont des réponses “universelles ” à des domaines précis. Elles apparaissent donc presque nécessairement dans la genèse d’un savoir. Qu’il s’agisse d’une genèse historique ou didactique (Brousseau, 1991, p.18).

•

A diferencia de la caracterización de Bachelard, en la cual parece sugerir que el avance de la ciencia solo es posible a través de la superación de los obstáculos epistemológicos (lo cual les da un carácter de necesario), Brousseau por su parte los considera como consecuencia de la adaptación de un conocimiento en el cambio de una concepción a otra. También observó ciertas características de los obstáculos, entre ellos que estos se manifiestan por errores, los cuales se deben a conocimientos anteriores que fueron eficaces en cierto dominio, pero ineficientes en otro más amplio. Estos obstáculos no desaparecen con el aprendizaje de nuevo conocimiento, sino que resisten y reaparecen, además son constitutivos del saber (Brousseau, 1991, pp. 18-19).

No obstante, Brousseau considera que los obstáculos deben integrarse al nuevo conocimiento, particularmente su negación (la situación que provoca resistencia), dado que es un conocimiento útil en otro dominio y puede presentarse como un caso particular. De esta reivindicación que hace Brousseau de los obstáculos epistemológicos se desprende la importancia de considerarlos en el presente trabajo, por sus características, específicamente la de tener un dominio de validez, resistir y reaparecer ya sea en la génesis histórica o didáctica, se consideró desde la concepción del proyecto la posibilidad de que los obstáculos estuvieran entre las principales causas (sino la principal) del tratamiento poco conceptual que se le da a los números irracionales en algunos textos escolares.

Es importante señalar, además, el carácter de herramienta de los textos escolares, es decir, su eficacia en el desarrollo de una labor depende del diseñador (autor), porque debe ser el primero en darse cuenta de los alcances y limitaciones de su obra, y por supuesto el usuario de esta, quien se beneficiará o perjudicará de la eficiencia de dicha herramienta, y hasta cierto punto deberá compensar las deficiencias de la misma. En este sentido, el éxito o el fracaso en la utilización de un texto escolar dependen de la vigilancia epistemológica de su principal usuario; el profesor de matemáticas, quién hace las veces de mediador entre el texto y el estudiante.

Como se había anunciado desde la introducción al presente capitulo, se estudiarán algunos de los principales obstáculos epistemológicos asociados a la construcción de los números reales, tópicos que debe tener en cuenta un profesor que vaya a aproximarse a este tema, si quiere mediar eficazmente entre el saber consignado en el texto y el estudiante.

2.2 Principales obstáculos presentes en la constitución de los números reales.

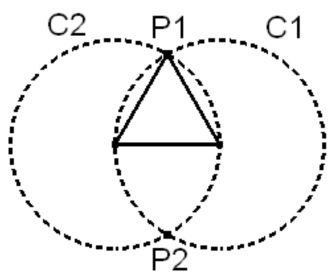
2.2.1 Recta vs. Número

Uno de los obstáculos epistemológicos que se consideraran en el presente capitulo, se encuentra *la correspondencia uno-a-uno entre los números reales y los puntos que conforman la línea recta*. En la escuela esta relación no se considera conflictiva, de hecho, la recta geométrica es un modelo de representación con el que muchos estudiantes han tenido contacto desde los primeros grados de escolaridad, y que se reafirma a lo largo de la educación secundaria a través de las diferentes ramas de las matemáticas: geometría, trigonometría y cálculo.

Durante más de veinte siglos la recta geométrica ha sido el paradigma de continuidad. Este hecho puede confirmarse al estudiar los *Elementos* de Euclides, donde la primera proposición del libro I[36] permite ilustrar este hecho, en dicha la

[36] Proposición I: *Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.*

construcción inicial se da por hecho que al intersecar dos circunferencias y se obtendrá un punto de intersección (mejor dicho dos puntos). Pero fue hasta el siglo XIX, cuando en sus respectivas construcciones de los números reales[37], Cantor y Dedekind construyen el continuo aritmético a partir del geométrico, luego axiomatizan la continuidad de la recta sobre la base del continuo numérico estableciendo un isomorfismo entre número y magnitud. A partir de los trabajos de estos matemáticos, la recta se ratificó como modelo por excelencia del conjunto de los números reales. Algunas de las características de la recta que hacen esto posible son:



[37] En Cantor la relación entre número y magnitud se ilustra a continuación: Los puntos de una línea recta están determinados cuando, tomando como base una unidad de medida, se indican sus distancias a un punto fijo 0 de la línea recta, las abscisas, con el signo + o -, según que el punto en cuestión se encuentre en la parte (fijada por adelantado) positiva o negativa de la línea a partir de 0.
Si esta distancia tiene con la unidad de medida una razón racional, entonces está expresada mediante una magnitud numérica del sistema A; en el otro caso, si el punto es conocido mediante una construcción, se puede siempre imaginar una sucesión:

(1) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$

que cumple las condiciones enunciadas en el x_1, y que tiene con la distancia en cuestión una relación tal que los puntos de la recta, a los cuales corresponden las distancias $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, se aproximan infinitamente al punto a determinar, a medida que n aumenta.
Lo que expresamos, diciendo: La distancia del punto a determinar al punto 0 es igual a b, donde b es la magnitud numérica correspondiente a la sucesión (1) (Cantor, 1872, p.5).
En Dedekind la relación entre número y magnitud se ilustra en el capitulo I (p. 15), cuando una vez caracterizadas las propiedades de los racionales procede a comparar dicho conjunto con la recta geométrica y concluye que los racionales no agotan la agotan, por lo tanto plantea la necesidad de "crear" nuevos números que junto con los racionales completen la recta.

> 1) Aceptando el axioma de Cantor, la recta se identifica con el conjunto ordenado de los números reales (Crossley, 1987)[38]. Permite, en principio, representarlos todos, uno por uno, mediante puntos.
>
> 2) La representación en la recta ayuda a intuir el orden continuo y total de *R*.
>
> 3) La representación de un número en la recta se apoya en un procedimiento de medida de longitudes mediante el cual es posible resaltar un punto y atribuirle una representación simbólica correspondiente a algún sistema de representación de números.
>
> 4) Cada uno de los segmentos de recta sobre los que se representan unos pocos números (el origen, la unidad y algunos otros) está simbolizando el conjunto de números reales en su totalidad. La representación en la recta permite «actualizar» en un segmento la totalidad del conjunto de números reales.
>
> 5) La continuidad intuitiva de la recta permite expresar la continuidad de *R* (la cual se manifiesta por el axioma de completitud o proposición equivalente) pero también permite expresar la continuidad de otros conjuntos «más amplios» (como el de los hiperreales) (Coriat y Scaglia, 2000, pp. 31-32**)**.

Aunque es un modelo que mantiene su vigencia, no se puede olvidar que reposa sobre la aceptación de un axioma y la evidencia que proporciona la intuición geométrica. Ahora, si como lo hace Moore (2007, p.62) en su artículo *The complétense of the real line*, se plantean nuevos interrogantes a esta biyección (que resulta hasta este momento incuestionable) tales como:

> ¿Cómo saber que esta imagen (…) es completa (…)?¿Cómo sabemos que no hay, sobre la línea física, puntos ubicados más hacia la derecha, después de todos los puntos reales, por lo que habría necesidad de coordenadas positivas infinitamente grandes [*infinitely large*], y puntos hacia la izquierda que necesitasen coordenadas negativas infinitamente grandes? ¿Cómo sabemos que no hay un pequeño estiramiento de la línea alrededor de cada punto real, en cual no hay puntos que tengan del todo coordenadas reales?[39] (Moore, 2007, p. 62).

---

[38] CROSSLEY, J.N. (1987). *The emergence of number.* Singapur: World Scientific.

[39] How do we know that this picture, construed in the second way, is complete, i.e., that it tell the whole story? How do we know that there aren't, on physical lines, points way over to the right, after all the real points, which would need infinitely large positive coordinates, and points way off to the left which would need infinitely large negative ones? How do we know that there isn't a little stretch

Es posible observar que estas preguntas indagan acerca de aspectos que se consideraban evidentes con relación a la naturaleza de la recta numérica (naturaleza heredada, en parte, de la recta geométrica) y sus propiedades. Estas interpelaciones no niegan la validez de los resultados obtenidos basados en dicha relación, pero sí llaman la atención respecto de considerarla como el *único* modelo para dar cuenta de la complejidad de los números reales. Las cuestiones que plantea Moore se centran en aspectos considerados por la teoría de los hiperreales de Robinson[40], que no se contemplan dentro de la interpretación tradicional de la recta geométrica.

A pesar que el progreso de la disciplina matemática exige avanzar en los niveles de abstracción y generalización en las diferentes teorías, hay argumentos en contra de los planteamientos de Robinson, pese a que no hay contradicciones lógicas en el interior de esta teoría. Este rechazo puede tener profundas raíces filosóficas y, por supuesto, matemáticas. Sin embargo, para los propósitos del presente documento interesan los argumentos de tipo epistemológico, específicamente los que tengan características de obstáculo epistemológico (en el sentido de Brousseau).

---

of the line around each real point, in which there are no points at all whit real coordinates? (Moore, 2007, p. 62)

[40]En el análisis no estándar de Robinson se trabaja con una estructura numérica (el sistema de números hiperreales) constituida por los números reales a los que se le incorporan los (números) infinitésimos e infinitos. Los números infinitésimos tienen sentido en el marco de una axiomática, elaborada por Robinson, «más amplia» que la axiomática de *R* (clásico) pero compatible con ella.
En dicha estructura, el axioma de Arquímedes no se satisface, puesto que el producto de un infinitésimo por
cualquier real estándar o por otro infinitésimo es siempre menor que cualquier fracción ordinaria positiva. La recta hiperreal contiene, además de los números reales, los infinitésimos y los infinitos. Keisler en su libro *Elementary Calculus* (1976) representa estos números en la recta geométrica con ayuda de dos metáforas: «un microscopio infinitesimal» y «un telescopio infinito» para sugerir, respectivamente, los infinitésimos y los infinitos (Coriat y Scaglia, 2000, p. 27).

Podría pensarse que buscar obstáculos epistemológicos en la base del rechazo a los planteamientos de Robinson, es intentar forzar los hechos. No obstante, las características de los obstáculos epistemológicos que se consideraron anteriormente señalan que son conocimientos con un dominio de validez, que al ser llevados a otro dominio más amplio, se muestran ineficientes. Este es el rasgo que parece manifestarse en el rechazo a los hiperreales. Es decir, la recta geométrica entendida en el sentido euclidiano y posteriormente redefinido en las construcciones de los reales del siglo XIX[41], es un modelo valioso sobre el cual se sustentan muchos avances en matemáticas[42]. Pero el componente intuitivo en la recta es innegable.

2.2.2 Operatividad en los Reales.

Los números reales suelen ser presentados en la escuela a través de los textos escolares por medio de la relación de inclusión que puede establecerse entre los diferentes dominios numéricos, o por extensiones algebraicas. Esta última obedece a una concepción particular de las matemáticas escolares, que busca concentrar sus esfuerzos en enseñar aquello que tenga una aplicación práctica en la vida cotidiana, pero en el proceso despoja a los objetos de estudio de su significado. Este es el caso de los números irracionales:

[41] La continuidad en Cantor se hace explicita en el axioma que aparece en el Capítulo I del presente trabajo (p. 32). De modo similar, Dedekind expresa la esencia de la continuidad en un fragmento de su obra (ver Capítulo I del presente trabajo, p. 27).

[42] Putnam touches on this consensus in Putnam 1979 (*What Is Mathematical Truth?*), p. 64 “Consider the basic postulate upon which the subject of analytical geometry is founded (and with it the whole study of space in modern mathematics, including the topological theory of manifolds). This is the postulate that there is one-to-one order preserving correspondence between the points on the line and the real numbers.” Explicit endorsements of the consensus are scarce in literature, but I have found it to be alive and well in discussions of the question with both philosophers and physicists. Those who recognize the need for an argument tend, like the great figures discussed on pp. 73ff below, to fall back on intuition: hence the present essay (Moore, 2007, p. 62).

> … los números irracionales son presentados en el aula como una necesidad de "rellenar" la recta numérica, para darle completitud a los números reales y solucionar operaciones como la radicación (Crespo, 2009, p. 22).

En la secundaria (en ocasiones) se les presentan a los estudiantes los reales como la unión de racionales e irracionales, estos últimos se introducen para dar cuenta de las soluciones de algunas ecuaciones que "caen" por fuera de los números racionales. Otro método para introducir los números irracionales es la representación geométrica de estos, la cual suele ser muy útil (aunque se limite a las representaciones construibles con regla y compás) en este tipo de acercamientos se da por sentada la correspondencia biunívoca establecida entre los números reales y la recta geométrica, como si los irracionales "rellenaran" los espacios que dejan los racionales. Esta imagen es muy recurrente en la escuela y, de hecho se apoya en la intuición geométrica para evitar dar todas las explicaciones que demandaría una presentación axiomática de los números reales.

En el dominio aritmético, se ha establecido otra clase de mecanismo para representar los diferentes conjuntos numéricos: la notación decimal, fraccionaria u operatoria habitual de radicales. De estas, la decimal es la más privilegiada en la escuela, al punto de desconocer las otras (notación de radicales) lo cual desencadena una serie de inconvenientes en la medida en que no es posible establecer una biyección entre el conjunto de los números expresables mediante notación decimal y los números reales, porque, ningún número irracional queda completamente determinado mediante esta notación. No obstante, se emplea para este propósito sin que se establezca claramente la diferencia entre un número irracional dado y su representación.

Ahora bien, la tarea intuitivamente evidente de "rellenar" la recta con los números irracionales se puede entorpecer al pedirle a un estudiante que ubique sobre la recta los siguientes números; 1.732050808 y 1.732050808… (El primero un número racional y el segundo es la aproximación racional de $\sqrt{3}$ dada por una calculadora

CASIO fx 305 MS, aproximación redondeada en su último digito debido a que se había agotado el espacio de la pantalla de la maquina en cuestión). Para solucionar este ejercicio se necesita diferenciar un número de su representación, algo que parece no hacerse claramente en la escuela (Crespo, 2009). De modo similar, resultaría problemático si se le pidiera a los estudiantes que efectuara alguna operación aritmética con estos mismos números (con las expresiones decimales de estos) y se le preguntara por el conjunto al cual pertenece el número resultante de tal operación. La dificultad detrás de estos ejercicios está asociada con la noción de infinito, específicamente, las infinitas cifras decimales que involucra la expresión decimal de un número irracional, en tanto que los estudiantes interpretan esta infinidad en el sentido potencial y no actual como lo indica el estudio de Crespo (2009).

Este mismo obstáculo puede ilustrarse mediante otro ejemplo: si se toma $\sqrt{2}$, su representación decimal tiene infinitas cifras no periódicas. De acuerdo con Crespo (2009) los estudiantes no consideran este número que involucra un radical como totalmente determinado, y mucho menos lo tomaran como la solución de un problema. Para algunos de ellos es necesario apelar a su representación decimal y ante la incertidumbre de operar con infinitas cifras lo asumen "tan grande como se quiera", que significa tomar tantas cifras decimales como lo exija el cálculo a realizar. Como lo menciona la autora; "lo anterior refleja errores y usos incorrectos que demuestran la falta de significado que poseen estos números para los estudiantes" (Crespo, 2009, p. 22).

Sin embargo, en la base de esta dificultad de orden didático (perspectiva adoptada por Crespo (2009)) se encuentra la noción de número heredada de los matemáticos griegos (construida a partir de los $\mathbb{N}$), la cual aun esta presente en la escuela y genera conflicto cuando se trata de extenderla a otros conjuntos sin considerar las

características de estos nuevos elementos. Uno de los aspectos fundamentales es la forma de denotar ciertos números dependiendo del conjunto al que pertenecen, mientras que la representación decimal es suficiente para expresar el conjunto de los enteros, esta resulta insuficiente para simbolizar algunos elementos del dominio delos racionales (los racionales finitos no periódicos y los infinitos periódicos) por lo cuales necesario emplear la notación fraccionaria. Pero en el caso de los números irracionales tanto la notación decimal como fraccionaria se quedan cortas en la tarea de plasmar de manera exhaustiva estos números.
No obstante, la complicación de ampliar la noción de número (natural) a los demás conjuntos fue solo una parte del proceso de construcción de cada nuevo dominio numérico. Además de emplear otras formas de notación se necesitó ensanchar las definiciones de las cuatro operaciones aritméticas para que involucraran los nuevos números. Así pues, la incorporación de otras formas de escritura numérica y la transformación en el significado de la suma y el producto, implico un cambio de concepción de número y como operar con ellos. Modificaciones que trajeron consigo obstáculos epistemológicos que se eluden en la escuela relegando el estudio de los diferentes conjuntos y sus operaciones a la presentación de variados algoritmos conforme la situación lo requiera.

Posiblemente los obstáculos asociados a la operatividad de los números reales sean más de orden didáctico que epistemológico (al menos en la forma como se han presentado en esta sección), es decir estos obstáculos se originan en la forma de representar los diferentes conjuntos numéricos, particularmente los irracionales y la manera de operar con ellos de acuerdo con la notación. Sin embargo, en el análisis panorámico que se ha hecho en el presente apartado, el infinito actual figura como una noción ligada a esta problemática, además de la biyección entre número y magnitud (las cuales se han tratado antes en el desarrollo del presente escrito). Por otra parte, la falta de claridad frente a las posibilidades y limitaciones que ofrece un sistema de notación frente a otro son factores que deben considerarse más cuidadosamente en la enseñanza de este objeto matemático.

2.2.3 El Continuo

La siguiente discusión sobre el continuo partirá de la importancia de este concepto en la obra de Cantor y la incidencia de esta cosmovisión en el desarrollo de la matemática de los siglos posteriores. En el *Grundlagen*, Cantor enfatiza en la importancia del continuo en la dirección y motivación de sus investigaciones. Puesto que, su naturaleza y sus propiedades habían generado grandes diferencias de opinión, tal vez porque al intentar caracterizar esta noción se habían centrado en rasgos diferentes de este, y nunca se había dado una definición exacta y completa del continuo.

Cantor creía que los griegos eran los responsables de esta controversia en torno al continuo, en tanto que ellos habían sido los primeros en estudiar este problema, pero los términos en que lo hicieron eran ambiguos y dejaban espacio a múltiples interpretaciones. Dentro de estas disquisiciones, Cantor resaltaba la postura de Aristóteles y la de Epicuro, por representar perspectivas opuestas con relación al continuo. Por un lado, Aristóteles *creía en un continuo compuesto por piezas que se dividían sin límite*, mientras que Epicuro *consideraba el continuo sintetizado de alguna forma a partir de átomos que se imaginaba como entidades finitas* (Dauben, 1990, p. 107).

De otra parte Cantor desestimó posturas intermedias al respecto, tal como la de Tomas de Aquino, quién negaba tanto la postura de Aristóteles como la de Epicuro. Cantor cuestionó la postura de Aquino porque la consideraba confusa, aunque dejaba ver la imposibilidad de identificar los fundamentos del problema. Así, Cantor se dio cuenta que el punto de vista desde el cual el continuo se tomó "como un concepto indivisible, una intuición a priori inaccesible a los procesos y el análisis de la mente humana se había originado a partir de la concepción de Aquino" (Dauben, 1990, p. 108). Cantor no aceptaba este punto de vista, según el cual el continuo era producto de la intuición y no un objeto del pensamiento y por lo tanto de las matemáticas. Puesto que, aceptar el planteamiento de Aquino significaba relegar el problema del continuo al nivel de un dogma religioso.

Pese a que Cantor buscaba desligar el continuo de conceptos tomados de otras ciencias (en le época de Cantor esta idea se asociaba con Dios, y por ende se suponía que no se podía establecerse alguna clase de correspondencia entre este concepto (Dios) y cualquier referente empírico), las bases intuitivas de este descansaban sobre las magnitudes continuas y, a su vez, estas se extendieron a las funciones continuas en las cuales se basó la teoría de funciones analíticas. Peor aún era la dependencia del *tiempo* y el *espacio* para explicar la intuición de continuidad en la mente (aunque la continuidad del tiempo dependía de asumir que existía el continuo independiente del tiempo). Para Cantor el tiempo era un concepto auxiliar que relacionaba los movimientos del mundo natural. Sin embargo, había mostrado (en *Punktmannigfaltigkeitslehre*)[43] que el movimiento continuo era posible en espacios que no eran continuos (en el sentido de la palabra), por lo cual no aceptaba que el análisis del continuo se basara en la intuición del tiempo y el espacio (Dauben, 1990, p. 109).

De lo anterior, se puede obtener una imagen (*grosso modo*) de las condiciones (y tensiones) en medio de las cuales Cantor buscaba conceptualizar el continuo. Ahora bien, el afán por aprehender este concepto se debía (en cierto sentido) a fundamentar lógicamente las bases de algunas disciplinas matemáticas nacientes (en ese momento). En la actualidad, la preocupación alrededor del concepto del continuo ya no se centra en su construcción teórica, sino en lograr que los estudiantes puedan construirlo de manera significativa, puesto que, la noción de continuo es fundamental para muchos conceptos básicos del cálculo, análisis y

[43] 1883c. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre . Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Leipzig: B. G. Teubner.

topología (entre otras). Atendiendo a esta inquietud suele apelarse a una versión intuitiva de las propiedades de la recta. Desde la perspectiva del estudio de Romero (1996), al recurrir a la evidencia geométrica se está admitiendo dos hipótesis implícitas:

a) Que el continuo geométrico es un dato universal de la intuición, fácilmente asequible a los individuos; y
b) Que la conexión números- geometría es, del mismo modo intuitivo, es decir, aprehensible inmediata y universalmente, sin la necesidad de que medien elementos conceptuales, los cuales pertenecen al modo de pensamiento discursivo (Romero, 1996, p. 4).

No obstante, estas hipótesis tienen un dominio de validez limitado, puesto que la visión intuitiva del continuo puede no necesariamente corresponder a la expresión lógico-formal de dicho concepto, en tanto que depende de la concepción que tenga cada individuo de la naturaleza de la recta, en este sentido, la continuidad puede confundirse con la densidad. De modo semejante, la inmediatez y universalidad de la conexión entre números y geometría es cuestionable en la medida en que solo se puede establecer tal relación para los números enteros y unos pocos reales construibles; en el caso de los números decimales infinitos no periódicos (particularmente) la intuición se convierte en un obstáculo.

En relación con lo anterior, Romero (1996, p. 6) propone tres interrogantes que buscan:

i. Desvelar las percepciones acerca de las propiedades de los números que le permiten a los individuos establecer nexos conceptuales entre los continuos numéricos y geométricos.
ii. Confirmar la hipótesis de que los esquemas conceptuales de los objetos geométricos se construyen principalmente a partir de experiencias de visualización, finalmente

iii. Se propone dilucidar el modelo de recta que se ha usado, así como la percepción de la propiedad de completitud[44].

A partir de los resultados obtenidos, Romero manifiesta la ausencia de bases para apoyar las hipótesis inductivas, con las cuales se pretende evadir la introducción axiomática del continuo apelando a la intuición, además se observa la desconexión entre las imágenes del continuo y sus propiedades (preguntas 1, 2 y 3). Finalmente, se observó que la característica más relevante de los números resulta ser su forma de escritura y no se profundizó en la relación números-geometría.

Estas conclusiones no revelan un panorama muy alentador en cuanto a los logros alcanzados (en el aula) en la enseñanza-aprendizaje del continuo. Pese a esto, es claro que la intuición es un factor que puede jugar a favor o en contra dependiendo del rigor con el que se trate.

---

[44] 1) Con la pretensión de investigar las ***percepciones de las propiedades*** y características de cada tipo de números, hemos propuesto una tarea que hace poner en juego estas percepciones y que consiste en hacer que los individuos busquen y establezcan ***criterios de clasificación*** de números. El conocimiento de las ***percepciones*** de las propiedades de los números ha de proporcionar información importante acerca de las posibilidades que tienen los individuos para establecer nexos conceptuales entre los continuos numérico y geométrico.
2) La segunda pregunta pide la descripción de un ***objeto continuo*** -una recta- ***y*** la hemos planteado bajo la hipótesis de que los esquemas conceptuales de los objetos geométricos se construyen principalmente a partir de experiencias de visualización. La hemos formulado así:
«Imagina que dispones de un microscopio de gran potencia. Más aun, que puede aumentar los objetos tanto como tú quieras. Ahora enfocas un fragmento de una recta. Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que vas aumentando la potencia del microscopio. ¿Puedes describir lo que ves cuando el microscopio tiene aumento infinito?))
3) En la tercera pregunta proponemos una tarea de ***manipulación*** de un ***objeto acotado*** y ***completo;*** pedimos que, mediante un instrumento de corte «perfecto», una cuerda de un metro de longitud (la imagen tradicional de un segmento) se someta al siguiente proceso indefinido:
«Con las tijeras, cortar la cuerda en dos trozos, iguales o no. Tirar uno de los fragmentos a la basura. Con las tijeras, cortar la cuerda que nos queda en dos trozos, iguales o no. Tirar uno de los fragmentos a la basura. Con las tijeras, cortar...)). (Romero, 1996, p. 6)

2.2.4 Infinito actual.

El infinito ha estado presente en la historia de la humanidad desde tiempos de los griegos, o tal vez un poco antes oculto tras un velo de misterio tejido por los dioses y tendido por los sacerdotes. Sin embargo, desde que Aristóteles lo empleo como categoría filosófica ha figurado en la historia de la ciencia. Particularmente en la matemática. Pero durante el tiempo transcurrido desde Aristóteles hasta Cantor, este concepto ha evolucionado de su carácter potencial como fue inicialmente concebido hasta llegar a un estado actual (durante la segunda mitad del siglo XIX). Para el desarrollo del presente trabajo de grado es importante estudiar la historia de la evolución del infinito actual, su repercusión en el proceso de aritmetización del análisis y en la constitución de una teoría lógicamente fundamentada de los números reales.

El infinito actual ha sido una noción complicada de abordar en la historia de las matemáticas, puesto que la asociación establecida entre este término y Dios hacía que "…al someter a consideración matemática el infinito actual, estaríamos tratando de «determinar» lo divino mediante nuestros conceptos… Determinar a Dios de manera positiva, digamos, asignando un número transfinito a su poder, sería una herejía" (Ferreirós, 2006, p. 33).

Por su parte, Cantor en el artículo titulado *fundamentos para una teoría general de conjuntos* (1883), define el infinito potencial (impropio) y el infinito actual (propio) de la siguiente manera:

> …me parece que hasta ahora ha aparecido principalmente en el papel de una cantidad variable que o bien crece más allá de todos los límites o bien se hace tan pequeña como se desee, pero siempre continua siendo finita. A este infinito lo llamó *infinito impropio* (Ferreirós, 2006, p. 85).

Se suele usar

> …por ejemplo, en la investigación de una función analítica de variable compleja se ha hecho necesario y habitual imaginar, en el plano que representa la variable compleja, un único punto situado en el infinito (esto es, un punto infinitamente distante pero definido) y

> examinar el comportamiento de la función en el entorno de ese punto, igual que en el entorno de otro punto cualquiera.
>
> Resulta así que en el entorno del punto infinitamente distante la función muestra exactamente los mismos comportamientos que en cualquier otro punto situado en la región finita, de modo que en este caso estamos plenamente justificados para pensar en el infinito como situado en un punto completamente determinado.
>
> Cuando el infinito aparece en esta forma definida lo llamo *infinito propio* (Ferreirós, 2006, p. 86).

De las anteriores conceptualizaciones del infinito, la primera es la más difundida a través de la historia. No obstante, la segunda ha sido asumida de forma implícita por ejemplo, en el cálculo de límites y ha permitido los avances del cálculo, el análisis y la teoría de conjuntos. En esta última rama de las matemáticas es donde se puede observar la incidencia de la conceptualización de Cantor, aunque Bolzano se había planteado esta inquietud casi un siglo antes.

El paso del infinito potencial al infinito actual requirió pensar en éste como un objeto de estudio, lo cual *hace* Bolzano en su obra *Las Paradojas del infinito*, este paso consistió en concebir el infinito como un atributo de una colección, la cual era considerada como un todo. Otro punto considerado por este autor fue poder establecer comparaciones entre conjuntos infinitos, para lo cual pensó en los siguientes criterios: una correspondencia uno-a-uno y una relación de inclusión. Bolzano se apoyó en la relación de inclusión, porque consideraba que poder establecer una relación uno-a-uno entre dos conjuntos no era una justificación suficiente para concluir que un conjunto y uno de sus subconjuntos fueran equinumerables sino que esta era una característica de conjuntos infinitos (Moreno y Waldegg, 1991, p. 213).

En su búsqueda por aritmetizar el infinito, Bolzano intentó definir operaciones entre conjuntos apoyándose en la relación de inclusión, pero al no tener claro qué se obtenía de operar dos conjuntos no lo pudo lograr. No obstante, este marco contextual fue propicio para que Cantor a través de su trabajo de series trigonométricas, le diera[45] al infinito una posición permanente como objeto de estudio con su propia operatividad (Moreno y Waldegg, 1991, p. 215). Para esto definió operaciones entre conjuntos, esto implicó que a partir de una relación de orden se pudieran generar conjuntos infinitos.

Cantor retomó la comparación entre conjuntos a diferencia de Bolzano, también se basó en el criterio de la relación uno-a-uno que podía establecerse entre los elementos de un conjunto y los de sus subconjuntos propios. Esto significó la posibilidad de "igualar" (poner en correspondencia biunívoca) un conjunto con alguno de sus subconjuntos. Este criterio le permitió a Cantor distinguir los conjuntos contables de los no contables y puesto que ya había caracterizado la densidad como propiedad de los conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ (por separado), mientras que la continuidad sólo la poseían los $\mathbb{R}$. Por otra parte, esto representa un cambio metodológico en tanto posibilitó pasar de la comprobación empírica a la necesidad de la demostración basada en la lógica. Además, del uso de la noción de potencia establecida por el criterio de biyección como un instrumento útil en la caracterización de conjuntos (Moreno y Waldegg, 1991, pp. 216-218).

Aunque la anterior discusión se da en el seno de la teoría de conjuntos, tuvo repercusiones importantes en áreas como el análisis, donde posibilitó dotar de completitud el dominio de los reales con la inclusión de los números irracionales. No obstante, todavía sigue representando un obstáculo (epistemológico) aceptar a los irracionales como números (puesto que la idea de un número cuya representación decimal involucra infinitas cifras no encaja con la imagen de número heredada de los griegos) y no como operaciones. Arrigo y D'Amore (1999), afirman que esta resistencia se debe al abuso semántico de la palabra infinito. Tal arbitrariedad en el uso de este término trajo consecuencias negativas para el lenguaje matemático.

[45] Esta afirmación puede entenderse como que el propósito de Cantor con su trabajo de Series trigonométricas iba orientado al estudio del infinito. Pero no es así, a lo que hacemos referencia es que los elementos teóricos desarrollados por cantor en ese trabajo lo condujeron a platearse la necesidad de tratar con el infinito.

Este uso “inadecuado” no permite notar que, sin importar lo grade que sea un número natural, es siempre muy pequeño respecto al infinito (Arrigo y D’Amore, 1999, pp.3-4).

Con relación a la confusión semántica entre la noción de infinito matemático y sus interpretaciones informales (“tan grande como se quiera” o “tan pequeño como se quiera”), Arrigo y D’Amore proponen una situación cuyo significado se analiza desde dos perspectivas (categorías); en ellas es posible ver cómo la infinitud de cifras decimales de un número se interpreta no como un objeto en sí (infinito actual), sino como un proceso que nunca termina (infinito potencial).

Por otro lado, con el estudio acerca del infinito, se planteó algunas líneas arriba la importancia de la recta geométrica como modelo de los números reales. Se habló de sus ventajas y desventajas, entre estas últimas se encuentra la divergencia de los puntos como entes ideales (sin dimensiones) y los puntos reales (con posiciones que dependen del instrumento con el que se trace), dificultad que se manifiesta cuando se le pide a un estudiante ubicar sobre la recta un número con infinitas cifras decimales (irracional no construible). Adicionalmente a esto, en Arrigo y D’Amore (1999) se evidenció cómo al plantear un ejercicio en el cual se pedía a los estudiantes comparar la cardinalidad de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ (Episodio 4) el razonamiento de los estudiantes (partiendo del modelo de recta geométrica) originó dos respuestas contradictorias entre sí ($|\mathbb{N}|=(1/2)|\mathbb{Z}|$ y $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$). La primera afirmación se basa en la evidencia del modelo gráfico y la segunda en el fenómeno de *aplastamiento*[46]. La discrepancia en los argumentos expuestos llama la atención acerca de la relación entre las nociones de infinito y cardinalidad, estas se estudiaran en la siguiente sección.

[46] ““aplastamiento”, es decir el estudiante considera equipotentes entre sí a todos los conjuntos infinitos y, no obstante muestre de haber entendido la demostración presentada, termina por concluir aduciendo esta justificación” (D’Amore, Arrigo, 1999, p. 11).

2.2.5 Cardinalidad.

En este apartado se analizará el papel desempeñado por la noción de cardinalidad en el desarrollo de la teoría de los números reales, con este propósito se revisará en algunos artículos de Georg Cantor la importancia de esta noción, los documentos a considerar son: *Extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas*, *Sobre una propiedad del sistema de todos los números reales algebraicos* y *Una contribución a la teoría de conjuntos*. De estos se citaran fragmentos en los cuales se identifique de manera implícita o explícita la noción de cardinalidad.

Como se vio en el capítulo I Cantor construye los números irracionales (sistema B) a partir de los racionales (sistema A), los sistemas que le suceden al B (C, D, E,…) son equipotentes con este y entre ellos (aunque esta identidad no debe ser entendida como la equivalencia entre las magnitudes tomadas de dos sistemas, sino como la manera en que se relacionan los términos de las sucesiones a las cuales representan). En la actualidad se sabe que la cardinalidad de los números irracionales es mayor que la de los números racionales, se puede considerar que en la anterior cita lo que posibilita el paso entre diferentes sistemas, excepto el A, es la equipotencia que se puede establecer entre los sistemas generados a partir del B, equipotencia que Cantor definirá más adelante como una relación que puede establecerse entre dos conjuntos con igual cardinalidad.

En Cantor (1874), se establece una correspondencia biunívoca entre los números enteros positivos y los números reales algebraicos positivos, de modo semejante al artículo anterior, encontró que los conjuntos mencionados eran equipotentes como se muestra en Cantor (1874, p. 16).

El criterio empleado para establecer tal correspondencia es la *altura* (se llama altura del número w a la suma de los valores absolutos de los coeficientes aumentada por el número n-1, siendo n el grado de la ecuación). Al igual que no se podía pasar del sistema B (de los números irracionales) al A (de los números racionales), Cantor expresa un resultado en el cual de fondo se encuentra la noción de cardinalidad: (Cantor, 1874, p. 19), cuando afirma *la existencia de infinidad de números* que no están incluidos en un intervalo dado, hace referencia a los números trascendentes, los cuales son los que le dan el carácter de no numerabilidad a los reales. i.e., no se puede establecer correspondencia alguna entre los enteros positivos y los números trascendentes, porque estos conjuntos no son equipotentes.

Finalmente, en (Cantor, 1877) Cantor define *explícitamente* la noción de potencia (cardinalidad) (como número de elementos de un conjunto) de un conjunto finito, establece comparaciones entre las potencias de conjuntos finitos para determinar cuándo, dado un conjunto infinito, este tiene potencia igual, mayor o menor que la potencia de otro conjunto infinito y, define que en el caso de conjuntos finitos, la potencia de cualquier subconjunto propio es menor que la potencia del conjunto en su totalidad. Establecer esta misma comparación en el caso de conjuntos infinitos fue lo que se constituyó en el punto crítico en el proceso de construcción de una teoría rigurosa de los números reales y de la teoría de conjuntos.

Las cartas de Cantor a Dedekind de junio y octubre de 1877 muestran que Cantor estaba trabajando con la noción de *potencia* o *Cardinalidad* de un conjunto infinito. Aunque el termino como tal fue tomado de una conferencia de Steiner en la cual se uso para denotar una correspondencia uno-a-uno (Aponte, 2008, p. 44).

Cantor en su artículo de 1877 define esta noción. En este mismo artículo Cantor formula un resultado claramente intuitivo que no demostró. Este es el teorema de comparación de Cardinalidad que Zermelo estableció en 1904 como corolario del teorema de buena ordenación, empleado en el axioma de elección[47]. Pero Cantor advirtió acerca de una propiedad peculiar de las potencias infinitas, en las cuales no necesariamente se cumplen las relaciones de comparación que se dan entre conjuntos finitos, lo cual era contradictorio al principio Euclidiano que el todo es mayor que la parte.

El presente capitulo comenzó con la caracterización de algunos elementos de orden epistemológicos claves para el desarrollo del mismo. Una vez establecido el marco de referencia se procedió a enlistar (y depurar) ciertos conceptos aparentemente inconexos salvo por ser importantes en la construcción de los números reales. No obstante, el análisis epistemológico de estos reveló profundas relaciones entre estos: operatividad-infinito actual, cardinalidad-infinito actual, continuo-recta real. Relaciones conflictivas como es el caso del continuo y la recta real (estudiado anteriormente), en el que la *recta real* como modelo estándar puede convertirse en un obstáculo para la comprensión del *continuo*. El profundizar en los obstáculos (epistemológicos) que la evolución conceptual de estas nociones, generaron fue el principal objetivo de este capítulo, en tanto que su superación significó dar un paso más en pos de la consolidación de una teoría lógicamente fundamentada de los números reales.

Ahora bien, la importancia de identificar e indagar en los obstáculos epistemológicos anteriormente mencionados está en que aportará los elementos necesarios para diseñar una rejilla que permita efectuar una revisión de textos de matemáticas de secundaria. La intención detrás de dicha revisión es la de establecer las dificultades asociadas a la enseñanza y aprendizaje de los números reales observables en los textos que son objetos de la revisión.

[47] "(…)Zermelo had finished a final version. Basically, it showed how to produce an ordering for any given set in terms of a well-ordering of its subsets. The only sets newly constructed in the proof itself. Given M, were the subsets of M the set of all subsets of M. the power set U (M) and the subsets of U (M)" (Dauben, 1990, p. 250).

REVISIÓN DE ALGUNOS TEXTOS ESCOLARES DE MATEMÁTICAS

En este capítulo se pretende contextualizar algunas de las nociones identificadas en el capitulo anterior con el fin de emplearlas en la revisión de textos. Así, es necesario caracterizar conceptos capitales tales como *obstáculo epistemológico* y *Transposición Didáctica*. Lo anterior, se realiza en la medida que estas categorías permitirán establecer la rejilla de revisión. No obstante, se precisa determinar el lugar que toma el concepto “número irracional” en los contextos escolares; por tal motivo, se realizará una caracterización de índole curricular que dé cuenta del aspecto anterior.

1. La relevancia de I (y R) en la escuela.

1.1 Aspectos curriculares.

En la búsqueda de argumentos que permitan evidenciar la importancia que se le otorga a los números reales desde el punto de vista curricular, se ha indagado los estándares (MEN, 2006) y los lineamientos (MEN, 1998) que se asocien al concepto de número irracional. En MEN (1998) se recomienda reflexionar en torno a ciertas preguntas antes de abordar el currículo de matemáticas. Algunas de las preguntas ahí planteadas guardan cierta relación con el propósito del presente trabajo. Estas son:

- ¿Para qué y cómo se enseñan las matemáticas?
- ¿Qué relación se establece entre las matemáticas y la cultura?
- ¿Qué énfasis es necesario hacer?

A continuación, se pretende dar respuesta a estos interrogantes prestando particular atención en el papel que desempeñan los textos escolares de matemáticas en la escuela. Esto último en tanto que, en mayor o menor medida, un aspecto importante para el desarrollo de la actividad matemática escolar son los libros de texto. Esto se afirma al considerar la hipótesis de que el desarrollo de las clases, en algunos casos de las prácticas de enseñanza, está guiado por la estructura contenida es estos. *i. e*., en ocasiones el libro de texto se convierte en "la carta de navegación" del profesor. Pero en el texto escolar, no necesariamente está plasmado todo el conocimiento acerca de los objetos matemáticos a los que se refiere. De hecho, ese no es el propósito central del texto escolar, pues de darse el caso en el que se aborden las múltiples facetas y propiedades de los objetos matemáticos consignados en su interior, el texto estaría *saturado* y sería completo por sí mismo, algo que se daría sólo en un caso ideal.

Ahora bien, las representaciones de un objeto matemático determinado consignadas en los textos escolares son el resultado de sucesivos y complejos procesos de transposición didáctica. Comenzando con la selección de resultados de una teoría particular para ser enseñados y, luego, estos resultados son sintetizados en un libro para que sirvan de guía tanto a profesores como estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Sin embargo, se deben tomar en consideración los obstáculos epistemológicos asociados a un concepto, en tanto que estos *perviven* a pesar de la transposición didáctica de dicho concepto. Esto se debe a que este tipo de obstáculos son inherentes al conocimiento de dicho concepto. Pues bien, en la enseñanza y el aprendizaje de un concepto, se deben tener en consideración estos obstáculos (como se mencionó en el capitulo anterior p. 49). Por otro lado, una hipótesis fundamental en este trabajo es que, en la medida que el texto es movilizador de conocimiento matemático, es decir, que exhiba un objeto matemático con unos ciertos matices definidos, esta exhibición; o dicho de mejor modo, este objeto matemático escolar trae consigo los obstáculos epistemológicos asociados a él, tanto de forma implícita (cuando en los textos se evita hacer referencia alguna a ciertas nociones cuya complejidad no puede ser abordada con los elementos que provee el libro) o explícitamente (mencionando lo problemático de las nociones o conceptos involucrados sin profundizar en su tratamiento y limitándose a ilustrar a los lectores con fragmentos de anécdotas históricas). Luego, el texto *podría* ser una herramienta para identificar dichos obstáculos y realizar intervenciones en el aula con estrategias que permitan superarlos[48].

En este orden de ideas, para responder a la primera pregunta se situará la discusión en relación con los números reales. Partiendo de la importancia concedida a los libros de texto en la escuela y las limitaciones de estas herramientas, las matemáticas presentes en la enseñanza de las matemáticas en la escuela más que un fin en sí mismo, se considera un medio. Esto se puede observar en el énfasis que se hace en el tratamiento operativo de ciertos objetos matemáticos. Por ejemplo, en el caso de los números reales, representados como la unión de los racionales e irracionales, al proponer un ejercicio cuya respuesta es irracional no se considera esta como una respuesta porque en la práctica no tiene sentido hablar de un número compuesto por una parte entera e infinitas cifras decimales, para atender a la necesidad de "aplicabilidad" se emplea una aproximación racional del resultado, lo cual no está mal, solo que deja de lado el significado teórico por la urgencia práctica y esto va en detrimento de la riqueza conceptual de los objetos matemáticos (los números reales).

De otra parte, la segunda pregunta se enfoca en la conflictiva relación entre matemáticas y cultura. Este vínculo resulta problemático en tanto que, el

[48] Aspecto que reafirman Kang y Kilpatrick (1992, p. 3)

reconocimiento concedido por la cultura dominante a los saberes matemáticos se traducen en los contenidos escolares:

> Paul Ernest ha propuesto una reconceptualización del papel de la filosofía de las matemáticas, que tenga en cuenta la naturaleza, justificación y génesis tanto del conocimiento matemático como de los objetos de las matemáticas, las aplicaciones de éstas en la ciencia y en la tecnología, y el hacer matemático a lo largo de la historia. Este planteamiento ha llevado a considerar que el conocimiento matemático está conectado con la vida social de los hombres, que se utiliza para tomar determinadas decisiones que afectan a la colectividad y que sirve como argumento de justificación (MEN, 1998 , p. 26).

Es decir, la actividad matemática está vinculada a una gran variedad de contextos sociales. Tal vez por esta razón, se tiende a desconocer el carácter de las matemáticas como una disciplina de estudio en sí misma y se le relega al papel de herramienta cuyo único propósito es contribuir al progreso de la sociedad, dejando de lado todo aquello que no tiene aplicación práctica. Una muestra de esta situación se observa en el tratamiento poco conceptual que se le da a los números reales, cuyo tratamiento (al menos en los textos escolares) enfatiza en el aspecto operativo afianzado por el uso extendido de los números racionales. Ahora bien, se puede reconocer que los números irracionales responden a la necesidad de fundamentar un cuerpo teórico y no a aplicaciones en contextos diferentes al matemático.

Finalmente, para responder a la pregunta sobre *¿Qué énfasis es necesario hacer?* (en la enseñanza de las matemáticas) la propuesta del Ministerio de Educación Nacional sugiere la incorporación de diferentes contextos. En lo concerniente con el pensamiento numérico (donde se inscriben los números reales), resolver problemas del mundo real; esto se traduce en privilegiar el uso de los números racionales y sus diferentes representaciones (entera, fraccionaria, decimal, etc.), *i. e*., las aplicaciones de estos sistemas numéricos:

> Respecto al desarrollo de pensamiento numérico y ampliando algunos énfasis propuestos en la Resolución 2343[49], diríamos que algunos aspectos fundamentales estarían constituidos por el uso significativo de los números y el sentido numérico que suponen una comprensión profunda del sistema de numeración decimal, no sólo para tener una idea de cantidad, de orden, de magnitud, de aproximación, de estimación, de las relaciones entre ellos, sino además para desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas. Otro aspecto fundamental sería la comprensión de los distintos significados y aplicaciones de las operaciones en diversos universos numéricos, por la comprensión de su modelación, sus propiedades, sus relaciones, su efecto y la relación entre las diferentes operaciones. Es de anotar que para el desarrollo del pensamiento numérico se requiere del apoyo de sistemas matemáticos más allá de los numéricos como el geométrico, el métrico, el de datos; es como si este tipo de pensamiento tomara una forma particular en cada sistema (MEN, 1998, pp. 32-33).

Lo anterior puede observarse en MEN (2006), especialmente en los estándares contemplados en el subtema *Pensamiento numérico y sistemas numéricos*. En este ítem, se busca aproximar a los estudiantes a los conjuntos numéricos a partir de contextos particulares como el de medición y estimación[50]. Lo cual es limitado, en

[49] por la cual se adopta un diseño de lineamientos generales de los procesos curriculares del servicio público educativo y se establecen los indicadores de logros curriculares para la educación formal.

[50] Estos son algunos de los estándares asociados al concepto (explícito o implícito) de número real. Estos están discriminados por grados:

GRADOS 4-5

- Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.
- Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.

GRADOS 6-7

- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
- Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.

GRADOS 8-9

- Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.

tanto que la importancia matemática de un conjunto numérico está mediada por su utilidad en la solución de problemas.

1.2 Aspectos teóricos en relación con el reto para la educación matemática sobre la construcción en el aula de los números reales.

En el artículo *Lo veo pero no lo creo*, de Arrigo y D'Amore (1999), se pretende estudiar "los obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual". En una carta que Cantor le envía a Dedekind al 29 de junio de 1877, aquél le pregunta a éste que dados $A \subseteq \mathbf{R}^n$ y $B \subseteq \mathbf{R}$ si es posible la existencia de una relación biunívoca $f{:}A \rightarrow B$. Cantor responde luego que, en efecto existe dicha correspondencia:

> La mayoría de aquellos a quienes planteé esta pregunta se maravillan de que hubiera llegado a formularla, ya que *se entiende de suyo* que para determinar un punto en una extensión de ρ dimensiones han de emplearse siempre ρ coordenadas independientes (Ferreirós, 2006 p. 197).

Ahora bien, Arrigo y D'Amore señalan que este resultado conlleva implícitamente un obstáculo epistemológico. Ellos, por otra parte, caracterizan algunos obstáculos

---

- Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.

GRADOS 10-11

- Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.
- Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.
- Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.
- Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada. (MEN, 2006 pp. 80-89)

didácticos relacionados con el estudio de dicho teorema, tales como: "aplastamiento de los cardinales transfinitos", formado a partir de la falsa creencia de que "todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad", "dependencia de los cardinales transfinitos de hechos relativos a medidas", consecuencia de pensar que en un segmento *largo* existen más puntos que en un segmento más *corto*. Finalmente, se presenta un *deslizamiento*, es decir, "cuando se está hablando de alguna cosa e, improvisadamente, nos hallamos hablando de otra cosa" (Arrigo y D'Amore, 1999, p. 4).

Es necesario aclarar que el propósito de este artículo es poner en evidencia dificultades al momento en que los estudiantes se enfrentan al concepto de infinito actual a través del teorema de Cantor. No obstante, las observaciones presentes en este documento son sumamente valiosas para el desarrollo de este apartado, en la medida que muchos de los problemas en relación con el concepto de número real, se asocian fuertemente con los problemas en la conceptualización del infinito actual. Ahora bien, Arrigo y D'Amore describen tres problemas que motivaron la realización de dicha investigación:

> En el primer problema (P1) los autores llaman la atención acerca de que los estudiantes a los que se les aplicó la prueba cuentan con las habilidades matemáticas que pueden considerarse prerrequisito para la demostración del teorema arriba mencionado. De ahí que se planteen el siguiente interrogante: "¿Esto basta para garantizar la comprensión por parte de los estudiantes del tercero y del penúltimo año de la escuela superior (edad: 16-18 años) que hayan adquirido esas nociones?". Si la respuesta es negativa, eso querría decir que las habilidades matemáticas consideradas son necesarias pero no suficientes (Arrigo y D'Amore, p. 5).

El segundo problema (P2) asumía una respuesta negativa de P1. A partir de esto se plantean algunas preguntas para orientar el posterior análisis en busca de respuestas:

P.2. En el caso de que hubiésemos encontrado una respuesta negativa a **P.1.**, ¿cuál podría haber sido la explicación? ¿Tendríamos que haber recurrido exclusivamente a los obstáculos epistemológicos, evidentemente presentes en este campo y explícitamente llamados en causa por muchos de los autores citados precedentemente [y en especial modo, por ejemplo, de Fischbein, Jehiam y Cohen (1994)][51]? O ¿habríamos descubierto, entre las causas de la falta de comprensión, también cláusulas generales y específicas del contrato didáctico? (Arrigo y D'Amore, 1999, p. 5)

El tercer problema (P3) cuestiona la incidencia que para propósitos de la investigación en curso pueden tener cuestiones como:

- La falta de aceptación, por parte de los estudiantes, de los diversos cardinales transfinitos o la consideración, producto de una concepción errada, de que todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad.
- El debate clásico planteado por Aristóteles sobre el infinito en sentido *actual* y *potencial*, y la aparente contradicción existente entre matemáticas y el currículo escolar con relación a *la evolución de la concepción actual del infinito matemático* (Arrigo y D'Amore, 1999, p. 4).

A partir de los resultados observados en los cuestionarios, los investigadores propusieron seis hipótesis de investigación que comprobarían con las entrevistas posteriores. Se analizó en las hipótesis las razones por las cuales algunos estudiantes rechazaron las demostraciones y otros las aceptaron. Los investigadores relacionaron los fenómenos de aceptación y rechazo con los obstáculos didácticos de *aplastamiento*, *dependencia* y *deslizamiento* (I1, I2 e I3 respectivamente); en las restantes hipótesis consideran que las nociones involucradas exceden la capacidad cognitiva de los estudiantes (I4), también se considera el fenómeno asociado a la *confianza en el profesor* (I5), derivado del contrato didáctico, como factor a favor, o el *escepticismo* de aquellos que creen haber asistido a un "truco de magia" (I6).

---

[51] FISCHBEIN Y., JEHIAM R. & COHEN D. (1994), The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles, Proceedings of the XVIII PME, 2, Lisboa, 352-359.

En el estudio, la inducción de los estudiantes se hizo a través de un video, en el cual se plantearon los tres puntos básicos en la investigación. Estos siguen una estructura secuencial, inician con la demostración de la equipotencia entre un segmento corto y un segmento más largo, luego se comparan las expansiones decimales en los números racionales y, se finaliza con un caso particular de la demostración del teorema de Cantor mencionado al principio: se demuestra que puede ponerse en correspondencia biunívoca los puntos internos de un cuadrado unitario con los puntos internos del segmento unitario. Esta demostración emplea los resultados obtenidos en los puntos anteriores[52].

En el apartado sobre la discusión de los resultados y verificación de la hipótesis se identificaron obstáculos tanto epistemológicos como didácticos asociados a cada etapa de la prueba. Respecto a la demostración de la equipotencia entre el "segmentito" y el "segmentote", se encontró que el obstáculo estaba en el modelo "collar de perlas" ampliamente difundido en la escuela, modelo que consiste en visualizar cada segmento como compuesto por muchos puntos. Este modelo crea en los estudiantes la asociación entre mayor longitud, mayor cardinalidad, puesto que los puntos de dos segmentos tienen el mismo "grosor", luego, un segmento (caracterizado a través de este modelo) más largo tendrá más puntos que un segmento más corto. Como se aprecia en el gráfico, el "segmento" A tiene más puntos que el B.

Segmento A

Segmento B

[52] Luego, se procede con el análisis de las respuestas y preguntas de la prueba, se sintetiza la información en tablas de acuerdo con unas categorías establecidas con anterioridad, y se expresan los resultados en porcentajes.

Con relación a las “formas periódicas”, los autores identificaron un obstáculo didáctico asociado a la relación entre la definición de número periódico e infinito potencial. Estos números periódicos se definen a partir de una división de enteros (en este caso enteros positivos) con cociente decimal. Por ejemplo, cuando se divide 10 entre 3 el resultado es 3,3333…donde el primer término del cociente es entero (3) y los demás son decimales, lo particular en este cociente es que las cifras decimales son todas iguales entre si, son periódicas e infinitas. Pese a que los estudiantes manifiestan comprender el carácter de infinito de las cifras decimales de estos números, en el momento de efectuar las operaciones toman tantas cifras como les convenga para efectuar los cálculos sin ser conscientes de que el número que emplean no es el mismo que tenían al principio.

El último obstáculo vinculado con el teorema de Cantor es de carácter epistemológico. El siguiente fragmento delimita la naturaleza del obstáculo en cuestión: “se trata de la equipotencia entre dos conjuntos infinitos actuales de diferente naturaleza geométrica” (Arrigo y D’Amore, 1999, p. 5). También contiene otros elementos de orden didáctico como el *deslizamiento* propiciado por el paso de una situación geométrica a una algebraica y la conveniente construcción de cifras decimales.

Finalmente, los resultados revelaron que la demostración del teorema de Cantor, en tanto que involucra obstáculos epistemológicos y didácticos, supera las capacidades normales de aprendizaje de los estudiantes que participaron en la investigación y que aún no habían recibido instrucción alguna en análisis matemático.

En Crespo (2009), se identifican algunos problemas que se presentan en “la manera en la que los alumnos construyen el concepto de irracionalidad”, la cual se refleja en sus concepciones y dejan al descubierto obstáculos epistemológicos y didácticos en el aula. Este trata sobre la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemáticas. Este trabajo se da a partir de la reflexión en torno a las respuestas de los estudiantes, en las que se observa su concepción de los números reales. En tales intervenciones crespo reconoce “errores y usos incorrectos que demuestran la falta de significado que poseen estos números para los estudiantes en la construcción que realizan en el aula” (Crespo, 2009, p. 1).

Se podría establecer alguna conexión entre la problemática examinada por Crespo es este documento y el segundo punto del artículo anterior (las formas decimales periódicas), en tanto que, en ambas se advierte la relación entre la cantidad de cifras decimales de un número periódico o irracional y el infinito potencial. Porque desde la perspectiva de los estudiantes, estas cifras decimales son finitas, aunque puede haber tantas como se desee. De acuerdo con Crespo, en el aula los números irracionales surgen como la solución a la necesidad de “rellenar” la recta para darle completitud a los reales, es decir, se ven como una herramienta y no como un objeto de estudio. Además este modo de aproximar a los estudiantes a los números reales a partir de la comparación con la recta, a mediano o largo plazo, favorece la aparición del obstáculo asociado al modelo “collar de perlas” mencionado anteriormente (Arrigo y D’Amore, 1999).

En último lugar de esta serie de trabajos concernientes al desafío que representa para la educación matemática la construcción en el aula de los números reales, pretende responder esencialmente al siguiente interrogante: *¿De qué manera se presenta el continuo numérico en los textos escolares de matemáticas?* (Vargas, 2003, p. 2). La autora es consciente de las múltiples implicaciones que tiene para los involucrados la enseñanza y aprendizaje de los números reales, en particular para el maestro, quien sin pretenderlo puede obstaculizar el progreso del estudiante en la conceptualización de las diferencias entre los números racionales y reales.

La importancia de considerar la investigación de Vargas se sitúa en el objeto de estudio, el continuo matemático, fuertemente vinculado al objeto matemático analizado en el presente trabajo y por supuesto, el protagonismo que esta autora le otorga a los textos escolares en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Justamente ésta consideración en torno al texto escolar es la razón de ser del capítulo en desarrollo, se espera que a partir de los elementos de tipo histórico y epistemológico, identificados en los capítulos I y II, desvelar la presencia de obstáculos epistemológicos asociados a los números reales presentes en los textos escolares de matemáticas seleccionados.

2. El fenómeno de la Transposición Didáctica mediada por los textos.

La *Transposición Didáctica*[53] (TD) es el término acuñado por Chevallard para designar los mecanismos generales que permiten el paso de un objeto de saber a un objeto de enseñanza. Este proceso consiste en depurar el saber científico, a primera vista, cerrado y sintetizado, en conceptos independientes pero vinculados entre sí por una intrincada red de relaciones; aunque el saber didáctico es cualitativamente diferente de su saber de referencia. Ahora bien, no debe considerarse el "paso" del saber erudito al saber escolar como la *simplificación* de los objetos más complejos.

[53] "La teoría de la transposición didáctica se basa en la aserción de que los cuerpos de conocimiento, con pocas excepciones, no son diseñados para ser enseñados sino para ser usados. La transposición didáctica del conocimiento es la transposición desde el conocimiento considerado como una herramienta para ser puesta en uso, al conocimiento como algo a ser enseñado y aprendido" (Chevallard, 1988. *On didactic transposition theory: some introductory notes.* Paper presented at the International Symposium on Research and Development in Mathematics Education, Bratislava, Czechoslavakia. En: Arbeláez *et al*., 1999, p. 75)

La importancia del proceso de TD dentro del desarrollo del presente capitulo (y en general del trabajo de grado) se centra en la manera en que ésta se manifiesta en los libros de texto y cómo a partir de la revisión de algunos textos escolares, es posible detectar los obstáculos epistemológicos inherentes al proceso de constitución de los objetos matemáticos. Al respecto Arbeláez *et al*., afirma:

> Aunque el texto escolar de matemáticas tampoco escapa a lo ideológico, confluyen en él también, otras concepciones de índole filosófico o epistemológico. Si bien es cierto que el objetivo del autor, no es el de comunicar, - al menos de manera consciente,- estas concepciones, el texto refleja a través de múltiples aspectos, como pueden ser la escritura, la manera de comunicar el conocimiento, el uso de la simbología, los gráficos y las relaciones que se establecen entre todos estos elementos, unas determinadas ideas acerca de lo que se considera es la naturaleza de la "verdad" en matemáticas y acerca del tipo de realidad que poseen los objetos matemáticos (Arbeláez *et al.,* 1999, pp. 74-75).

Justamente, si se considera la influencia inevitable del contexto social presente en forma implícita en los textos escolares en conjunto con las posturas filosóficas (epistemológicas) particulares de los autores, esta consideración permitirá hacer la búsqueda de los obstáculos epistemológicos asociados a la constitución de los números reales identificados en el Capítulo II (ver *Recta vs. número*), obstáculo asociado a la operatividad en los reales, asociado al continuo, al infinito actual y a la cardinalidad. Puesto que la superación de estos obstáculos permitió dar saltos cualitativos en la manera de concebir nociones como continuidad, cardinalidad e infinito actual (entre otras), sin las cuales los reales no tendrían existencia matemática.

Una vez descrita *grosso modo* en qué consiste el proceso de TD, ¿cuál es la conexión con los textos escolares? Pues bien, los textos escolares pueden considerarse como producto o medio. Desde la primera de estas perspectivas el texto escolar es el resultado final de la transposición hecha por el autor y que el profesor adopta en su quehacer pedagógico y didáctico, en la segunda postura el docente transpone el saber plasmado en el texto escolar y sus reflexiones alrededor de este conforman el discurso de la clase. Independientemente de la posición adoptada por el profesor, el libro de texto certifica aquello que se debe saber. La forma en que se organizan las lecciones y los capítulos siguen un proceso progresivo, acumulativo e irreversible caracterizado por un orden "lógico", el cual no corresponde al desarrollo histórico de los objetos matemáticos transpuestos, los problemas que suscitaron la construcción de un objeto particular, los retrocesos o las motivaciones del investigador:

> Aunque un libro de texto de matemáticas es una fuente en la que se pueden observar algunos aspectos de la transposición didáctica, una transposición didáctica en un libro de texto puede tener ciertas limitaciones. Cuando Kilpatrick [1980] hizo la pregunta, "¿la solución de problemas se puede reservar?" En la 58ª reunión anual del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas en Seattle, estaba preguntando si alguien podía poner en la forma lineal y estática de un libro de texto el proceso multidimensional y dinámico de resolver un problema (Kang y Kilpatrick, 1992, pp. 3-4)[54].

Kang y Kilpatrick llaman la atención sobre un aspecto particular como lo es la resolución de problemas, en el que se percibe la limitación de la TD en la medida en que esta no da cuenta de los diferentes fenómenos que acontecen mientras se está solucionando un problema o de los diferentes frentes desde los que se puede abordar una situación dada. Sino que presenta una única solución, conforme al tema que se esté tratando en la sección, y esto se presta para interpretaciones

---

[54] Although a mathematics textbook is a source in which one can observe some aspects of didactic transpositions, a didactic transposition in a textbook may have certain limitations. When Kilpatrick [1980] asked the question, "Is problem solving bookable?" at the 58th annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics in Seattle, he was questioning whether anyone could put into the linear, static form of a textbook the multidimensional, dynamic process of solving a problem (Kang y Kilpatrick, 1992, pp. 3-4).

erróneas por parte de los estudiantes con las cuales se crea la impresión de que hay una *única* forma de solucionar un problema.

3. Una revisión de tres textos de grado 11 sobre la introducción y estudio de los irracionales.

La interacción de los estudiantes con los textos escolares no se limita al salón de clases: como se menciona en Rezat (2009), los libros de matemáticas son empleados por los estudiantes para solucionar tareas y problemas, adquisición de conocimientos matemáticos y actividades asociadas con el interés por las matemáticas. Asimismo, como se afirma en Arbeláez *et al*. (1999, p. 79), los textos escolares son "una fuente en la cual algunos aspectos de las transposiciones didácticas pueden ser investigados". Además, Peña señala que:

> El texto materializa los programas curriculares, ayuda a la organización y administración del tiempo, presenta información verbal y gráfica estructurado pedagógicamente y propone actividades y ejercicios en sus páginas y fuera de ellas, que sirven para estimular y apoyar los procesos de pensamiento. Un texto bien realizado puede contribuir a facilitar y a hacer más eficiente el trabajo del profesor y de los estudiantes y a mejorar la calidad de la educación (*El libro de texto como problema de calidad educativa* de L. Peña. En: Arbeláez *et al.,* 1999, p. 5).

Es decir, el libro de texto hace las veces de carta de navegación del profesor, razón por la cual la revisión de textos permite recorrer la misma ruta que el maestro (salvo por algunas particularidades propias de la interacción entre profesor y estudiantes) en su preparación de la clase y, asimismo, permite afrontar obstáculos similares que éste encuentra en esta labor. También, dicha revisión permitirá identificar algunas de las características intrínsecas del conjunto de los números irracionales que reaparecen en los textos escolares.

A continuación se realizará la revisión de los textos (*Nuevas matemáticas* 11, *Espiral* 11 e *Introducción al cálculo*) en los cuales se estudiará cómo, en la forma de presentar los números reales se manifiestan los obstáculos epistemológicos mencionados en el capítulo anterior. Los textos antes mencionados se seleccionaron por ser algunos de los más usados en grado 11 y haber sido publicados entre los años 200 y 2009.

3.1 Criterios de revisión[55].

Los criterios de revisión serán las nociones desarrolladas en el capítulo II en el apartado titulado como: *Principales obstáculos epistemológicos presentes en la constitución de los números reales*, por su trascendencia en la construcción de los números reales en objeto matemático.

- Infinito: concepciones y diferencias que se mencionan entre el infinito de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.
- Número real: presentación del concepto, representación numérica, construcciones de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y sus relaciones. Representaciones geométricas y conexiones entre las representaciones.
- Continuidad: nociones y concepciones.

Texto 1

Nuevas matemáticas (cálculo, estadística) grado 11, Editorial Santillana.

Este libro se divide en diez unidades, cada una de las cuales se descompone en temas junto con una sesión adicional titulada *La matemática herramienta para otras ciencias*, que aparece una o dos veces por unidad. El tema que se revisará en este

[55] Pese a que en el Capítulo II se estudiaron cinco obstáculos concretos en el desarrollo de este apartado se consideraran sólo tres ítems en la rejilla, los cuales incorporan los obstáculos mencionados en el capitulo anterior:

- Infinito (infinito actual y cardinalidad)
- Número real (recta vs. número y, operatividad en los reales)
- Continuidad (el continuo)

texto es el tema tres de la unidad uno (los números reales). En este aparato se hace una pequeña introducción a los números reales partiendo del conjunto de los números naturales, pasando por los enteros, los racionales y finalizando con los irracionales. Mencionan como factor determinante en la construcción de los números irracionales, la imposibilidad de representar estos por medio de una expresión decimal y definen a los reales como la unión de los racionales e irracionales, las propiedades que este nuevo dominio cumple y que los subconjuntos de éste, no poseen por separado (ver anexo, figura n°2). También se observa en las unidades dos y tres, temas que toman como base este nuevo dominio numérico y sus propiedades, en tanto que involucra la clasificación de funciones y sus operaciones, límites de funciones y su continuidad (ver anexo, figuras n°5 y n°6).

Texto 2

Espiral 11, Editorial Norma

Este texto escolar se estructura de la siguiente manera; seis unidades que a su vez se fraccionan por temáticas (aunque la separación no es tan marcada como en otros textos de la misma naturaleza). Cada temática inicia con su respectivo titulo (claramente diferenciado) junto con un logro, otro aspecto importante de la organización de este texto se observa en la primera página de cada unidad (ver anexos, figura n° 11), en este se presentan los estándares relacionados con el objeto matemático en cuestión, agrupados por pensamientos (estos le permiten a los autores reforzar la separación entre temáticas) de forma similar en esta página de introducción se enuncian unos procesos que orientaran la evaluación de cada temática en un aparato llamado *taller de procesos*. Finalmente, los autores concluyen cada unidad con cuatro actividades evaluativas; *Estándares de evaluación*, *Lectura comprensiva*, *Prueba Icfes* y *Taller de profundización*.

La manera en que se orienta la discusión de los temas se caracteriza por presentar una definición (en un formato llamativo) o una afirmación de carácter general acompañada de un ejemplo, aunque a veces primero plantean una situación concreta que contextualiza al lector y posteriormente se formaliza la idea matemática implícita (en la situación inicial), mediante una definición (ver anexos, figuras n° 20 y n° 22). En el texto en cuestión se advierte que las tres primeras unidades (*Números reales, Funciones, Límite y continuidad*) están más estrechamente relacionadas con los números reales. Para ilustrar al respecto, se hará una breve descripción de los temas que la conforman[56]. Inicia presentando las propiedades de campo de los números reales y mostrando ejemplos de otros campos; enseguida, en algunos ejemplos, se muestra cómo localizar algunos números reales sobre la recta geométrica con regla y compás; se definen las propiedades de orden de este conjunto y la manera como intervienen en la solución de inecuaciones y desigualdades; se muestran los conjuntos solución y las distintas clases de intervalos, junto con su representación geométrica; y, para concluir esta primera parte de la unidad, se definen las propiedades de densidad y arquimediana que diferencian este conjunto de los enteros.

La segunda parte de esta unidad trata de los subconjuntos acotados de los números reales, a través de situaciones matemáticas y de otros contextos muestran algunos conjuntos acotados superiormente. A continuación, definen la cota superior de un conjunto, la cota inferior y, finalmente conjuntos acotados. La tercera parte toca el tema de la métrica, se define la distancia entre dos puntos y las propiedades de la métrica. Por medio de ejemplos se muestra cómo funciona la métrica usual en la recta y el plano, además de otras métricas (la del taxista).

[56] Este texto también se encuentra dividido en unidades y temas.

Entre los resultados obtenidos en este primer intento de revisión se encontró, con relación al primero de los criterios que en la página 18 se introducen, en un comentario, los símbolos para infinito (positivo y negativo), aunque el infinito considerado es el potencial, en la medida en que va de la mano con la idea de infinitud asociada a los números reales:

"Los símbolos -∞, y, +∞ no representan números reales sino que significan; el primero *menor que todo número real*, y el segundo *mayor que todo número real*" (Ardila *et al*., 2005, p. 18).

En el tema de límite y continuidad no hay referencias explicitas al infinito actual o potencial, pero en algunos comentarios se deja ver algo que podría hacer alusión a estos conceptos, tales como:

"suficientemente cercano a…" (Ardila *et al*., 2005, p. 125)

"…cuando x crece ilimitadamente o cuando decrece ilimitadamente." (Infinito potencial, p. 145)

En el primer tema (*Propiedades de los números reales*), se muestra a modo de introducción histórica la equipotencia que se puede establecer entre el conjunto de los números naturales y los enteros. Pero esta aproximación resulta inconexa con el propósito de la unidad, en tanto que no menciona (de manera explícita o implícita) si una equipotencia tal puede darse entre el conjunto de los $\mathbb{N}$ y los $\mathbb{R}$. También se muestra en un cuadro, la relación de inclusión que existe entre los conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ y $\mathbb{Q}$ (este es un pequeño espacio en la página destinado a hacer aclaraciones). A continuación, se presentan las propiedades de campo de los números reales y se exhibe a $\mathbb{Z}_3$ como ejemplo de otro conjunto que cumple con estas propiedades; por otro lado, ejemplifican a través de algunos métodos geométricos cómo puede ubicarse en la recta geométrica determinados números reales. De ahí que, en unos ejercicios, se plantee situar sobre la recta determinados números. Lo que se puede identificar en este punto en particular, es la manera indistinta en que se refieren a la recta geométrica y a la real.

A su vez, en otros temas de la unidad, se habla de las propiedades de orden en este conjunto numérico como preámbulo a la definición de densidad, y para ejemplificar esta, se presentan algunos números (racionales e irracionales) que se encuentran entre dos números naturales consecutivos dados. Una vez establecidas las propiedades de orden y la densidad, el camino para tratar el tema del conjunto solución de una desigualdad y la forma de representarla. Al final de este tema se menciona la propiedad *arquimediana*[57] y se intenta ilustrar su aplicabilidad desde la geometría. En cuanto al tercer tema, los autores han considerado los *subconjuntos acotados de los números reales* (ver anexos, figuras n° 20 y n° 21), en este se dan las definiciones de cota superior e inferior de un conjunto, conjuntos acotados, elementos mínimo y máximo. Además de algunas situaciones que aclaran cada definición.

Finalmente, respecto al tercer criterio de esta revisión, se estableció que la continuidad está relacionada de manera intuitiva en el trazado de graficas. Luego, apoyados en el concepto de límite (introducido previamente) se define formalmente y, en ejemplos sucesivos, se incorporan las discontinuidades removibles y esenciales seguidos de las definiciones.

Texto 3

Introducción al cálculo grado 11, editorial Santillana.

Este texto escolar se divide en ocho unidades, cada una contiene entre dos y nueve temas, y cierran la discusión con una pequeña evaluación titulada; *Actividad de práctica*. Todas las unidades finalizan con tres secciones orientadas a evaluar la totalidad de los temas tratados con anterioridad. Estos se denominan; Actividades de ampliación, ICFES y EVALUACIÓN. Los autores de este texto desarrollan los temas introduciendo inicialmente una definición, la cual se distingue del resto del

[57] **Propiedad arquimediana**: si a, b son números reales positivos y $a < b$, existe un entero positivo n con la propiedad que $n*a > b$ (Ardila *et al*., 2005, p. 20).

contenido por sus características tipográficas, seguida de un ejemplo que reafirma la definición o proposición propuesta.

Los contenidos que se estudiaran de este texto son; los temas 3 (los números reales) y 1 (límites y continuidad) de las unidades 1 y 3, respectivamente. Al realizar la revisión del libro en cuestión, a la luz de los criterios establecidos con anterioridad, se encontró que la concepción del infinito predominante es la de infinito potencial, lo cual puede observarse en el significado otorgado a los símbolos ∞ y $-\infty$:

> (…) son simplemente símbolos que nos recuerdan que el intervalo[58] continua por siempre, aumente o disminuye sin fin (Chávez *et al.*, 2004, p. 32).

Algo similar se halló en la presentación intuitiva de límite, en esta exposición es posible registrar nuevamente la dimensión potencial del infinito:

> En el lenguaje informal cuando se menciona la palabra límite, esta se refiere a un valor al cual nunca se debe llegar (Chávez *et al.*, 2004, p. 90).

De otra parte, está la imagen actual del infinito, observable en la definición matemática de límite:

> La expresión
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> Se lee: límite cuando x tiende a a de $f(x)$ es L.
>
> Se dice que el límite cuando x tiende a a de $f(x)$ si se puede acercar los valores de $f(x)$ a L, tomando a x muy cerca de a, y $x \neq a$ (Chávez *et al.*, 2004, P. 91).

Respecto a la segunda pauta, los conjuntos numéricos son descritos muy brevemente puesto que, al iniciar la discusión del tema 3, los autores asumen que los estudiantes ya conocen los diferentes conjuntos numéricos. En este rápido

[58] $(\infty, -\infty)$

recuento caracterizan los números irracionales a partir de la imposibilidad de representarlos como un cociente de enteros. Luego del panorámico barrido por los diferentes conjuntos numéricos, definen los números reales como la unión de los racionales junto con los irracionales. Asimismo, hacen referencia a la correspondencia biunívoca que puede establecerse entre los números reales y los puntos de la recta real, la discusión concluye con la definición "informal" de densidad, aunque el argumento que emplean en realidad es un teorema.

No obstante, la noción de continuidad es abordada a través de funciones y no como se planteó en el segundo capítulo, es decir, la continuidad de la recta real se asume de forma implícita al establecer la correspondencia biunívoca entre el dominio numérico y el geométrico.

En seguida se examinarán las anteriores descripciones desde la perspectiva de los obstáculos epistemológicos contemplados en el capítulo II y sintetizados en los criterios de revisión. El primero de estos es el *infinito* (tanto en el sentido potencial como en el actual), el cual está particularmente relacionado con el límite. En este sentido se halló que este objeto matemático (al menos su definición matemática) se basa en la idea de infinito actual, particularmente al realizar los cálculos donde, a pesar de que en la definición se consideran valores de x cada vez más próximos a x_0 (x tiende a x_0) dado, no menciona el caso en que $x = x_0$. Sin embargo, es esto justamente lo que se hace al emplear el algoritmo. Es decir, el límite que en teoría no podría alcanzarse en la práctica se utiliza sin reparo alguno.

Lo paradójico de esta situación es que una actividad tan normal como "calcular límites" en el marco de un curso de cálculo en grado 11 puede tornarse sumamente complejo si, como introducción al tema, se preguntara a los estudiantes acerca de si creen posible que en el intervalo (0, 1) hay tantos puntos como números reales positivos. Sobre todo si se tiene en cuenta que dicho conjunto ($\mathbb{R}^+$) se asocia con el infinito en potencia. Además de que a lo largo del tema no se hace referencia a la noción de equipotencia entre conjuntos, lo cual posiblemente de origen al obstáculo denominado por Arrigo y D'Amore como "collar de perlas".

Al analizar las diferentes formas de abordar los números reales en los textos revisados se percibe que la importancia otorgada a cada conjunto numérico va de la mano con su grado de aplicabilidad en la solución de problemas (situaciones prácticas), esto se reafirma con la presentación que se hace de los números reales por extensión algebraica. También se observa que no se profundizan en las propiedades que diferencian un conjunto de otro. Esta forma de acercarse al conjunto de los reales limita el conocimiento que el estudiante puede adquirir de este objeto matemático, en tanto que solo le enseñan a operar con números racionales y/o aproximaciones racionales de los números irracionales, concretamente los algebraicos (que se obtienen como solución de ecuaciones), porque los irracionales trascendentes pasan inadvertidos, salvo los más reconocidos (π, e). Lo anterior se manifestó en que los estudiantes consideran que, cuando un número se expresa en una notación diferente a la decimal, es necesario entonces realizar una operación: si se expresa como fracción hay que dividir, si se expresa como radical hay que extraer la raíz, luego ¿qué operación habría que hacer para caracterizar los trascendentes?

Respecto a la correspondencia entre $\mathbb{R}$ y los puntos de la recta, tal parece que esto se da por sentado, de modo que en los textos sólo se presentan ejemplos de procedimientos mediante los cuales se ubican en la recta ciertos puntos relacionados con números reales algebraicos (empleando regla y compás). Dicha correspondencia presentada y aceptada de forma incuestionable es tan solo un modelo, exitoso, pero no el único. Además, el ejercicio de ubicar ciertos puntos en la recta con regla y compás no considera preguntas como: ¿qué procedimiento seguir cuando el número a ubicar es trascendente? ¿Se puede encontrar un punto que le corresponda al número en cuestión? Al parecer estas preguntas problemáticas se dejan de lado pero son un “peligro” latente, y no anticiparse a situaciones de esta naturaleza puede conducir al estudiante a creer que la recta es una suerte de “rosario”, lo cual no corresponde a la esencia de la continuidad de la recta.

En último lugar, en el marco de la presente revisión de textos se estudiará la manera en que aparece consignada la continuidad en los textos escolares revisados. Pues bien, las referencias a estas nociones, en su mayoría, se dan en torno a las funciones y el trazado de sus graficas. Pero lo que no se menciona es que de forma implícita se está asumiendo como paradigma de continuidad a la recta geométrica, lo cual revela el papel de la intuición en la concepción de algunas ideas matemáticas de gran trascendencia. Es decir, una función es o no continua dependiendo de la semejanza que guarde su delineado respecto a la recta: claro está que analíticamente se ha hecho una caracterización de la continuidad, pero esta se apoya fuertemente en la grafica.

Las descripciones mencionadas arriba se encuentran sintetizadas en el siguiente gráfico:

	Nuevas matemáticas	***Espiral* 11**	***Introducción al cálculo***
Infinito: concepciones y diferencias que se mencionan entre el infinito de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.	El infinito presenta en el contexto de los intervalos, se presentan como símbolos que no son propiamente números pero que son más grandes (y más pequeño) que cualquier número real en que pueda pensar el estudiante (p. 29).	El infinito se asocia con símbolos dentro del contexto de los intervalos y se entiende en el sentido potencial. Las acepciones acerca de este concepto matemático se alternan entre el actual y el potencial en la presentación que hacen los autores.	El infinito potencial se refleja en el uso de expresiones en lenguaje natural (p. 90). Mientras que el infinito actual solo se observa en la definición matemática de límite.
Número real: presentación del concepto, representación numérica, construcciones de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y sus relaciones. Representaciones geométricas y conexiones entre las representaciones.	Construcción de los números reales se efectúa por extensión algebraica (p. 28).	Se presentan propiedades de campo del conjunto $\mathbb{R}$ (p. 12), se construyen algunos reales con regla y compás (p. 13). También se exponen propiedades de orden, propiedad densidad (p. 17) y arquimediana.	El conjunto de los números reales se define por extensión algebraica (p. 31). Dentro de la misma exposición se hace referencia a la correspondencia biunívoca que puede establecerse entre $\mathbb{R}$ y la recta geométrica.
Continuidad: nociones y concepciones.	Límites (p. 88) y continuidad son tratados en el marco de las funciones (p. 117).	La continuidad se relaciona con el trazado de graficas y se define con referencia a las funciones (p. 138).	La continuidad se estudia como una peculiaridad de las funciones en un punto o un intervalo (pp. 117-118).

3.2 Conclusiones de la revisión de los textos.

- Pese a que al calcular límites (en la escuela) entra en acción la noción de infinito actual, esta parece estar en una fase paramatemática (de acuerdo a lo propuesto por Brousseau) en tanto que los estudiantes la emplean para estudiar límites (y todas aquellas nociones donde a su vez intervienen los límites) aunque no la reconocen como objeto matemático. Esto se debe a que la concepción de infinito predominante en la escuela es la potencial, en ocasiones sacada de contexto y asociada erróneamente a cantidades muy grandes aunque finitas.
- La forma en que se exponen los números reales en los textos escolares dando mayor énfasis a unos conjuntos numéricos sobre otros revela el reconocimiento social del que gozan los números racionales sobre los irracionales, el cual procede de la aplicabilidad de los primeros en diversas áreas de gran importancia para la vida social y económica de los pueblos.
- Los intentos por emplear la Historia de las Matemáticas como herramienta en la introducción a un determinado tema, se ha quedado corta en los libros aquí revisados, porque la conexión (o propósito del autor) entre el pasaje histórico y el subsecuente desarrollo de la temática en el texto no refleja una relación directa. Esto se debe (posiblemente) a que los dos corresponden a tiempos (históricos) y finalidades (metodológicas) diferentes de tal suerte que la intención del autor no llega a concretarse.
- El isomorfismo propuesto por Dedekind y Cantor entre el dominio delos reales y la línea recta se encuentra tan arraigado en la cultura matemática escolar (aunque tal vez no recuerden donde inicio tan fructífera relación) que apelar a la recta geométrica para representar a los reales no responde a un plan metodológico, como antesala a una introducción formal de estos, sino como la única forma de hacerlo.

- Aunque la continuidad desempeño un papel fundamental en la construcción de los números reales. Se observó que esta noción no goza de reconocimiento por fuera del contexto de las funciones, específicamente con el trazado de graficas, relegando en importancia la representación analítica frente a la geométrica. Hecho que muestra una vez más la correspondencia biunívoca entre $\mathbb{R}$ y la línea recta, en tanto que metodológicamente resulta más comprensible (en una primera aproximación) hablar de la continuidad de una función en términos de las diferencias observables entre el trazado de su grafica y la recta geométrica que su versión analítica (usando límites).

4. Conclusiones generales.

El presente trabajo de grado se sustenta sobre la búsqueda de algunas de las características intrínsecas (de tipo epistemológico fundamentalmente) del conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), que podrían ser factores determinantes en la Transposición Didáctica de dicho objeto matemático y la manera como se manifestaban tales elementos en los textos escolares, nos permitió observar que existen elementos externos a las propias matemáticas (noosfera) que sumados a la complejidad del objeto de estudio dificultan la labor de los autores. Además, la creciente tendencia de seleccionar los contenidos a enseñar partiendo de la aplicabilidad de los mismos en la vida cotidiana, da origen al siguiente interrogante: ¿por qué no sólo enseñar hasta los números racionales en la educación secundaria?, si como se mencionó en la justificación del presente proyecto, usualmente se emplean aproximaciones racionales de los números irracionales, tanto en la ciencia (cálculos experimentales) como en la industria.

- El reconocimiento de los aportes que desde la Historia de las Matemáticas se pueden hacer a la Educación Matemática ha conducido a que algunos autores empleen algunos trozos de la historia de ciertos objetos matemáticos a modo de introducción, infortunadamente al carecer de la profundidad necesaria para dar cuenta de los aspectos teóricamente relevantes en la constitución de un objeto matemático particular, el objetivo del autor de contextualizar al lector (estudiante y/o profesor)en una época histórica concreta donde dicho concepto surge como respuesta a una necesidad práctica de la teoría en la que se suscribe no llega a feliz termino. Sin embargo, la idea de trasportar al lector al momento en que emerge un objeto matemático a través del relato (o fragmento de la obra) de su autor permite devolverle a la noción el sentido del que fue despojada por lo avatares del tiempo y de las sucesivas transposiciones didácticas.

- El texto escolar como producto de sucesivos procesos de transposición didáctica o insumo para posteriores transposiciones didácticas, cumple una función fundamental en el aula de matemáticas en la medida en que refleja en la forma de estructurarlas lecciones y capítulos aquello que se debe saber en cada grado escolar, razón por la cual algunos docentes adoptan este orden como guía curricular, al tiempo que para los estudiantes representa la fuente de ejemplos , respuestas a las tareas y posibles peguntas de examen.

- Los profesores en el desarrollo de sus clases recurren a "figuras familiares" como herramientas didácticas, con la idea de lograr un mayor grado de comprensión en sus estudiantes, pero estas estrategias fracasan porque en la búsqueda de alternativas que les permitan superar obstáculos epistemológicos (inherentes al conocimiento que quieren transmitir) sin antes hacer una adecuada planeación con elementos históricos y didácticos se corre el riesgo de desdibujar la complejidad de los objetos matemáticos y a la vez que no logran superar los obstáculos iniciales generan otros de orden didáctico. Situación planteada *grosso modo* en el capitulo II (operatividad en los reales), donde pese a que la dicotomía entre número y magnitud fue sorteada, la forma operacional desde a que se abordan estos conjuntos promueve no solo la reaparición de este obstáculo sino que origina la otros relacionados con la representación y la lectura que de estos nuevos números hacen los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

Aponte, M. (2008). *De la intuición sensible del infinito potencial a la caracterización lógico-formal del infinito actual: un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la educación matemática*. Tesis de pregrado no publicada. Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Arbeláez, G., Arce, J., Guacaneme, E., & Sánchez, G. (1999). Transposición didáctica en libros de texto de matemáticas. Análisis de textos escolares de matemáticas. (pp. 74-90). Cali, Colombia: Universidad de Valle.

Arboleda, L. (2007, diciembre). Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los reales. Revista Brasileira de Historia da Matemática. (1). pp. 215-230.

Ardila, R., Pérez, M., Samper, C., & Serano, C. (2005). Espiral 11. Editorial Norma.

Arrigo, G. & Arrigo y D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. Educación Matemática, 16, (2), pp. 5-19. México. Recuperado el día 26 de octubre, del sitio Web:
http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/405/40516201.pdf

Arrigo, G. y Arrigo y D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. Educación matemática. México. 11, (1), pp.5-24.

Bachelard, G. (1948). La formación del espíritu científico. Siglo veintiuno editores. México.

Bergé, A. & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. RELIME, Revista Latinoamericana de Investigaciones

en Matemática Educativa, 6, (003), pp. 163-197. México. Recuperado el día 26 de octubre, del sitio Web:
http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33560301&iCveNum=2040

Boniface, J. (2007). The Concept of Number from Gauss to Kronecker. En C. Goldstein, N. Schappacher, & J. Schwermer (Eds.). The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae (pp. 314-342). Ubicación:Springer Berlin Heidelberg.

Brezinski, C. (1991). Golden age. En R. L. Graham, M. Hill, J. stoer, W. R. Varga & Kent (Eds.), History of continued fractions and Padé Approximants (pp. 97-140). New York, E.E.U.U.. Springer-verlag Berlin Heidelberg.

Brousseau (2011). Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal A paraître dans « Interactions didactiques » (Genève). (s.f.). Recuperado el 13 de junio de 2011, del sitio Web
http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf

Brunschvicg, L. (1912). Les étapes de la philosophie mathématique, Paris, Alcan.

Cantor, G. (2006). Fundamentos para una teoría general de conjuntos. (J. Ferreirós, Ed. Y E. Gómez-Caminero, Trads). Santiago de Cali, Colombia: Critica (Trabajo original publicado en 1883)

Cantor, G. (1873). Sobre una propiedad del sistema de todos los números reales algebraicos. (J. Bares y J. Climent, Trad). Recuperado el 10 de junio de 2011, del sitio Web:
http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor72-84.pc.pdf

Cantor, G. (1872). Extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas. (J. Bares y J. Climent, Trad). Recuperado el 10 de junio de 2011, del sitio Web: http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor72-84.pc.pdf

Cantor, G. (1872a). Una contribución a la teoría de conjuntos. (J. Bares y J. Climent, Trad). Recuperado el 10 de junio de 2011, del sitio Web:
http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor72-84.pc.pdf

Cauchy, A. L. (1994). *Curso de análisis*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Chávez, H., Salgado, D., Romero, J., & Torres, W. (2004). Introducción al cálculo. Editorial Santillana. Colombia.

Collazos, D., Díaz, M., & Meneses, M. (2007). Las concepciones de número real y continuidad en textos matemáticos escolares. Tesis de pregrado no publicada. Universidad del cauca, Popayan, Colombia.

Collette, J. P. (1998). *Historia de las matemáticas* (v.2). (3ra Ed). México : Siglo XXI.

Coriat, M. Scaglia, S. (2000). Representación de los números reales en la recta. Enseñanza de las ciencias, 18, (1), pp. 25-34.

Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemáticas. Revista Premisa, Argentina, N° 41, mayo 2009. Recuperado el 27 de octubre de 2009, del sitio Web:
http://www.soarem.org.ar/Documentos/41%20Crespo.pdf

Dauben, J, W. (1990). Georg Cantor His Mathematics an Philosophy of the Infinite. (1ra Ed). New Jersey, New York, EE. UU.: Princeton University Press.

Gascón, J., Chevallard, Y., Bosch, M. (1997). Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Cali, Colombia: Editorial Horsori.

Dedekind, R. (1998). Continuidad y números irracionales. (Traducciones y comentarios de J. Ferreirós). Alianza Editorial

Díaz, A., Chamorro, A., Torres, W., Romero, J., & Salgado, D. (2007). Nuevas matemáticas. Editorial Santillana. Colombia.

Díaz, H., García, G.O. & Serrano, C. (1999). ¿Qué hay detrás de las dificultades que presenta la comprensión del concepto de número real? TEΔ; Tecne. Episteme y Didaxis, (5). Recuperado el 27 de julio de 2009, del sitio Web:
http://www.pedagogica.edu.co/storage/ted/numeros/ted05final.pdf

Euclides. *Elementos: libros I-IV (v.1)*. (Maria Luisa Puertas, Trad.). España : Gredos S.A, 1991-2000.

Gonzales, P. M. (2004, Febrero). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. Suma, (45), pp. 17-28.

Kang, W., & Kilpatrick, J. (1992). Didactic Transposition in Mathematics Textbooks. For the Learning of Mathematics, Vol. 12, No. 1 (Feb., 1992), pp. 2-7Published. Se revisó, la versión electrónica, publicada por: FLM Publishing Association, el 17 de junio del 2011, del sitio Web: http://www.jstor.org/stable/40248035

López, M. (1994). Las construcciones de los números reales. En: Historia de la Matemática (revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España), año 1994, pp. 11-33 Recuperado el 27 de octubre de 2009, de http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA_1994_00_00_01.pdf

Lorentzen, L. & Waadeland, H. (1992). Some applications in number theory. En C. Brezinski & L. Wuytack (Eds.), Continued fractions with applications (pp. 397-440). Amsterdan, Netherland. North-Hollands.

MEN. (2006). Estandares básicos de competencias.en matemáticas. Estandares básicos de competencias, (pp. 80-89). Ministerio de Educación Nacional. Colombia. http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf

MEN. (1998). Lineamientos curriculares. Ministerio de Educación Nacional. Colombia.

Mora, L.C. & Torres, J.A. (2007) Concepciones de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre números reales (1ra Ed.). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Moreno, L., & Waldegg, G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity. Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, (3), pp. 211-231. Recuperado el 19 de marzo de 2010, de la base de datos Springer.

Moore, M. (2007). The Completeness of the Real Line. CRITICA, Revista Hispanoamericana de Filosofia. 39, (117), pp. 61-86.

Petri, B., & Schappacher, N. (2007). On Arithmetization. En C. Goldstein, N. Schappacher, & J. Schwermer (Eds.). The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae (pp. 314-342). Ubicación:Springer Berlin Heidelberg.

Recalde, L. (*sf*). Lecturas de Historia de las Matemáticas. Universidad del Valle, Colombia.

Recalde, L.; Anacona, M.; Arbeláez, G. & Arboleda, L. (1999). Matemáticas y Experiencia [Documento de trabajo]. Cali, Colombia. Universidad del Valle: Licenciatura en Matemáticas y Física.

Rezat, S. (2009): The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning. En: Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France. Recuperado el día 7 de septiembre de 2010, del sitio Web: http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg7-22-rezat.pdf

Romero, C. (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. Enseñanza de las ciencias, 14, (1), pp. 3-14.

Sanabria, G. (2005). Los números reales utilizando cortaduras de Dedekind y sucesiones de Cauchy: una propuesta didáctica. Ponencia del VI CIEMAC (Congreso Internacional para la Enseñanza de de la Matemática Asistida por Computadora), Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2005. Recuperado el 27 de octubre de 2009, del sitio Web: http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/4toCIEMAC/Ponencias/Losnumerosrealesutilizandocortaduras.pdf

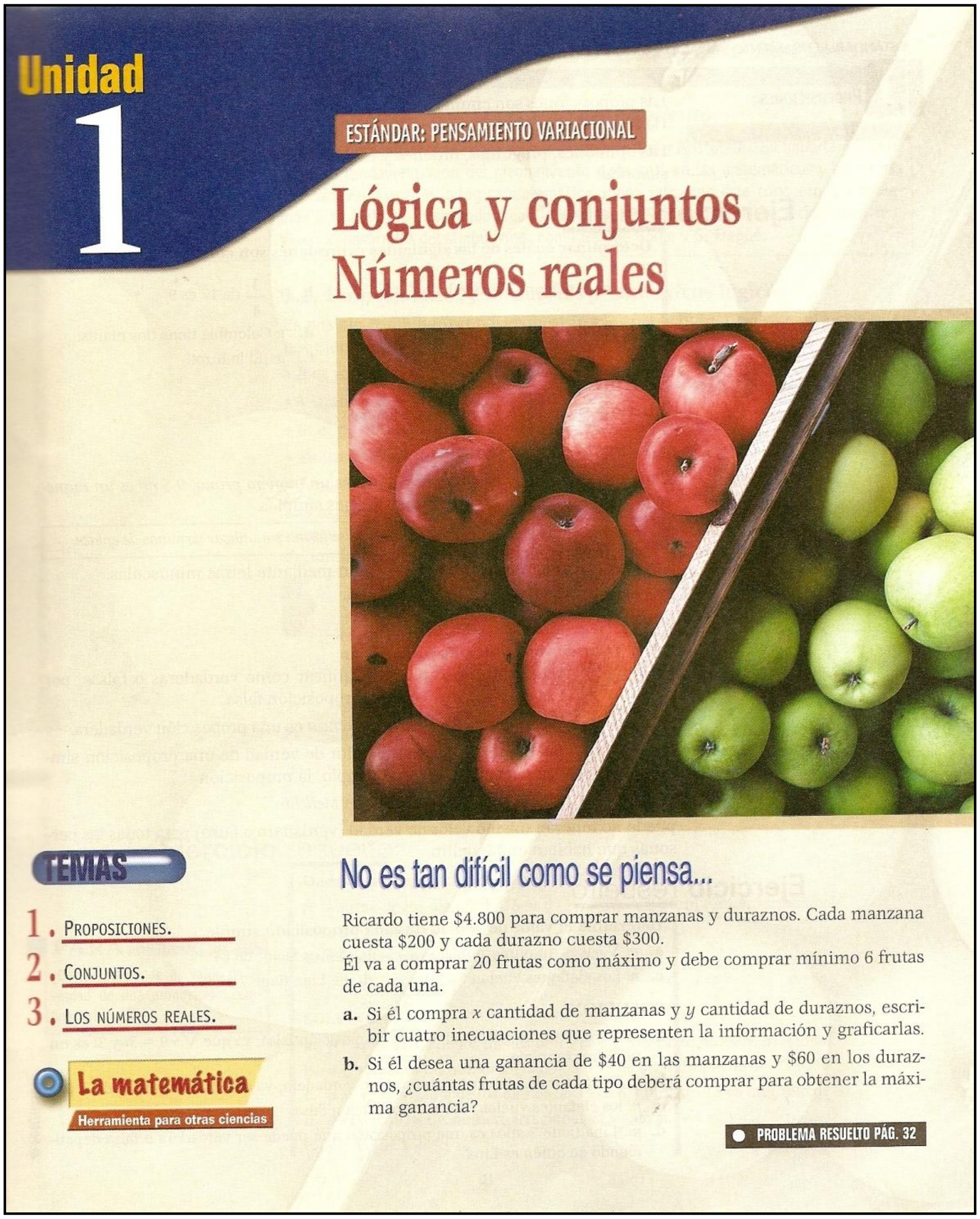
Sfard, A. (1991). Sobre la naturaleza dual de de las concepciones matemáticas: Reflexiones sobre procesos y objetos como caras diferentes de la misma moneda. Traducción del profesor César Delgado del artículo "On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection processes and objects as different sides of the same coin". *Educational Studies in Mathematics* 22:1-36. Kluwer Academic Publisher.

Valencia, S. (2009). El argumento de la diagonal en matemáticas: Análisis histórico, estructural y epistemológico. Tesis de maestría no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Vargas, J. (2003). La construcción de lo irracionales de Dedekind como instrumento en un análisis de textos de octavo grado. Revista TED (Tecne, Episteme y Didaxis), N° 14, 2003, pp. 4-18. Se revisó, la versión electrónica, digitalizada por la Red Académica de la Universidad Pedagógica Nacional, el 27 de octubre del 2009, del sitio Web: http://www.pedagogica.edu.co/storage/ted/articulos/ted14_04arti.pdf

Anexo n°1

Nuevas Matemáticas


Unidad 1

ESTÁNDAR: PENSAMIENTO VARIACIONAL

Lógica y conjuntos
Números reales

TEMAS

1. Proposiciones.
2. Conjuntos.
3. Los números reales.

La matemática
Herramienta para otras ciencias

No es tan difícil como se piensa...

Ricardo tiene \$4.800 para comprar manzanas y duraznos. Cada manzana cuesta \$200 y cada durazno cuesta \$300.
Él va a comprar 20 frutas como máximo y debe comprar mínimo 6 frutas de cada una.

a. Si él compra x cantidad de manzanas y y cantidad de duraznos, escribir cuatro inecuaciones que representen la información y graficarlas.

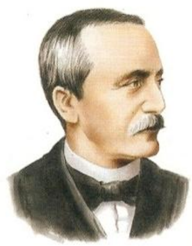
b. Si él desea una ganancia de \$40 en las manzanas y \$60 en los duraznos, ¿cuántas frutas de cada tipo deberá comprar para obtener la máxima ganancia?

PROBLEMA RESUELTO PÁG. 32

[Figura n° 1, p. 27]

ESTÁNDAR: PENSAMIENTO VARIACIONAL

LA MATEMÁTICA EN LA HISTORIA



Admitir los números

Dios hizo los enteros; todo lo demás es trabajo del hombre.
Leopold Knonecker (1823-1891)

Las antiguas civilizaciones griegas no consideraron el uso de los números negativos. Fue hasta el siglo séptimo que el astrónomo hindú Brahmagupta empleó los números negativos en sus trabajos, y posteriormente, en los siglos XVI y XVII se concibió su uso en Europa con cierto escepticismo. En el siglo VI la escuela pitagórica descubrió el número $\sqrt{2}$ (en nuestra notación), concebido como la medida de la diagonal de un cuadrado de lado uno. En sus mentes existía la idea "todo es un número", y creían que todas las cosas pueden ser explicadas bajo los principios numéricos, pero el número $\sqrt{2}$ carecía de esta representación; así que tal descubrimiento quebrantaba sus principios, razón por la cual decidieron no comentarlo y afirmar que era imperfección divina.

TEMA 3 LOS NÚMEROS REALES

PENSAMIENTO NUMÉRICO

Los conjuntos numéricos son los elementos iniciales con los cuales a lo largo de la historia se ha hecho matemáticas.

El primer conjunto numérico generado, a partir de la necesidad de hacer conteo, fue N_0 (en su notación actual) $N_0 = N \cup \{0\}$.

A medida que evolucionó el pensamiento humano, se fueron concibiendo otros conjuntos numéricos como los siguientes:

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ $\quad$ $Z^- = \{-1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$

$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $\quad$ $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

Diagrama 12

Una característica común de los elementos de los conjuntos anteriores es que para cada uno de ellos se puede encontrar una expresión decimal (*diagrama 12*).

Esta es precisamente la característica que determinó en la historia la construcción de un nuevo conjunto numérico: los irracionales.

A partir de la solución de la ecuación $a^2 - 2 = 0$ se encuentran los valores $a = \pm\sqrt{2}$, para los cuales no existe un cociente de números enteros de la forma $\dfrac{a}{b}$. Así, se dice que, entre otros, para $\sqrt{2}$ no se encuentra una expresión decimal finita o infinita periódica.

Los números que poseen una expansión decimal infinita no periódica conforman el conjunto de los números irracionales, denotado con la letra $\mathbb{I}$. Algunos números irracionales son: $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$, $\pi = 3, 1415\ldots$, $e = 2{,}7182\ldots$, $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots$, entre otros.

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se forma a partir de la unión de los números racionales $\mathbb{Q}$ y los irracionales $\mathbb{I}$. Simbólicamente: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Algunas características de los números reales son:

- A cada punto sobre la recta le corresponde un número real y viceversa (correspondencia biunívoca).
- Entre dos números reales siempre es posible encontrar otro número real (densidad).
- R es un conjunto ordenado.

PARA RESPONDER

¿A qué es igual: $\mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}$, $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{I}^-$, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}^+$?

ALGO IMPORTANTE

Entre dos números reales a y b se cumple solamente una de las siguientes proposiciones:

(*i*) $a < b$,

(*ii*) $a = b$,

(*iii*) $a > b$.

Luego, $\mathbb{R}$ es un conjunto ordenado.

28

[Figura n° 2, p. 28]

ALGO IMPORTANTE

El intervalo $(-\infty, \infty)$ es equivalente al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

3.1. Desigualdades en $\mathbb{R}$

Una desigualdad es una expresión de la forma $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ en la que a y b son números reales.

3.1.1. Intervalo

Un intervalo es un subconjunto (no vacío) de los números reales.

A continuación se muestran las clases de intervalos.

(a, b)	Infinitos
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$	A pesar de que todos los intervalos son infinitos, los siguientes reciben ese nombre dada la naturaleza de sus extensiones.
$[a, b)$ $(a, b]$	$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}/x > a\}$
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$	$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq a\}$
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$	$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}/x < a\}$
$[a, b]$	
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$	$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}/x \leq a\}$

3.1.2. Operaciones entre intervalos

Dados dos intervalos A y B es posible considerar las operaciones $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \triangle B$ y A'. El conjunto universal será el conjunto de los números reales.

Ejercicio resuelto

PARA RESPONDER

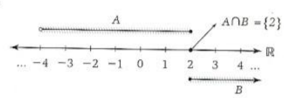
¿Al operar los intervalos se obtiene un nuevo intervalo?

Dados los intervalos $A = (-4, 2]$, $B = [2, \infty)$, $C = (-1, 3)$ hallar:

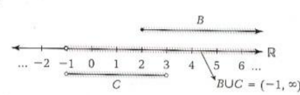
a. $A \cap B$ **b.** $B \cup C$ **c.** B' **d.** $B - C$

SOLUCIÓN

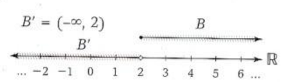
a.



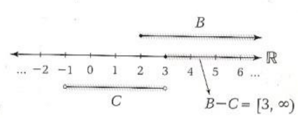
b.



c.



d.



[Figura n° 3, p. 29]

ESTÁNDAR: PENSAMIENTOS NUMÉRICO Y VARIACIONAL

TEMA 1 LÍMITES

PENSAMIENTOS NUMÉRICO Y VARIACIONAL

El número irracional e se obtuvo a partir de aproximaciones sucesivas acordes a la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, teniendo en cuenta valores de n cada vez mayores, como se aprecia en la siguiente tabla.

Valores para n	1	10	50	100	1.000	10.000	...	$n \to \infty$
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	1,5	2,5937	2,6916	2,704814	2,7169	2,718146		2,718281828459045...

Simbólicamente, $e = \underset{n\to\infty}{\text{Lím}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828459045...$

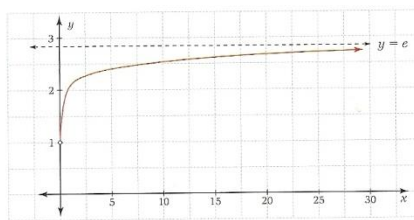
La aproximación de e forma parte de una rama de las matemáticas denominada cálculo infinitesimal. El cálculo infinitesimal ha hecho valiosos aportes a las ciencias, permitiendo la evaluación de áreas como: mecánica, estática, dinámica, teoría de máximos y mínimos, cálculo de áreas de figuras planas, volúmenes de sólidos, longitudes de arco, cálculo de rectas tangentes y cálculo de series infinitas, entre otros.

Estos estudios se iniciaron aproximadamente en el año 582 a.C. (Arquímedes) con el cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de arco y el cálculo del centro de gravedad. Sin embargo, fue en los siglos XVI, XVII y XVIII cuando se formalizaron los conceptos. Hoy en día se atribuye el descubrimiento del cálculo al físico y matemático inglés Isaac Newton y al filósofo y matemático alemán G. W. Leibniz.

1.1. Idea intuitiva del límite de una función

El límite es un valor al cual se aproxima una función $f(x)$, dependiendo del valor al cual se acerque x.

Por ejemplo, al analizar la función $f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 0$ se puede observar que si n crece indefinidamente ($n \to \infty$), entonces $f(n)$ se aproxima a $e (f(n) \to e)$.



En términos generales:

> *La expresión* $\underset{x\to b}{\text{Lím}}\ f(x) = L$
>
> *Se lee: límite cuando x tiende a "b" de f(x) es L*
>
> *Se dice que el límite cuando x tiende a "b" de f(x) es L, si los valores de f(x) se aproximan a L al tomar a x cerca de "b", siendo* $x \neq b$.

MATEMÁTICA
REALIDAD Y CURIOSIDAD

Los logaritmos naturales (o logaritmos de base e) y la función exponencial e^x han permitido generar modelos matemáticos asociados al crecimiento y decrecimiento de una población, y han efectuado un significativo aporte a la óptica, la acústica, la radiactividad, la vibración y la oscilación de fenómenos al facilitar los cálculos asociados a estos campos.

88

[Figura n° 4, p. 88]

2 Continuidad

PENSAMIENTO NUMÉRICO

ALGO IMPORTANTE

Si una función g no es continua en $x = a$, entonces, se dice que g es discontinua en $x = a$ o que presenta una discontinuidad en $x = a$. Por ejemplo, la función $g(x)$ de la parte derecha es discontinua en $x = -1$.

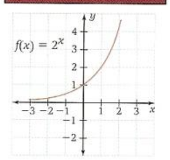
2.1. Funciones continuas

Una función es continua cuando a pequeñas variaciones de la variable independiente corresponden pequeñas variaciones de la variable dependiente.

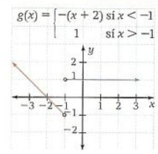
Este hecho es evidente gráficamente cuando no se presentan saltos de un valor a otro sin tomar valores intermedios (rupturas).

A continuación se presentan dos funciones continuas y una discontinua.

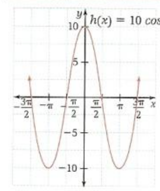
Función continua



Función discontinua en $x = -1$



Función continua



Una buena parte de las operaciones con funciones continuas dan como resultado funciones igualmente continuas.

Por ejemplo,

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas, entonces también son continuas las siguientes funciones:

$$f(x) \pm g(x);\ f(x) \cdot g(x);\ \frac{f(x)}{g(x)} \text{ si } g(x) \neq 0 \text{ y } uf(x) \text{ con } u \in \mathbb{R}.$$

- Si $y = f(x)$ es continua y si $g(x)$ es continua, entonces, la composición $g(f(x))$ es continua.
- Las funciones trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \csc x$, $y = \sec x$, $y = \cot x$, son continuas en sus respectivos dominios de definición.
- Las funciones exponencial y logarítmica $y = a^x$ y $y = \operatorname{Log}_a x (a > 0, a \neq 1)$ son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Las funciones racionales son continuas en todos los números reales de su dominio.

2.2. Continuidad de una función en un punto

Una función f es continua en un punto $x = a$ si cumple las siguientes condiciones

1. *f está definida en un intervalo abierto que contiene a "a" y $f(a)$ existe.*
2. *El límite de la función cuando x tiende a "a" existe; es decir, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.*
3. *El límite de la función cuando x tiende a "a" es igual a la función calculada en a; es decir, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

[Figura n° 5, p. 117]

2.3. Continuidad de una función en un intervalo

Una función f es continua en un intervalo abierto (a, b), si f es continua en todos los puntos del intervalo (a, b).

Una función f es continua es un intervalo cerrado [a, b] si:

- *f es continua en el intervalo abierto (a, b)*
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \;\wedge\; \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Ejercicio resuelto

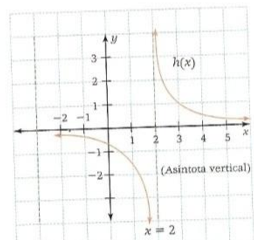
Determinar si las siguientes funciones son continuas en el intervalo dado.

a. $h(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ en el intervalo $(0, 3)$

b. $n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} & \text{si } x \neq -3 \\ -6 & \text{si } x = -3 \end{cases}$ en el intervalo $[-4, -1]$

SOLUCIÓN

a. En la gráfica se observa que en $x = 2$ la función tiene una asíntota; así, a partir de ella se puede determinar que en $(0, 3)$ la función no es continua.



Analíticamente, se analizan las tres condiciones precisamente en $x = 2$.

Se verifica si $h(2)$ existe.

$h(2) = \dfrac{1}{2 - 2} = \dfrac{1}{0}$ no existe.

Como no se cumple la primera condición de continuidad, se concluye que la función no es continua en $(0, 3)$

b. Como la función está definida a trozos, se analiza la continuidad en el punto $x = -3$.

1. Se verifica si $n(-3)$ existe.

   $n(-3) = -6$ *Por definición de la función.*

2. Se verifica si $\lim\limits_{n \to -3} n(x)$ existe. Para ello, se estudian los límites laterales.

$$\lim_{n \to -3^-} n(x) = \lim_{n \to -3^-} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{n \to -3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)}$$

$$= \lim_{n \to -3^-} x - 3 = -6$$

$\lim\limits_{n \to -3^+} n(x) = -6$ *En forma similar a la anterior*

3. A partir de 1° y 2°, se verifica que $\lim\limits_{n \to -3} n(x) = n(-3)$

En conclusión, $n(x)$ es continua en $[-4, -1]$ (*figura 13*).

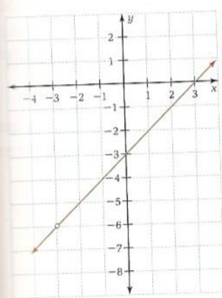


Figura 13

119

[Figura n° 6, p. 119]

3 LOS NÚMEROS REALES

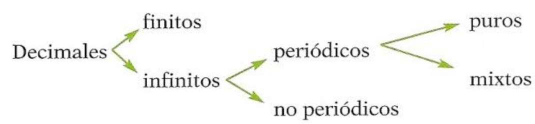
En los cursos anteriores se han estudiado los conjuntos numéricos. Así, se definieron los conjuntos $\mathbb{N}$ de los números naturales; $\mathbb{N}_0$, de los números naturales y el cero; $\mathbb{Z}$, de los números enteros, y $\mathbb{Q}$, de los números racionales, como sigue:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}; \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \;/\; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

Historia de las matemáticas

Para los griegos, los números irracionales eran considerados cantidades inconmensurables (que no se pueden medir). Sin embargo, fueron los pitagóricos quienes consiguieron representar con ayuda de la regla y el compás, sobre la recta, números como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

Además, los números del conjunto $\mathbb{Q}$ se pueden representar, en forma decimal, conformando una clasificación importante:



Dentro de esta clasificación, llaman particularmente la atención los decimales infinitos no periódicos, pues estos números no tienen una representación de la forma $\frac{a}{b}$, representación racional; por esta razón estos decimales forman el conjunto de los números irracionales, notado con la letra $\mathbb{I}$. Algunos números irracionales son: $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, $\pi = 3{,}1415\ldots$ entre otros.

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ unido con el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$, forma el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

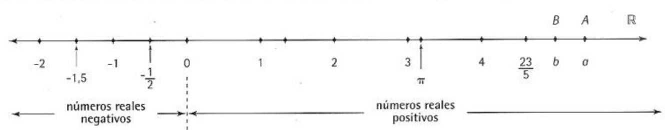
Así,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Los números reales se pueden representar utilizando puntos sobre la *recta real*, de modo que a cada número real, a, le corresponde exactamente un punto de la recta, y a cada punto P, en la recta, le corresponde un número real a.

A esto se le llama *correspondencia uno a uno o correspondencia biunívoca*.

En la siguiente recta real se pueden observar algunos números reales.



Al representar una mayor cantidad de números reales en un intervalo, se puede observar, informalmente, que entre dos números reales siempre va a ubicarse otro número real. A esta propiedad se le llama *densidad*.

31

[Figura n° 7, p. 31]

TEMA 1 LÍMITES

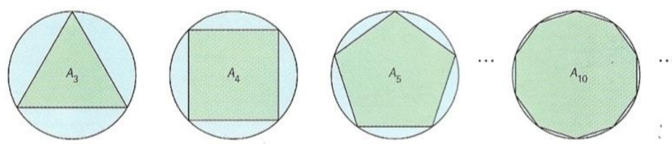
1.1 INTRODUCCIÓN

El origen de los límites se remonta a más de 2.000 años, cuando los griegos buscaban darle solución a los problemas relacionados con el área de las figuras.

Un ejemplo de esta afirmación se da con el matemático Arquímedes, quien propuso un método para calcular áreas, llamado método de **exhaución**. El método se describe así:

Dada una región, cuya área quiere determinarse, se inscribe en ella una región poligonal que se aproxime a la región dada y cuya área sea fácil de calcular. Luego, se elige otra región poligonal que dé una mejor aproximación a la región inicial. El proceso se repite eligiendo cada vez, polígonos con un mayor número de lados, **tendiendo** a llenar la región original.

Las siguientes figuras representan el método de exhaución para el caso que la región original sea un círculo.



Si A_n es el área del polígono de n lados, entonces, cuando n aumenta A_n **tiende** a convertirse en el área del círculo.

Así, si n tiende a infinito, el área del círculo será el límite de las áreas de los polígonos de n lados.

Por lo tanto,

$$A_0 = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Se lee: el área del círculo es igual al límite cuando n tiende a infinito de A_n.

Desde Arquímedes, el desarrollo del método de exhaución tuvo que esperar casi 18 siglos, hasta que el uso de los símbolos y las técnicas algebraicas se hizo presente en los estudios matemáticos.

Arquímedes no aplicó explícitamente los límites para deducir el área del círculo, pero el razonamiento que se presenta para el método de exhaución permite dar una idea intuitiva del concepto de límite.

1.2 IDEA INTUITIVA

En el lenguaje informal cuando se menciona la palabra límite, esta se refiere a un valor al cual nunca se debe llegar.

En matemáticas, la palabra límite se usa en el contexto de las funciones.

Así, el límite es un valor al cual se acerca una función $f(x)$, dependiendo del valor al cual se acerque x.

Historia de las matemáticas

Arquímedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.) Matemático de la antigüedad que dedicó su genio a la geometría, la mecánica y la física. Tal vez su trabajo más interesante fue sobre la medida del círculo. Fue el primero en asignarle a π un valor muy aproximado. Este valor es

$$3\left(\frac{10}{71}\right)$$

Arquímedes hizo aportes anticipados al cálculo integral 2000 años antes de Newton y Leibniz.

90

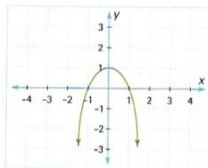
[Figura n° 8, p. 90]

TEMA 2 CONTINUIDAD

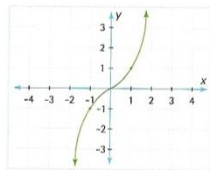
2.1 FUNCIONES CONTINUAS

Una función es **continua** *cuando a pequeñas variaciones de la variable independiente corresponden pequeñas variaciones de la variable dependiente.*

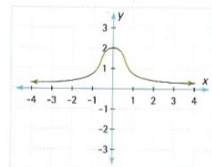
Por ejemplo, las funciones cuyas gráficas se presentan a continuación, son funciones continuas.



$f(x) = -x^2 + 1$



$f(x) = x^3$



$f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

Casi siempre, al operar con funciones continuas, se obtienen funciones que también son continuas.

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas, entonces también son continuas las siguientes funciones:

$$f(x) \pm g(x);\ f(x) \cdot g(x);\ \frac{f(x)}{g(x)} \text{ si } g(x) \neq 0 \text{ y } kf(x) \text{ si } k \in \mathbb{R}.$$

- Si $y = f(x)$ es continua y si $g(y)$ es continua, entonces, la composición $g(f(x))$ es continua.
- Las funciones trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$ y $y = \csc x$, son continuas en sus respectivos dominios de definición.
- Las funciones $y = a^x$ y $y = \operatorname{Log}_a x$ son continuas en todo $\mathbb{R}$.
- Un polinomio es una función continua en todo número real a.
- Una función racional es continua en todos los números reales de su dominio.

2.2 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función f *es continua en un punto* $x = a$ *si cumple las siguientes condiciones.*

1. f *está definida en un intervalo abierto que contiene a* a; *es decir,* f(a) *existe.*
2. *El límite de la función cuando* x *tiende a* a *existe; es decir,* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe.*
3. *El límite de la función cuando* x *tiende a* a *es igual a la función calculada en* a; *es decir,* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

117

[Figura n° 9, p. 117]

Ejemplo

Determinar si la función $f(x) = x^2 + 4$ es continua en el punto $x = 1$.

Solución

La función $f(x)$ es continua en $x = 1$ si cumple las tres condiciones dadas. Así,

1° Se verifica si $f(1)$ existe.
Si $f(x) = x^2 + 4$, entonces, $f(1) = 1^2 + 4 = 5$. Luego, $f(1)$ existe.

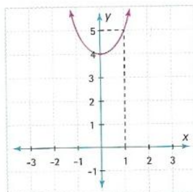


Figura 1

2° Se verifica si $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe.

Si $f(x) = x^2 + 4$, entonces, $\lim_{x \to 1} x^2 + 4 = 1^2 + 4 = 5$. Luego, $\lim_{x \to 1} x^2 + 4$ existe.

3° Se verifica si $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

A partir de 1° y 2°, se puede concluir que $\lim_{x \to 1} x^2 + 4 = f(1) = 5$.

En conclusión, la función $f(x) = x^2 + 4$ es continua en $x = 1$.

La gráfica de la función $f(x)$ se muestra en la figura 1.

Si f **no es continua** en $x = a$, entonces, se dice que f es **discontinua** en $x = a$ o que tiene una discontinuidad en $x = a$.

Ejemplo

Determinar si la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

es continua en $x = 1$.

Solución

La función $f(x)$ es continua en $x = 1$ si cumple las tres condiciones dadas. Así,

1° Se verifica si $f(1)$ existe.
Si $f(x) = 2x + 1$, entonces $f(1) = 2(1) + 1 = 3$.
Luego, $f(1)$ existe.

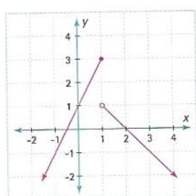


Figura 2

2° Se verifica si $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe.

Como la función está definida a trozos, para calcular el límite se calculan los límites laterales. Así,

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x + 1 = 3$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x + 2) = 1$

Como los límites laterales son distintos, entonces, $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

En conclusión, como no se verifica la segunda condición de continuidad, entonces, la función $f(x)$ es discontinua en $x = 1$.

La gráfica de la función $f(x)$ se muestra en la figura 2.

2.3 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

Una función f *es continua en un intervalo abierto* (a, b), *si* f *es continua en todos los puntos del intervalo* (a, b).

Una función f *es continua en un intervalo cerrado* [a, b] *si:*

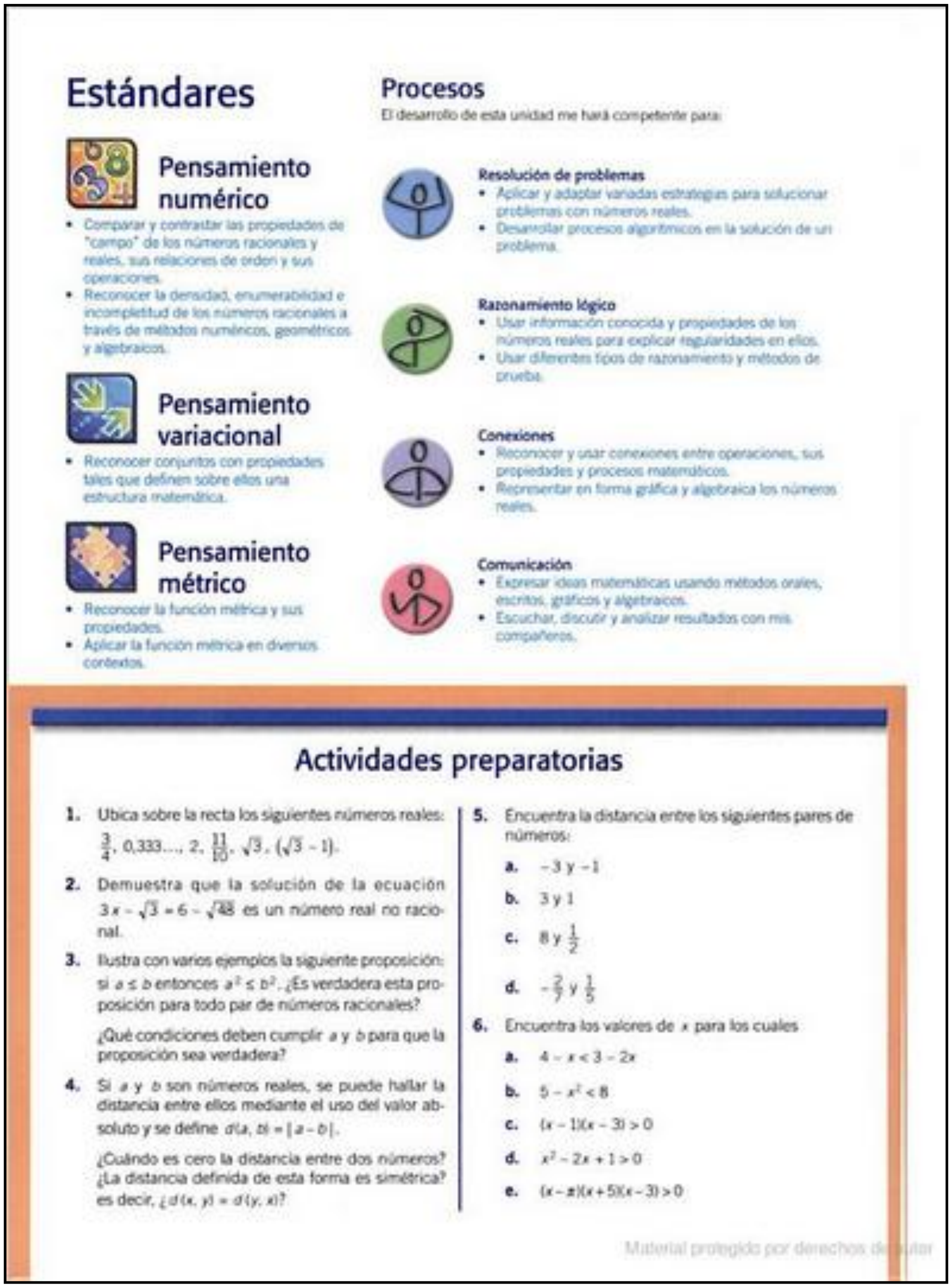
a. f *es continua en el intervalo abierto* (a, b).

b. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \wedge \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

118

[Figura n° 10, p. 118]

Espiral 11



Estándares

Pensamiento numérico

- Comparar y contrastar las propiedades de "campo" de los números racionales y reales, sus relaciones de orden y sus operaciones.
- Reconocer la densidad, enumerabilidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.

Pensamiento variacional

- Reconocer conjuntos con propiedades tales que definen sobre ellos una estructura matemática.

Pensamiento métrico

- Reconocer la función métrica y sus propiedades.
- Aplicar la función métrica en diversos contextos.

Procesos

El desarrollo de esta unidad me hará competente para:

Resolución de problemas

- Aplicar y adaptar variadas estrategias para solucionar problemas con números reales.
- Desarrollar procesos algorítmicos en la solución de un problema.

Razonamiento lógico

- Usar información conocida y propiedades de los números reales para explicar regularidades en ellos.
- Usar diferentes tipos de razonamiento y métodos de prueba.

Conexiones

- Reconocer y usar conexiones entre operaciones, sus propiedades y procesos matemáticos.
- Representar en forma gráfica y algebraica los números reales.

Comunicación

- Expresar ideas matemáticas usando métodos orales, escritos, gráficos y algebraicos.
- Escuchar, discutir y analizar resultados con mis compañeros.

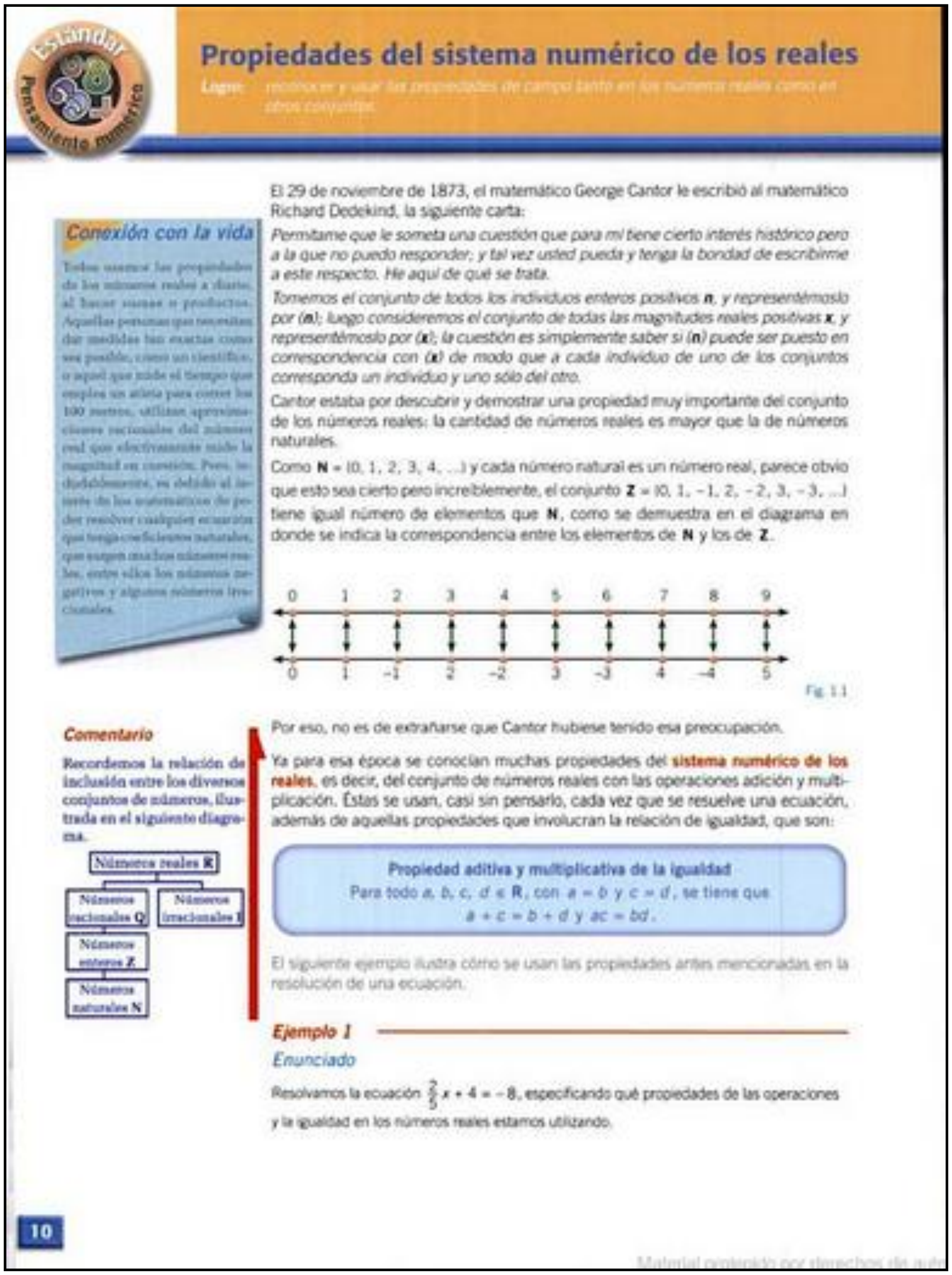
Actividades preparatorias

1. Ubica sobre la recta los siguientes números reales: $\frac{3}{4}$, 0,333..., 2, $\frac{11}{10}$, $\sqrt{3}$, $(\sqrt{3}-1)$.
2. Demuestra que la solución de la ecuación $3x - \sqrt{3} = 6 - \sqrt{48}$ es un número real no racional.
3. Ilustra con varios ejemplos la siguiente proposición: si $a \leq b$ entonces $a^2 \leq b^2$. ¿Es verdadera esta proposición para todo par de números racionales?

   ¿Qué condiciones deben cumplir a y b para que la proposición sea verdadera?
4. Si a y b son números reales, se puede hallar la distancia entre ellos mediante el uso del valor absoluto y se define $d(a, b) = |a - b|$.

   ¿Cuándo es cero la distancia entre dos números? ¿La distancia definida de esta forma es simétrica? es decir, ¿$d(x, y) = d(y, x)$?
5. Encuentra la distancia entre los siguientes pares de números:
   - a. -3 y -1
   - b. 3 y 1
   - c. 8 y $\frac{1}{2}$
   - d. $-\frac{2}{7}$ y $\frac{1}{5}$
6. Encuentra los valores de x para los cuales
   - a. $4 - x < 3 - 2x$
   - b. $5 - x^2 < 8$
   - c. $(x-1)(x-3) > 0$
   - d. $x^2 - 2x + 1 > 0$
   - e. $(x-\pi)(x+5)(x-3) > 0$

[Figura n° 11, p. 9]



Estándar
Pensamiento numérico

Propiedades del sistema numérico de los reales

Logro: reconocer y usar las propiedades de campo tanto en los números reales como en otros conjuntos.

El 29 de noviembre de 1873, el matemático George Cantor le escribió al matemático Richard Dedekind, la siguiente carta:

Permítame que le someta una cuestión que para mí tiene cierto interés histórico pero a la que no puedo responder; y tal vez usted pueda y tenga la bondad de escribirme a este respecto. He aquí de qué se trata.

*Tomemos el conjunto de todos los individuos enteros positivos **n**, y representémoslo por (**n**); luego consideremos el conjunto de todas las magnitudes reales positivas **x**, y representémoslo por (**x**); la cuestión es simplemente saber si (**n**) puede ser puesto en correspondencia con (**x**) de modo que a cada individuo de uno de los conjuntos corresponda un individuo y uno sólo del otro.*

Cantor estaba por descubrir y demostrar una propiedad muy importante del conjunto de los números reales: la cantidad de números reales es mayor que la de números naturales.

Como $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ y cada número natural es un número real, parece obvio que esto sea cierto pero increíblemente, el conjunto $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ tiene igual número de elementos que **N**, como se demuestra en el diagrama en donde se indica la correspondencia entre los elementos de **N** y los de **Z**.

Fig. 1.1

Conexión con la vida

Comentario

Recordemos la relación de inclusión entre los diversos conjuntos de números, ilustrada en el siguiente diagrama.

Por eso, no es de extrañarse que Cantor hubiese tenido esa preocupación.

Ya para esa época se conocían muchas propiedades del **sistema numérico de los reales**, es decir, del conjunto de números reales con las operaciones adición y multiplicación. Éstas se usan, casi sin pensarlo, cada vez que se resuelve una ecuación, además de aquellas propiedades que involucran la relación de igualdad, que son:

Propiedad aditiva y multiplicativa de la igualdad
Para todo $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, con $a = b$ y $c = d$, se tiene que $a + c = b + d$ y $ac = bd$.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se usan las propiedades antes mencionadas en la resolución de una ecuación.

Ejemplo 1

Enunciado

Resolvamos la ecuación $\frac{2}{5}x + 4 = -8$, especificando qué propiedades de las operaciones y la igualdad en los números reales estamos utilizando.

10

[Figura n° 12, p. 10]

Solución

	Propiedad	Afirmación
$\frac{2}{5}x + 4 = -8$ $\left(\frac{2}{5}x + 4\right) + (-4) = -8 + (-4)$	Aditiva de la igualdad	Para $a, b, c \in \mathbf{R}$, si $a = b$ entonces $a + c = b + c$.
$\frac{2}{5}x + (4 + -4) = -12$	Asociativa de la adición	Para $a, b, c \in \mathbf{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$
$\frac{2}{5}x + 0 = -12$	Invertiva de la adición	Para cada número real a existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$.
$\frac{2}{5}x = -12$	Modulativa de la adición	Existe el número real 0 tal que $a + 0 = a$.
$\left(\frac{2}{5}x\right)\left(\frac{5}{2}\right) = (-12)\left(\frac{5}{2}\right)$	Multiplicativa de la igualdad	Para $a, b, c \in \mathbf{R}$, si $a = b$ entonces $ac = bc$.
$\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{2}{5}x\right) = -30$	Conmutativa de la multiplicación	Para $a, b \in \mathbf{R}$, $ab = ba$.
$\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)x = -30$	Asociativa de la multiplicación	Para $a, b, c \in \mathbf{R}$, $(ab)c = a(bc)$.
$1x = -30$	Invertiva de la multiplicación	Para cada $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, existe $\frac{1}{a} \in \mathbf{R}$, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.
$x = -30$	Modulativa de la multiplicación	Existe el número real 1 tal que $a \cdot 1 = a$. ■

Tabla 1.1.

La adición y la multiplicación son ejemplos de **operaciones binarias**, es decir, por medio de ellas se conforma una correspondencia entre cada par de números reales, a y b, y otro número real c. En el primer caso c es la suma de a y b y es el producto en el segundo caso. Otras operaciones binarias son la sustracción y la división.

El conjunto de los números reales, con las operaciones binarias adición y multiplicación y sus propiedades, adquiere la estructura matemática llamada **campo**, definido por el matemático alemán Richard Dedekind en 1879.

En el ejemplo 1 nombramos algunas de estas propiedades para las operaciones binarias, adición y multiplicación, pero a continuación hacemos el listado completo con un ejemplo que ilustra cada propiedad.

Propiedades de campo

Sean a, b y c elementos de un conjunto S que tiene dos operaciones definidas, adición y multiplicación. La tabla 1.2 nos muestra un resumen de las propiedades que deben cumplir los elementos de S y las dos operaciones definidas en éste, para tener una estructura de campo.

[Figura n° 13, p. 11]

	Propiedades de la adición	Propiedades de la multiplicación
Clausurativa	$a + b$ pertenece al conjunto S.	ab pertenece al conjunto S.
Conmutativa	$a + b = b + a$ $\sqrt{2} + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \sqrt{2}$	$ab = ba$ $\left(\frac{7}{8}\right)\left(-\frac{9}{4}\right) = \left(-\frac{9}{4}\right)\left(\frac{7}{8}\right)$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $\left(3{,}54 + -\frac{13}{24}\right) + \frac{7}{12} = 3{,}54 + \left(-\frac{13}{24} + \frac{7}{12}\right)$	$(ab)\,c = a\,(bc)$ $2\,(\pi r) = (2\,\pi)\,r$
Modulativa	Para todo $a \in S$, existe $m \in S$ tal que $a + m = a$; m se llama la identidad aditiva. En $\mathbf{R}$, $m = 0$. $\frac{2}{9} + 0 = \frac{2}{9}$	Para todo $a \in S$, existe $n \in S$, tal que $an = a$; n es la identidad multiplicativa. En $\mathbf{R}$, $n = 1$. $(8)(1) = 8$
Invertiva	Para cada $a \in S$, existe un $p \in S$ tal que $a + p = m$ donde m es módulo de la adición; p se denomina inverso aditivo de a. En $\mathbf{R}$, $p = -a$. $\sqrt{7} + (-\sqrt{7}) = 0$	Para cada $a \in S$, $a \neq m$, existe $t \in S$, tal que $a \cdot t = n$ donde n es módulo de la multiplicación; t se denomina el inverso multiplicativo de a. En $\mathbf{R}$, $t = \frac{1}{a}$. $\left(-\frac{5}{8}\right)\left(-\frac{8}{5}\right) = 1$.
Distributiva	$a\,(b + c) = ab + ac$ $4\left(\frac{7}{8} + 6{,}51\right) = 4\left(\frac{7}{8}\right) + 4\,(6{,}51)$	

Tabla 1.2

El conjunto de los números racionales y el de los números reales con las operaciones adición y multiplicación son ejemplos de campo. Los campos pueden ser conjuntos infinitos o finitos pero deben tener dos operaciones definidas y éstas deben cumplir todas las propiedades que enunciamos en la tabla 1.2.

Ejemplo 2

Enunciado

Sea $S = \{0, 1, 2\}$ con las operaciones definidas a continuación.

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tabla 1.3

$\otimes$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Tabla 1.4

Determinemos si el conjunto $\{S, \oplus, \otimes\}$ es un campo.

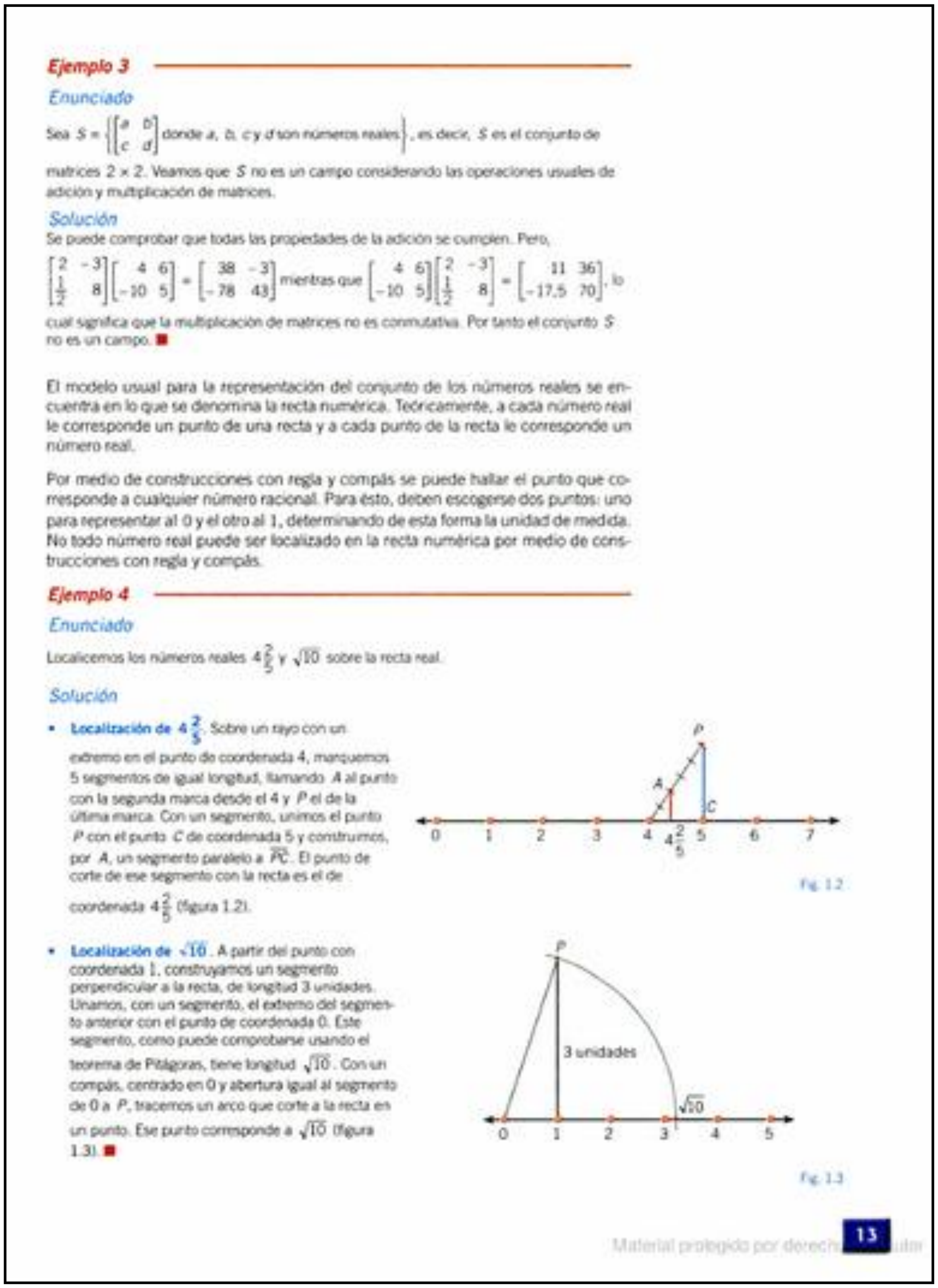
Solución

Podemos ver que el conjunto $\{S, \oplus, \otimes\}$ conforma un campo. Notemos que la identidad aditiva es 0 y la multiplicativa 1; el inverso aditivo de 1 es 2 y el inverso multiplicativo de 2 es 2. ■

También podemos encontrar conjuntos en los cuales se han definido dos operaciones, y que no son campos.

12

[Figura n° 14, p. 12]



Ejemplo 3

Enunciado

Sea $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ donde } a,\ b,\ c \text{ y } d \text{ son números reales} \right\}$, es decir, S es el conjunto de matrices 2×2. Veamos que S no es un campo considerando las operaciones usuales de adición y multiplicación de matrices.

Solución

Se puede comprobar que todas las propiedades de la adición se cumplen. Pero,

$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{2} & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & -3 \\ -78 & 43 \end{bmatrix}$ mientras que $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ \frac{1}{2} & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 36 \\ -17.5 & 70 \end{bmatrix}$, lo cual significa que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Por tanto el conjunto S no es un campo. ■

El modelo usual para la representación del conjunto de los números reales se encuentra en lo que se denomina la recta numérica. Teóricamente, a cada número real le corresponde un punto de una recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real.

Por medio de construcciones con regla y compás se puede hallar el punto que corresponde a cualquier número racional. Para ésto, deben escogerse dos puntos: uno para representar al 0 y el otro al 1, determinando de esta forma la unidad de medida. No todo número real puede ser localizado en la recta numérica por medio de construcciones con regla y compás.

Ejemplo 4

Enunciado

Localicemos los números reales $4\frac{2}{5}$ y $\sqrt{10}$ sobre la recta real.

Solución

- **Localización de $4\frac{2}{5}$**. Sobre un rayo con un extremo en el punto de coordenada 4, marquemos 5 segmentos de igual longitud, llamando A al punto con la segunda marca desde el 4 y P el de la última marca. Con un segmento, unimos el punto P con el punto C de coordenada 5 y construimos, por A, un segmento paralelo a $\overline{PC}$. El punto de corte de ese segmento con la recta es el de coordenada $4\frac{2}{5}$ (figura 1.2).

Fig. 1.2

- **Localización de $\sqrt{10}$**. A partir del punto con coordenada 1, construyamos un segmento perpendicular a la recta, de longitud 3 unidades. Unamos, con un segmento, el extremo del segmento anterior con el punto de coordenada 0. Este segmento, como puede comprobarse usando el teorema de Pitágoras, tiene longitud $\sqrt{10}$. Con un compás, centrado en 0 y abertura igual al segmento de 0 a P, tracemos un arco que corte a la recta en un punto. Ese punto corresponde a $\sqrt{10}$ (figura 1.3). ■

Fig. 1.3

[Figura n° 15, p. 13]

b. Determinen si hay identidad aditiva e identidad multiplicativa.

c. Determinen el inverso aditivo e inverso multiplicativo de cada número, si existen.

d. ¿Es $(S, \oplus, \otimes)$ un campo? Expliquen su respuesta.

8. Supongan que en el conjunto de los números naturales **N** se define una operación $*$. De acuerdo con la definición dada para esta operación en cada caso, encuentren el valor de $4 * 5$, y determinen si la operación es clausurativa, asociativa y conmutativa en **N**.

a. $a * b = (1 + a) + b$

b. $a * b = (1 + a)b$

c. $a * b = ab^2$

d. $a * b = \left(\frac{a + b}{2}\right)$

e. $a * b = \frac{\sqrt{ab}}{2}$

9. Cuando trabajamos con números complejos teníamos la unidad imaginaria i y el número complejo $-i$. Recuerden cómo se definían las operaciones entre complejos. Definan las operaciones adición y multiplicación en el conjunto $\{1, -1, i, -i\}$ y determinen si ellas cumplen las propiedades de campo.

Razonamiento lógico

10. Usa las propiedades de los números reales para demostrar o refutar cada afirmación.

a. $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

b. $a + (b + c) = (a + b) + (a + c)$

c. $a - (b + c) = a - b + c$

d. $(-a) \cdot (-b) = ab$

11. Desarrolla una construcción geométrica que permita ubicar sobre la recta real cualquier número real de la forma $\sqrt{n^2 + 1}$. Justifica tu propuesta.

12. Ante la pregunta: "*¿El conjunto de los números enteros es un campo?*", un estudiante justificó su afirmación diciendo: "*el conjunto de los números enteros es un subconjunto de los números reales con dos operaciones clausurativas, asociativas y con módulo, y como el módulo aditivo tiene inverso aditivo y el módulo multiplicativo tiene inverso multiplicativo, entonces es un campo*". Analiza esta respuesta y saca conclusiones.

Resolución de problemas

13. Halla un número racional y un irracional entre cada par de números dados.

a. 6 y 7

b. -3 y -4

c. $11{,}3$ y $11{,}4$

d. $\sqrt{7}$ y 3

14. Sobre la recta real se ha ubicado un número irracional p y todos sus múltiplos enteros np. Si representas sobre la misma recta todas las sumas resultantes y los productos resultantes de operar con ellos, ¿se obtendrán nuevos puntos sobre la recta? ¿Cuáles?

15. Sobre la recta real se ubica un número irracional y todos los números reales cuya suma con él tengan como resultado un número entero.

a. ¿Qué forma tienen los números ubicados en la recta?

b. ¿El conjunto de todos los números así obtenidos es un campo para las operaciones adición y multiplicación?

16. Soluciona el problema del ebanista, enunciado en el **Explorando**.

17. Justifica la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: "*entre dos puntos distintos cualesquiera que representan números racionales en la recta real, hay un número infinito de puntos que representan números racionales. Por consiguiente, a cada número racional le corresponde algún punto de la recta numérica.*"

18. Construye dos triángulos en los cuales la medida de sus lados sea siempre un número racional y su área sea un número real no racional.

19. Justifica y da ejemplos de tu respuesta a la siguiente pregunta: ¿es posible construir cuadrados en los cuales la medida de sus lados sea un número racional y su área no?

20. ¿Es posible construir cuadrados en los cuales la medida de sus lados sea un número real no racional y su área sea racional?

CI: identifica e interpreta las propiedades de los números reales y las operaciones adición y multiplicación.
CA: argumenta sus conjeturas con base en las propiedades vistas y la definición de campo.
CP: propone estrategias para la resolución de problemas con base en las propiedades estudiadas.

16

[Figura n° 16, p. 16]

Estándar

Pensamiento numérico

Orden en los números reales

Logros: hallar solución de desigualdades con coeficientes reales; dar sentido a la densidad de los números reales.

Fácilmente se puede comprobar que tanto los números racionales como los reales y los números complejos cumplen las propiedades de campo con las operaciones usuales. Sin embargo, hay diferencias entre ellos. Por ejemplo, en los complejos toda ecuación con coeficientes complejos tiene solución en los complejos. No pasa lo mismo en los reales, ya que expresiones como $x^2 + 5 = 0$ no tienen solución en los reales, aun cuando los coeficientes de la ecuación son reales.

Otra gran diferencia entre estos dos conjuntos es que los reales pueden ser ordenados y los complejos no, es decir, en los reales se puede establecer la relación *menor que* o *mayor que*.

En los números reales existe un subconjunto, el de los reales positivos, al que notaremos $\mathbf{R}^+$. En $\mathbf{R}^+$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si a, b son elementos de $\mathbf{R}^+$, la suma $a + b$ y el producto ab son también elementos de $\mathbf{R}^+$, es decir, $\mathbf{R}^+$ es clausurado para las operaciones adición y multiplicación.
2. Si x es un número real, sólo una de las siguientes opciones se cumple:

$x \in \mathbf{R}^+$, $\quad x = 0 \quad$ o $\quad -x \in \mathbf{R}^+$.

Sean a y b números reales, se dice "*a es menor que b*" ($a < b$), si $b - a > 0$.

Propiedades de la relación de orden en R: Sean a, b, c, d números reales.

1. *Propiedad transitiva.* Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
2. *Propiedad aditiva.* Si $a < b$, entonces $a + d < b + d$.
3. *Propiedad multiplicativa.* Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
   Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

Una propiedad de los números reales que no poseen los enteros es la siguiente.

Para cada par de números reales a, b, existe un número real c tal que $a < c < b$. Esto se conoce como **densidad** de los números reales.

Vemos por ejemplo que entre 13 y 14 no existe un número entero, pero sí existen muchos reales. En efecto, 13,2, 13,5, 13,107100710007, ..., $13\frac{7}{9}$, $13,\overline{87}$, $\sqrt{173,64}$, son números que están entre 13 y 14. Algunos de estos números son racionales, como 13,5, $13\frac{7}{9}$, $13,\overline{87}$, otros son irracionales como 13,107100710007, ..., $\sqrt{173,64}$.

Las propiedades del orden junto con las de campo se usan para resolver expresiones llamadas inecuaciones o desigualdades.

Ejemplo 5

Enunciado

Determinemos el conjunto solución de la desigualdad $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2} < \frac{4}{7}x + \frac{8}{9}$.

Conexión con la vida

Las diversas actividades y situaciones que realiza y vive el ser humano le permiten comparar dos o más elementos con el fin de determinar que uno es mayor o menor que el otro, o que, en ocasiones, son iguales; como cuando se compara la longitud de dos pistas de carreras, el área de dos superficies, la altura de dos niños.

Entre las cosas por las cuales el hombre se interesa está la de definir la variación que se da en determinados eventos, por ejemplo cuando halla la variación de la temperatura de un paciente durante varias horas; los cambios de nivel del líquido en un tanque que se está llenando o vaciando, etc.

Comentario

Si $a \in \mathbf{R}^+$, $a > 0$. Si un número t no está en $\mathbf{R}^+$, su opuesto $-t$ según la propiedad **2** es positivo, por tanto $-t \in \mathbf{R}^+$.

[Figura n° 17, p. 17]

Solución

	Propiedad
$\frac{3}{5}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < \frac{4}{7}x + \frac{8}{9} + \frac{1}{2}$	Propiedad aditiva del orden.
$\frac{3}{5}x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) < \frac{4}{7}x + \left(\frac{8}{9} + \frac{1}{2}\right)$	Propiedad asociativa de la adición.
$\frac{3}{5}x + 0 < \frac{4}{7}x + \frac{25}{18}$	Propiedad invertiva de la adición.
$\frac{3}{5}x < \frac{4}{7}x + \frac{25}{18}$	Propiedad modulativa de la adición.
$\frac{3}{5}x - \frac{4}{7}x < \frac{4}{7}x + \frac{25}{18} - \frac{4}{7}x$	Propiedad aditiva del orden.
$\frac{1}{35}x < \left(\frac{4}{7}x - \frac{4}{7}x\right) + \frac{25}{18}$	Propiedades conmutativa y asociativa de la adición.
$\frac{1}{35}x < 0 + \frac{25}{18}$	Propiedad invertiva de la adición.
$\frac{1}{35}x < \frac{25}{18}$	Propiedad modulativa de la adición.
$(35)\left(\frac{1}{35}x\right) < (35)\frac{25}{18}$	Propiedad multiplicativa del orden.
$\left(\frac{35}{35}\right)x < \frac{875}{18}$	Propiedad asociativa de la multiplicación.
$1x < \frac{875}{18}$	Propiedad invertiva de la multiplicación.
$x < \frac{875}{18}$	Propiedad modulativa de la multiplicación.

El conjunto solución puede ser representado geométricamente, así:

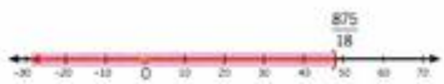


Fig. 1.4

Comentario

Los símbolos $-\infty$, y, $+\infty$ no representan números reales sino que significan: el primero, *menor que todo número real* y el segundo *mayor que todo número real*.

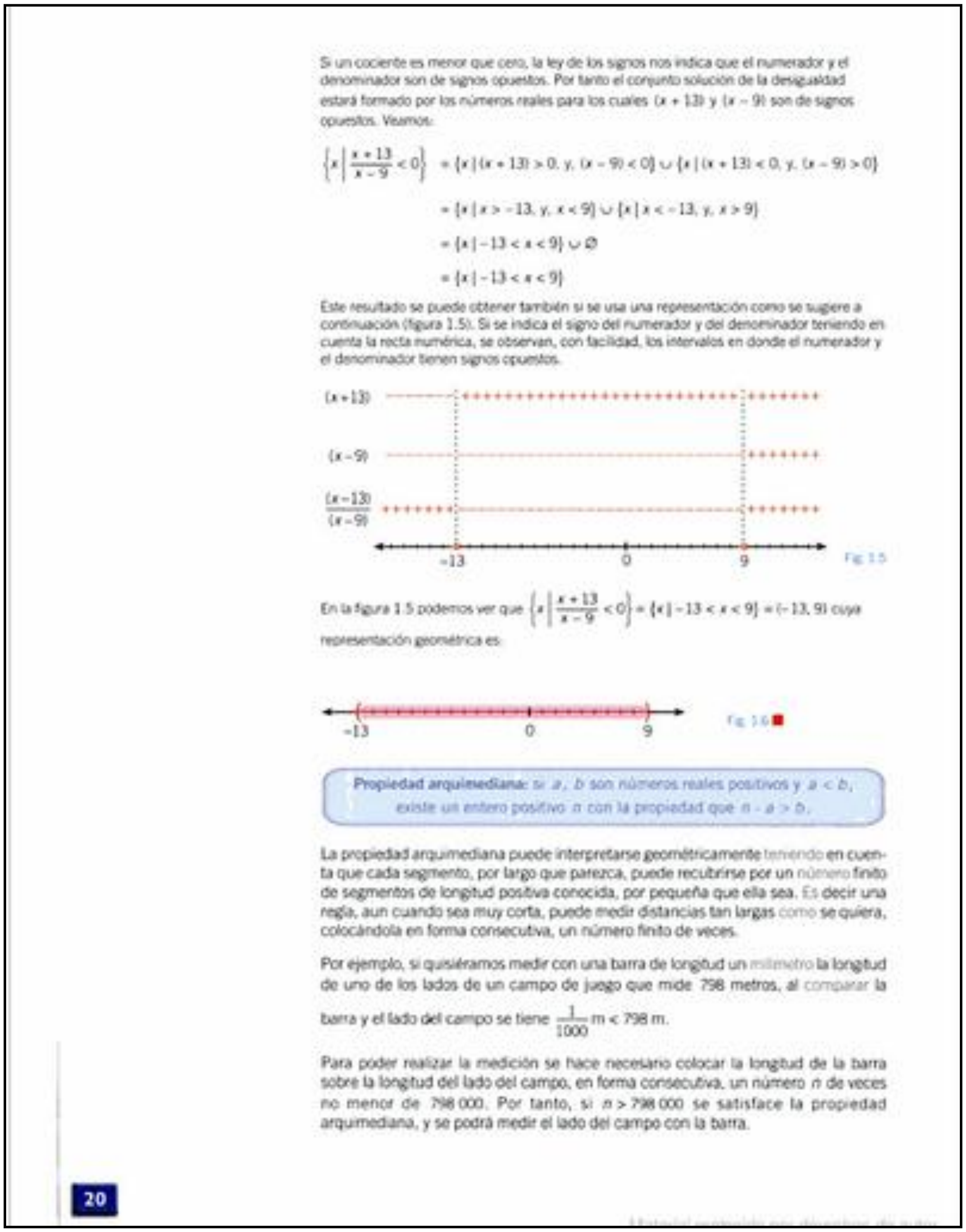
Teniendo en cuenta que a cada punto de la recta corresponde un número real, la solución de la desigualdad corresponde a todos los números reales desde menos infinito hasta $\frac{875}{18}$. Este conjunto se denomina **intervalo** y se representa así: $\left(-\infty, \frac{875}{18}\right)$. Como $\frac{875}{18}$ no es un elemento de la solución, el intervalo se dice que es abierto.

En general, si los extremos del intervalo pertenecen al conjunto, el intervalo se dice que es **cerrado**, si los extremos del intervalo no pertenecen al conjunto, el intervalo es **abierto**. Si uno de los extremos pertenece al conjunto y el otro no, al intervalo se le llama **semiabierto** o **semicerrado**.

La expresión $x \leq a$ (x menor o igual que a) significa que x es menor que a o que x es igual a a, luego si a, b son números reales, se pueden tener los siguientes tipos de intervalos:

18

[Figura n° 18, p. 18]



Si un cociente es menor que cero, la ley de los signos nos indica que el numerador y el denominador son de signos opuestos. Por tanto el conjunto solución de la desigualdad estará formado por los números reales para los cuales $(x+13)$ y $(x-9)$ son de signos opuestos. Veamos:

$$\left\{x \,\middle|\, \frac{x+13}{x-9} < 0\right\} = \{x \mid (x+13) > 0,\ y,\ (x-9) < 0\} \cup \{x \mid (x+13) < 0,\ y,\ (x-9) > 0\}$$

$$= \{x \mid x > -13,\ y,\ x < 9\} \cup \{x \mid x < -13,\ y,\ x > 9\}$$

$$= \{x \mid -13 < x < 9\} \cup \varnothing$$

$$= \{x \mid -13 < x < 9\}$$

Este resultado se puede obtener también si se usa una representación como se sugiere a continuación (figura 1.5). Si se indica el signo del numerador y del denominador teniendo en cuenta la recta numérica, se observan, con facilidad, los intervalos en donde el numerador y el denominador tienen signos opuestos.

Fig. 1.5

En la figura 1.5 podemos ver que $\left\{x \,\middle|\, \frac{x+13}{x-9} < 0\right\} = \{x \mid -13 < x < 9\} = (-13, 9)$ cuya representación geométrica es:

Fig. 1.6

Propiedad arquimediana: si a, b son números reales positivos y $a < b$, existe un entero positivo n con la propiedad que $n \cdot a > b$.

La propiedad arquimediana puede interpretarse geométricamente teniendo en cuenta que cada segmento, por largo que parezca, puede recubrirse por un número finito de segmentos de longitud positiva conocida, por pequeña que ella sea. Es decir una regla, aun cuando sea muy corta, puede medir distancias tan largas como se quiera, colocándola en forma consecutiva, un número finito de veces.

Por ejemplo, si quisiéramos medir con una barra de longitud un milímetro la longitud de uno de los lados de un campo de juego que mide 798 metros, al comparar la barra y el lado del campo se tiene $\frac{1}{1000}$ m $<$ 798 m.

Para poder realizar la medición se hace necesario colocar la longitud de la barra sobre la longitud del lado del campo, en forma consecutiva, un número n de veces no menor de 798 000. Por tanto, si $n > 798\,000$ se satisface la propiedad arquimediana, y se podrá medir el lado del campo con la barra.

20

[Figura n° 19, p. 20]

Subconjuntos acotados de los números reales

Logro: caracterizar los subconjuntos acotados en el conjunto de los números reales.

Diez amigos, al ingresar a un ascensor, leen el aviso fijado en su interior: "Peso máximo 400 kg"; como hay algunos que pesan cerca de 80 kg no pueden subir todos, y deciden ir en dos o más grupos, de modo que el peso total de cada grupo cumpla la condición de pertenecer al conjunto $P = \{p \mid p \leq 400\}$.

Cuando consideramos el conjunto A definido por $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x < 4\}$ sabemos que todos sus elementos son mayores que 2 y menores que 4, en efecto, 3,214 es un elemento del conjunto A, porque es mayor que 2 y menor que 4; igualmente $2\sqrt{2}$ lo es. Pero 4 y 5,32 siendo mayores que 2 no están en A porque no son menores que 4; también 2 y $-\sqrt{2}$ son menores que 4 pero no están en A porque son menores o iguales que 2.

No siempre los subconjuntos de $\mathbf{R}$ están definidos por desigualdades. Tal es el caso del conjunto $C = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{1}{n+1} \text{ con } n \in \mathbf{N} \text{ y } n \geq 0\right\}$. Para este conjunto todos sus elementos son números racionales positivos menores o iguales a 1. Por tal razón se puede escribir: "Para todo $x \in C$, $0 < x \leq 1$". Pero $C \neq [0, 1]$ porque $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es un elemento de este intervalo pero no está en C.

Los elementos del conjunto $M = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x\}$ son todos mayores o iguales a -1, pero no se puede asegurar que sean menores que algún número real.

Todos los conjuntos anteriores tienen algo en común: todos tienen un tope; para M el tope es inferior, para el conjunto P el tope es superior. Los conjuntos A y C tienen tope inferior y superior.

Los conjuntos P, A y C tienen un tope superior, es decir sus elementos no pueden ser mayores que cierto número y por tanto son todos menores que él.

Cotas superiores de un conjunto

Los números reales que son mayores o iguales a los elementos de un subconjunto S de $\mathbf{R}$ se llaman **cotas superiores** de S. Y se notarán $Cs(S)$.
Un número real α se dice que es una cota superior de un conjunto X, si todos los elementos x del conjunto son menores o iguales a α, es decir, para todo x del conjunto X, $x \leq \alpha$.
En tal caso del conjunto X se dice que es acotado superiormente por α.
Observemos que si α es una cota superior de X, ninguno de los elementos de X es mayor que α.

Para cada uno de los conjuntos A, C y M podemos ilustrar el conjunto de sus cotas superiores.

$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x < 4\}$; $\quad Cs(A) = \{\alpha \in \mathbf{R} \mid \alpha \geq 4\}$

$C = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{1}{n+1} \text{ con } n \in \mathbf{N} \text{ y } n \geq 0\right\}$; $\quad Cs(C) = \{\alpha \in \mathbf{R} \mid \alpha \geq 1\}$

$M = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x\}$; $\quad Cs(M) = \varnothing$

[Figura n° 20, p. 23]

Los conjuntos A, C y M tienen tope inferior, es decir todos sus elementos son mayores que cierto número o mejor aún, no pueden ser menores que cierto número.

Conexión con la vida

Cada vez que se establecen condiciones para ingresar a una institución o para desempeñar ciertas tareas, realmente se están "fijando cotas". Tal es el caso de

- el aviso que se lee a la entrada de un colegio: "Para ingresar al jardín el niño debe tener por lo menos 4 años cumplidos".
- El aviso que aparece a la entrada de una piscina: "La estatura mínima para poder usar esta piscina es 120 cm".
- La placa que aparece en un puente vehicular de una ciudad: "Altura máxima 3.50 m".
- Al leer una receta de una comida que contiene berenjenas, se encuentra la expresión: "guarde las berenjenas a temperatura ambiente por un máximo de 5 días".
- El médico que utiliza la tabla-gráfica para establecer la talla normal de un niño lee: "Para una edad de 10 años este niño debe tener la estatura entre 128 cm y 142 cm".

Cotas inferiores de un conjunto

Los números reales que son menores o iguales a los elementos de un subconjunto S de $\mathbf{R}$ se llaman **cotas inferiores** de S y se notarán $\mathbf{Ci}(S)$.
Un número real β se dice que es una cota inferior de un conjunto X, si todos los elementos x del conjunto X son mayores o iguales a β, es decir, para todo x del conjunto X, $x \geq \beta$. En tal caso del conjunto X se dice que es acotado inferiormente por β.
Observemos que en tal caso ninguno de sus elementos de X es menor que β.

Los conjuntos A, C y M se pueden ver cada uno con el conjunto de sus cotas inferiores.

$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x < 4\}$; $\quad Ci(A) = \{\beta \in \mathbf{R} \mid \beta \leq 2\}$

$C = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{1}{n+1} \text{ con } n \in \mathbf{N} \text{ y } n \geq 0\right\}$; $\quad Ci(C) = \{\beta \in \mathbf{R} \mid \beta \leq 0\}$

$M = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x\}$; $\quad Ci(M) = \{\beta \in \mathbf{R} \mid \beta \leq -1\}$

Conjuntos acotados

Si un conjunto tiene tanto cotas superiores como inferiores, es decir, es acotado superior e inferiormente se dice simplemente que es **acotado** y en tal caso todos sus elementos se encuentran en un intervalo cerrado.

De los conjuntos P, A, C, M se tiene que A y C son acotados. En efecto, los elementos de A son todos elementos del intervalo $[2, 4]$ y los elementos de C están en el intervalo $[0, 1]$.

Ejemplo 7

Enunciado

Mostremos que el conjunto $Q = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{n}{n-1}, n \geq 2\right\}$ está acotado inferiormente por los números reales c que cumplen la condición, $c \leq 1$.

Solución

Para esto basta ver que todo elemento de Q es mayor o igual que 1.

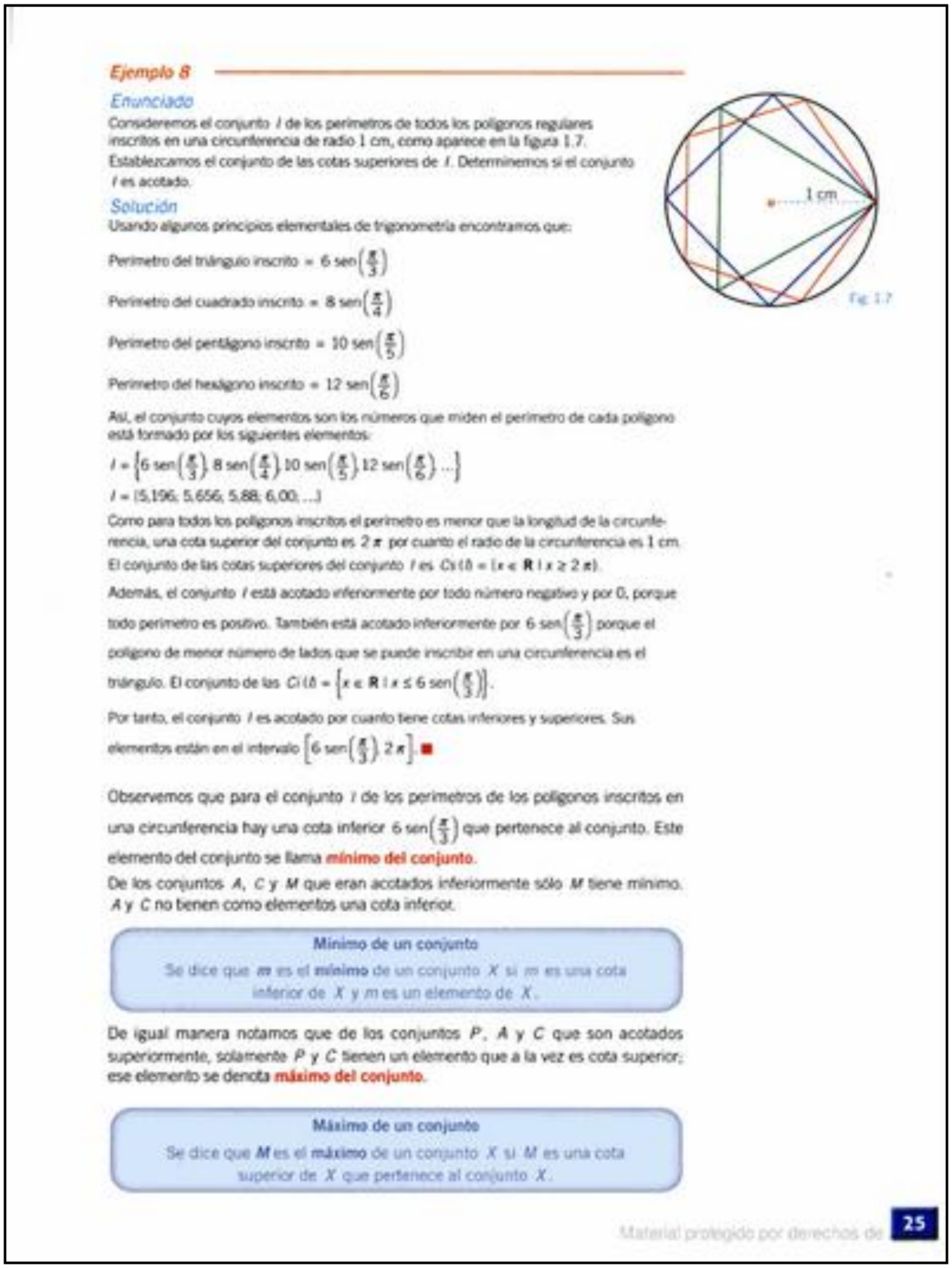
Partamos de la afirmación: "$n \geq n-1$ para todo n".

Entonces, al multiplicar ambos términos de la desigualdad por $\frac{1}{n-1}$ (un número positivo) se obtiene $\frac{n}{n-1} \geq 1$, por tanto para todo x obtenido como el cociente $\frac{n}{n-1}$ se tiene $x \geq 1$. Esto significa que 1 es cota inferior del conjunto Q.

Si c es cualquier número tal que $c \leq 1$, por transitividad $x \geq c$ y c es cota inferior del conjunto Q. ■

24

[Figura n° 21, p. 24]



Ejemplo 8

Enunciado

Consideremos el conjunto I de los perímetros de todos los polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio 1 cm, como aparece en la figura 1.7.
Establezcamos el conjunto de las cotas superiores de I. Determinemos si el conjunto I es acotado.

1 cm

Fig. 1.7

Solución

Usando algunos principios elementales de trigonometría encontramos que:

Perímetro del triángulo inscrito $= 6\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Perímetro del cuadrado inscrito $= 8\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Perímetro del pentágono inscrito $= 10\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Perímetro del hexágono inscrito $= 12\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Así, el conjunto cuyos elementos son los números que miden el perímetro de cada polígono está formado por los siguientes elementos:

$I = \left\{6\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right), 8\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right), 10\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right), 12\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right), \ldots\right\}$

$I = \{5{,}196; 5{,}656; 5{,}88; 6{,}00; \ldots\}$

Como para todos los polígonos inscritos el perímetro es menor que la longitud de la circunferencia, una cota superior del conjunto es 2π por cuanto el radio de la circunferencia es 1 cm.
El conjunto de las cotas superiores del conjunto I es $Cs(I) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 2\pi\}$.

Además, el conjunto I está acotado inferiormente por todo número negativo y por 0, porque todo perímetro es positivo. También está acotado inferiormente por $6\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ porque el polígono de menor número de lados que se puede inscribir en una circunferencia es el triángulo. El conjunto de las $Ci(I) = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 6\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}$.

Por tanto, el conjunto I es acotado por cuanto tiene cotas inferiores y superiores. Sus elementos están en el intervalo $\left[6\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right), 2\pi\right]$. ■

Observemos que para el conjunto I de los perímetros de los polígonos inscritos en una circunferencia hay una cota inferior $6\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ que pertenece al conjunto. Este elemento del conjunto se llama **mínimo del conjunto**.
De los conjuntos A, C y M que eran acotados inferiormente sólo M tiene mínimo. A y C no tienen como elementos una cota inferior.

Mínimo de un conjunto

Se dice que m es el **mínimo** de un conjunto X si m es una cota inferior de X y m es un elemento de X.

De igual manera notamos que de los conjuntos P, A y C que son acotados superiormente, solamente P y C tienen un elemento que a la vez es cota superior; ese elemento se denota **máximo del conjunto**.

Máximo de un conjunto

Se dice que M es el **máximo** de un conjunto X si M es una cota superior de X que pertenece al conjunto X.

[Figura n° 22, p. 25]

Ejemplo 14

Enunciado

Sea la función h definida por la expresión $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Investiguemos los límites laterales de $h(x)$ cuando x tiende a 0 y el límite cuando x tiende a 0.

Solución

Primero veamos cómo se define la función a la derecha y a la izquierda de 0.

- Si $x < 0$, $|x| = -x$, entonces, $h(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$
- Si $x \geq 0$, $|x| = x$, entonces $h(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$

Podemos ver la gráfica en la figura 3.25.

Procedemos a calcular los límites laterales.

$\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-1) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1) = 1$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$, entonces concluimos que $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ no existe. ■

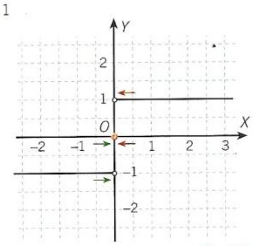


Fig. 3.25

Comentario

Para calcular límites por la izquierda o por la derecha se aplican las mismas propiedades y se emplean las mismas técnicas que para calcular límites por ambos lados.

Los ejemplos anteriores nos han servido para ilustrar la siguiente conclusión:

si f es una función definida en un intervalo abierto que contiene el punto a, excepto posiblemente en a:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si y solo si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$
- Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe.
- Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ no existe o $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ no existe, entonces tampoco existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Continuidad de una función en un punto

Normalmente hemos asociado la **continuidad** de una función con el hecho de que su gráfica se pueda dibujar con un solo trazo, es decir, que no tenga interrupciones. Ahora usaremos el concepto de límite para dar una definición más precisa de continuidad.

Analicemos las funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 3.26.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$, $f(1)$ no está definido y $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$.

La gráfica de la función presenta una interrupción en el punto para el cual $x = 1$.

b. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, \text{ si } x \neq 1 \\ 2, \text{ si } x = 1 \end{cases}$

$h(1) = 2$, pero $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 3$. La gráfica presenta un "hueco" en $x = 1$.

138

[Figura n° 23, p. 138]

Anexo n°2

CORRESPONDENCIA CANTOR-DEDEKIND

CANTOR A DEDEKIND:

Halle, 20 junio 1877

Agradeciendo su escrito del 18 de mayo, con cuyo contenido estoy plenamente de acuerdo, y reconociendo que la diferencia en nuestras opiniones era solo externa, hoy comparezco de nuevo con una petición. Advertirá Ud. Que los intereses teóricos que nos unen tienen para Ud. el inconveniente de que le molesto más a menudo de lo que quizá fuera su deseo.

Me gustaría saber si considera Ud. aritméticamente riguroso un procedimiento demostrativo que he aplicado.

Se trata de mostrar que las superficies, cuerpos, e incluso los dominios continuos de dimensión ρ pueden ser coordinados unívocamente con líneas continuas, esto es, con dominios de *una* sola dimensión; y que por tanto las superficies, cuerpos, e incluso los dominios de ρ dimensiones, tienen la misma *potencia* que las curvas. Esta consideración parece oponerse a la que reina de modo general entre los representantes de la nueva geometría, ya que hablan de dominios simplemente infinitos, doblemente, triplemente,… ρ-uplemente infinitos, e incluso en ocasiones se encuentra la idea de que la infinitud de los puntos de una superficie se lograría como si fuera por cuadratura, la de un cuerpo por cubatura de la infinitud de los puntos de una línea.

Dado que los dominios de igual dimensión pueden ser interrelacionados analíticamente, me parece que aquellas cuestiones generales pueden ponerse en la siguiente forma puramente aritmética:

«Sean $x_1, x_2, \dots x_\rho$ ρ magnitudes reales variables independientes, cada una de las cuales puede tomar todos los valores que son ≥0 y ≤1. Sea *y* una magnitud real variable ρ+1-ésima, con el mismo campo de juego (≥0 y ≤1).

¿Es entonces posible coordinar las ρ variables $x_1, x_2, \dots x_\rho$ con la *y*, de modo que a cada sistema de valores concreto ($x_1, x_2, \dots x_\rho$) le corresponda un cierto valor *y*, y también a la inversa, a cada valor concreto *y* le corresponda un y sólo un sistema de valores ($x_1, x_2, \dots x_\rho$)?».

Esta cuestión debe responderse en la *afirmativa*, según creo ahora, *aunque durante años considere lo contrario como correcto*, por las siguientes razones:

Todo número *x* ≥0 y ≤1 puede ser representado de un y sólo un modo bajo la forma de una fracción decimal *infinita*, de modo que:

$$x = \alpha_1 \cdot \frac{1}{10} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots + \alpha_v \cdot \frac{1}{10^v} + \cdots$$

Donde α_v son números enteros que son ≥0 y ≤9. Cada número x determina pues una sucesión infinita $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ e inversamente.

Por tanto podemos escribir:

$$x_1 = \alpha_{1,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{1,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots + \alpha_{1,v} \cdot \frac{1}{10^v} + \cdots$$
$$x_2 = \alpha_{2,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{2,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots + \alpha_{2,v} \cdot \frac{1}{10^v} + \cdots$$
$$x_\rho = \alpha_{\rho,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{\rho,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots + \alpha_{\rho,v} \cdot \frac{1}{10^v} + \cdots$$

De estos ρ números se pueden derivar un ρ+1-ésimo número *y*:

$$y = \beta_1 \cdot \frac{1}{10} + \beta_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \cdots + \beta_v \cdot \frac{1}{10^v} + \cdots$$

Si se toma:

(I) $\beta_{(n-1)\rho+1} = \alpha_{1,n}$; $\beta_{(n-1)\rho+2} = \alpha_{2,n}$; …

$\beta_{(n-1)\rho+\sigma} = \alpha_{\sigma,n}$; … $\beta_{(n-1)\rho+\rho} = \alpha_{\rho,n}$.

Dado que cada número entero positivo *v* puede ponerse de un y sólo un modo en la forma:

$v = (n-1)\rho + \sigma$ donde $\sigma^{\geq 0}_{\leq \rho}$,

Se observa que mediante la ecuación (I) la sucesión $\beta_1, \beta_2, \dots$ está perfectamente determinada, y por tanto también *y*;

Más también a la inversa, partiendo del número *y* y por tanto de la sucesión $\beta_1, \beta_2, \ldots$, la ecuación (I) determina *unívocamente* las ρ sucesiones:

$$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\alpha_{\sigma,1}, \alpha_{\sigma,2}, \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\alpha_{\rho,1}, \alpha_{\rho,2}, \ldots$$

Y por consiguiente también los ρ números $x_1, x_2, \ldots x_\rho$.

DEDEKIND A CANTOR:

Brunswick, 22 junio 1877

La única objeción que por el momento puedo elevar contra su interesante argumentación, y que quizá Ud. pueda dar de lado sin dificultad, es la siguiente. Dice Ud.: « Todo número x (≥0 y ≤1) puede ser representado de un y solo un modo bajo la forma de una fracción decimal *infinita*, de modo que:

$$x = {}^{\alpha_1}/_{10} + {}^{\alpha_2}/_{10^2} + \cdots + {}^{\alpha_v}/_{10^v} + \cdots$$

donde α_v son números enteros que son ≥0 y ≤9. Cada número x determina pues una sucesión infinita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ e inversamente». El subrayado de la palabra «*infinita*» conduce a sospechar que pretende Ud. excluir el caso de una fracción finita, en el que tras un α_v distinto de cero seguiría únicamente la cifra $0 = \alpha_{v+1} = \alpha_{v+2} =$ etc.; y que pro tanto en lugar de

$$x = {}^{\alpha_1}/_{10} + {}^{\alpha_2}/_{10^2} + \cdots + {}^{\alpha_v}/_{10^v} + {}^{0}/_{10^{v+1}} + {}^{0}/_{10^{v+2}} + \cdots + {}^{0}/_{10^{v+v}} + \cdots$$

querría Ud. escribir siempre

$$x = {}^{\alpha_1}/_{10} + {}^{\alpha_2}/_{10^2} + \cdots + {}^{\alpha_v}/_{10^v} + {}^{9}/_{10^{v+1}} + {}^{9}/_{10^{v+2}} + \cdots + {}^{9}/_{10^{v+v}} + \cdots,$$

A fin de excluir toda posibilidad de una representación doble de un m ismo número x (si bien el propio número 0 debería ser representado bajo la forma 0,0000…; pero x=3/10 bajo la forma 0,29999…).

Si esta es su opinión (como es natural, uno podría igualmente excluir el caso de que a partir de una cierta posición aparezca sólo la cifra 9; pero entonces sucedería algo análogo), entonces mi objeción es como sigue. Me limitare por simplicidad al caso ρ=2 y pondré:

$$x = {}^{\alpha_1}/_{10} + {}^{\alpha_2}/_{10^2} + \cdots = 0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_v \ldots$$

$$y = {}^{\beta_1}/_{10} + {}^{\beta_2}/_{10^2} + \cdots = 0,\beta_1\beta_2 \ldots \beta_v \ldots$$

Para formar, tal como Ud., a partir de los números *x*, *y* en cada caso el tercer número

$z = 0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ldots$

donde

$\gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = \beta_1, \gamma_3 = \alpha_2, \gamma_4 = \beta_2, \ldots \gamma_{2v-1} = \alpha_v, \gamma_{2v} = \beta_v, \ldots,$

Entonces *z* es siempre una función plenamente definida de las dos variables continuas *x*, *y* y está contenida en el mismo intervalo $(0 \leq \tau \leq 1)$. Pero entonces existen infinitas fracciones legítimas a las que *z* no será *nunca* igual, por ejemplo,

$$0{,}478310507090\alpha_7 0\alpha_8 0\alpha_9 0 \ldots \alpha_v 0 \ldots$$

Como también toda fracción $0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ldots$ en la cual de una cierta posición en adelante sea o bien γ_{2v-1} o bien γ_{2v} siempre =0; ya que al derivar inversamente *x*, *y* a partir de un tal *z* nos veríamos llevados a un *x* o un *y* no disponible (excluido).

No se si mi objeción tiene una significación esencial para sus ideas, mas no quería dejar de formularla.

CANTOR A DEDEKIND, TARJETA CON ESTAMPA DEL 23.6.77:

Por desgracia tiene Ud. toda la razón en su objeción; afortunadamente, sólo afecta a la demostración y no al asunto; pues demuestro *en cierto modo más* de lo que pretendía, ya que he puesto en relación unívoca un sistema $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ de variables reales ilimitadas (que son ≥0 y ≤1) con una variable *y*, contenida en el mismo intervalo pero que no toma todos los valores del mismo, sino todos con la excepción de algunos *y''*. Mas cada uno de los valores que le corresponden *y'* lo toma solo *una vez*, y esto es según creo lo esencial. Ya que ahora puedo poner a *y'* en relación unívoca con otra variable *t*, que recibe todos los valores ≥0 y ≤1.

Solo me queda alegrarme de que, por lo demás, hasta el momento no haya encontrado Ud. nada que objetar; próximamente me permitiré escribirle más detalladamente acerca de este tema.