
AGRADECIMIENTOS

Sinceros agradecimientos a mis tutores, profesores Diego Garzón Castro y Jorge Hernando Arce Chaves, quienes siempre tuvieron recomendaciones y observaciones a las distintas versiones de este trabajo, y sin quienes no hubiera sido posible concebirlo, desarrollarlo y culminarlo. Muchas gracias por su acompañamiento durante todo este proceso.

Muchas gracias a las profesoras Leonor Camargo y Ángela María Restrepo por acceder a evaluar el informe final de esta investigación. Gracias por sus sugerencias, pues me permitieron mejorar la versión final de este trabajo.

A Diego, muchas gracias porque a pesar de las dificultades siempre pude contar con su apoyo. Por enseñarme que en momentos difíciles, la perseverancia y la transparencia son las puertas por las cuales podemos alcanzar unos mayores niveles de formación.

Igualmente, a mis compañeros, colegas, amigos, profesores y estudiantes, de la línea de investigación en Tecnologías de la Información y Comunicación y Educación Matemática (TICEM), por toda su paciencia, aportes y comentarios para la culminación de esta investigación. Para todos, mis agradecimientos por brindarme la oportunidad de aprender.

Agradecimientos a los estudiantes, profesores y directivos de la Sede Manuela Beltrán de la IE José Ma. Córdoba del Municipio de Yumbo, por su disponibilidad de tiempos, espacios y logística necesarias para la realización de la fase experimental de este trabajo.

Especialmente quiero agradecer a mi compañero y colega, William Campo, por toda su colaboración y disponibilidad. De no haber sido por su gran ayuda e interés este trabajo no se habría podido realizar. Muchas gracias William por darme la mano en momentos decisivos.

Finalmente, quiero expresar infinito agradecimiento a mi familia por darme todo lo necesario para soñar, por ser los faros que han iluminado mi vida y me han acompañado por mi viaje a lo largo de estos años. A Emily, gracias porque llegó a traer felicidad, luz y dicha a nuestros corazones.

Y, a Dios, quiero expresarle con humildad mi agradecimiento por los favores recibidos, por el acompañamiento y la luz con la que ha iluminado siempre mi vida. Gracias Dios por darme más de lo que realmente merezco.

A todos, mil gracias.

CONTENIDO		Pág.
RESUMEN		8
INTRODUCCIÓN		9
PRIMERA PARTE: Presentación del problema de investigación		
<u>CAPÍTULO I</u>		
<i>Génesis y orquestación instrumental:</i>		
<i>El papel de la gestión didáctica de los sistemas de instrumentos</i>		
		13
1.1	Didáctica de las Matemáticas y Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)	13
1.2	Acerca del problema de investigación	15
1.3	Una aproximación a los antecedentes	18
1.4	Un panorama internacional de las investigaciones alrededor del aprendizaje de las matemáticas y TIC	19
<u>CONCLUSIÓN PRIMERA PARTE:</u>		
El sentido de la gestión didáctica de los sistemas de instrumentos		
		23
SEGUNDA PARTE Análisis preliminares		
<u>CAPÍTULO II</u>		
<i>De la naturaleza de la rotación a las matemáticas experimentales</i>		
		26
2.1	Hacia una concepción de geometría a partir de las transformaciones	26
	2.1.1 La congruencia como propiedad invariante	29
	2.1.2 Acerca de la transformación de rotación	30
2.2	A propósito de la relación entre transformación y movimiento: Una mirada a la geometría euclidiana o el reino de la regla y el compás	33
2.3	El Renacimiento y el uso de nuevos instrumentos	39
	2.3.1 La Perspectiva y el desarrollo de nuevos instrumentos	40
2.4	El programa de Erlangen o una concepción moderna de la geometría	44
2.5	Hacia un planteamiento epistemológico: Las matemáticas experimentales y la geometría dinámica experimental	46
2.6	Transformaciones de Isometría y Cabri Géomètre	50

CAPÍTULO III

Sobre los aspectos colectivos de las génesis instrumentales 53

- 3.1 Una mirada instrumental al aprendizaje de las matemáticas 53
- 3.2 Los efectos estructurantes del artefacto sobre la actividad:
Hacia la constitución de ESU 55
- 3.3 Orquestación Instrumental y
la gestión didáctica de los sistemas de instrumentos 58
- 3.4 La TSD como perspectiva que sustenta el diseño de la
secuencia didáctica 60
 - 3.4.1 Contrato didáctico e intención didáctica del medio 60
 - 3.4.2 Situaciones didácticas y a - didácticas 63
- 3.5 El arrastre exploratorio: Hacia la constitución de un ESU 64
- 3.6 El acercamiento curricular 71

CONCLUSIÓN SEGUNDA PARTE:

Posibles articulaciones teóricas 74

TERCERA PARTE:

El dispositivo experimental y análisis *a priori*

CAPÍTULO IV

Diseño del dispositivo experimental 77

- 4.1 Consideraciones metodológicas generales que orientan el diseño 77
- 4.2 El dispositivo experimental 79
- 4.3 Selecciones generales 83
 - 4.3.1 Hacia la constitución de variables micro-didácticas 84

CAPÍTULO V

Análisis *a priori* 86

- 5.1 Situación 1: Rotaro 87
- 5.2 Situación 2: Figuras viajeras 90
- 5.3 Situación 3: Por el camino amarillo 92
- 5.4 Situación 4: La flor 94
- 5.5 Situación 5: Rosetón 101
- 5.6 Situación 6: Loco rosetón 96

5.7	Situación 7: Círculos en parejas	103
5.8	Gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor	105

CUARTA PARTE:
Evaluación y validación de la investigación

CAPÍTULO VI

Análisis a posteriori 111

6.1	Caracterización de la población objeto	112
6.2	Organización de la experimentación	113
6.3	Procesamiento de la información: las rejillas de análisis	115
6.3.1	Actividad instrumentada	116
6.3.2	Gestión didáctica del sistema de instrumentos	112
6.3.3	Diseño de las situaciones	117
6.4	Presentación de los análisis	118
6.4.1	Análisis <i>a posteriori</i> Situación 1: Rotaro	118
6.4.2	Análisis <i>a posteriori</i> Situación 3: Por el camino amarillo	122
6.4.3	Análisis <i>a posteriori</i> Situación 7: Círculos en parejas	127
6.5	Consideraciones finales	126

CAPÍTULO VII

Conclusiones 138

BIBLIOGRAFÍA 143

ANEXOS 149

LISTA DE FIGURAS

		Pág.
Figura 2.1	La transformación como función	27
Figura 2.2	Ángeles y demonios de M. ESCHER	34
Figura 2.3	El perspectógrafo	42
Figura 2.4	Los desposorios de la Virgen de Rafael Sanzio (1504)	43
Figura 3.1	Principales mediaciones instrumentales en el sistema didáctico	55
Figura 3.2	Zona de valor funcional del artefacto	57
Figura 3.3	Situación didáctica y a-didáctica	63
Figura 3.4	El papel del arrastre y la exploración de propiedades	66
Figura 3.5	Emergencia colectiva del ESU arrastre exploratorio	70
Figura 3.6	Sub - esquema sensorial	71
Figura 3.7	Principales articulaciones teóricas	75
Figura 4.1	Enfoque metodológico de la investigación	78
Figura 4.2	Diseño del dispositivo experimental	79
Figura 4.3	Relaciones Hipótesis - Dispositivo experimental	83
Figura 5.1	Estructura del análisis <i>a priori</i>	86
Figura 5.2	Configuración en pantalla presentada en la Situación 1 "Rotaro"	88
Figura 5.3	Construcción oculta Situación 1	89
Figura 5.4	Construcción oculta Situación 2 "Figuras viajeras"	91
Figura 5.5	Configuración en pantalla presentada en la Situación 3 "Por el camino amarillo"	92
Figura 5.6	Construcción oculta Situación 3 "Por el camino amarillo"	93
Figura 5.7	Rosetón Catedral de Notre Dame, París	95
Figura 5.8	Configuración inicial Situación "Rosetón"	97
Figura 5.9	Configuración rosetón propuesto en la Situación 5	99
Figura 5.10	Configuración presentada en la Situación 6 "Loco rosetón"	101
Figura 5.11	Construcción oculta Situación 6 "Loco rosetón"	102
Figura 5.12	Configuración presentada en la Situación 7 "Círculos en parejas"	103
Figura 5.13	Construcción oculta Situación 7 "Círculos en parejas"	104
Figura 6.1	Proceso de validación interna de la investigación	115
Figura 6.2	Estructura del análisis <i>a posteriori</i>	112
Figura 6.3	Sistema de tratamiento de la información recolectada	116
Figura 6.4	Fase de acción del ESU del arrastre exploratorio en la Situación 3 "Por el camino amarillo"	124
Figura 6.5	Conservación de la congruencia en diseños simétricos	131
Figura 6.6	Campos posibles de la gestión del profesor	134
Figura 6.7	Emergencia experimental del ESU del arrastre exploratorio	135

LISTA DE TABLAS

		Pág.
Tabla 1.1	Indicadores de dimensiones LAGRANGE (2005)	21
Tabla 4.1	Componentes del dispositivo experimental	79
Tabla 4.2	Variables micro-didácticas	85
Tabla 5.1	Estructura general de la secuencia didáctica	87
Tabla 5.2	Análisis Situación 1 “Rotaro”	89
Tabla 5.3	Análisis Situación 2 “Figuras viajeras”	92
Tabla 5.4	Análisis Situación 3 “Por el camino amarillo”	94
Tabla 5.5	Análisis Situación 4 “La flor”	98
Tabla 5.6	Análisis Situación 5 “Rosetón”	100
Tabla 5.7	Posibles respuestas de los estudiantes en la Situación 5	101
Tabla 5.8	Análisis Situación 6 “Loco rosetón”	103
Tabla 5.9	Análisis Situación 7 “Círculos en parejas”	105
Tabla 5.10	Análisis de la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor	108
Tabla 6.1	Tratamiento de la información Etapa 2 de la experimentación	115
Tabla 6.2.	Rejilla AI-1 Actividad instrumentada	117
Tabla 6.3.	Rejilla GDSI-1 Gestión didáctica del sistema de instrumentos	117
Tabla 6.4	Rejilla DS-1 Diseño de las situaciones	118
Tabla 6.5	Resumen de los niveles de la actividad del profesor (MARGOLINAS, 2002)	136
Tabla 6.6	Niveles de la actividad del profesor vs. emergencia experimental del ESU del arrastre exploratorio	137

RESUMEN

Este ejercicio de investigación hace referencia a la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor, en relación con el desarrollo de génesis instrumentales del arrastre exploratorio en un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD), con estudiantes de educación primaria.

En esta perspectiva, interesa concebir, diseñar, poner en escena y evaluar, una secuencia didáctica que toma en consideración aspectos de la orquestación instrumental y la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), alrededor de la noción de transformación de rotación, contemplando la emergencia y evolución de un Esquema Social de Uso (ESU).

Descriptores:

Transformación de rotación, orquestación instrumental, Esquema Sociales de Uso (ESU), secuencia didáctica, Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), Ambientes de Geometría Dinámica (AGD).

INTRODUCCIÓN

“El ser humano ha construido un mundo artificial para vivir. Desde el martillo más simple, hasta la computadora más compleja,... le han permitido realizar la tarea que se ha propuesto: diseñar un mundo a la medida de sus necesidades y aspiraciones.”

MORENO (2002)

Este trabajo de investigación, para optar por el título de Magister en Educación, énfasis en Educación Matemática, se desarrolla en el contexto de la línea: Tecnologías de la Información y la Comunicación y Educación Matemática (TICEM) del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

En este sentido, se aborda un problema de investigación donde interesa, por un lado, el diseño de una secuencia didáctica que aborde la mediación de instrumentos, en el aprendizaje de la transformación de rotación y, por otro lado, articular una propuesta de orquestación instrumental, resaltando la actividad del profesor en términos de la gestión de los instrumentos integrados a la clase.

Bajo esta perspectiva, se opta por una estrategia metodológica que toma como referencia la microingeniería didáctica, con el fin de abordar la noción matemática que se pretende movilizar y realizar una propuesta de intervención, donde se le da relevancia al papel del profesor en tanto la caracterización de sus acciones respecto a la mediación de instrumentos en el aprendizaje de la geometría.

Teniendo en cuenta lo anterior, se pretende dar cuenta de algunos aspectos colectivos de la emergencia del arrastre exploratorio, contemplados en una secuencia didáctica, alrededor del aprendizaje de la transformación de rotación con estudiantes de primaria. Interesa relacionar la gestión de los sistemas de instrumentos realizada por el profesor, de manera paralela, con las génesis instrumentales del arrastre exploratorio, que desarrollan los estudiantes.

En el **primer capítulo** se hace una presentación del problema de investigación, haciendo énfasis en las categorías teóricas centrales que lo sustentan. Igualmente, al igual que los propósitos y expectativas, para finalmente hacer una presentación de las hipótesis de investigación.

En el **segundo capítulo** se da inicio a la realización de los análisis preliminares, principalmente, a la dimensión histórico-epistemológica en la que la unidad de análisis aborda la noción de transformación geométrica, llevando la reflexión al tipo de geometría en la cual se concibe ésta y el papel del arte renacentista en el desarrollo de la misma.

Igualmente, se resalta el papel de la congruencia como propiedad invariante asociada a las transformaciones de isometría, optando por una reflexión epistemológica acerca de las matemáticas experimentales, lo cual puede llegar a dar cuenta de aspectos centrales de la naturaleza de la actividad matemática mediada por instrumentos.

El **capítulo tres** centra su reflexión en los referentes teóricos que sustentan el problema de investigación desde las dimensiones cognitiva y didáctica, abordando una mirada instrumental al aprendizaje de las matemáticas, enfatizando en la orquestación instrumental como eje central, y presentando la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) como una propuesta en la cual, se pueda concebir el papel de la gestión didáctica del profesor.

Por su parte, en el **capítulo cuatro**, se da inicio al dispositivo experimental, haciendo una presentación de las consideraciones metodológicas que orientan el diseño en la cual se hace un acercamiento a la microingeniería, como referente que inspira metodológicamente esta investigación, y que posibilitaría un diseño donde se articulen la orquestación instrumental y la TSD como categorías centrales.

Dada la naturaleza de este capítulo se incluye la realización de las selecciones generales alrededor del contexto curricular, un acercamiento a Cabri desde la mirada del campo de acciones posibles del artefacto, en el cual el arrastre ocupa un lugar central, y finalmente, la constitución de las variables micro-didácticas que orientan el diseño de las situaciones que componen la secuencia.

En el **capítulo cinco** se aborda el análisis *a priori* de las situaciones. Inicialmente se hace una presentación general exhibiendo los propósitos de la secuencia y de cada situación que la compone enfatizando principalmente en la TSD, el papel de la consigna, la intención del medio, las reglas de juego y las posibles estrategias que se movilizan en el diseño de cada situación.

Dada la relevancia que ocupa la orquestación instrumental en esta investigación, se incluye una posible propuesta de gestión del profesor para el desarrollo de cada situación, tomando el contrato, los actos de devolución, la validación e institucionalización como aspectos centrales.

Por su parte en el **sexto capítulo**, se abordan los análisis *a posteriori*, en la vía de un posible proceso de validación de la misma, particularmente del dispositivo experimental, retomando el principio básico de la microingeniería didáctica de poner en diálogo los análisis *a priori* y *a posteriori*, alrededor de las hipótesis de investigación.

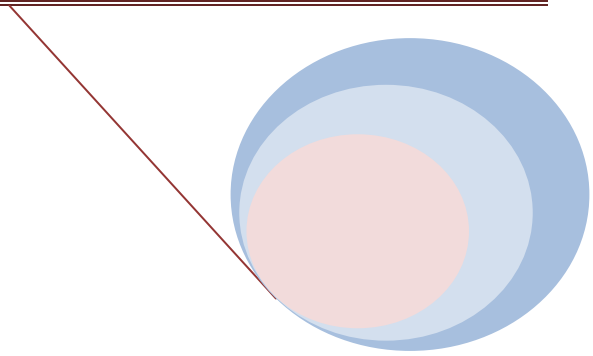
Para la realización de estos análisis se toman tres aspectos centrales: el diseño de las situaciones, la gestión didáctica del sistema de instrumentos y la actividad

instrumentada. Se realizan además, unas consideraciones finales, en las cuales se presentan y sintetizan los principales resultados de la investigación.

El **capítulo siete** presenta las conclusiones del trabajo las cuales atienden principalmente al problema de investigación y sus respectivas hipótesis, destacando el papel central que tiene la gestión didáctica del sistema de instrumentos, o gestión del profesor, cuando se integran ciertos artefactos a la clase de matemáticas.

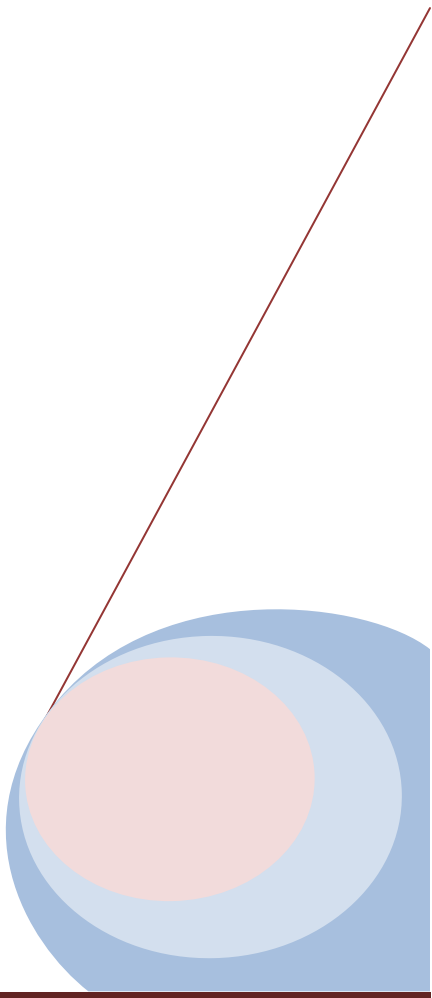
A manera de **anexos** se presentan aquellas evidencias (fotográficas o documentales) que se citan previamente en la realización de los análisis, y que respaldan la realización de los mismos.

De manera general, este trabajo de investigación pretende hacer una contribución a la labor de los profesores, esencialmente de educación básica, cuando se interesan por el papel que tienen las tecnologías computacionales en el aprendizaje de las matemáticas.



PRIMERA PARTE

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN



CAPÍTULO I

GÉNESIS Y ORQUESTACIÓN INSTRUMENTAL: EL PAPEL DE LA GESTIÓN DIDÁCTICA DE LOS SISTEMAS DE INSTRUMENTOS

En este primer capítulo, se contextualiza el problema de investigación a partir de la relación entre las génesis instrumentales de los estudiantes, con el uso de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como Cabri Géomètre II plus, y una secuencia didáctica, que contempla la gestión didáctica de un sistema de instrumentos, concebida desde la orquestación instrumental propuesta por TROUCHE (2002).

Se entiende por un AGD, aquel tipo de software, o micromundo, con características de arrastre (o desplazamiento) sobre las figuras construídas, un uso predominante de lugares geométricos y de la traza o huella que deja una figura cuando se le arrastra.

Es principalmente el arrastre una de las características artefactuales de Cabri, integradas intencionalmente al diseño de la secuencia didáctica en relación con la noción puesta en juego, y en este sentido, considerada dentro de la orquestación instrumental.

Y es justamente, desde la mirada de la orquestación instrumental, que se considera central el papel que juega el profesor como gestor de los sistemas de instrumentos de la clase, que median la construcción del saber matemático puesto en consideración en la secuencia didáctica, en este caso referido a la transformación de rotación con estudiantes de quinto grado de educación primaria.

1.1 Didáctica de las Matemáticas y Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)

Las tecnologías, afirma MORENO (2002), no han resultado de la evolución humana como simples apéndices capaces de aumentar la capacidad física de los sujetos, su influencia ha llegado incluso hasta el campo de la cognición. La ilustración típica de este hecho se evidencia en la tecnología de la escritura, la cual constituyó una transición cognitiva hacia procesos y problemas cada vez más complejos.

La evolución de los humanos como seres culturales, ha ido acompañada de la evolución de las tecnologías que la misma cultura fomenta y la cual se relaciona con todas las actividades humanas, como amplificadoras y reorganizadoras de nuestra cognición. Al respecto, MORENO (2002) argumenta que:

“En las discusiones sobre las tecnologías de hoy, tendemos a ver como productos tecnológicos solo aquellos que han sido desarrollados durante nuestro tiempo. Se cree que las computadoras son tecnología, pero el lápiz, el papel, el bolígrafo, el signo =, el pizarrón, el alfabeto, no lo son... Pero en realidad si lo son: son tecnologías inventadas por el ser humano...”

En esta perspectiva, investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas¹, resaltan que los procesos de integración de TIC, configuran un objeto actual de indagación, debido a que la mediación de los instrumentos en el aprendizaje influyen profundamente en las relaciones y tensiones presentes en el sistema didáctico².

En este sentido, este trabajo opta por una mirada didáctica del papel que pueden jugar las TIC en el aprendizaje de las matemáticas, tal como propone TROUCHE (2002), cuando resalta que la aparición de artefactos computacionales en la clase de matemáticas, supone un problema de carácter didáctico acerca de la constitución de artefactos en instrumentos de actividad matemática.

Desde esta perspectiva, RABARDEL (1999) caracteriza como ingenuas aquellas concepciones de profesores y estudiantes que expresan que la mediación de instrumentos en el aprendizaje, no afecta el tipo de matemáticas que se están movilizandando, ni los aprendizajes que se están construyendo.

La idea central de este trabajo sostiene que los instrumentos no son objetos neutros en el aprendizaje, todo lo contrario, su mediación es fundamental, y en este proceso, la gestión del profesor aparece como un tema central.

Frente a esto, la aproximación ergonómica (RABARDEL, 1999) reconoce que todo aprendizaje de una noción matemática se encuentra mediado por instrumentos y que dicha mediación influye en la naturaleza transpuesta del saber matemático, las acciones del profesor, la construcción del conocimiento, la actividad matemática del estudiante, y la organización particular de la clase.

A partir de las anteriores consideraciones, se plantea una discusión frente al tipo de concepciones, que usualmente circulan en el contexto escolar, en las cuales se piensa que con la incorporación de un artefacto a la clase, se obtendrán “más y mejores” aprendizajes, bajo la idea de que las TIC representan una salida fácil a los complejos retos que supone la enseñanza de las matemáticas.

¹ Por ejemplo, la realizada por LAGRANGE y otros (2005).

² RABARDEL (1999).

1.2 Acerca del problema de investigación

El problema de investigación del que se ocupa este trabajo, propone una mirada centrada en el papel del profesor como gestor del sistema de instrumentos puestos en clase. Este acercamiento posibilita el acompañamiento a las génesis instrumentales de los estudiantes, en relación con el uso del arrastre exploratorio en el aprendizaje de la rotación.

La gestión didáctica del sistema de instrumentos, aparece en relación con la idea de orquestación instrumental, en el sentido de TROUCHE (2002), lo cual implica una consideración de los artefactos a integrar a la clase y la intencionalidad didáctica de los mismos.

El sistema de instrumentos es una categoría proveniente de los trabajos de RABARDEL (1995, 1999) que básicamente hace referencia al ensamble o articulación intencional de determinados instrumentos alrededor de una actividad particular por parte de los sujetos. En este caso, la actividad estará centrada en la exploración de las propiedades invariantes de una transformación geométrica a partir del uso del arrastre exploratorio.

Este sistema de instrumentos requiere de una gestión didáctica, a cargo del profesor, la cual se articula con el diseño mismo de la secuencia didáctica que se pretende movilizar como parte integrante de la orquestación. Por esta razón el diseño mismo de la secuencia constituye un eje importante de la investigación.

De esta manera, se propone un problema de investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas, apoyado en la aproximación ergonómica (RABARDEL, 1999), que dé cuenta de la mediación instrumental en la actividad del sujeto, tomando como referencia los procesos de génesis instrumental.

Para esto, es importante considerar las condiciones y restricciones del artefacto a integrar, en este caso el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) Cabri Géomètre, particularmente su posibilidad de arrastre o desplazamiento, en el contexto del aprendizaje de la transformación de rotación en grado quinto³.

Las categorías conceptuales en las cuales se centra este trabajo son: génesis instrumental, principalmente lo relacionado con la emergencia de Esquemas Sociales de Uso (ESU) y orquestación instrumental, centrada en la gestión didáctica del sistema de instrumentos, en relación con la TSD y el aprendizaje de la transformación de rotación en educación primaria.

³ En el sistema educativo colombiano el grado Quinto, significa la culminación del ciclo de educación primaria. En este grado los estudiantes generalmente tienen entre 10 y 11 años de edad.

Teniendo el enfoque de ingeniería didáctica como referente metodológico, se puede decir que las primeras categorías, génesis instrumental y ESU, hacen alusión a la dimensión cognitiva; la orquestación instrumental, la secuencia didáctica y la gestión didáctica del sistema de instrumentos, se refieren a la dimensión didáctica, y la naturaleza de la transformación de rotación constituye el centro de interés en la dimensión epistemológica.

Evidentemente la dimensión que moviliza la investigación es la didáctica, pues es a través de ésta que se logran articular las demás, a partir del diseño de la secuencia didáctica que se pretende realizar.

Teniendo en consideración lo anterior, la pregunta que dinamiza la investigación se propone en los siguientes términos:

Problema de investigación

¿Cómo se relacionan la emergencia del arrastre exploratorio y la gestión didáctica de un sistema de instrumentos a cargo del profesor, en una secuencia didáctica a propósito de la rotación en quinto de primaria?

De esta pregunta se desprenden al menos dos hipótesis centrales:

Un primer presupuesto gira alrededor de la posibilidad de que los estudiantes desarrollen génesis instrumentales, a partir de lo que TROUCHE (2002), denomina aspectos colectivos de las génesis instrumentales, y esencialmente movilizados en los ESU, los cuales se ponen en escena a partir de secuencias didácticas que intencionalmente contemplan el aprendizaje a partir de la mediación de instrumentos.

A partir del diseño y puesta en escena de una secuencia didáctica, aparece la orquestación instrumental como una categoría teórica capaz de articular la construcción de conocimientos matemáticos mediados por instrumentos computacionales. De esta manera, surge una primera hipótesis de investigación:

Primera hipótesis de investigación (HI1):

La gestión didáctica del sistema de instrumentos se relaciona con el diseño de una secuencia didáctica concebida desde la orquestación instrumental.

Igualmente, se da prioridad al análisis, concepción, desarrollo y evaluación de una secuencia didáctica, en la cual, desde la perspectiva de la orquestación instrumental se exhibe la gestión del sistema de instrumentos a cargo del profesor como un elemento central, en el acompañamiento al desarrollo de las génesis instrumentales de los estudiantes.

En este sentido, surge la necesidad de plantear una segunda hipótesis de investigación, que articule la anterior alrededor de las relaciones entre orquestación y génesis instrumentales, esta última centrada en la emergencia de ESU del arrastre exploratorio.

Segunda hipótesis de investigación (HI2):

El diseño de una secuencia didáctica, concebida desde la orquestación instrumental, considera la emergencia de posibles ESU respecto al arrastre exploratorio.

Esta hipótesis recoge un aspecto central del problema de investigación respecto a la actividad del estudiante, cuando se pone en relación con el uso de instrumentos, y articula la hipótesis HI1 acerca de los posibles conocimientos, susceptibles de evolución a partir de la gestión didáctica del sistema de instrumentos.

RABARDEL (1999) entiende el sistema de instrumentos como un conjunto, una configuración, de instrumentos dispuestos intencionalmente en un contexto particular, en relación con determinadas actividades de los sujetos.

Se asume que la integración didáctica de nuevos artefactos a la clase crean tensiones en los sistemas de instrumentos ya establecidos, y es justamente, en ese escenario, donde la gestión didáctica a cargo del profesor tiene sentido cuando se pretende acompañar los desarrollos instrumentales de los estudiantes.

De esta manera, la emergencia del arrastre exploratorio, constituye un punto de referencia importante en esta investigación dadas dos condiciones importantes. Por un lado, su naturaleza artefactual, propia de los AGD, y la complejidad de la emergencia, o génesis instrumental, del arrastre como instrumento de actividad matemática.

En este sentido, se ha de considerar el arrastre como el artefacto a integrar en el sistema de instrumentos que se intenta movilizar en la secuencia didáctica. Se opta por centrar la propuesta de orquestación instrumental alrededor del arrastre exploratorio, y particularmente en un posible ESU que posibilite la movilización de actividad matemática instrumentada por parte de los estudiantes.

Esta es finalmente, una de las características fundamentales del trabajo, porque encierra una propuesta acerca del papel del profesor en la clase centrada en su actividad profesional.

1.3 Una Aproximación a los Antecedentes

En el campo de estudio de la Didáctica de las Matemáticas, y particularmente en el contexto de la mediación de instrumentos en el aprendizaje de las matemáticas, se puede encontrar dos referentes reconocidos y documentados.

El primero de ellos alude a procesos de innovación, en términos de las prácticas de enseñanza, entre los cuales se propone una movilización del currículo en torno a la mediación de TIC en el aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, aparecen una serie de investigaciones internacionales recientes, que abordan desde distintas posturas teóricas, el problema del aprendizaje cuando entran en escena instrumentos computacionales de distinta naturaleza.

En cuanto a los trabajos de innovación, especialmente en nuestro contexto, un antecedente central lo constituye el proyecto desarrollado por el Ministerio de Educación Nacional, denominado **“Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia”**, desarrollado durante los años 2000 y 2005, el cual contó con la participación del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, entre varias universidades del país y la asesoría internacional del profesor Luis Moreno Armella.

Otro antecedente para este trabajo lo configuran una serie de trabajos de grado, desarrollados en la línea TICEM del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, en los cuales se ha abordado el problema de la mediación de instrumentos computacionales en el aprendizaje de las matemáticas.

En este contexto, el trabajo desarrollado por LÓPEZ y SANTACRUZ (2004) abordó una propuesta de secuencia didáctica en grado quinto de educación primaria alrededor de la noción de transformación de rotación. En esta propuesta se retoman los principios de mediación instrumental tal como lo entiende MORENO (2002) integrando Cabri Géomètre en el aprendizaje de la geometría.

Un resultado importante de este trabajo fue respecto al diseño mismo de la secuencia didáctica propuesta. Una alternativa que planteó este diseño respecto a la exploración de las propiedades invariantes durante la transformación, fue el trabajo con macro construcciones, o situaciones de caja negra.

En una situación de caja negra, se evidencia una configuración, previamente diseñada, en la cual el estudiante se encarga de movilizar los puntos y determinar propiedades invariantes. En el caso del trabajo de LÓPEZ y SANTACRUZ (2004), los estudiantes concluyeron en una situación de caja negra, reportada por SANTACRUZ (2006), que efectivamente las figuras puestas en consideración respecto a la transformación de rotación propuesta conserva la forma y el tamaño.

Empero, una dificultad que se evidencia en este trabajo es en cuanto a la noción de mediación instrumental, la cual de hecho se acepta como un principio que guía el desarrollo del diseño de la secuencia didáctica, pero de la cual no fue posible dar cuenta de ella en el diseño de la secuencia didáctica.

La gran pregunta que quedó abierta de ese trabajo es: ¿Cómo dar cuenta de los procesos de mediación instrumental en el contexto de una secuencia didáctica? Esta investigación nace justamente de esa pregunta inicial.

1.4 Un panorama internacional de las investigaciones alrededor del aprendizaje de las matemáticas y TIC

Investigaciones internacionales recientes en el campo de la didáctica de las matemáticas, reportan un incremento significativo de los estudios alrededor de la integración de TIC a las clases de matemáticas. LAGRANGE y otros (2005) realizan un meta - estudio con el fin de explorar las principales tendencias teóricas y metodológicas en las investigaciones que comportan la relación entre TIC y educación matemática.

Un primer aspecto que LAGRANGE y otros (2005), resaltan es la pluralidad de perspectivas teóricas que existen cuando se pretende estudiar la integración didáctica de TIC en los contextos escolares:

“This chapter will highlight the interest and necessity of considering a plurality of perspectives (or dimensions) when addressing the issue of the integration of information and communication technologies (ICT) into the teaching and learning of mathematics. It will also show how this multidimensional perspective can be efficient for an analysis of the existing literature.”

Básicamente se plantea que el papel de un meta - estudio es realizar un seguimiento al cuerpo de publicaciones en innovación e investigación, más significativa en la década de los 90's, con el fin de elaborar un análisis multidimensional de las principales perspectivas teóricas en los trabajos respecto a la integración de TIC en las clases de matemáticas.

Por ejemplo, la literatura evidencia un mayor énfasis en trabajos alrededor de innovación en la relación entre las TIC y la educación matemática, básicamente desarrollados por grupos de maestros en eventos de carácter nacional realizados en diversos países. Una hipótesis frente a este fenómeno es la necesidad de los profesores de diseñar y compartir con la comunidad de educadores matemáticos experiencias que en su haber consideran exitosas.

De esta postura se puede inferir que las tendencias teóricas que fundamentan estos trabajos en innovación se remiten a desarrollos de la educación informática y muy pocas veces a los desarrollos propios en didáctica de las

matemáticas, lo que conlleva, entre otras cosas, a una mirada poco profunda de la complejidad del objeto matemático cuando es mediado por alguna forma de instrumento.

LAGRANGE y otros (2005) utilizan una metodología mixta con el objeto de hacer el seguimiento a la literatura, emplean en este caso, tratamientos cuantitativos y cualitativos que posibiliten la clasificación de distintas problemáticas de investigación.

En cuanto a los tratamientos cuantitativos resulta pertinente explorar la repartición de los trabajos según determinadas categorías que remiten a la naturaleza del trabajo publicado, siendo los más predominantes los reportes de investigación.

Nótese en los resultados exhibidos, cómo las experiencias de innovación y la investigación, juegan un papel preponderante en la literatura, al lado de la presentación de productos novedosos, generalmente software con algún posible tipo de aplicación en matemáticas.

Por su parte, en cuanto a las áreas de las matemáticas en las cuales se presentan mayor cantidad de trabajos reportados, la geometría y el cálculo encabeza el listado, seguido posteriormente por el álgebra.

Respecto al tipo de tecnologías con mayores niveles de uso en los trabajos reportados, se destaca el uso de AGD y los sistemas gráficos y simbólicos, conocidos también como Sistemas de Álgebra Simbólica o CAS en su sigla en inglés.

La información organizada cuantitativamente se interpreta a luz de determinadas dimensiones de análisis con el objeto de realizar los análisis pertinentes, las dimensiones sugeridas por LAGRANGE y otros (2005):

- “1. the general approach of ICT in education,*
- 2. the epistemological and semiotic dimension,*
- 3. the cognitive dimension,*
- 4. the institutional dimension,*
- 5. the instrumental dimension”.*

En cuanto a las relaciones entre las dimensiones cognitiva e instrumental, se observa que aunque presentan una amplia relación, se diferencian en los distintos énfasis. En la dimensión cognitiva se hace mayor alusión al tipo de conceptos respecto al aprendizaje y la cognición, mientras que en la dimensión instrumental, que puede entenderse como un desarrollo de la anterior, se enfatiza en las relaciones de los sujetos con los instrumentos.

Por su parte, los análisis multidimensionales que LAGRANGE y otros (2005) plantean, permiten crear un diálogo entre las distintas dimensiones de análisis a partir de dos categorías:

- “1. The ‘situational’ dimension which deals with the influence of ICT on learning situations,
2. The ‘teacher’ dimension which looks at the teacher’s beliefs and at the way he organizes the classroom activity.”

En cuanto a la innovación y la investigación en los años de 1994 a 1998, el mayor énfasis en los trabajos se centran en la dimensión, sin lograr una significativa interconexión con las dimensiones 2 y 3 respecto la discusión epistemológica y la perspectiva cognitiva cuando se integran TIC a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, lo cual se interpreta como una necesidad en ese momento de refinar los enfoques teóricos que puedan dar cuenta de estos procesos tan complejos.

Indicators of dimensions
<p>1. General approach of the integration</p> <ul style="list-style-type: none"> • Type of hypothesis (assumption of improvements, questions, etc.) • Methodology and validation processes (comparing experimental and control groups, comparing a priori analysis and expectations with an experiment, etc.)
<p>2. The epistemological and semiotic dimension. Influence of ICT:</p> <ul style="list-style-type: none"> • On the mathematical knowledge and practices. • On the representatives used in this activity.
<p>3. The cognitive dimension</p> <ul style="list-style-type: none"> • Cognitive frame (constructiviste, socio-cultural, ...) • Concepts used (schemes, webbing, etc.) • Cognitive role of ICT (visualization, expression, connection, etc.)
<p>4. The institutional dimension</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interaction of ICT with tasks and techniques in the culture of a school institution. • Role of instrumented techniques in conceptualization of mathematics
<p>5. The instrumental dimension</p> <ul style="list-style-type: none"> • The tool’s possibilities and constraints • Instrumentation processes
<p>6. The situational dimension Influence of ICT on</p> <ul style="list-style-type: none"> • The structure of the situation. • Student’s solving strategies. • The didactical contract.
<p>7. The teacher dimension</p> <ul style="list-style-type: none"> • Teacher’s beliefs and representations of mathematics and of ICT. • New teaching situations. • Influence of research and pre/in service programs.

Tabla 1.1 Indicadores de dimensiones LAGRANGE (2005)

Por su parte la dimensión 7, relacionada con el profesor, se centra principalmente en las creencias de los profesores respecto al uso de TIC en la enseñanza de las matemáticas y las nuevas situaciones de enseñanza. Siendo este último aspecto, un punto importante en el cual se puede ubicar un posible aporte de este trabajo de investigación.

Particularmente en cuanto a la dimensión instrumental se destacan dos vertientes importantes: una en álgebra y otra en geometría con mayor preponderancia de la primera.

Básicamente el trabajo con geometría desde una perspectiva instrumental se inició alrededor de LOGO, posteriormente los trabajos miraron la potencialidad de Cabri Géomètre como mediador y empezó a ganar protagonismo en los análisis instrumentales.

LAGRANGE y otros (2005), reportan que desde mediados de la década de los noventa, surgen teorías que plantean una relación más estrecha entre los instrumentos, los sujetos y la mediación instrumental, perspectiva que recibirá el nombre de ergonómica, por centrarse en la dialéctica sujeto – objeto. Dicha perspectiva inicialmente desarrollada en el campo de la psicología socio cognitiva por VERILLON y RABARDEL en el año de 1995.

Aparece entonces una perspectiva alrededor de la actividad instrumentada y lo concerniente con la teoría de la génesis instrumental, es decir, el desarrollo de instrumentos. Frente a esta perspectiva se abre un lugar central al profesor como gestores, en el contexto de la clase, de la emergencia y desarrollo de instrumentos.

CONCLUSIÓN PRIMERA PARTE:

EL SENTIDO DE LA GESTIÓN DIDÁCTICA DE LOS SISTEMAS DE INSTRUMENTOS

Propiciar una mirada que reconozca la influencia que tienen los instrumentos en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, requiere un posicionamiento acerca del objeto de la tecnología.

La literatura especializada (RABARDEL, 1995) plantea dos miradas al respecto: una centrada en los objetos técnicos, llamada tecnocéntrica y otra situada en los sujetos, o antropocéntrica, menos conocida, pero igual de importante. La diferencia radica en la orientación del análisis: mientras en la primera el objeto de estudio lo constituyen los objetos técnicos, desconociendo en buena parte el papel de los sujetos, en la segunda son los sujetos, principalmente, en actividad con instrumentos, quienes representan el centro de interés.

Tal como RABARDEL (1995) plantea respecto a una mirada antropocéntrica de la tecnología:

“Los seres humanos están omnipresentes en sus ciclos de vida (de la tecnología) desde la concepción hasta su descarte, pasando por las fases esenciales del funcionamiento y de la utilización. Hay que poder entonces, pensar y conceptualizar la asociación de los seres humanos y de los objetos, tanto para comprender sus características y propiedades como para organizarlas al servicio de las sociedades.”⁴

Es viable y pertinente, tener en cuenta el punto de vista antropocéntrico, para estudiar la actividad con instrumentos, donde se toma como referencia al sujeto, como aquel que construye, aprende y se relaciona con otros. Esa es la perspectiva en la cual se inscribe este trabajo.

De esta manera, se propone una mirada centrada en la actividad de los estudiantes y en el profesor, como protagonistas de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, donde los instrumentos son fundamentales: es su posibilidad de mediar en la construcción del conocimiento lo que justifica su aparición en el aula.

La concepción antropocéntrica de la aparición de instrumentos en el contexto escolar, va en contravía de concepciones generalizadas en las cuales se piensa que las TIC deben integrarse por sus “avances técnicos”. Se piensa que las TIC son necesarias *per se*, sin necesidad de fundamento didáctico. Para muchos, hasta el papel del profesor se vería subyugado a éstas.

⁴ Las citas de la obra de RABARDEL (1995, 1999) referenciadas en este trabajo corresponden a una traducción libre realizada por Marisol Santacruz en 2007.

Como se anotó anteriormente, RABARDEL (1999) explica que para los profesores de matemáticas los instrumentos son considerados como simples auxiliares, elementos neutros, que no intervienen en la construcción de conocimientos por parte de los estudiantes.

Al respecto, subraya el riesgo de promover integraciones de artefactos en las situaciones de aprendizaje, en las cuales su uso didáctico se limita a su simple introducción en el proceso formativo, sin mayores consideraciones acerca del papel que pueden llegar a jugar en cuanto a la actividad del estudiante y la del profesor.

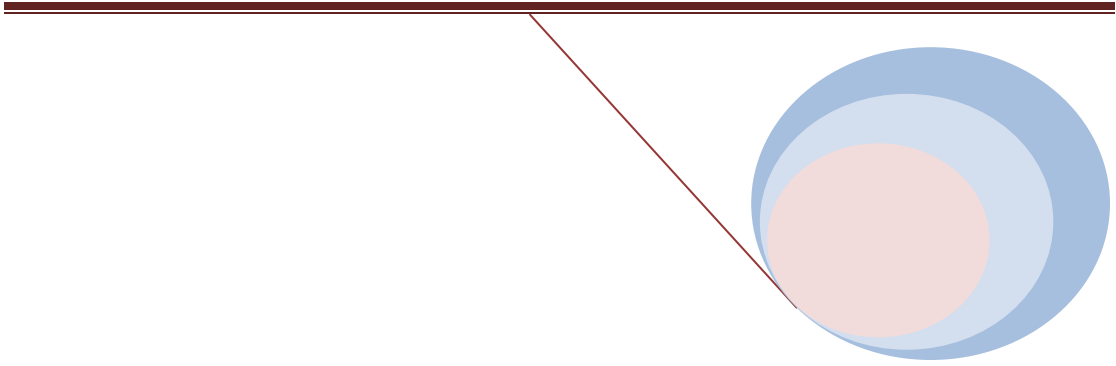
En este sentido, TROUCHE (2002) muestra, por ejemplo, cómo el papel de las calculadoras graficadoras, es ignorado por profesores y estudiantes, pues consideran que su manejo no requiere ningún aprendizaje.

Este trabajo propende por un acercamiento instrumental, en contraposición a este tipo de miradas ingenuas, donde los instrumentos carecen de un lugar central. Al contrario, el interés de la aproximación instrumental según RABARDEL (1999) se centra en el papel que juegan los instrumentos en la concepción y desarrollo de secuencias didácticas.

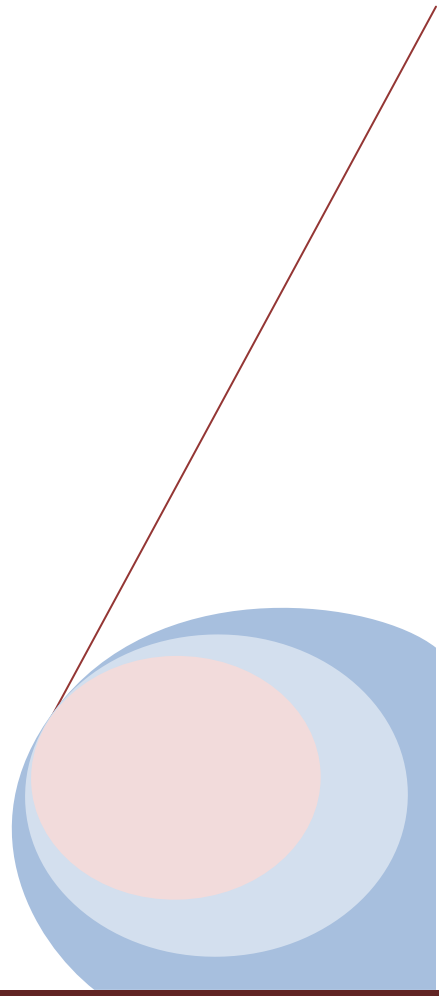
Uno de los supuestos de la aproximación instrumental es que los procesos de génesis instrumental, es decir, la construcción de instrumentos, son también un proceso de aprendizaje, donde la acción del profesor es fundamental. Se hace necesario repensar la acción del profesor en el sentido de gestor de los sistemas de instrumentos en la clase y el impacto de éstos en el diseño y puesta en escena de secuencias didácticas que contemplen la mediación instrumental en el aprendizaje.

El profesor no se ve entonces “desplazado” por la aparición de las TIC en los contextos escolares, al contrario, es justamente el llamado a propiciar una mirada didáctica para su integración en las clases de matemáticas.

Desde este tipo de alternativas se puede promover una mirada compleja de la mediación de instrumentos en el aprendizaje de las matemáticas, que vaya más allá de voluntarismos y las modas, más allá de concepciones acerca de las TIC como “estrategias eficaces” para aprender “más y mejor” y que promueven una mirada profesional del profesor y su labor.



SEGUNDA PARTE
ANÁLISIS PRELIMINARES



CAPÍTULO II

DE LA NATURALEZA DE LA ROTACIÓN A LAS MATEMÁTICAS EXPERIMENTALES

A continuación se reseña el desarrollo de la dimensión histórico-epistemológica, como parte fundamental en la construcción de los análisis preliminares en relación con la concepción de la secuencia didáctica que se pretende movilizar. Para esto la atención se va a centrar en la noción matemática que se pretende poner en juego: la transformación de rotación.

De esta manera, se abordan algunos elementos que constituyen una postura frente a qué se entiende por geometría y cómo se concibe la noción de transformación geométrica, con el fin de plantear una discusión alrededor de las génesis instrumentales que construyen los sujetos en actividad con instrumentos, alrededor de una orquestación instrumental propuesta.

Al respecto, una revisión bibliográfica⁵ destaca tres momentos históricos relacionados con el desarrollo de la noción de transformación:

- La antigüedad clásica representada por los trabajos de Euclides respecto a la noción de congruencia.
- El siglo XV, con el aporte de los pintores del renacimiento, especialmente con el desarrollo de la perspectiva y la geometría proyectiva.
- Finalmente, el siglo XIX con el programa de Erlangen de Félix Klein, alrededor de la teoría de grupos.

De otro lado, hacia el final del capítulo, se prioriza un acercamiento derivado de la filosofía de las matemáticas, en el cual se contempla la posible realización de una actividad matemática de manera asociada con la actividad instrumentada. Esta perspectiva, posibilita entonces, la realización de una caracterización instrumental acerca de la naturaleza de los objetos geométricos (y la geometría) que se moviliza en un AGD como Cabri Géomètre, alrededor de la noción matemática puesta en consideración.

2.1 Hacia una concepción de geometría a partir de las transformaciones

Entre todas las posibles posturas que actualmente se pueden construir acerca de la geometría, su naturaleza y aplicaciones⁶, en este trabajo se opta por una aproximación centrada en las transformaciones geométricas, como objeto de estudio de la geometría.

⁵ BOYER (1986); CAMPOS (2007); PIAGET y GARCÍA (1980); MORENO (1998) y ROSENFELD (1988).

⁶ Retomando algunas de las ideas planteadas por MAMMANA y VILLANI (1998).

YAGLOM (1962) considera la geometría como la ciencia que estudia las propiedades de las figuras geométricas, en el plano o en el espacio, que son invariantes bajo un movimiento o transformación.

Así, un movimiento en el plano es una transformación geométrica que conserva la distancia entre puntos, pues envía un punto A en un único punto A' y un punto B en un punto B' , de manera que $d(A,B) = d(A',B')$.

En cuanto a la noción de transformación geométrica, BING (1960) sostiene, desde una mirada funcional de las transformaciones geométricas, que:

“In mathematics a person may come to regard a transformation as a rule or law associating points of one set X with points of one with points of another set Y . If f denotes the transformation and $x \in X$, we use $f(x)$ to denote the point of Y associated with x .”

Para ilustrar mejor su punto de vista, el autor presenta la siguiente Figura:

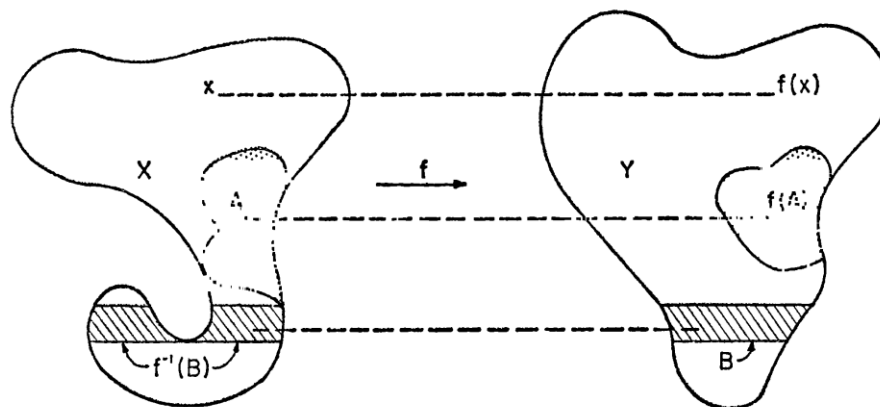


Figura 2.1 La transformación como función (BING, 1960)

De esta manera, concluye el autor:

“We call $f(x)$ the image of x under f . If A is subset of X , $f(A)$ denotes the collection of images of points of A . If B is a subset of Y , $f^{-1}(B)$ is the set of all points of X that go under f into a point of B ; $f^{-1}(B)$ is called the inverse image of B .”

Por su parte, MARTIN (1982), considera que una transformación geométrica es una correspondencia biunívoca del conjunto de puntos del plano en el mismo.

Este tipo de acercamiento toma en consideración una concepción de la geometría, proveniente de los desarrollos del programa de Erlangen (1872), tal como la ofrece CAMPOS (2007):

“Una geometría determina un grupo. Recíprocamente, un grupo determina una geometría. Por lo tanto una geometría es una tripla (C, G, I) formada por un conjunto C no vacío, el de los elementos de base de la geometría, G es un grupo de transformaciones, I son las propiedades de los elementos de C , invariantes respecto a G .”

Este tipo de acercamiento resalta lo que DE VILLIERS (1996) plantea como una visión sistemática y resumida de la geometría contemporánea, en los términos del matemático Félix Klein en su programa de Erlangen de 1872:

“... que describe la geometría como el estudio de las propiedades geométricas que permanecen invariantes (sin cambios) bajo grupos de transformaciones. En resumen, la geometría puede clasificarse de acuerdo con este planteamiento como sigue:

Isometrías - transformaciones de figuras planas que preservan las distancias y los ángulos (congruencia).

Semejanzas - transformaciones de figuras planas donde se preserva la forma (semejanza).

Afinidades - transformaciones de figuras planas donde se preserva el paralelismo.

Proyectividades - transformaciones de figuras planas que preservan la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas.

Topologías - transformaciones de figuras planas que preservan el cerramiento y la orientación.”

Las isometrías, también conocidas como desplazamientos o movimientos, constituyen un grupo de transformaciones que dejan invariante la congruencia, en el espacio afín euclidiano. En este sentido, sobresalen dos elementos determinantes en la concepción de geometría que se pretende explicitar: el de invariante y el de grupo.⁷

Se entiende entonces que las isometrías son aquellas transformaciones que conservan la congruencia o métrica de las figuras planas, en la cual se le asigna a un punto A un único punto A' y a B un punto B' , de manera que la distancia entre A y B es igual a la distancia entre A' y B' .⁸

De esta manera el grupo de las isometrías del plano, o transformaciones que conservan la congruencia, se construyen a partir de las simetrías (reflexiones), y de las múltiples composiciones de estas se obtienen las traslaciones y las rotaciones.

⁷ GARZÓN y VALOYES (2005).

⁸ YAGLOM (1962).

Si se acepta esta concepción de geometría alrededor de la noción de transformación, entonces es necesario determinar, para el grupo de las isometrías del plano, la propiedad que mantiene invariante que la caracteriza, en este caso, la congruencia.

2.1.1 La congruencia como propiedad invariante

Bajo el efecto de las transformaciones de isometría, las figuras no sufren deformaciones métricas, pues logran conservar la distancia entre sus puntos. GARZÓN y VALOYES (2005) subrayan que:

“... es posible decir que dos figuras son congruentes si al mover una de ellas en el espacio, coincide con la segunda. Esta coincidencia incluye todos sus elementos constitutivos. La noción de congruencia así propuesta contempla el movimiento de las figuras, situación que no fue considerada en el trabajo euclidiano y que viene a ser resuelta posteriormente por Hilbert con la inclusión de los denominados axiomas de movimiento”.

PIAGET y GARCÍA (1980) coinciden en esta apreciación cuando afirman que aunque Euclides avanza hacia una organización deductiva de la geometría de su tiempo, aún ignora la sistematización de las transformaciones geométricas, las cuales deberán esperar más de veinte siglos para poder emerger:

“En Euclides se estudian las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos como relaciones internas entre los elementos de dichas figuras o dichos cuerpos. No se toma en consideración el espacio como tal ni por consiguiente las transformaciones de las figuras en el interior de un espacio que las comprenda.”

Particularmente, Euclides aborda la congruencia a partir de la cuarta noción común, conocida como igualdad. Respecto a la naturaleza y uso de esta noción común, se plantea también, que Euclides la usó para justificar un principio de superposición, el cual le permitió “mover” figuras en el plano sin cambiar su forma ni su tamaño⁹.

Por cierto, este tipo de estrategia no se usó sistemáticamente a lo largo de los Elementos, pero es fundamental para la totalidad de su obra, tal que es usada para demostrar la proposición 4 del libro I, el teorema lado, ángulo, lado, sobre congruencia de triángulos¹⁰.

De esta manera encontramos en los Elementos, que en las proposiciones 1.4, 1.8 y 1.26, Euclides demuestra los tres teoremas de congruencia de triángulos.

⁹ VASCO (1992).

¹⁰ Tomado de www.x.edu.uy/integral/Los%20elementos%20de%20Euclides.pdf Consultado en Septiembre 1 de 2008.

Por su parte, en libros posteriores, Euclides busca algunos de los elementos necesarios para introducir el teorema de Pitágoras, en el cual se puede encontrar algún posible uso de los criterios de congruencia:

“La demostración euclídea del Teorema de Pitágoras es de naturaleza estrictamente geométrica. En ella juega un papel fundamental una figura que procede de una secuencia de construcciones que, mediante ciertas congruencias de triángulos, va transformando los cuadrados sobre los catetos en dos rectángulos que al encajarse componen el cuadrado sobre la hipotenusa.”¹¹

Las transformaciones que dejan invariante la congruencia se inscriben en el grupo de los desplazamientos o movimientos dentro del espacio análogo euclidiano, objeto de estudio de las isometrías. En este sentido, un *movimiento* es una transformación geométrica que asigna a un punto A un punto A' y a un punto B un punto B', de tal manera que la distancia entre A y B es igual a la distancia entre A' y B'.

De lo anterior se concluye que las isometrías entendidas como movimientos en el espacio que no deforman métricamente las figuras, conservan las distancias entre puntos, lo que conlleva a la noción de congruencia. Las traslaciones, rotaciones y simetrías son el grupo de isometrías. Particularmente el interés se centrará en las transformaciones isométricas, específicamente en la transformación de rotación.

2.1.2 Acerca de la transformación de rotación

YAGLOM (1962) plantea que como toda isometría, las rotaciones o giros, se obtienen de las múltiples composiciones entre reflexiones o simetrías, y de éstas heredan la conservación de la congruencia como propiedad invariante.

Podemos considerar la rotación como un movimiento directo, es decir que conserva la orientación del plano¹². Entre las isometrías se encuentran, dos tipos de movimientos, según su congruencia. Se habla de congruencia directa cuando se conservan el sentido en el plano, como en el caso de las traslaciones y las rotaciones; se habla de congruencia indirecta u opuesta, cuando el sentido de la figura inicial y su imagen son contrarios, como en el caso de las reflexiones y reflexiones deslizantes.

Desde el punto de vista de la geometría métrica, PUIG (1965) expone que todo movimiento, incluido el de rotación, puede reducirse a simetrías, es decir, que todo movimiento del plano es una simetría axial o puede reducirse a la

¹¹ <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/AsiLoHicieron/Euclides2/Euclides1.asp>
Consultado en Septiembre 7 de 2008.

¹² YAGLOM (1962).

composición de simetrías axiales. Dentro de este enfoque se considera como rotación aquellos movimientos directos del plano que dejan fijo un punto del mismo. Para definir una rotación entonces, basta con dar el centro o punto de rotación y el ángulo de giro con su respectivo sentido.

En este sentido, como toda isometría, la rotación también se puede reducir a la composición de simetrías axiales (movimientos inversos) respecto de dos ejes secantes, el cual se considera como un movimiento directo, que tiene como punto doble el de la intersección de los ejes.

Es notorio que a toda rotación le corresponda su recíproco, así el producto de dos giros concéntricos es otro con el mismo centro. Por consiguiente, las rotaciones con un mismo centro forman un grupo abeliano, conocido como el grupo de los giros concéntricos.

Al estudiar las transformaciones con ayuda del álgebra abstracta, se dice que una transformación que conserva las distancias es una isometría o congruencia; ésta se constituye en una relación de equivalencia que cumple la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva.

Una característica de estas transformaciones es que al componer dos isometrías se obtiene otra isometría, es decir, que dos figuras que son imagen una de la otra por una isometría, son isométricas entre sí, por lo tanto, los elementos que conforman estas imágenes mantienen invariantes sus propiedades geométricas.

La rotación está determinada por un centro C y un ángulo α y se denota $R(C, \alpha)$. Al igual que en el enfoque de la geometría métrica que conserva como único punto invariante el centro de rotación, y se determina el giro mediante el producto o composición de simetrías axiales, las rotaciones heredan de las simetrías axiales sus invariantes: paralelismo entre rectas y distancia entre puntos homólogos.

Así si los puntos P y Q pertenecen a la figura inicial (F), la distancia entre los puntos P y Q es la misma que existe entre sus imágenes P' y Q' pertenecientes a la figura final (F').

De esta manera se puede decir, que una rotación está caracterizada por un punto denominado centro y un ángulo dirigido, el cual puede ser positivo o negativo¹³:

“Suponga un punto O del plano; sea además un ángulo α dado y una dirección de rotación (puede ser, por ejemplo opuesta a la dirección en la cual se mueven las manecillas del reloj). Sea A un punto arbitrario del plano y sea A' el punto tal que $AO = A'O$ y $\angle AOA' = \alpha$ ”.

¹³ GARZÓN y VALOYES (2005).

La transformación geométrica de rotación se sustenta bajo algunas propiedades que se proporcionan a través de los siguientes teoremas¹⁴:

“Teorema 2.9. Si las figuras F y F' están relacionadas mediante una rotación con centro en O y ángulo α los segmentos correspondientes de estas figuras son iguales y forman entre sí un ángulo α .

Teorema 2.10 Si para cada punto de la figura F existe un punto correspondiente de otra figura F' , y en estas figuras se cumple que segmentos correspondientes son iguales y forman ángulo α entre sí, entonces F y F' se relacionan mediante una rotación con un ángulo α , alrededor de algún punto O .”

En cuanto a la operación suma o composición de rotaciones, se considera que:

“Teorema 2.11. La suma de dos rotaciones en el mismo sentido con centros distintos O_1 y O_2 y ángulos α y β es una nueva rotación a través del ángulo $\alpha + \beta$, si $\alpha + \beta \neq 360^\circ$; si $\alpha + \beta = 360^\circ$, el resultado es una traslación.

Teorema 2.12. La suma de una traslación y una rotación alrededor de un centro O y un ángulo α y una traslación es una nueva rotación a través del mismo ángulo α , pero con diferente centro.

Teorema 2.13. La suma de una rotación alrededor de un centro O y un ángulo α y una traslación es una nueva rotación a través del mismo ángulo α , pero con diferente centro”.

En este sentido se puede probar que:

- El centro de una rotación está en la mediatriz del segmento definido por un punto cualquiera y su transformado.
- El ángulo de dos semirectas homólogas (que se corresponden en un movimiento) cualquiera en un giro o rotación es congruente al ángulo de giro.
- Dos rectas homólogas en un giro equidistan del centro, el cual está por consiguiente en una de las bisectrices de los ángulos formados por dos rectas homólogas.
- Una simetría central es una rotación, cuyo centro es el mismo de la simetría y su ángulo de giro es un llano.

Finalmente, las rotaciones presentan dos casos especiales según su ángulo: los semigiros correspondientes a un ángulo $\alpha = 180^\circ$ y la transformación de identidad correspondiente a un ángulo $\alpha = 360^\circ$.

¹⁴ Ibíd.

2.2 A propósito de la relación entre transformación y movimiento: una mirada a la geometría euclidiana o el reino de la regla y el compás

PIAGET y GARCÍA (1980) refiriéndose a los antecedentes de la noción de transformación geométrica, plantean si es posible preguntarse por los precedentes históricos de la noción de transformación, y las razones por las cuales tardó tantos siglos en utilizarse y en tomarse conciencia de su papel.

Argumentan que la noción de transformación geométrica tiene sus primeros antecedentes en la antigua Grecia. Admiten que su origen está inspirado en la geometría analítica y en la “reducción” de la geometría al álgebra, pero también reconocen la importancia del aporte griego relacionado con los trabajos de Euclides, de Apolonio con su sistema de coordenadas y de Arquímedes, con su método de exhaustión, como una semilla del cálculo infinitesimal.

Recordando a CHASLES (1860) señalan que:

“Tal es la propiedad original y característica que Apolonio reconoce a sus secciones cónicas y de la cual se sirve para concluir por medio de transformaciones y de deducciones muy hábiles, casi todas las otras. En sus manos, como hemos visto desempeña aproximadamente el mismo papel que la ecuación de segundo grado con dos variables en el sistema de geometría analítica de Descartes”.

Queda entonces claro el presupuesto, al menos parcialmente, de una génesis en la noción de transformación en la antigua Grecia; en este sentido, se va a iniciar una aproximación a la geometría de la antigüedad alrededor del movimiento, para lo cual se realiza un salto hasta las concepciones modernas de geometría.

Al respecto, MORENO (2002), considera que a partir del programa de Erlangen, se empieza a elaborar una concepción *dinámica* de la geometría, en contraposición de un acercamiento *estático*, paradigmático en la geometría euclidiana. En esta perspectiva, dicha dicotomía entre lo dinámico y lo estático, se refiere a la relación entre movimiento y transformación geométrica.

Un análisis fenomenológico, realizado por MORENO (1998) alrededor de la noción de transformación, destaca su relación con el movimiento. Se asume para esto que la vida y el movimiento son procesos altamente asociados entre sí y con una fuerte base en la experiencia de los sujetos y las culturas:

“... fenómenos naturales como proyecciones de sombras solares, el giro de la tierra alrededor de un eje, el crecimiento de los seres vivos y situaciones provocadas por los intereses humanos como proyecciones mediante focos luminosos, inflar un globo, estirar una pieza de caucho, freír un huevo, hacer una fotografía y pintar un cuadro, tienen en común un hilo conductor: los puntos del “espacio” se mueven de un lugar a otro, se

transforman. En algunos casos se mantiene la forma original y en otros casos solo algunas características.”

Los casos en la naturaleza y en el arte respecto a esa relación con las transformaciones geométricas y el movimiento son considerables. Al respecto resalta el trabajo de pintores y litógrafos como M. ESCHER, quien en muchos de sus trabajos se ha inspirado en las transformaciones geométricas para crear obras pictóricas de gran interés matemático y estético, entre las cuales destacan aplicaciones, con fines pictóricos, de transformaciones como traslaciones, reflexiones y homotecias.

Un ejemplo de ello es su obra “Ángeles y demonios” un grabado en madera de 1960, presentada en la Figura 2.2:



Figura 2.2 Ángeles y demonios de M. ESCHER (1960)¹⁵

A partir de estas consideraciones empiezan a surgir dos indicios fundamentales respecto a la relación de la noción de transformación geométrica con el movimiento físico de los objetos en el “espacio” y la aplicación de esta noción en el desarrollo de las artes, en particular de la pintura, sin desconocer las realizaciones en la arquitectura, la orfebrería y otras artes como la cestería y el tejido, en diferentes culturas del planeta.

Sin embargo, se evidencian diferencias entre proyección, movimiento y transformación, las cuales en muchas ocasiones se usan como sinónimas, sin considerar, que éstas palabras corresponden a determinados objetos matemáticos que posibilitan la organización de fenómenos físicos y matemáticos.

Al respecto, MORENO (1998) sugiere usar el término transformación, por considerarlo más general y que engloba a los demás. El argumento para este

¹⁵ Foto tomada por Álvaro Ibáñez el 15 de junio de 2006. Imagen rescatada de Internet en <http://www.flickr.com/photos/alvy/167726805/in/set-72157594166636900/> el 4 de septiembre de 2010.

posicionamiento corresponde a las diferencias básicas que se establecen entre las propiedades geométricas de las transformaciones y las propiedades espaciales de los movimientos:

“... el movimiento es de un objeto, se realiza dentro del espacio y sucede en el tiempo, a lo largo de un recorrido, mientras que la transformación es del espacio y sucede de golpe, sin recorrido intermedio.”

En esta concepción de la geometría, surgen posiciones como la de MORENO (2002), en la cual se considera que a partir del programa de Erlangen se empieza a elaborar una concepción *dinámica* de la geometría, en contraposición de un acercamiento *estático* paradigmático en la geometría euclidiana.

En esta perspectiva, dicha dicotomía entre lo dinámico y lo estático, puede hacer referencia a la relación entre movimiento y transformación geométrica.

En un trabajo de VASCO (1992) en el campo de la didáctica, en relación con el enfoque de Geometría Activa, se hace evidente esa dicotomía entre lo dinámico y lo estático, teniendo en cuenta las transformaciones y el movimiento:

“... la geometría de Euclides tenía un horror a primera vista inexplicable por los movimientos. Todas las relaciones eran estáticas: el paralelismo, la perpendicularidad, la congruencia y la semejanza. Las demostraciones se hacían por prolongaciones y cortes para evitar mover las figuras. La explicación era la corriente platónica, que despreciaba al movimiento como perteneciente al mundo de lo mutable, al mundo de la opinión, y por lo tanto alejado del verdadero mundo de la ciencia, el mundo de lo inmutable y lo eterno. Cuando se atrevió Euclides a deslizar un triángulo para hacerlo coincidir con otro con el fin de probar los tres casos de congruencia de dos triángulos, las demostraciones fallan catastróficamente. Cualquier intento de repararlas conduce al fracaso...”

Nótese en la cita anterior, una cierta interpretación de la geometría euclidiana, como una geometría de relaciones estáticas, la cual se presupone así debido a la influencia del pensamiento platónico en el desarrollo de las matemáticas en la antigüedad¹⁶.

Para el autor, la geometría de Euclides, es en esencia, una geometría estática, en el sentido que evita a toda costa la actividad del movimiento, posiblemente por razones filosóficas de su cultura, particularmente las corrientes platónicas. Pero a lo largo de trajinar esta geometría, encuentra VASCO (1992) una filiación no explícita entre la geometría de Euclides y el movimiento:

¹⁶ Al respecto BOYER (1986) resalta el papel protagónico de Platón, no como matemático sino como “hacedor de matemáticos” y la influencia de su pensamiento en el desarrollo de las matemáticas en la antigüedad, a partir de su apoyo a las investigaciones matemáticas que se realizaban en su Academia de la ciudad de Atenas.

“... el misterioso postulado cuarto sobre la igualdad de todos los ángulos rectos parece recobrar el sentido si se va rotando una recta sobre otra hasta que los cuatro ángulos sean iguales de amplios: en ese momento son rectos. Así me fui acercando a la geometría clásica a través de los giros, las traslaciones, los deslizamientos, las reflexiones, las ampliaciones y las reducciones”.

En la perspectiva del pensamiento platónico, se asume un distanciamiento entre geometría y movimiento, por considerar la primera como parte del campo inmutable del conocimiento y la segunda como expresión del mundo cotidiano y ordinario, concepción que BOYER (1986) identifica como una de las características del pensamiento platónico en relación con la naturaleza misma de las matemáticas.

Sin embargo, aparece una insinuación entre la relación geometría y movimiento en la geometría euclidiana: aunque el movimiento no ocupa un lugar central en la geometría de Euclides, se tiene un indicio desde la antigüedad de que el movimiento presenta algún tipo de relación con la geometría. Esta presunción se convierte en una nueva hipótesis de trabajo.

La reflexión se centra en la posibilidad de establecer evidencias que permitan asociar algunos antecedentes de la noción de transformación geométrica en relación con el concepto de movimiento¹⁷ en la antigüedad.

En esta perspectiva VASCO (1992) resalta algunos elementos del diálogo geometría euclidiana y movimiento, a partir de una relación central como la congruencia entre figuras:

“... la definición de congruencia de una figura con otra, relación llamada "igualdad" por Euclides, habla claramente en su raíz griega ("epipto") de que la segunda figura "caiga bien encima" de la primera... la extraña definición de recta de Euclides tenía sentido si uno trata de deslizar una recta sobre sí misma, o de hacer rodar un alambre recto sobre una superficie plana: si es bien recto, cae bien sobre cualquiera de sus puntos, el misterioso postulado cuarto sobre la igualdad de todos los ángulos rectos parece recobrar el sentido si se va rotando una recta sobre otra hasta que los cuatro ángulos sean iguales de amplios: en ese momento son rectos.”

Iniciando entonces la exploración de la geometría euclidiana, se encuentra como referencia a las *superposiciones*. Al respecto ROSENFELD (1988), plantea una relación explícita entre el concepto de movimiento y la geometría euclidiana, lo cual se puede presumir como un antecedente primitivo de la noción de transformación geométrica:

¹⁷ En el sentido de ROSENFELD (1988).

“On a number of occasions we have come across the use of motions in geometry. In book I (Euclid uses superposition in propositions 7 and 8 (theorems of congruence of triangles) and later relies on these propositions.”

ROSENFELD (1988) destaca igualmente la referencia al movimiento en la definición de círculo (definición 15 del libro I), en la definición de esfera, cono circular y cilindro (definiciones 14, 18 y 21 del libro XI). Al respecto se encuentra por ejemplo, que una esfera se entiende como la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro, el cono circular, como la rotación de un triángulo sobre uno de sus lados y el cilindro como la rotación de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

No obstante, se considera que los movimientos eran ampliamente utilizados en la geometría incluso antes de Euclides. Por ejemplo, en la formulación de los teoremas de Tales (siglo VI AC). ROSENFELD (1988) resalta que el comentarista de Euclides, Proclo, le atribuye a Tales las demostraciones de teoremas, conocidos como los cinco teoremas de Tales y descritos por BOYER (1986)¹⁸:

- Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.
- Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro.
- Los triángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
- Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas son iguales.
- Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y uno del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

El sentido de la demostración de los teoremas de Tales usa la superposición de figuras y se relaciona con la congruencia de semicírculos, ángulos y triángulos, llegando a elaborar conclusiones importantes, como que la congruencia de figuras es una semejanza.

Después de la formulación del teorema de los ángulos de la base de un triángulo isósceles, Proclo, citado por ROSENFELD (1988), anota respecto al concepto de semejanza que *“...in ancient fashion, he (Thales) called these angles not equal but similar.”*

¹⁸ Según BOYER (1986) estos cinco teoremas, atribuidos a Tales, pudieron haberse desarrollado a partir de los conocimientos matemáticos que el mismo Tales había aprendido en Egipto y Babilonia. No obstante, se resalta el aporte de Tales a iniciar la tradición de la organización deductiva de la geometría.

El autor resalta que la aparición del término “igual” para figuras del mismo tamaño, se le debe al trabajo de la *escuela pitagórica*, para los cuales dos figuras “iguales” son aquellas que contienen igual número de puntos. Después el término “*figuras semejantes*” adquiere el sentido moderno¹⁹, y es precisamente Euclides quien denomina “figuras congruentes” a aquellas que cumplen con la doble condición de ser “semejantes e iguales”.

Se puede sostener que, en la antigüedad logró establecerse una relación importante entre conceptos como congruencia y semejanza respecto al movimiento.

YAGLOM (1962), considerado por ROSENFELD (1988) como una de las figuras más influyentes en el siglo XX a propósito de las geometrías no euclidianas, concibe la geometría en relación con las propiedades de las figuras geométricas a partir del movimiento:

“Two geometric figures are said to be congruent if one figure, by being moved in space, can be made coincide with the second figure so that the two figures coincide in all their points.”

Volviendo a la antigüedad, ROSENFELD (1988) destaca que los movimientos son sistemáticamente utilizados por los pitagóricos, cuando se asume que los puntos en movimiento hacia una única dirección y sentido conforman una recta, y éstas en movimiento hacia una misma dirección y sentido, conforman una superficie.

Estas concepciones de los pitagóricos son debatidas por otros pensadores como Aristóteles, con argumentos que relacionan la naturaleza misma de los objetos matemáticos, la cual está exenta de movimiento.

Se destaca que Aristóteles condena el uso de movimientos en geometría, pues según su perspectiva, los objetos matemáticos no presentan esta cualidad, pues el movimiento constituye una “propiedad sensible” innata de los objetos físicos, mientras que los objetos matemáticos son abstracciones de los objetos físicos, y por tanto, ajenos a las “propiedades sensibles”.

En el sentido Aristotélico, es apreciable que el punto es más abstracto que una recta, la recta es más abstracta que una superficie, y una superficie, es a su vez, mas abstracta que un sólido. Existe mayor abstracción mientras más ajeno se encuentre el objeto matemático de las referencias con el mundo físico, es decir, de las “propiedades sensibles”.

¹⁹ Para YAGLOM (1962) la congruencia es un caso particular de la semejanza. Además la congruencia constituye el conjunto de propiedades geométricas invariantes en un conjunto de figuras geométricas relacionadas mediante una transformación de Isometría, también conocidas como “movimientos rígidos”.

Se descarta la tradición pitagórica de obtener una recta a partir del movimiento de un punto, una superficie por el movimiento de una línea y un sólido por el movimiento de una superficie. No obstante, ROSENFEL (1988) evidencia que Euclides retoma partes de los aportes de los pitagóricos haciendo uso de movimientos y superposiciones:

“This explains why Euclid made every effort to avoid using motions and superpositions. When (as in the definitions in book XI) he used motions without to do so, Euclid followed an older tradition.”

Sin embargo, se pone en evidencia que a pesar del posicionamiento los movimientos fueron ampliamente utilizados en geometría. Ibn al-Haytham, comentarista de Euclides, citado por ROSENFELD (1988), explicita que:

“What is the connection between geometry and motion, and what is meant by motion? According to scholars, there is no doubt that a line can only exist on a surface, and a surface in a solid, that is, a line can exist only in a solid and cannot precede a surface. How could it move apart from its object? How could a line be the result of the motion of a point if it precedes a point by its existence?”

De esta manera se ha intentado sostener una idea epistemológica importante en este trabajo, a partir de la relación entre la noción de transformación geométrica y el movimiento, pero para matizarla no sólo basta con retomar la tradición clásica, sino que también urge pasar la mirada por los aportes del Renacimiento.

Como una época llena de preguntas, inquietudes y replanteamientos, el Renacimiento tomará los avances matemáticos de la antigüedad y los resignificará a partir de nuevas expectativas, lo que finalmente conduciría a distintos usos y el surgimiento de nuevos instrumentos.

2.3 El Renacimiento y el uso de nuevos instrumentos

Este apartado sobre el papel que jugó el desarrollo de nuevos instrumentos durante el renacimiento, resulta importante porque ilustra cómo a partir de la emergencia de instrumentos fue posible el desarrollo de nuevas formas de hacer geometría.

Básicamente, la concepción, diseño y descarte de distinto tipo de artefactos creados durante el renacimiento respondía al propósito de acompañar a los artistas en la creación de nuevas técnicas pictóricas que se caracterizaron por retomar la geometría como un principio fundamental de la pintura.

El uso de los instrumentos que a partir de éstos artefactos se desarrollaron, posibilitaron la emergencia de nuevas técnicas pictóricas, pero también de nuevas geometrías, por ejemplo, la Geometría Proyectiva.

Se considera que la Geometría Proyectiva tiene sus orígenes en la pintura del Renacimiento. Luego, en el siglo XVII se recuperarán ideas de los matemáticos griegos (las secciones cónicas, por ejemplo), pero son sin duda los pintores renacentistas los que fundamentan esta rama de las Matemáticas.

Estos artistas consiguieron plasmar en lienzos planos los objetos y las figuras tridimensionales, a diferencia de sus antecesores de la Edad Media que trabajaban más motivados por la jerarquía social y religiosa.

Por eso, no es de extrañarse que aparezcan nombres como Leonardo da Vinci, Rafael Sanzio, Luca Pacioli o Alberto Durero, cuando se estudian los aportes de las artes, especialmente la pintura, al desarrollo de las matemáticas, y en particular, de la geometría.

Es en el Renacimiento cuando las nuevas necesidades de representación en el arte, empujan a ciertos humanistas a estudiar propiedades geométricas para obtener nuevos instrumentos que les permitan representar la realidad.

Todos ellos, al descubrir la perspectiva y la sección, crean la necesidad de cimentar las bases matemáticas en la que se asientan las nuevas formas y expresiones de la geometría.

2.3.1 La Perspectiva y el desarrollo de nuevos instrumentos

El surgimiento de la perspectiva estuvo íntimamente relacionado con la emergencia de nuevos instrumentos en la pintura renacentista. Los artefactos, a partir de los cuales éstos instrumentos se desarrollaron, tuvieron una particularidad: integraban en su diseño principios geométricos relacionados con la semejanza de figuras.

En este sentido, la perspectiva constituye un referente importante en una mirada de lo histórico que relaciona la emergencia de instrumentos con el desarrollo de nuevos saberes geométricos.

Básicamente, la perspectiva es una herramienta utilizada por los artistas renacentistas, para resolver un problema pictórico: si nuestros ojos captan las cosas en tres dimensiones, ¿cómo hacer para plasmar esa información en sólo dos dimensiones?

Durante el medioevo, cuando se pintaba algo lo, que interesaba era el primer plano. Así el fondo de los cuadros quedaba difuso o lleno de colores dorados u otros que ayudaran a fijar la vista en lo que realmente interesaba.

El artista del Renacimiento cambia el enfoque, en su intento por alejarse de la tradición medieval, y sostiene que la descripción del mundo real se convierte en el objetivo de la pintura, por lo que tiene que plasmar la realidad lo más fielmente posible.

El primero en intentar buscar una solución matemática a este problema es León Batista Alberti (1404-1472) que en 1435 en su libro *Della pittura* (impreso en 1511, cuarenta años después de la muerte de Alberti) intenta dar unas reglas para conseguir que lo pintado se parezca a lo que realmente vemos.

El principio básico de Alberti supone, que entre la escena y el ojo se interpone una pantalla de vidrio en posición vertical, llamada también velo. Aparecen líneas de fuga, las cuales van desde el ojo hasta cada punto de la escena. Donde éstas atraviesan la pantalla de vidrio, imaginaba puntos que determinan lo que denominaba una sección.

El objetivo de la sección es crear la misma impresión sobre el ojo que la escena misma, porque de la sección provienen las mismas líneas de luz que de la escena original, un principio aún rudimentario, en el que la perspectiva encontraría un asiento para su posterior desarrollo.

En consecuencia, el problema de pintar en forma realista es el de obtener una sección verdadera sobre la pantalla de vidrio o el lienzo. Como el pintor no mira a través del lienzo para determinar la sección, debe disponer de reglas basadas en teoremas matemáticos que establezcan la forma de dibujarla.

Por ejemplo, en la Figura 2.3 se exhibe el funcionamiento de un artefacto diseñado para dibujar llamado perspectógrafo que retoma elementos de la semejanza para crear una imagen en perspectiva, teniendo en cuenta los principios de la pintura y el uso de la sección de Alberti.

Aquí es importante resaltar, cómo en el desarrollo de estos nuevos instrumentos de trabajo matemático (en el sentido de TROUCHE, 2002), se derivaron de los aportes de la óptica de Euclides, tal como lo enfatiza CARDONA y otros (2006), cuando ponen de relieve los distintos usos y aplicaciones, que los artistas renacentistas le dieron a la geometría clásica.



Figura 2.3 El perspectógrafo²⁰

Fueron Leonardo, y posteriormente el pintor alemán Alberto Durero, los que llevaron aún más allá la matematización de la perspectiva. Sin embargo, quien dio la idea fundamental fue Descargues, matemático francés, que impuso un novedoso punto de vista: dos rectas paralelas, aunque realmente no se cortan, en el infinito sí lo hacen, creando así un punto del mismo donde se cortarían todas las rectas paralelas.

Es lo que pasa cuando observamos un cuadro en perspectiva, todas las líneas apuntan a un punto, el del infinito. Esta idea fue mal admitida por los matemáticos del siglo XVII, pues en ese momento era impensable cortar dos rectas paralelas. Sin embargo en el siglo XIX se retomó y nació la geometría proyectiva, con tantas aplicaciones como la geometría clásica.

El surgimiento de la perspectiva es relativamente reciente, pues solo logró su constitución como técnica pictórica en el renacimiento italiano, en el siglo XV. Aunque en la antigüedad se realizaron algunos acercamientos a la forma de producir un efecto de profundidad en los cuadros, y cierto entendimiento de la convergencia de las líneas paralelas y su efecto pictórico, los artistas griegos y romanos, no lograron constituir los puntos de fuga.

Hacia 1400, los artistas del renacimiento italiano alcanzaron una comprensión intuitiva de la perspectiva. En el renacimiento, los pintores lograron rebasar el estatus de artesanos que habían heredado de la Edad Media, gracias al refinamiento que su arte iba obteniendo, debido a la búsqueda de su

²⁰ Imagen rescatada de Internet en <http://ochoa.mat.ucm.es/~jesusr/expogp/maq.html> el 4 de septiembre de 2010.

perfeccionamiento a través de una mejor representación de la realidad, a partir de un mayor conocimiento de las matemáticas y la física.

En general los pintores, especialmente los italianos, comenzaron a ser más exigentes con el tratamiento del paisaje, la distancia, la disposición de los objetos y los efectos de la luz. Y justamente en esta búsqueda obtuvieron desarrollos importantes tales como la perspectiva lineal, o también llamada cónica porque se genera a partir de una proyección cónica, la cual se caracteriza porque las rectas paralelas se representan convergentes en un punto llamado punto de fuga.

En particular, la perspectiva surge en el contexto de la pintura como una técnica que permite la representación del espacio tridimensional sobre el plano, es decir, sobre el lienzo como una superficie plana.

Tal como se observa en la figura 2.4 llamada “Los desposorios de la Virgen” del artista Rafael, realizada en 1504, la cual es un ejemplo de perspectiva lineal, donde la composición está realizada como si la escena se observara desde un único punto. Nótese que todas las líneas que cruzan el plano pictórico, o cuadro, se encuentran en el punto de fuga, el cual en este caso, está ubicado en el horizonte.



Figura 2.4 Los desposorios de la Virgen de Rafael Sanzio (1504)²¹

En general, los pintores han trabajado distintos tipos de perspectivas, las cuales a su vez, se relacionan con diversos aspectos de la geometría proyectiva. Algunas de las más usuales son la perspectiva caballera, sistema cilíndrico oblicuo, la perspectiva axonométrica y el sistema cilíndrico ortogonal.

²¹ Imagen rescatada de Internet en <http://www.arteyfotografia.com.ar/1397/fotos/9364/> consultada el 4 de septiembre de 2010.

Sin embargo, la más usada fue la perspectiva lineal, la cual se constituye en un sistema de representación pictórica que se asemeja a la visión humana. Uno de los principios fundamentales de este tipo de perspectiva se relacionan con aspectos sobre el plano del cuadro, es decir, la superficie de representación, la línea del horizonte, situada a la altura del punto de vista u ojos del espectador, y los distintos puntos de fuga, donde convergen, las rectas más sobresalientes de la figura.

En 1435 el arquitecto León Batista Alberti escribió, en latín, *Della Pitttura*, un tratado de pintura que fue publicado en italiano en 1436. La obra explicaba el método de Brunelleschi y sentaba las bases de todos los posteriores usos de la perspectiva.

Por ejemplo, la perspectiva aérea es una técnica, empleada habitualmente en la pintura realista, que consiste en simular el efecto atmosférico que se percibe al comparar los objetos de acuerdo con su lejanía. Así, por ejemplo, las montañas que aparecen al fondo de un paisaje pierden definición y adquieren un tono azulado, como si entre ellas y el observador se interpusiera una gran masa de aire.

2.4 El programa de Erlangen o una concepción moderna de la geometría

Aunque es reconocido que en el contexto del arte renacentista se realizaron distintas aplicaciones de la geometría proyectiva, estos resultados fueron sin embargo, olvidados durante muchos años, hasta que se produjo su redescubrimiento en el siglo XIX.

El siglo XIX fue un siglo agitado para la geometría. Es altamente conocido que las geometrías no euclidianas indujeron a los matemáticos a una reflexión relacionada con los fundamentos de la geometría, en una época en que hablar de fundamentos era importante.

Una de las características de la geometría que se desarrolló durante la segunda mitad del siglo XIX, fue el entusiasmo con que los matemáticos estudiaron varias transformaciones. De ellas, una de las más importantes, fueron las que constituyen el grupo de transformaciones que definen la geometría proyectiva.

Esta nueva rama de la geometría, desarrollada durante la primera mitad del siglo XIX, proviene de los métodos, aparentemente detenidos en su desarrollo desde la época de Descartes y Pascal, en los cuales se planteaba el estudio de las propiedades de las figuras invariantes respecto a la proyección.

Según PIAGET Y GARCIA (1980), la geometría proyectiva constituye uno de los antecedentes centrales en el desarrollo de la noción de transformación:

“... es caracterizada por una puesta en relación de las figuras entre sí, cuya manifestación específica es la búsqueda de transformaciones que relaciona las figuras según múltiples formas de correspondencia pero sin llegar a la subordinación de las transformaciones a estructuras de conjuntos.”

A partir de los trabajos en geometría proyectiva, los aportes de la teoría de grupos y la teoría de invariantes, se propició el desarrollo del programa Erlangen en 1872, el cual logra una integración entre distintas geometrías. Pero, como toda noción matemática, no es un resultado aislado, sino el producto de mucho esfuerzo posterior:

“Las ideas cimeras del programa de Erlangen aparecerían fuera de contexto histórico si no estuvieron anteceditas por las geometrías de Bolyai, Lobachevski y Riemann. Dato histórico al cual hay que añadir este otro de concebir la geometría mediante transformaciones, como había enseñado a hacerlo, particularmente Poncelet, y lo habían presentado antes Desargues, Pascal y Monge.”²²

Con el programa de Erlangen, Félix Klein se constituye en una pieza clave de la geometría en el siglo XIX, iniciando en 1871 la construcción de una teoría donde la geometría euclidiana y las no euclidianas, pueden considerarse como casos particulares de la geometría de una superficie proyectiva.

Su programa de Erlangen es considerado un episodio clave en el desarrollo de la geometría e incluso de las matemáticas. En resumen, se considera que la idea central del programa de Erlangen es que una geometría determina un grupo y recíprocamente un grupo determina una geometría.²³

Las propiedades invariantes respecto a determinadas transformaciones, han de tener estructura de grupo bajo la operación de composición, es decir, que componer dos transformaciones es hacer una de ellas y aplicarle la otra transformación al resultado de la primera. De esta manera, Klein propone, por ejemplo, que la geometría euclidiana es el estudio de los invariantes mediante el grupo de los movimientos rígidos, o el grupo de las transformaciones de isometría.

Teniendo en cuenta lo propuesto por Klein, se considera transformación geométrica a la operación geométrica, que logra obtener una nueva figura a partir de otra figura dada. Así, uno de los aspectos a destacar en el programa de Erlangen, es la concepción que se establece respecto a la noción de transformación geométrica, entendiendo que éstas operan sobre el espacio; pero no sobre las figuras del espacio.

²² CAMPOS (2007).

²³ Ibid.

Lo anterior permite evidenciar la noción de grupo de transformaciones y la noción de espacio. En este sentido, una geometría es una estructura dotada de un grupo de transformaciones, y las propiedades geométricas son las propiedades invariantes para G . Por tanto, una geometría subordinada es definida para un subgrupo G , lo que hace posible la determinación de propiedades de invariancia.

Así por ejemplo, se puede decir que el grupo de las transformaciones isométricas, está contenido en el grupo de las semejanzas del plano, pues la semejanza constituye una propiedad de carácter superior a la de congruencia que se aborda en el primer grupo.

La geometría transformacional, que sirve de base para este trabajo, se define entonces, como el estudio de las invariantes de un cierto grupo de transformaciones, conocidas como isometrías o movimientos directos en el plano.

2.5. Hacia un Planteamiento epistemológico: las matemáticas experimentales y la geometría dinámica experimental

Al menos en occidente, es reconocido que la imagen social de las matemáticas va entrañablemente relacionada con la deducción y el rigor²⁴; autores como HANNA (1997), destacan que un grupo cada vez más significativo de matemáticos, se encuentran seriamente interesados en procesos relacionados con la exploración y la experimentación, como caminos para construir e incluso validar saberes matemáticos.

A este tipo de corrientes devenidas de la propia filosofía de las matemáticas²⁵, se le conoce con el nombre de matemáticas experimentales, y abordan principalmente, las relaciones entre procesos de construcción de nuevos saberes, o progreso en matemáticas y prueba o demostraciones.

Este tipo de acercamientos, alimentados potencialmente, por los resultados obtenidos a partir del uso de computadores en el desarrollo de demostraciones y el surgimiento de una matemáticas “semirrigurosas”, plantean la necesidad de discutir la naturaleza de las matemáticas experimentales, máxime cuando integran una componente computacional.

Tal discusión ha llevado a reconocer por ejemplo, que en terrenos de la práctica matemática, los matemáticos estén cada vez más dedicados a la experimentación, con el propósito de formular y probar conjeturas, por tanto, siendo la tecnología computacional, una fuente reconocida para la investigación,

²⁴ MORENO (2002).

²⁵ THURSTON (1994).

los resultados experimentales con el uso de computadoras son cada vez mas y de mayor importancia.

La práctica matemática puede entenderse como el conjunto de acuerdos implícitos y explícitos, técnicas, mecanismos de validación y “maneras de hacer”, conocidas y aceptadas en una comunidad, para legitimar la validez de algún hecho matemático.

Lo anterior se resume en la premisa de que si algo es aceptado por la comunidad, ya puede ser usado. Se afirma, por ejemplo, que muchas cosas en matemáticas primero se hacen y luego, tiempo después, se validan formalmente. Según THURSTON²⁶ (1994):

“... usted no necesariamente tendrá que leer todos los artículos o libros que estén en su bibliografía. Muchas de las cosas que generalmente se conocen son cosas para las cuales puede no haber una fuente conocida escrita. Mientras que la gente en el campo de las matemáticas esté contenta de que la idea funcione, no necesita tener una fuente formal escrita.”

Una práctica como la demostración es aceptada por una comunidad matemática, la cual al validarla, la hace parte del saber cultural, del saber matemático. El conocimiento y la comprensión matemática, están embebidos en las mentes y en la obra social de la comunidad de personas que piensan en un tema en particular.

Se puede entender que las matemáticas no evolucionan por el simple pasar del tiempo, o porque sean parte de una cotidianidad; evolucionan por las comunidades matemáticas y su interacción, es decir, son las comunidades de personas las que hacen las matemáticas y hablar de comunidades es hablar de una sociedad.

En todas las disciplinas científicas ocurre lo mismo, hay una comunidad científica que valida unas formas, unos métodos de hacer; que también pueden evolucionar, por ejemplo, con la aparición de investigaciones en matemáticas realizadas con el uso intensivo de computadores.

De esta manera, THURSTON (1994) plantea una idea trascendental: las matemáticas que se manejan en un computador (aplicadas en tecnologías), o también llamadas “experimentales”, no son menos complejas que las matemáticas “deductivas”, al contrario, son igual de válidas.

²⁶ Todas las citaciones a este texto corresponden a una traducción libre de Marisol Santacruz en junio de 2009.

Esta premisa sustentaría entonces, un planteamiento epistemológico que permita dar cuenta del papel que juega la experimentación en la actividad matemática, particularmente en aquella que integra instrumentos computacionales.

El surgimiento de las matemáticas experimentales, se constituye entonces en un hito importante a considerar en el desarrollo mismo de las matemáticas, y esta situación no ha sido ajena a las investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas, sobre todo en lo relacionado con la geometría, donde desde hace décadas el trabajo con micromundos o AGD, viene ganando cada vez más una mayor vigencia.

Como lo plantea ACOSTA (2005), aunque es reconocido el potencial didáctico de Cabri Géomètre, los profesores tienen serias dificultades en el momento de diseñar y gestionar sus clases haciendo uso de este AGD.

Esta situación puede deberse a múltiples causas, en las que se destaca la falta de una práctica de referencia, sin embargo, se propone el enfoque de geometría experimental, como un elemento articulador de nuevas prácticas que integran AGD.

En esta perspectiva, se destaca que se pueden producir conjeturas, a partir de un trabajo de experimentación regulado por el control teórico del arrastre. Se puede decir, que la geometría experimental, se diferencia de la geometría “formal” sin estar en oposición a ella.

Al respecto, ACOSTA (2005) plantea que:

“La geometría dinámica experimental puede definirse como una práctica geométrica que privilegia la observación y manipulación de los objetos geométricos en la pantalla de la computadora, con la intención de emitir conjeturas sobre las propiedades geométricas de dichos objetos, conjeturas que se ponen a prueba mediante el arrastre, la medición y la construcción de objetos auxiliares”.

Se entiende que el arrastre ejerce sobre el sujeto un control teórico referido a la posibilidad de deformar de manera continua una figura, la cual actúa en virtud a sus propias propiedades de construcción. Ahora bien, la incorporación de la geometría dinámica experimental en la actividad matemática, genera cierto desasosiego en el profesorado, pues según el autor:

“...la geometría dinámica constituye un nuevo sistema de representación de los objetos geométricos que utilizan nuevos objetos ostensivos, los dibujos computarizados, que se diferencian de los dibujos sobre el papel, precisamente por su dinamismo...”²⁷

²⁷ Ibíd.

Se entiende que con la utilización de “nuevos objetos ostensivos”, surgen posibles interrogantes, que pueden llegar a brindar referentes para pensar el papel de la geometría dinámica experimental en clases de matemáticas:

“¿Cuáles son las consecuencias matemáticas de la utilización de estos nuevos objetos ostensivos?, o ¿Qué técnicas matemáticas pueden emplear... éstos nuevos objetos dinámicos, y qué tecnologías utilizar para justificar y explicar éste empleo?”²⁸

Por su parte, HANNA (1997) reconoce concepciones acerca del papel de la experimentación en la geometría y, en general, en las matemáticas, cuando pone de relieve la relación entre matemáticas y la experimentación empírica, sobre todo en lo referido a procesos para formular y probar conjeturas, aunque existe conciencia en que estas no constituyen una demostración.

De esta manera plantea, respecto al lugar que tiene las matemáticas experimentales, mediadas por instrumentos informáticos, en la actividad profesional de los matemáticos:

“... varios matemáticos que sostienen que los métodos experimentales han adquirido una nueva respetabilidad. Ciertamente han recibido mayor atención y recursos como consecuencia del crecimiento de sectores orientados a lo gráfico como la teoría del caos y la dinámica no lineal. Como consecuencia un número cada vez mayor de matemáticos ha llegado a preciar la potencia de la computadora para comunicar conceptos matemáticos.”²⁹

Se hace posible pensar que el uso de instrumentos informáticos, pueden constituirse en un aporte importante en el desarrollo de las matemáticas experimentales, pues brinda la oportunidad de recrear nuevas realidades y oportunidades de investigación a partir de experimentación y la exploración.

Tal como afirma MORENO (2002):

“El enfoque experimental, como estrategia pedagógica, ha vuelto a ganar terreno. La disponibilidad de los instrumentos electrónicos de cálculo ha contribuido notablemente en ello... Esto corresponde al principio de mediación instrumental: las características centrales de una forma de conocimiento están en íntima relación con los instrumentos que sirven como mediadores en el proceso de construcción de este conocimiento.”

Al respecto, matemáticos como THURSTON (1994) plantean que las necesidades de las matemáticas como disciplina y el surgimiento de una nueva corriente de

²⁸ Ibíd.

²⁹ HANNA (1997).

matemáticos que trabajan desde una perspectiva experimental, frente a aspectos tan centrales como la demostración, la salida no es polarizar el problema entre aquellos declarados rigurosos y los “semi-rigurosos”.

Su propuesta se enriquece al plantear que el problema no se reduce a las necesidades del rigor, o de las condiciones de la actividad demostrativa, ni del avance que los matemáticos logran para las matemáticas, sino la manera en que los matemáticos hacen progresar la comprensión de las matemáticas.

Sin embargo, este tipo de propuesta no desvirtúa el papel central de la demostración en procesos tan importantes como la validación, pues al contrario, plantea que la demostración como actividad central de las matemáticas, es determinante en la importante labor de comunicar ideas matemáticas y generar procesos de comprensión.

De esta manera, las matemáticas experimentales, brindan un asiento epistemológico, al diseño de la secuencia didáctica propuesta en esta investigación. Las posibles relaciones entre matemáticas experimentales, geometría dinámica experimental y desarrollo de instrumentos en la clase de matemáticas, puede constituirse en un campo amplio y fructífero de reflexión para los profesores de matemáticas interesados en el diseño de secuencias didácticas en educación básica.

2.6 Transformaciones de Isometría y Cabri Géomètre

En resumen, se puede coincidir con ALSINA y otros (1993) cuando consideran las isometrías, relacionándolas con las propiedades invariantes de las figuras geométricas, como *grupos de transformaciones definidas como objetos matemáticos que dejan invariantes propiedades de los objetos geométricos*.

Respecto al papel fundamental que juega la geometría transformacional, en los contextos escolares actuales, HANSEN (1998) señala que:

“Notions such as similarity and symmetry are fundamental for many mathematical arguments and application of mathematics, and should be studied in some detail. At the advanced level such studies belong to transformation geometry.”

En el campo de estudio de la didáctica de las matemáticas, se han destacado desde hace varios años, aquellas investigaciones que toman en consideración algunos de los problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

De manera más reciente, se ha tratado de abordar distintos nexos posibles entre el aprendizaje de la geometría y la mediación de instrumentos computacionales, como los AGD o micromundos. Autores como ACOSTA (2005) plantean que los

AGD, han experimentado un reconocible desarrollo y difusión, situación que se ha visto respaldada por desarrollos investigativos en didáctica de las matemáticas³⁰.

Esta situación se evidencia, por ejemplo, en la realización de eventos internacionales, la conformación de comunidades, y la producción de artículos de investigación, en los cuales se presentan problemas, resultados y desarrollos acerca de la mediación de instrumentos computacionales en la actividad matemática de los estudiantes.

Desde esta perspectiva, propuestas como la de MAMMANA y VILLANI (1998) consideran que la geometría como disciplina, perteneciente al campo de las matemáticas, se ha desarrollado por más de 2300 años apoyada en un sólido proceso de formalización, donde cada vez se hacen evidentes mayores niveles de rigor, abstracción y generalidad.

De esta manera, los autores destacan que la geometría en el contexto escolar, presenta tanta diversidad de matices, que resulta inoficioso hacer una lista completa de ellos, pero rescatan aquellos, que en su opinión, son particularmente relevantes debido a sus implicaciones didácticas:

- La geometría como ciencia del espacio, es decir, como teoría o teorías, mediante las cuales se pueden construir y estudiar modelos idealizados del mundo físico.
- La geometría como un método de las representaciones visuales de conceptos, y procesos en otras áreas de las matemáticas y otras ciencias.
- La geometría como punto de encuentro entre las matemáticas como una teoría y las matemáticas como fuente de modelos.
- La geometría como herramienta de aplicación en distintos campos de las matemáticas, las ciencias naturales, las ciencias sociales y las artes.

En el contexto escolar coexisten estos y muchos otros matices, sin embargo, se observa que el tratamiento que tradicionalmente se hace de la geometría apunta, hacia un acercamiento euclidiano de ésta.

DE VILLIERS (1996) sostiene este mismo argumento al señalar que la mayor parte de las personas consideran que la geometría se reduce prácticamente a los desarrollos que en esta disciplina se realizaron en la antigüedad, y principalmente con el aporte de los griegos. Esta concepción culturalmente aceptada, se retroalimenta básicamente con las prácticas de la escuela, donde la mayor parte de los estudiantes tienen contacto casi exclusivo con la geometría euclidiana.

³⁰ Por ejemplo, vale la pena citar al respecto los trabajos de LABORDE y CAPPONI (1994).

Algunos autores, como ALSINA y otros (1993), parecen haberse percatado de esta hegemonía del acercamiento euclidiano en el contexto escolar, y destacan la geometría euclidiana transformacional, como una alternativa fértil para trabajar con estudiantes de educación básica.

Distintas investigaciones en aprendizaje de la geometría mediado por Ambientes de Geometría Dinámica, han mostrado que las transformaciones son una herramienta poderosa para explorar propiedades geométricas. Por ejemplo, LABORDE (1998), reporta la posibilidad de controlar, en el marco del diseño de situaciones didácticas, los menús de Cabri como variables didácticas, que propician en los estudiantes la posibilidad de trabajar con determinadas herramientas del AGD.

Una de las alternativas que ofrece Cabri Géomètre, propia de los AGD, es la elaboración de macroconstrucciones. Éstas consisten en aplicaciones o acciones grabadas y ejecutadas mediante una pulsación de tecla o una instrucción. Con el uso de macros se evita la introducción repetitiva de instrucciones, estas se pueden guardar en un archivo que el programa pueda identificar.

Dentro de la tipología de situaciones con Cabri, además de las situaciones de construcción, aparecen las situaciones de caja negra o que involucran macros. En las situaciones de caja negra, el énfasis está dado en que el estudiante explore y conjeture acerca de las propiedades y características que no son evidentes.

Por esta razón se considera pertinente el uso de situaciones de caja negra en la exploración de las transformaciones por isometría, y se considera como una posible estrategia que permita a los estudiantes superar el obstáculo cognitivo relacionado con la distinción entre dibujo y objeto geométrico representado.

Las situaciones de caja negra se caracterizan por integrar macro-construcciones como estrategia para que el estudiante conjeture y realice predicciones de posibles fenómenos geométricos; en este caso se abordan principalmente, las propiedades invariantes de las figuras geométricas bajo el efecto de las transformaciones de isometría y se convierten, según la investigación en didáctica de las matemáticas, en una estrategia potente para tener en cuenta en el diseño de situaciones de aprendizaje.

La integración de un AGD como Cabri Géomètre, en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, se constituye en una reflexión de naturaleza didáctica. Así, las investigaciones recientes han logrado exhibir que la mediación de un ambiente de un AGD, posibilita la exploración de conceptos y conjeturas por parte del estudiante y abre espacios para el ejercicio de la argumentación.

CAPÍTULO III

SOBRE LOS ASPECTOS COLECTIVOS DE LAS GÉNESIS INSTRUMENTALES

Este capítulo retoma los referentes teóricos que sustentan las dimensiones cognitiva y didáctica del problema de investigación. La primera referida principalmente a la génesis instrumental y los ESU, y la segunda, respecto a la orquestación instrumental.

Inicialmente, se establecen las diferencias entre artefacto e instrumento y se aborda la génesis instrumental en el contexto de la clase de matemáticas. Posteriormente, se caracteriza el papel de los Esquemas Sociales de Uso (ESU) a partir del análisis de los efectos estructurantes de los artefactos sobre la actividad.

Para esto, se toma la orquestación instrumental como eje central, alrededor de la gestión didáctica de los sistemas de instrumentos, articulando la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) como un marco que posibilita el diseño de las situaciones a movilizar en la secuencia didáctica.

3.1 Una mirada instrumental al aprendizaje de las matemáticas

En el plano internacional, los desarrollos investigativos en didáctica de las matemáticas relacionados con el uso de TIC en contextos escolares, han avanzado en los últimos años. Dentro de las propuestas recientes, se destaca la aproximación ergonómica, en la cual RABARDEL (1995) retoma el principio de mediación instrumental, a partir de una reconceptualización del instrumento.

Se plantea que los instrumentos, por ser desarrollos de la historia social y cultural, producen una fuerte influencia en la actividad del sujeto. Al respecto, el autor considera la mediación instrumental como un concepto central para pensar las modalidades por las cuales los instrumentos constituyen formas que posibilitan la construcción del conocimiento.

Para ello, es importante reconocer las diferencias fundamentales entre artefacto e instrumento. El artefacto se entiende como un dispositivo material o simbólico utilizado por el sujeto en la actividad instrumentada. El instrumento, por su parte, se considera como una entidad mixta construída por el sujeto, pero al mismo tiempo, relacionada con el artefacto.

De esta manera, es claro que el instrumento no se reduce al artefacto, pues comprende a éste (con sus condiciones, restricciones, potencialidades y

limitaciones) y a los ESU³¹, entendidos como invariantes que forman parte de las competencias del usuario.

La actividad mediada del sujeto requiere previamente de la construcción o desarrollo de instrumentos, y es éste quien los elabora en un proceso de génesis instrumental, el cual, según RABARDEL (1995), se construye a partir de un proceso doble de instrumentación e instrumentalización:

“Los procesos de Instrumentalización están dirigidos hacia el artefacto: selección, agrupación, producción e institución de funciones, usos desviados, atribuciones de propiedades, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc.

Los procesos de Instrumentación están relacionados con el sujeto: con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos, etc.”

Por su parte, respecto al campo de la didáctica de las matemáticas, RABARDEL (1999) toma como referente el Sistema Didáctico y realiza una aproximación a las distintas mediaciones que se establecen en una relación didáctica, observando el impacto fundamental de los instrumentos en el aprendizaje de las matemáticas.

Al respecto se sustenta, por ejemplo, que los instrumentos presentan una fuerte influencia en el aprendizaje y en sus modos de construcción, pero al mismo tiempo, es ostensible la complejidad del instrumento como variable importante en una situación didáctica.

De lo anterior, se hace viable la posibilidad que tiene el profesor de anticipar acciones de los estudiantes en los desarrollos instrumentales, lo cual hace que la génesis instrumental sea un elemento importante a considerar en un análisis *a priori*.

³¹ Que para la interpretación que se da en este trabajo se relacionan con los Esquemas de Actividad Instrumentada (EAI). No obstante, queriendo resaltar la dimensión social de los Esquemas de Uso (EU), se retoma la noción de Esquema Social de Uso (ESU) elaborada por RABARDEL y SAMURÇAY (2001).



Figura 3.1. Principales mediaciones instrumentales en el sistema didáctico (RABARDEL , 1999).

En el caso particular de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la introducción de un nuevo artefacto a la clase impacta de manera directa los sistemas de instrumentos ya constituidos. Pueden plantearse preguntas en cuanto a la introducción de artefactos en una situación didáctica: ¿Cuáles artefactos pueden ser propuestos a los estudiantes teniendo en cuenta el desarrollo de las génesis instrumentales, la evolución y equilibrio de los sistemas de instrumentos de la clase? ¿Para cuáles actividades de aprendizaje y alrededor de qué saberes matemáticos?

Estas inquietudes también pueden formularse igualmente a los profesores: ¿Cuáles instrumentos y sistemas de instrumentos son verdaderamente útiles y necesarios en la formación de los estudiantes en función de los tipos y niveles de desarrollo de las competencias de los profesores?

En opinión del autor, las preguntas acerca de los instrumentos, conducen de manera necesaria a cuestionar el proyecto didáctico en la clase, alrededor de la reflexión sobre la introducción de nuevos artefactos, que posiblemente conduzcan al desarrollo de nuevos instrumentos y a cambios en los sistemas de instrumentos ya constituidos.

3.2 Los efectos estructurantes del artefacto sobre la actividad: Hacia la constitución de ESU

RABARDEL (1995) plantea un enfoque teórico que pretende dar cuenta de la naturaleza compleja del instrumento y su génesis en el sujeto, enfatizando en la naturaleza mediada de la actividad humana:

“Una gran parte de las múltiples situaciones en las que la actividad humana está confrontada a los objetos y sistemas antropotécnicos concierne a las situaciones en las que éstos objetos y sistemas son medios de acción para los hombres, es decir, instrumentos de sus acciones.”

El autor destaca la actividad instrumentada como eje central de análisis en una perspectiva antropocéntrica:

“... una perspectiva predominantemente antropocéntrica en la cual el hombre ocupa una posición central, desde la cual se piensan las relaciones a las técnicas, a las máquinas y sistemas. Esta opción ubica a la actividad del hombre en el corazón del análisis y, por ello, permite efectuar el vuelco necesario para poder hablar de las cosas en función de los hombres.”

La actividad mediada del sujeto está relacionada con la apertura del campo de las acciones posibles del artefacto. RABARDEL (1995) propone concebir los efectos estructurantes de los artefactos sobre la actividad del sujeto en estos términos:

“Proponemos concebir los efectos estructurantes de los artefactos sobre la actividad en términos de apertura del campo de las acciones posibles y de actividad relativamente requerida. La apertura del campo de las acciones posibles corresponde a la variación de las posibilidades de acción que se ofrece a los sujetos, a los recursos nuevos que están a su disposición, pero también a la restricción, la limitación de los recursos que puede incluir al artefacto.”

Se entiende entonces que el artefacto (dadas sus condiciones en términos de restricciones) ejerce una pre estructuración de la actividad del sujeto y de los instrumentos que median la misma. Al respecto, el autor enfatiza:

“Los artefactos y los modos de operar constituyen formas pre-organizadas a las cuales los sujetos están confrontados en sus actividades instrumentadas... La actividad de los sujetos se inscribe entonces en una tensión entre, por un lado, lo anticipado, lo normativo, lo pre-organizado, transportado y vehiculizado por el artefacto y los modos de operar, y más generalmente en el universo del trabajo por la prescripción del trabajo, y por otro lado, los esfuerzos del sujeto por reelaborar, re-estructurar, re-singularizar los artefactos y las modalidades de uso en términos de instrumentos de su propia actividad.”

Lo anterior pone en relación las restricciones del artefacto con la actividad del sujeto. El instrumento se constituye para el sujeto en una organización de condiciones que se relacionan con sus conocimientos y que son diferentes dependiendo del tipo de actividad que realice.

Y es justamente respecto a la actividad del sujeto, entendida como actividad mediada, que se evidencian procesos de apropiación del artefacto en términos de construcciones representativas del instrumento que le permite elaborar estructuras que organizan su acción o ESU.

En esta perspectiva se retoma de la tradición piagetiana la noción de esquema, y se presenta como una estructura de caracteres generalizables de la actividad con instrumentos, generando así, una base estable para la actividad. Los ESU son

considerados como invariantes representativas respecto a distintas operaciones en situaciones de actividad con instrumentos.

Si bien se reconoce que la construcción de los ESU corresponde exclusivamente al sujeto, es decir presentan una dimensión “privada”, también se reconoce la dimensión social de dichos esquemas. La emergencia de los ESU corresponde igualmente a un proceso colectivo, social y cultural, en los cuales muchos sujetos han tenido la posibilidad de relacionarse con diversos artefactos.

Uno de los conceptos centrales para estructurar la noción de orquestación instrumental, es la dimensión social de los instrumentos, reflejada en la naturaleza de los ESU, categoría que se desprende de los trabajos de RABARDEL y SAMURÇAY (2001), citados por TROUCHE (2002):

“... Le monde auquel s’intéresse l’épistémologie génétique est un monde de nature et non de culture. Nous avons dépassé cette limitation en donnant aux schèmes d’utilisation la caractéristique de schèmes sociaux: ils sont élaborés dans des communautés de pratique et peuvent donner lieu à appropriation par les sujets, voire relever de processus de formation explicites.”

A partir del desarrollo del instrumento, el sujeto relaciona las restricciones de distintos artefactos a partir de los ESU. De este hecho se pueden analizar las distintas potencialidades de los artefactos a partir de la zona de valor funcional, la cual muestra el artefacto como un ensamble de funciones sociales, tal como se presenta en la figura 3.2:



FIGURA 3.2. Zona de valor funcional del artefacto (RABARDEL, 1999).

Las posibles conexiones entre las zonas funcionales del artefacto en relación con los desarrollos potenciales, los usos socialmente definidos y los instrumentos realmente desarrollados, destacan las intencionalidades, los usos de los artefactos y su contribución al desarrollo de distintos instrumentos.

Se resalta que los instrumentos, como constructos cognitivos con un fuerte componente social, no son entidades aisladas, al contrario, constituyen sistemas de instrumentos, los cuales se encuentran ensamblados organizadamente de acuerdo a la actividad de los sujetos.

Para RABARDEL y BOURMAUD (2005) los sistemas de instrumentos son organizaciones estructuradas en relación con la actividad de los sujetos. Para esto reconocen clases de situaciones en donde se desarrolla un mismo esquema.

En este sentido, proponen un reagrupamiento de las situaciones de actividad, en familias de actividad, entendidas como ensambles de clases de situaciones que corresponden a un mismo tipo de finalidad general de la acción.

De esta manera, en los sistemas de instrumentos, aparecen en escena los ESU susceptibles a desarrollo y evolución a partir de los artefactos que intervienen integrados. Por su cualidad de intencionales: ningún artefacto aparece integrado a un mismo sistema sin una razón explícita.

3.3 Orquestación Instrumental y la gestión didáctica de los sistemas de instrumentos

Si bien los procesos de génesis instrumental son construcciones individuales del sujeto, TROUCHE (2002) reconoce aspectos individuales y colectivos en el desarrollo de los mismos. La intención explícita de la orquestación instrumental, tal como se concibe en esta trabajo, es la de promover y acompañar las génesis instrumentales de los estudiantes, con la finalidad de propiciar la emergencia de instrumentos que medien la actividad matemática.

Se reconoce, tal como entiende RABARDEL (1999), que el uso didáctico de los artefactos no se limita a su simple introducción en el proceso formativo, al contrario, se debe contemplar qué artefactos pueden hacer parte de instrumentos de actividad matemática.

Ahora bien, en el contexto del diseño y puesta en escena de secuencias didácticas que contemplan la mediación de instrumentos, el profesor no sólo puede anticipar determinados aprendizajes, sino que también puede prever desarrollos instrumentales por parte de los estudiantes.

La introducción de nuevos artefactos al contexto de la clase, conduce al desarrollo de nuevos instrumentos y la evolución del sistema de instrumentos, con el cual se relacionan los estudiantes, el profesor y el saber puesto en juego.

Esta relación debe darse a partir de dos elementos estructurantes a considerar en el diseño de secuencias didácticas: por un lado, los tiempos de construcción de conocimientos matemáticos, y por otro, los tiempos de evolución de las génesis instrumentales.

La idea central de que las génesis hacen parte integral del proceso de aprendizaje de las matemáticas y que por tanto deben tomarse en cuenta en el diseño y puesta en escena de secuencias didácticas, es retomada por TROUCHE (2002) para sustentar la noción de orquestación instrumental.

La orquestación instrumental se encuentra íntimamente ligada con los aspectos colectivos de las génesis instrumentales, es decir aquellos elementos de carácter social que se movilizan en la clase y que influyen de manera directa en los procesos de génesis instrumental:

“Para comprender la variedad de génesis instrumentales, es necesario por parte del profesor, una organización particular de la clase. Nosotros proponemos... la noción de orquestación instrumental para nombrar esta organización.”³²

Continúa TROUCHE (2002):

“En cuanto a esta noción (de orquestación instrumental), mostramos que permite definir los objetivos, la configuración y los modos de aprovechamiento de los diferentes dispositivos que se van a constituir, por cada uno de los estudiantes y por la clase, en sistemas de instrumentos coherentes.”

La noción de orquestación instrumental, entendida como un dispositivo que hace parte de un sistema de aprovechamiento didáctico³³, se propone en un contexto de clase con la finalidad de orientar la actividad matemática con instrumentos de los estudiantes.

En esta perspectiva, se reconoce que una orquestación instrumental estaría conformada por los siguientes cuatro elementos:

- **Un conjunto de individuos:** generalmente encarnados por un profesor (o un equipo de profesores) y un grupo de estudiantes.

³² Las citas de la obra de TROUCHE (2002) que se reseñan en este trabajo constituyen una traducción libre del francés al español realizada por Marisol Santacruz en 2007.

³³ La categoría **sistema de aprovechamiento didáctico**, se relaciona con una metáfora informática, propuesta por CHEVALLARD (1992), donde se establece el *hardware* y el *software didáctico*, acompañados de un *sistema de explotación didáctico*, como componentes esenciales en el diseño y desarrollo de secuencias didácticas.

En esta metáfora, el hardware didáctico hace referencia a los diversos artefactos que intencionalmente se integran a la clase, el software didáctico alude se relaciona con el diseño de las secuencias didácticas puestas en juego y el sistema de aprovechamiento didáctico se entiende como una estrategia intencional para coordinar y potenciar las relaciones entre el hardware y el software didáctico.

-
- **Un conjunto de objetivos:** relacionados con la intencionalidad de la clase, el tipo de tareas a desarrollar y las condiciones bajo las cuales se desarrolla el trabajo. Dichos objetivos se encuentran orientados por las necesidades de tipo curricular a nivel institucional (e incluso nacional).
 - **Una configuración didáctica:** esta categoría engloba la estructura general del dispositivo. Es una configuración flexible de acuerdo al diseño de las secuencias didácticas que se pretenden movilizar en el contexto de la clase.
 - **Un conjunto de modos de aprovechamiento de dicha configuración:** en el sentido que lo concibe CHEVALLARD (1992), como una coordinación entre el hardware, el software didáctico y un sistema de aprovechamiento didáctico.

Cabe anotar, frente a los elementos estructurantes de una orquestación, que justamente se favorece una gestión colectiva de la clase frente a los procesos de génesis, ya que posibilita la enseñanza y el aprendizaje entre pares de distintos ESU.

La concepción de orquestación instrumental es más que un ensamble de artefactos; su mirada se centra alrededor de la evolución y equilibrio los sistemas de instrumentos en el contexto de la clase. RABARDEL (1999) evoca explícitamente la necesidad de una gestión didáctica de los sistemas de instrumentos, que pueden constituirse en referentes centrales para pensar el papel de la orquestación instrumental:

“La introducción didáctica de un nuevo artefacto al espacio de la clase debe igualmente generar un impacto en el sistema de instrumentos ya constituidos. Esta cuestión no aparece particularmente crucial en el contexto actual del funcionamiento tecnológico. ¿Cuáles artefactos proponer a los estudiantes y cómo se les acompaña en sus génesis instrumentales y cómo se concibe la evolución y equilibrio de los sistemas de instrumentos? ¿Para cuáles actividades de aprendizaje y cuáles construcciones de saberes matemáticos?”

De esta manera se puede suponer que las orquestaciones instrumentales se ubican en el plano de la enseñanza y presentan una directa influencia en el contrato didáctico, relación que se abordará con mayor detalle en el siguiente apartado.

3.4 La TSD como perspectiva que sustenta el diseño de una secuencia didáctica

Como se ha planteado anteriormente, este trabajo de investigación requiere de un referente teórico que posibilite el diseño de una secuencia didáctica, concebida desde la perspectiva de la orquestación instrumental.

Aportes como los de TROUCHE (2002, 2003), MARGOLINAS (2009), LABORDE y PERRIN (2005) y PERRIN- GLORIAN (2009), plantean desde distintas miradas teóricas el papel que la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) tiene en el desarrollo investigativo del campo de la didáctica de las matemáticas, esencialmente cuando se piensa el papel que juegan los instrumentos en el aprendizaje.

Desde estas consideraciones, cuatro aspectos de la TSD, se consideran vitales en relación con la noción de orquestación instrumental que se intenta movilizar: contrato didáctico, situación didáctica, a-didáctica y el medio.

Para los aspectos anteriores, el punto de referencia central lo constituyen los aportes de BROUSSEAU (1986 a, 1986 b, y 1988), citados en la bibliografía y presentados a continuación.

3.4.1 Contrato didáctico e intención didáctica del medio

En la mirada de la TSD, la naturaleza del objeto matemático puesto en escena en un contexto de clase, es fundamental para definir el tipo de relaciones inherentes al sistema didáctico. En particular, el contrato didáctico se relaciona con el medio y la actividad matemática del estudiante, en este caso, se asumen como objetos fundamentales de análisis.

Los papeles del profesor y del estudiante, se encuentran entonces bien diferenciados: el trabajo del profesor, centrado en la re-contextualización y re-personalización de los saberes, para ser puestos en escena escolar, y el estudiante, alrededor de su actividad matemática, es decir, ocupándose de problemas para hacer matemáticas, encontrar soluciones y preguntas a las situaciones propuestas por el profesor.

En este contexto, surge la noción de contrato didáctico, constituido como un engranaje formado por las reglas de juego, las estrategias de la situación didáctica, las responsabilidades y expectativas de los protagonistas en la situación didáctica.

Dicho contrato solo se puede establecer a partir de la intención didáctica de un medio, suficiente para movilizar los conocimientos que se desea que adquiera el estudiante, a partir de unas estrategias previamente concebidas y articuladas a los papeles diferenciados del profesor y del estudiante.

Los diferentes papeles asignados al profesor, al estudiante y al saber en la relación didáctica, son representados en la TSD, desde una aproximación sistémica, a partir de la distinción de diversos niveles de estructuración del subsistema “medio”.

BROUSSEAU (1988) puntualiza que:

“El medio como conjunto de condiciones exteriores en las cuales vive y se desarrolla un individuo humano, juega un papel importante en la determinación de los conocimientos que el sujeto, su antagonista, debe desarrollar para controlar una situación de acción. Las teorías modernas le asignan un rol fundamental en los aprendizajes... El medio, sea físico, social, cultural u otro, juega un papel en la utilización y el aprendizaje de los conocimientos por el enseñante o por el alumno, se le solicite o nó en la relación didáctica...”

Aparecen entonces articuladas a la noción de medio, categorías como situación y estrategia, alrededor del saber puesto en juego en la situación:

“Los “conocimientos” del jugador aparecen, en las estrategias y en los cambios de estrategias, como medios de ganar las partidas o de mejorar la solución. Una decisión del jugador puede ser interpretada por un observador como el resultado de una antigua estrategia elegida: haya sido ésta aprendida espontáneamente, o haya sido enseñada al jugador”³⁴.

Como bien lo señala PERRIN-GLORIAN (2009), una de las principales características del medio es su capacidad de generar retroalimentaciones (o retroacciones) a la estrategia del estudiante, en torno a un contrato didáctico establecido a partir de los problemas o tareas, que se movilizan en la situación.

En este sentido, se entiende que las intenciones didácticas del medio posibilitan que en el juego estudiante – medio, se generen distintos tipos de estrategias, en términos de actividad matemática, las cuales son susceptibles de evolucionar gracias a las retroalimentaciones que el medio está en capacidad de ofrecerle al jugador – estudiante.

Igualmente, la TSD establece un papel primordial al profesor: seleccionar, adaptar y proponer al estudiante situaciones según su nivel, que movilizan actividad matemática a partir de aceptar un problema como suyo y produciendo sus propias estrategias, que finalmente definen la concepción de actividad matemática que se propone en este trabajo.

Para lograr esto, el profesor comunica (o se abstiene de comunicar) información, métodos, heurísticas y preguntas, de la manera que considera apropiada. Este

³⁴ Ibíd.

juego de interacción entre el profesor y las interacciones del estudiante con los problemas que él le ha planteado, es lo que en TSD, se conoce como situación didáctica.

3.4.2 Situaciones didácticas y a - didácticas

La concepción de situación didáctica, definida por BROUSSEAU (1986, a) se entiende como:

“Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución”.

Este conjunto de relaciones, consideran LABORDE y PERRIN (2005), se establecen a partir de un diálogo negociable entre el profesor y los estudiantes, o contrato didáctico, el cual define las reglas de funcionamiento en el interior de la situación didáctica.

Caben destacarse, puntos de tensión y distanciamiento entre situación didáctica, situación matemática y situación a-didáctica. MARGOLINAS (2009) plantea una diferenciación crucial: la situación didáctica se relaciona directamente con el sistema didáctico y subsiste en el espacio de la clase, generalmente entre un profesor y un grupo de estudiantes, en la que se pone en consideración a un saber puesto en juego.

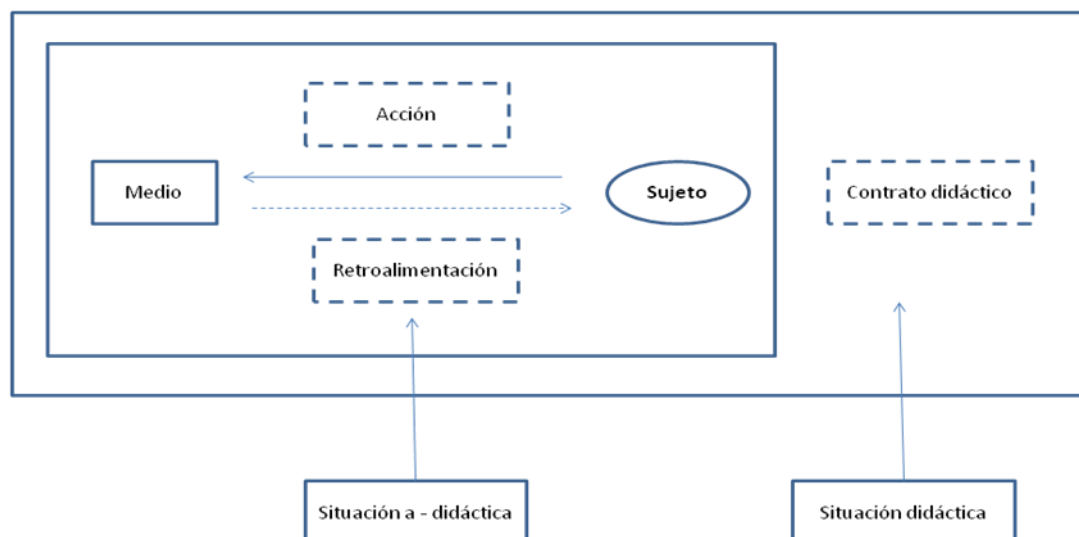


Figura 3.3 Situación didáctica y a-didáctica (PERRIN-GLORIAN, 2009).

Por otro lado, la situación a-didáctica, es aquella que, alrededor de un medio, posibilita que el estudiante desarrolle actividad matemática, en el sentido en que puede vivir la situación actuando como un investigador, es decir, enfrentándose a problemas que decide resolver haciendo uso de distintas estrategias. Estos problemas, recibirán en este contexto, el nombre de tareas.

PERRIN-GLORIAN (2009) delimita entonces lo que se entiende por situación matemática, la cual se encuentra contenida en el sub – sistema de la situación didáctica, sin contemplar intenciones didácticas implicadas en un contrato.

Lo que fundamentalmente diferencia la situación didáctica, de la situación matemática, es que esta última no plantea un juego (intencionalidad didáctica) para el estudiante, en el cual éste pueda jugar con sus conocimientos actuales en el proceso de construir nuevos aprendizajes.

Tal como la autora lo presenta en el esquema³⁵ de la Figura 3.3, una situación didáctica (a diferencia de la situación matemática) se establece condicionada por las restricciones del contrato didáctico, pero a su vez, contiene un sub-sistema o situación a-didáctica.

Este subsistema o situación a-didáctica, plantea relaciones bidireccionales entre el medio y el sujeto: el sujeto (estudiante) actúa sobre el medio y éste ofrece retroalimentaciones a la actividad matemática del sujeto (sus estrategias).

En este sentido, es que la TSD es sumamente pertinente cuando se piensa en el diseño de una secuencia didáctica que integra tecnología: permite hacer seguimiento a las acciones de los estudiantes y las posibles retroacciones del AGD.

Desde la mirada instrumental, esto permite preparar un medio que sea capaz de movilizar conocimientos matemáticos a partir de la actividad de los estudiantes con instrumentos desarrollados a partir de un AGD.

3.5 El arrastre exploratorio: Hacia la constitución de un ESU

Un problema ampliamente reconocido, sobre todo en los AGD y en relación con el arrastre, lo constituye la relación entre dibujo y figura, es decir, la falta de distinción entre el dibujo y el objeto geométrico representado.

El dibujo como objeto perceptible tiene la facultad de aludir, simbolizar e incluso representar al objeto geométrico. El objeto geométrico por su parte, es abstracto por naturaleza y su representación solo puede darse mentalmente aludiendo a la generalidad, como una relación de carácter geométrico.

³⁵ Tomado de: PERRIN-GLORIAN, M.J. (2009).

En este sentido, LABORDE (1998) reconoce la *figura* como una relación compleja entre el dibujo y el objeto geométrico representado:

“... el dibujo puede ser considerado como un significante de un referente teórico (objeto de una teoría geométrica). La figura geométrica consiste en el emparejamiento de un referente dado con todos sus dibujos, queda entonces definida como el conjunto de pares formados por dos elementos: el referente y todos los dibujos posibles del referente.”

De esta concepción podemos asumir, por ejemplo, que un dibujo es un producto material, el cual se obtiene mediante procedimientos particulares; dichos procedimientos involucran conocimientos geométricos, los cuales son validados por determinada teoría en Geometría, es decir, las estrategias para producir dibujos corresponden a un sistema teórico determinado, aunque este no siempre esté dado de manera explícita.

Esta característica es vital para definir la naturaleza mediada de la figura geométrica y su relación con los dibujos en Cabri Géomètre, al respecto, LABORDE y CAPPONI (1994) argumentan que:

“Una figura no se refiere a un objeto sino a una infinidad de objetos. Lo que es invariante son las relaciones entre los objetos”.

Al reconocer el papel de las teorías en la producción de los dibujos, y el carácter eminentemente teórico y abstracto de la figura como objeto geométrico, podemos asumir la figura geométrica mediada por Cabri Géomètre como un sistema de relaciones invariantes, las cuales se “validan” en el ambiente, a partir del arrastre (validación situada): la figura no pierde sus propiedades así sea sometida parcial o totalmente al arrastre.

Como se puede apreciar en la Figura 4.4, donde el paralelogramo ABCD ha sido construido tomando en consideración conocimientos geométricos, de manera que al arrastrar los puntos B y D, éste no pierde sus propiedades. Por su parte, el cuadrilátero MNOP ha sido producido por efectos perceptivos, de manera que al arrastrar el punto O pierde las propiedades de paralelogramo.

Frente a un dibujo realizado en el ambiente Cabri Géomètre, el estudiante tiene un fuerte obstáculo cognitivo: ver más allá del dibujo y aproximarse a la figura geométrica, es decir, a las propiedades geométricas implícitas en el dibujo y que constituyen la figura geométrica.

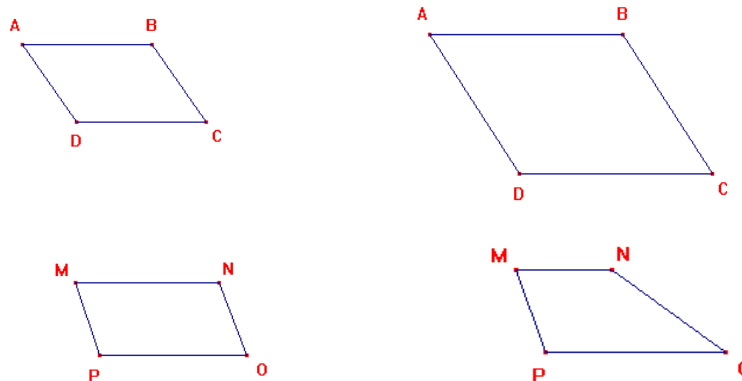


FIGURA 3.4 El papel del arrastre y la exploración de propiedades

El proceso de producir un dibujo que represente un objeto geométrico mediado en el ambiente Cabri, tiene sus propias características; requiere comunicar al AGD una serie de peticiones, dicho proceso se realiza a partir de procedimientos que implícitamente conllevan determinadas propiedades geométricas, al obtener un resultado, como lo ejemplificado en la Figura 4.4, la gran dificultad para los estudiantes es interpretar lo que han obtenido.

Al respecto, LABORDE y CAPPONI (1994) insisten en los procesos de interpretación, y en el papel del profesor para movilizar conocimientos geométricos que le permitan al estudiante acercarse a la figura geométrica como constructo abstracto:

“Un dibujo geométrico no es necesariamente interpretado como un objeto geométrico, las interpretaciones de un objeto son múltiples tanto por las interpretaciones del lector y sus conocimientos, como por la naturaleza misma del dibujo, que por sí mismo no puede caracterizar un objeto geométrico”.

Es decir, el proceso didáctico se orienta a que el estudiante pueda superar el obstáculo cognitivo y le brinde la posibilidad de aproximarse a la figura geométrica, en términos de relaciones invariantes, posibilitando explicitar aquellas relaciones geométricas subyacentes, no solo respecto a un dibujo particular, sino a una familia de dibujos, o el universo de todos los posibles dibujos del objeto geométrico o referente (LABORDE y CAPPONI, 1994).

En este sentido, múltiples investigaciones, especialmente el trabajo de RESTREPO (2008), respecto al arrastre, han determinado el papel preponderante que éste tiene sobre los objetos de la pantalla. Tanto así, que para muchos investigadores, el arrastre se configura en una de las cualidades más determinantes para el dinamismo propio de los AGD.

Desde un punto de vista instrumental, podemos decir que el arrastre se constituye en un artefacto integrado a un sistema más complejo (el AGD), y dependiente de las posibilidades de la pantalla de un computador.

En este sentido, y recogiendo principalmente las ideas de MARIOTTI (2000 y 2003) en un ambiente como Cabri, el arrastre siempre va a estar vinculado a las restricciones impuestas a través de la construcción geométrica. De esta manera, el arrastre puede llegar a constituir un control teórico sobre la actividad de los estudiantes.

La potencialidad semiótica del arrastre se relaciona con una de sus principales características: la capacidad de activarse o desactivarse a petición del usuario sobre determinadas figuras en la pantalla. Lo que, desde la perspectiva instrumental, abre una amplia zona del valor funcional de arrastre como artefacto.

Esta posibilidad anudada a la naturaleza del arrastre sobre las figuras, realza la sensación del sujeto de poder “modificar” elementos de la figura, en términos de su generalidad; aspecto que vale la pena maximizar cuando se proponen situaciones en la que los estudiantes exploran propiedades al modificar las figuras e identificar invariantes.

De esta manera, el uso del arrastre, según MARIOTTI (2003), puede llevar a que los estudiantes identifiquen determinada “ausencia de libertad” al notar que su acción de “desplazarse sobre la pantalla” posee ciertas restricciones vinculadas a un control teórico.

Sin embargo, es de vital importancia reseñar que el arrastre ha sido objeto de múltiples investigaciones, y que producto de esto ha sido la creación de distintas tipologías como las de ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D., y ROBUTTI, O. (2002), en las que se explicitan las posibles modalidades cognitivas atribuidas al arrastre, especialmente cuando interesan procesos de construcción de una demostración.

En este sentido, OLIVERO (2003) retoma una tipología de siete tipos de arrastre, de la cual, para efectos de nuestra secuencia didáctica se retomarán los siguientes:

- *“Arrastre errante: el mover los puntos básicos en la pantalla de manera aleatoria, sin un plan, a fin de descubrir configuraciones o regularidades interesantes.*
- *Arrastre de borde: el mover un punto semi - arrastrable que ya está ligado a un objeto.*
- *Arrastre de lieu muet: el mover un punto básico de tal manera que la figura mantenga una propiedad descubierta; esto significa que está siguiendo una trayectoria oculta (lieu muet), incluso sin ser consciente de esto.”*

Pero es RESTREPO (2008), quien hace un acercamiento que permite entender y concebir el arraste, o desplazamiento, como un instrumento de actividad matemática, y en este sentido, considerar las posibilidades y condiciones por las cuales el arrastre emerge, es decir, es elaborado por el sujeto a través de un proceso de génesis instrumental.

En esta perspectiva, el seguimiento a las génesis instrumentales permite identificar el paso de un desplazamiento sin intención matemática, a un desplazamiento exploratorio de propiedades (que ya contiene una intención matemática). Justamente, en el diseño de la secuencia didáctica propuesta en esta investigación, el arrastre exploratorio será considerado vital en relación con el arrastre errante, de borde o por un lugar oculto.

Al respecto, RESTREPO (2008) desarrolla la noción de arrastre exploratorio como aquel que posibilita tres actividades centrales:

*“1. **Déplacement pour identifier les invariants de la figure:** étant donnée une construction, on déplace les points de base afin de trouver ses invariants. Ainsi, on peut identifier les propriétés géométriques de la figure.*

*2. **Déplacement pour constater les variations au cours du mouvement :** on déplace les points d’une construction afin de comprendre les régularités dans la variation, voir quelles sont ses variations, ce qui change et ce qui se conserve.*

*3. **Déplacement pour trouver la trajectoire d’un point:** déplacer un point afin d’identifier sa trajectoire, l’objet géométrique décrit par ce point.”*

Lo anterior, puede llevarnos a pensar en considerar un ESU relacionado con el arrastre, especialmente con el arrastre exploratorio.

Las anteriores consideraciones en torno al arrastre y la particularidad que tiene la acción de “desplazarse” o “moverse” sobre la pantalla, con el fin de “modificar” las figuras, hace susceptible al arrastre de convertirse en el ESU que articula la secuencia didáctica propuesta en este trabajo.

Como presupuesto se considera que en un sistema de instrumentos, las génesis instrumentales de los estudiantes van a estar articuladas a la evolución del arrastre en la actividad instrumentada de los mismos.

A partir de este presupuesto experimental, se determina un ESU del arrastre exploratorio en el diseño de la secuencia didáctica. Esto permite lo que RABARDEL (1999) resalta sobre la posibilidad que se tiene, no solo de poder anticipar el aprendizaje de los estudiantes en relación con las matemáticas, sino también anticipar los aprendizajes instrumentales de éstos, es decir, poder realizar un análisis *a priori* de los desarrollos instrumentales de los estudiantes.

No obstante, en los análisis *a priori* se considera fundamental puntualizar la noción de esquema sobre la cual se sostiene nuestra construcción del ESU arrastre exploratorio. Para tal efecto, PIAGET (1990) resalta sus consideraciones sobre acción y esquema:

“Las acciones en efecto no se suceden por azar, sino que se repiten y se aplican de maneras semejante a las situaciones comparables. Más precisamente, se reproducen tal y como son si, a los mismos intereses, corresponden situaciones análogas, pero se diferencian y combinan de manera nueva si las necesidades o situaciones cambian. Llamaremos esquemas de acciones a los que, en una acción es de tal manera transponible, generalizable o diferenciable de una situación a la siguiente, o dicho de otra manera lo que hay de común en las diversas repeticiones o aplicaciones de la misma acción”.

La posible estructuración de un ESU, en relación con el arrastre exploratorio, estaría vinculado con cierto tipo de invariantes que se verán en detalle más adelante.

La Figura 3.5 intenta hacer una presentación esquemática del ESU. Nótese que en este esquema se encuentran tres tipos de figuras: un rectángulo, una elipse y un paralelogramo, cada uno representando aspectos distintos del proceso de construcción del ESU.

El rectángulo simboliza que la información contenida en ellos es pre-estructurada, es decir, antecede al sujeto y está dada por las intenciones didácticas del medio; así, en este caso el control teórico antecede la acción de mover los objetos, privilegiando el uso particular de algún tipo de arrastre: errante o de borde, por ejemplo.

Esta pre-estructuración desde la cual parte el ESU, posibilita un mayor nivel de control sobre la actividad de los estudiantes, restringiendo, a manera de variable didáctica, las respuestas de éstos frente a determinado tipo de situaciones.

La elipse representa la información que está a disposición del sujeto, en este caso, la información suministrada corresponde a ciertas configuraciones o conjuntos de figuras disponibles en la pantalla del computador. Esta información también antecede al sujeto y es consecuencia de la restricción anterior, ya que se selecciona qué información se le va a presentar al sujeto.

Las configuraciones en pantalla representan expresiones ostensibles del control teórico del arrastre, pues ellas hacen parte del mismo. Así, si a un estudiante se le presenta un punto, construido como punto sobre objeto, respecto a una circunferencia, la posibilidad de presentarle solo el punto, o el punto y la circunferencia, es vital en la emergencia del ESU, pues entonces de esta información depende el tipo de arrastre que realice.

Hasta ahora, los dos primeros momentos del ESU dependen expresamente de las intencionalidades del diseño; así, entre ambos, constituyen elementos pre-estructurantes del artefacto arrastre, sobre la actividad instrumentada de arrastrar figuras en Cabri con el propósito de explorar propiedades y por eso se consideran como elementos de “entrada” del ESU.

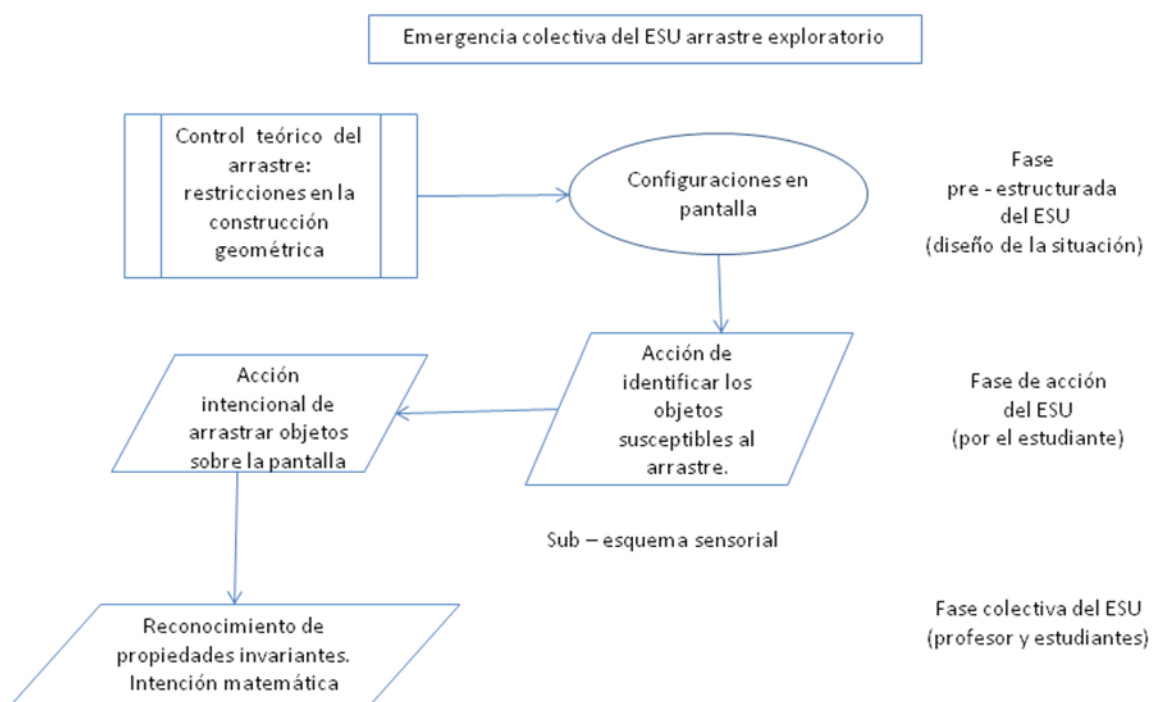


Figura 3.5 Emergencia colectiva del ESU arrastre exploratorio

Por su parte, los paralelogramos de la Figura 4.5 indican acciones de los sujetos. Determinar qué objetos sí se pueden desplazar y cuáles no, subyace en la idea más general de identificar puntos libres y dependientes, cosa que no se les va a solicitar a los estudiantes. Su acción aquí consiste en usar la estrategia de ensayo y error para identificar qué objetos se pueden mover, cuáles no, y, efectivamente arrastrarlos sobre la pantalla.

Para la construcción de este sub-esquema los estudiantes requieren hacer evolucionar esquemas sensoriales ya constituidos desde hace tiempo. Sobre todo sus experiencias con otros *software* como *Paint*, va a ser vital para integrar movimientos múltiples y precisos de los ojos, respecto a la información de la pantalla y de la mano respecto al *mouse*.

Sin embargo, tal como exhibe RESTREPO (2008), aún en este momento, los estudiantes no explicitan una intencionalidad matemática sobre el arrastre. Solo podrá lograrse entonces, cuando distintas experiencias matemáticas, propician

una emergencia del arrastre, y cuando éste logre articularse a esquemas de acción instrumentada.

Por su parte, en este dispositivo experimental, se propende por la génesis “artificial” de conocimientos matemáticos e instrumentales de los estudiantes, por tanto, se movilizan algunas situaciones que coadyuven con esta finalidad.

En este sentido, el medio determinado en cada situación, constituye una posibilidad a la indagación sobre la misma actividad: *movimos el punto... ¿Qué pasó?, ¿Por qué se movió así?* Por tal razón, se hace necesaria la explicitación de variables micro-didácticas, que en relación con el ESU posibiliten el desarrollo de la secuencia didáctica propuesta.

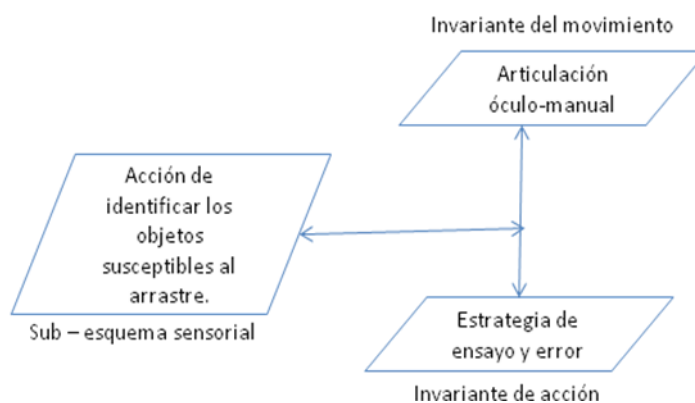


Figura 3.6 Sub - esquema sensorial

3.6 El acercamiento curricular

Teniendo en cuenta la estructura de los referentes curriculares vigentes en Colombia, a partir de las orientaciones del Ministerio de Educación Nacional (MEN), como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias del área de matemáticas (2006), en cuanto al estudio y el aprendizaje de la geometría, es evidente que ambos contribuyen a posibilitar el desarrollo de diferentes tipos de pensamiento, entre los cuales se considera el pensamiento espacial.

Según la propuesta del MEN (1998), el pensamiento espacial constituye:

“...El conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales...”.

Es decir que, el pensamiento espacial permite a los estudiantes que puedan desplazarse, tocar, calcular e interactuar constantemente con su medio, hasta llegar a la capacidad de desarrollar conceptos. Así, los sistemas geométricos contribuyen a explorar y representar el espacio.

Una opción fuertemente considerada para esta exploración, es a partir del estudio de las transformaciones, particularmente las de isometría, es decir, las transformaciones que conservan la congruencia de las figuras.

El aprendizaje de las transformaciones de isometría se promueve con el enfoque de geometría activa, que parte de la actividad de los estudiantes y su confrontación con el mundo. Se sostiene que debe privilegiarse la actividad sobre la contemplación pasiva de figuras y símbolos, a las operaciones sobre las relaciones y elementos de los sistemas, y a la importancia de las transformaciones en la comprensión de aquellos conceptos que a primera vista parecen estáticos.

Se trata pues de hacer cosas, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna, en el sentido del MEN (1998):

“Enfatizar en los primeros niveles educativos en actividades de exploración, denominación, descripción, clasificación y representación de objetos concretos del plano y del espacio y explorar movimientos en el plano para acceder a nociones básicas acerca de transformaciones, la identificación de trayectorias y la ubicación espacial”.

Es decir, enfatizar en una geometría que privilegie la acción, relacionada con la representación y apropiación del espacio, principalmente desde los primeros niveles escolares.

Por lo tanto, los estudiantes deben estudiar las propiedades de los objetos geométricos en el espacio bidimensional y tridimensional, y las posibles transformaciones geométricas que se presenten a través de la interacción con ellos.

Con base en el diseño de la situación y con los objetos geométricos involucrados, se pretende que los estudiantes alcancen los siguientes estándares de competencias del pensamiento espacial y sistemas geométricos, propuestos por el MEN (2006):

“Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.

Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.

Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.”

Se concibe el contexto del arte y del diseño como espacios apropiados para la exploración de las transformaciones geométricas, tal como en los análisis preliminares de esta investigación se venía proponiendo: reconocer las relaciones dialécticas entre geometría y arte, a partir de la exploración de las propiedades geométricas movilizadas en una obra artística.

La propuesta de la geometría activa reconsidera la enseñanza de la geometría, a partir de las transformaciones geométricas rescatando las nociones de trayectoria, proyecciones y la modelación del espacio tridimensional.

Se propone la exploración de la figura mediante los movimientos, empezando por el del propio cuerpo, (como cuando los estudiantes recorren la frontera de una figura) y pasando por el movimiento que se aplica a los objetos físicos, para estudiar los efectos que producen los movimientos sobre las figuras.

Se permite que los estudiantes tengan la oportunidad de plantearse preguntas sobre propiedades geométricas, de formular sus propias conjeturas, de planear acciones que le permitan verificarlas o refutarlas, de obtener consecuencias y elaborar sus explicaciones sobre el por qué de los resultados obtenidos, es decir, el desarrollo de un pensamiento capaz de imaginar movimientos y de anticipar resultados de transformaciones geométricas.

CONCLUSIÓN SEGUNDA PARTE:

POSIBLES ARTICULACIONES TEÓRICAS

El papel de los análisis preliminares, recogidos parcialmente en esta segunda parte del trabajo, cobra sentido en la medida en que posibilitan establecer relaciones y diálogos entre las miradas teóricas que fundamentaron el problema de investigación.

En esta perspectiva, se pretende identificar algunas relaciones entre las categorías teóricas puestas en juego y que permiten el diseño del dispositivo experimental, apoyado en un marco teórico que sea lo suficientemente explicativo.

Principalmente, la articulación de enfoques posibilita la estructuración de un marco teórico que integra las dimensiones histórico – epistemológica, cognitiva y didáctica respecto al problema y las hipótesis de investigación.

Las posibles articulaciones teóricas, se darían a nivel de dos relaciones, que se verán en detalle más adelante. Pero cabe notar, que dichas relaciones no se presentan aisladas, o inconexas, al contrario, establecen un diálogo alrededor de una unidad de análisis central: la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor.

Una primera articulación, deviene de la contextualización teórica del problema y las hipótesis de investigación, los cuales aportan dos categorías centrales: génesis y orquestación instrumental. Las cuales fueron abordadas en la dimensión cognitiva y didáctica de los análisis preliminares.

De esta manera, la actividad instrumentada se concibe como una categoría teórica que permite crear diálogos con el arrastre exploratorio alrededor de la gestión didáctica del sistema de instrumentos.

El arrastre, surge pues, como una posibilidad de conexión del marco de análisis. Ganará importancia en la construcción del dispositivo experimental, principalmente al posicionarse como eje central de las selecciones didácticas, como se verá más adelante.

Sin embargo, dicha unidad de análisis aparece desarrollada en el contexto del diseño del dispositivo experimental, esto por una razón de organización: si en los análisis preliminares surge la pre estructuración de la actividad por parte de los artefactos, el arrastre es asumido justamente en ese papel.

Desde esta mirada, el arrastre se incluye como una variable didáctica fundamental del dispositivo, como una unidad de análisis puesta en juego experimentalmente. Por ello no apareció explícitamente referenciado en los análisis preliminares antecedentes.

Continuando con las articulaciones teóricas, de este primer acercamiento, los Esquemas Sociales de Uso (ESU), al igual que la Teoría de Situaciones Didácticas

(TSD), posibilitan la construcción de la segunda relación teórica, más cercana con la dimensión epistemológica de los análisis preliminares.

En esta segunda relación, se establece un diálogo teórico entre los principios de las matemáticas experimentales, el arrastre y la transformación de rotación como objeto matemático puesto a consideración en el diseño de la secuencia didáctica.

Es decir, se ponen en relieve algunos aspectos del objeto matemático respecto al arrastre exploratorio, el cual se concibe en diálogo con los ESU, la actividad con instrumentos, la transformación de rotación y la TSD.

Nótese como en esta segunda relación teórica, se ubica la gestión didáctica, a cargo del profesor, en conexión con la orquestación instrumental y la TSD, lo cual posibilita y le da sentido al diseño del dispositivo experimental.

La Figura 3.7, presentada a continuación, pretende sintetizar las articulaciones teóricas anteriormente descritas, de manera que puedan ser visibles algunas de las relaciones posibles entre las unidades de análisis involucradas:

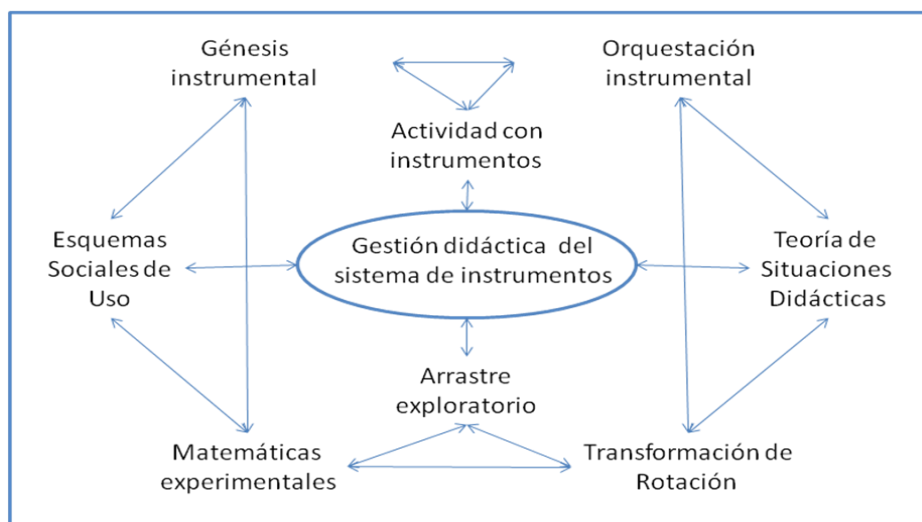
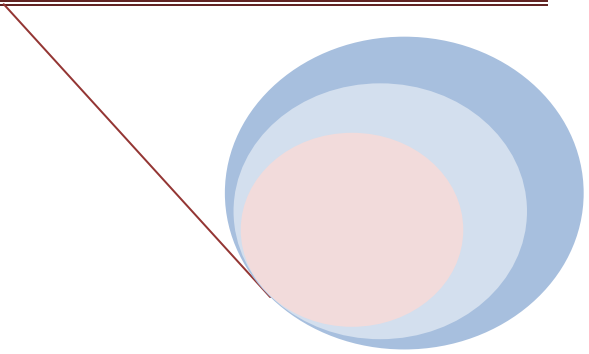


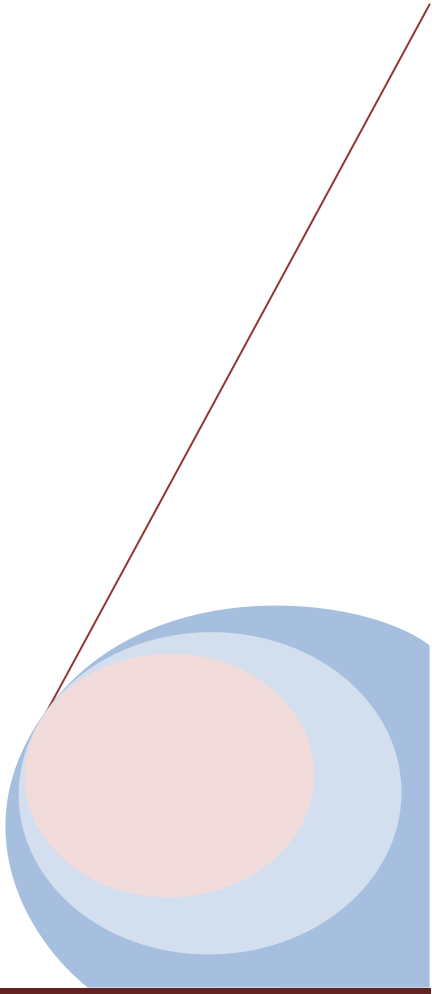
Figura 3.7 Principales articulaciones teóricas

De esta manera, se ha hecho un esfuerzo por brindarle coherencia interna al trabajo, a partir de un marco teórico que permita dar cuenta del papel que juega el profesor cuando se integran instrumentos informáticos a la clase de matemáticas.



TERCERA PARTE

EL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL Y ANALISIS *A PRIORI*



CAPÍTULO IV

DISEÑO DEL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

Este capítulo retoma las consideraciones realizadas en los análisis preliminares presentados anteriormente. Su propósito central es dar cuenta de la concepción y diseño de una secuencia didáctica, objeto central de este ejercicio de investigación.

Inicialmente, se retoman algunas consideraciones respecto a decisiones metodológicas que fundamentan el trabajo, en especial, el papel asignado a la microingeniería didáctica, como enfoque que orienta la investigación.

Interesa igualmente presentar el diseño del dispositivo experimental y las respectivas hipótesis que lo sustentan, para dar cuenta de las selecciones generales que fundamentan el diseño de la secuencia didáctica.

En este apartado es central abordar el arrastre exploratorio y su papel en la exploración de propiedades geométricas, lo cual posibilita proponer *a priori*, una posible emergencia colectiva de un Esquema Social de Uso (ESU), corazón de la secuencia didáctica puesta a consideración.

Finalmente, la explicitación de las variables micro-didácticas consideradas en el diseño de la secuencia, facilita dar cuenta de la concepción de una secuencia didáctica, en el marco de un dispositivo experimental.

4.1 Consideraciones metodológicas generales que orientan el diseño

Este trabajo de investigación toma la ingeniería didáctica, particularmente la microingeniería, como referente metodológico central³⁶, el cual, desde la perspectiva de ARTIGUE (1995), se caracteriza por su naturaleza experimental alrededor de la concepción, diseño, realización, observación y análisis de secuencias didácticas, a partir de un estudio de caso.

En este sentido, las investigaciones a nivel de microingeniería, permiten tener una mirada local de la complejidad de un conjunto parcial de fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, asociados al problema de investigación.

³⁶ Cabe anotar que por la naturaleza de la investigación, la microingeniería se retoma como un referente metodológico, empero, es importante explicitar que el dispositivo experimental que se presenta no constituye, ni pretende considerarse, como una microingeniería didáctica.

De acuerdo a lo anterior, en la Figura 4.1 se proponen algunos elementos fundamentales relacionados con las fases de la metodología de la ingeniería didáctica y se explicitan las unidades de análisis consideradas en cada una:

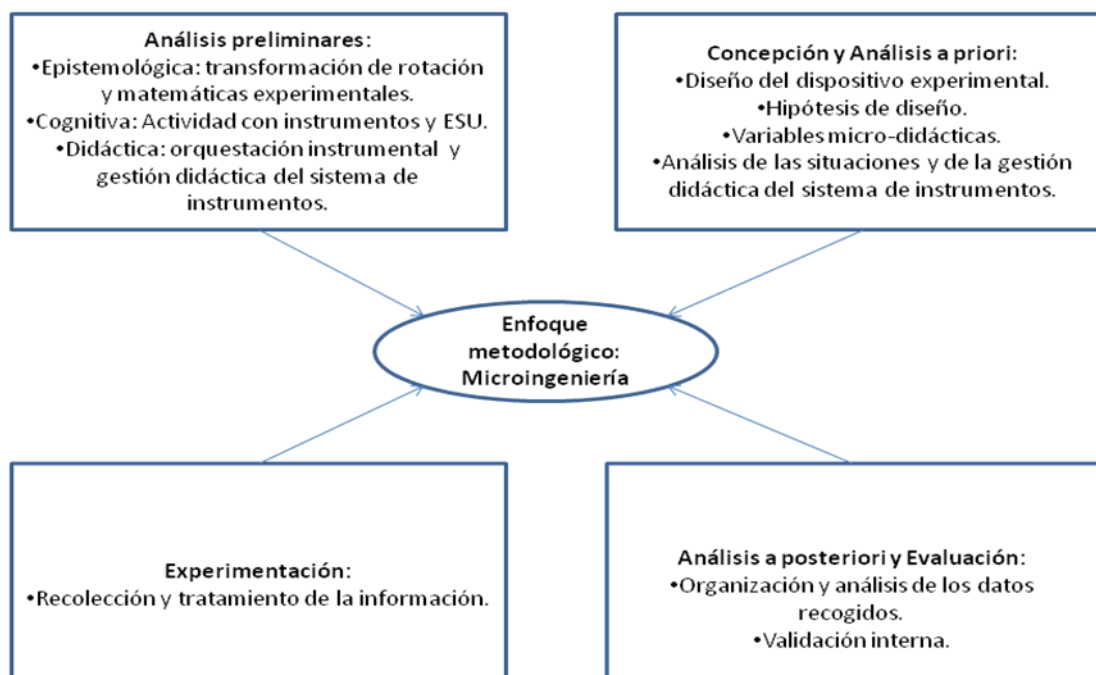


Figura 4.1. Enfoque metodológico de la investigación

En cuanto a las posibles relaciones que sustentan el uso de enfoques metodológicos, como la ingeniería didáctica en este tipo de trabajos, LABORDE y PERRIN GLORIAN (2005) realizan un seguimiento a las investigaciones de los últimos años alrededor del aprendizaje de la geometría con la mediación de Cabri Géomètre.

Una de sus conclusiones se centra en el papel protagónico que han tenido las microingenierías, particularmente aquellas que se fundamentan alrededor de la TSD, para el diseño de dispositivos experimentales, donde se problematiza el papel mediador Cabri Géomètre en el aprendizaje de la geometría.

El mismo TROUCHE (2003) resalta el papel de la TSD en relación con la necesidad imperante, tanto en el campo de la investigación, como en el de la realidad de las escuelas, de construir orquestaciones instrumentales que verdaderamente aporten una mirada didáctica a esta problemática.

4.2 El dispositivo experimental

El diseño del dispositivo experimental pone en relación las hipótesis de investigación (HI1 y HI2) señaladas en el Capítulo I, los análisis preliminares (dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica), alrededor del problema de investigación.

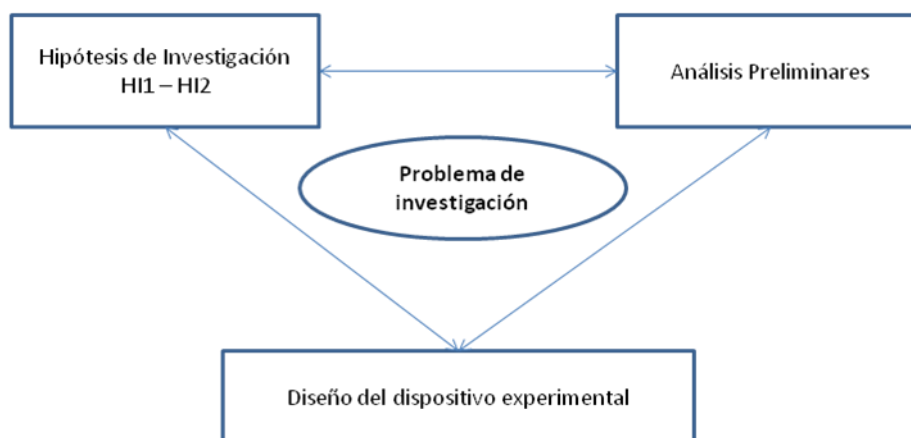


Figura 4.2 Diseño del dispositivo experimental

No obstante, este dispositivo ofrece una particularidad importante de resaltar: el papel que juega la noción de orquestación instrumental en relación con los componentes del mismo.

De esta manera, siguiendo las consideraciones de TROUCHE (2002), se explicitan los tres componentes que determinan el diseño del dispositivo experimental y las respectivas selecciones didácticas consideradas:

El hardware didáctico	Referido a los artefactos considerados en el desarrollo de la secuencia didáctica: Cabri II plus (versión PC), computadores de mesa, un video beam, una pantalla para proyectar la imagen del video beam, un tablero con marcadores, hojas de papel y lápices.
El software didáctico	Lo constituye la secuencia didáctica propuesta, la cual consta del desarrollo de siete situaciones, que se verán en detalle más adelante, con el análisis a priori de cada una.
Un sistema de aprovechamiento didáctico	Constituido por la coordinación e integración de los componentes anteriores, lo cual constituye un eje central de la orquestación instrumental, alrededor de la gestión que el profesor realiza del sistema de instrumentos y que se articula en el diseño mismo de la gestión de la secuencia didáctica, la cual igualmente es previamente contemplada en la realización de los análisis a priori.

Tabla 4.1 Componentes del dispositivo experimental

En la vía de la constitución de las variables micro-didácticas, tomando como referente los resultados obtenidos en los análisis preliminares, se plantean las siguientes hipótesis de diseño, las cuales básicamente recogen los componentes del dispositivo experimental.

Estas hipótesis de diseño se dividen en dos partes. La primera parte da cuenta del diseño del sistema de aprovechamiento didáctico, y pretende introducir las variables en cuanto a la gestión de los sistemas de instrumentos que realiza el profesor. Por su parte, el segundo grupo corresponden propiamente al diseño de las situaciones.

Primera parte de las hipótesis de diseño. Son aquellas consideradas en cuanto al diseño del sistema de aprovechamiento didáctico. Se centran esencialmente en la sostenibilidad del sistema de instrumentos y en el acompañamiento a los aspectos colectivos de las génesis instrumentales de los estudiantes.

Se considera que para abordar la secuencia didáctica desde la perspectiva de la orquestación, es vital prever la emergencia y sostenibilidad de un sistema de instrumentos en el cual la secuencia pueda movilizarse.

En este sentido, la primera hipótesis plantea que a partir del diseño mismo de la secuencia didáctica se puede dar cuenta, aunque parcialmente y del campo de acciones posibles de los artefactos considerados.

De esta manera se realiza una integración didáctica de artefactos en la clase de matemáticas, que como se abordó ya en capítulos anteriores, va a permitir la emergencia y sostenibilidad de un sistema de instrumentos concebido esencialmente desde las intenciones didácticas.

El diseño de una secuencia didáctica se fundamenta en la sostenibilidad de un sistema de instrumentos, gracias al análisis del campo de acciones posibles de los artefactos considerados, con el objeto de identificar posibles Esquemas Sociales de Uso (ESU) susceptibles de evolución.

Hipótesis 1a: sostenibilidad de un sistema de instrumentos

Ahora bien, si se considera la sostenibilidad del sistema de instrumentos, el diseño de la secuencia didáctica involucra determinadas situaciones didácticas, que consideran los artefactos integrados, en virtud de los desarrollos instrumentales de los estudiantes.

Para llegar a dar cuenta de las génesis, teóricamente se ha optado por el seguimiento a los ESU, de manera que estos constituyan referentes de la evolución de las mismas.

De esta manera se determina que teóricamente los procesos de génesis instrumental se van a centrar esencialmente en la instrumentación, es decir, en lo relacionado con la emergencia y evolución de los ESU; para tal fin, desde un punto de vista experimental, permiten hacer seguimiento a los mismos y dar cuenta de ello.

En conclusión, la hipótesis plantean que es posible realizar el seguimiento de los procesos de génesis instrumental a partir del acompañamiento y seguimiento de los ESU de los estudiantes, en el contexto de una secuencia didáctica concebida desde la perspectiva de la orquestación instrumental, es decir, que se preocupe por la gestión didáctica de los instrumentos susceptibles a desarrollarse en la misma.

En el diseño de la secuencia didáctica, se propone la gestión didáctica de un sistema de instrumentos, centrado en situaciones que posibilitan la evolución de un ESU, de manera paralela a procesos de aprendizaje.

Hipótesis 1b: diseño del sistema de aprovechamiento didáctico

Segunda parte de las hipótesis de diseño. Se relacionan con el diseño mismo de las situaciones didácticas. Las hipótesis planteadas en este grupo posibilitan la determinación de los propósitos de enseñanza de la secuencia didáctica, los cuales se articulan con el contexto de la propuesta curricular vigente en Colombia.

La hipótesis 2a centra su atención en los conocimientos matemáticos movilizados en la secuencia, particularmente lo relacionado con la exploración de la congruencia como propiedad invariante de la rotación, tal como se planteó en la dimensión histórico – epistemológica realizada en los análisis preliminares.

Por ejemplo, el reconocer que la congruencia de figuras planas involucra aspectos angulares, centros de giros y el reconocimiento de figuras homólogas, como elementos importantes de una rotación.

En esta perspectiva, se plantea una hipótesis que hace seguimiento a los conocimientos matemáticos que se movilizan en la secuencia, a partir de la concepción de movimiento, la cual desde la perspectiva que orienta la investigación, se relaciona con la noción de transformación.

Pero esta exploración de la congruencia se realiza a partir de contextos relacionados con el arte y el diseño, esto último atendiendo a la dimensión epistemológica, ya explicitada en los análisis preliminares.

De esta manera el diseño de la secuencia, concibe el acercamiento a propiedades geométricas a partir de actividades que retoman aspectos artísticos y de diseño, en los cuales se hace uso de la geometría.

La exploración de la congruencia, como propiedad invariante de la rotación, se realiza a partir del movimiento de figuras en el plano a partir de la evolución de un ESU del arrastre exploratorio.

Hipótesis 2a: diseño situaciones a-didácticas

La segunda hipótesis respecto al diseño de las situaciones a-didácticas, abarca esencialmente la naturaleza de las variables micro- didácticas consideradas en el mismo. Para tal efecto, se realiza una selección particularmente desde una perspectiva instrumental, en la cual se asumen dichas variables desde el análisis del campo de acciones posibles del artefacto.

En este dispositivo experimental, se ha determinado un grupo de artefactos, alrededor del *hardware* didáctico. Particularmente, la selección realizada va a centrar su atención en el campo de acciones posibles del arrastre, y cómo la naturaleza de este artefacto predetermina la actividad instrumentada de los estudiantes.

A continuación la Figura 4.3 explicita las posibles relaciones entre las hipótesis de investigación (asociadas directamente con la naturaleza del problema de indagación), y las hipótesis del diseño de las situaciones a-didácticas (asociadas con las variables micro – didácticas determinadas), alrededor del dispositivo experimental, articulado con las componentes de la orquestación instrumental.

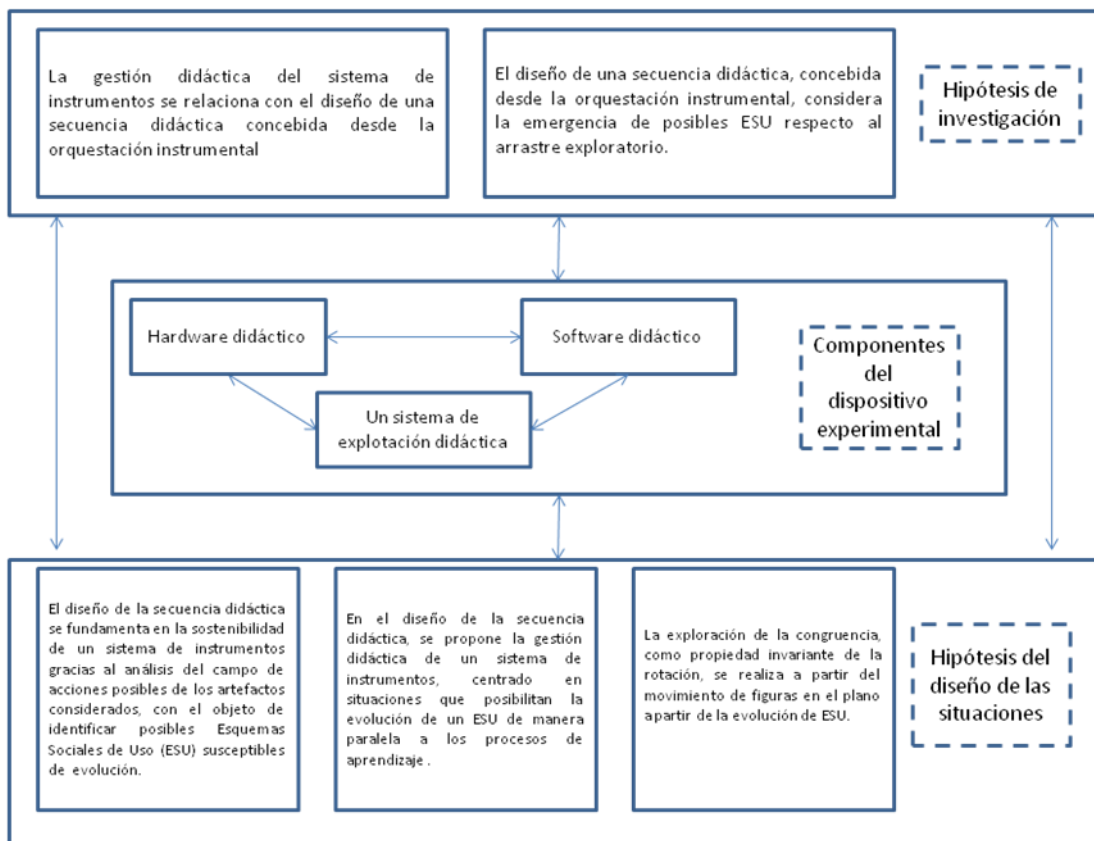


Figura 4.3 Relaciones Hipótesis – Dispositivo experimental

4.3 Selecciones generales

A continuación se da inicio a la concepción de una secuencia didáctica, en la cual se determinan variables micro-didácticas en el sentido de ARTIGUE (1995), como variables de comando relacionadas con el objeto de investigación.

Desde esta perspectiva y atendiendo a las hipótesis de diseño expuestas en este dispositivo experimental, se propone una variable de comando fundamental relacionada con los aspectos colectivos de las génesis instrumentales. Es la determinación de un ESU que posibilite movilizar simultáneamente conocimientos matemáticos y conocimientos instrumentales, recogiendo las ideas de RABARDEL (1999) y TROUCHE (2002).

La urgencia de reconocer y estructurar éste ESU, es la posibilidad de centrar y darle sostenibilidad a las hipótesis 1.a, 1.b y 2.a, mencionadas anteriormente.

Se sostiene que sin determinar el ESU, objeto central en esta secuencia didáctica, no sería posible la gestión didáctica del sistema de instrumentos, y por tanto, no se realizaría el diseño y puesta en escena, de una secuencia didáctica que experimentalmente recoja los postulados de la orquestación instrumental.

4.3.1 Hacia la constitución de variables micro-didácticas

Las hipótesis anteriormente planteadas en torno al dispositivo experimental y el ESU previamente determinado, permiten delimitar el propósito de enseñanza de la secuencia.

Cabe anotarse que este propósito, se deviene de las restricciones ya identificadas en los análisis preliminares que se han sistematizado en los capítulos II y III de este informe final. En este sentido, el propósito aparece contextualizado en una situación de intervención en un aula regular.

Éste recoge restricciones importantes en relación con la actividad instrumentada de los estudiantes en relación con el arrastre: los componentes de la transformación (figura a transformar, centro de rotación y ángulo orientado de giro) y la congruencia como propiedad invariante de la transformación.

A partir de la emergencia del ESU del arrastre, explorar la rotación y sus efectos sobre las figuras del plano en relación con la congruencia como propiedad invariante.

Propósito general de la secuencia didáctica

Por otro lado, se centra en la gestión de los sistemas de instrumentos que realiza el profesor, en términos de la movilización de los aspectos colectivos de las génesis instrumentales relacionadas con el arrastre, a partir de la emergencia y evolución de los ESU.

El arrastre, aparece entonces articulado a un propósito de enseñanza en términos de un ESU que se pretende movilizar en la secuencia didáctica. Es decir, el ESU aparece susceptible de enseñarse, y por ende, de aprenderse.

Particularmente, la secuencia didáctica está propuesta para estudiantes que cursan el grado quinto; se compone de cuatro situaciones, a realizarse en igual número de sesiones, la cual propone el trabajo en parejas, en un espacio de dos horas cada una, generando un trabajo total de ocho horas.

Desde esta perspectiva, se posibilita la delimitación de las siguientes variables micro-didácticas relacionadas con la organización de la secuencia didáctica y que van a aparecer reseñadas en los análisis a priori a realizar en cada situación:

Variable 1	La forma de las figuras que se movilizan en la situación: polígonos, cóncavos o convexos, y circunferencias, que posibilitan explorar la trayectoria y el sentido del ángulo de giro involucrado en la transformación.
Variable 2	La posición del centro de giro, el cual puede ser: externo a la figura a transformar, interno (en la superficie delimitada por la figura) o en la frontera o contorno, como en el caso de los vértices de un polígono.
Variable 3	La presentación de composición de rotaciones concéntricas en las cuales se movilizan aspectos relacionados con el centro, la trayectoria de la rotación y la congruencia como propiedad invariante entre las figuras homólogas.
Variable 4	El uso de macroconstrucciones, como una posible estrategia para explorar las propiedades invariantes, particularmente la congruencia, en términos de los efectos de la rotación sobre las figuras del plano.
Variable 5	La aplicación del ESU del arrastre como una posibilidad para explorar los efectos de la rotación sobre las figuras, especialmente el tipo de construcción geométrica que determina el control teórico del arrastre, en la fase pre-estructurada del ESU.

Tabla 4.2 Variables micro-didácticas

De esta manera la construcción del dispositivo experimental ha definido no solamente el enfoque metodológico que orienta el diseño de la secuencia didáctica, sino que ha permitido delimitar los componentes del dispositivo experimental respecto a unas hipótesis de diseño.

A esta altura, las selecciones generales de la secuencia didáctica se centran principalmente en el papel del arrastre exploratorio, en la vía de constituirse en un ESU. Esta apuesta será vital para la realización de los análisis *a priori* de las situaciones pues determina varios aspectos involucrados en las variables micro-didácticas contempladas.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS A PRIORI

A continuación se presenta el análisis *a priori* de las situaciones que conforman la secuencia didáctica propuesta. Para su realización, se toman como referentes centrales los análisis preliminares y el diseño del dispositivo experimental, abordados en los capítulos anteriores.

En el sentido que orienta este trabajo, este acercamiento se realizará a partir de tres aspectos fundamentales: el análisis de las situaciones a-didácticas propuestas, retomando principalmente las dialécticas de la acción, la formulación, la comunicación y la validación, en relación con las unidades de análisis respecto a la consigna de la tarea, la intención que se determina para el medio a-didáctico, las reglas de juego contempladas para la situación y la estrategia ganadora propuesta, articulada a todas las anteriores.

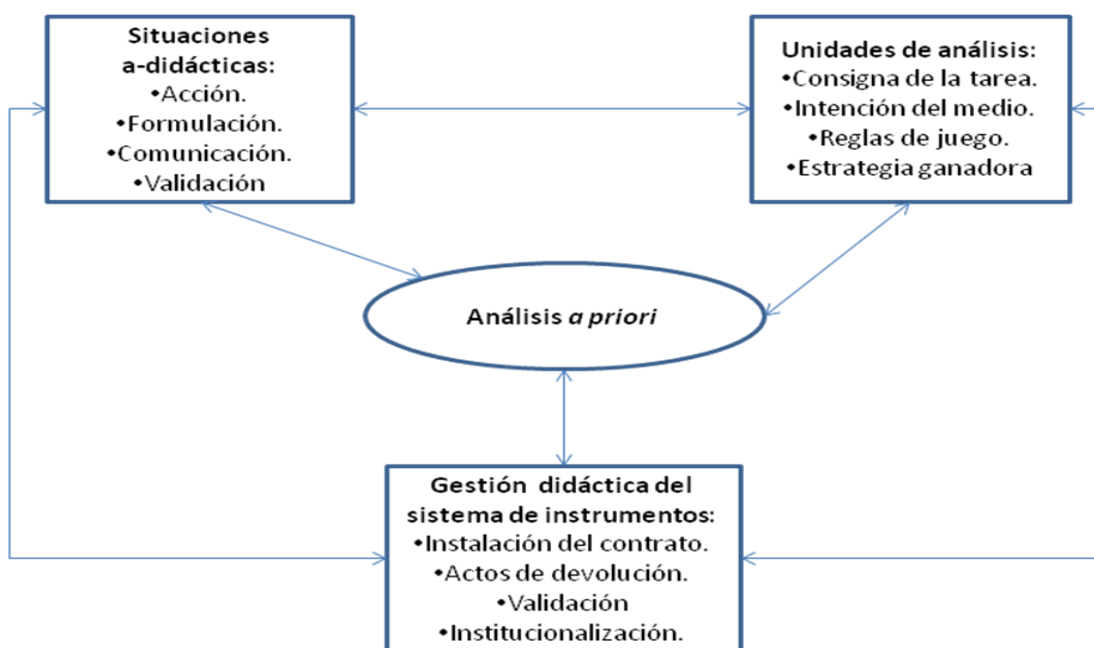


Figura 5.1 Estructura del análisis *a priori*

Naturalmente, en estos análisis aparece la gestión del sistema de instrumentos a cargo del profesor como aspecto central. En el diseño de las situaciones existe una relación directa entre la naturaleza de las situaciones a-didácticas y la gestión del profesor.

La estructura de este análisis *a priori* se sustenta en el diseño del dispositivo experimental, anteriormente descrito, y pone en juego no solo el papel del profesor respecto a la gestión del ESU del arrastre, sino que también pone en el

tapete el papel de Cabri de acuerdo con el tipo de situación que se propone, y especialmente en el medio a-didáctico y las posibles retroalimentaciones, o retroacciones, que él mismo pueda hacer frente a la actividad matemática de los estudiantes.

Así dispuesto, se presentan los tiempos considerados por sesiones y los propósitos particulares de cada, las cuales se establecen en la Tabla 5.1³⁷:

Situaciones	Propósitos	Tiempos
No. 1: "Rotaro"	Reconocer la trayectoria que describen los objetos geométricos cuando rotan alrededor de distintos centros.	2 horas
No. 2: "Figuras viajeras"	Reconocer la trayectoria que describen los objetos geométricos relacionados mediante una rotación concéntrica.	2 horas
No. 3: "Por el camino amarillo"	Identificar los centros de rotación y trayectorias en distintas rotaciones.	2 horas
No. 4: "La Flor"	Relacionar los posibles efectos el centro, la figura inicial y el ángulo de una rotación.	2 horas
No. 5: "Rosetón"	Describir la congruencia como una propiedad invariante en una composición de rotaciones concéntricas.	2 horas
No. 6: "Loco rosetón"	Describir la congruencia como una propiedad invariante en una composición de rotaciones concéntricas.	2 horas
No. 7: "Círculo en parejas"	Describir la congruencia como una propiedad invariante en una composición de rotaciones concéntricas.	2 horas

Tabla 5.1 Estructura general de la secuencia didáctica

5.1 Situación 1: Rotaro

Esta situación, llamada Rotaro, da inicio a la secuencia didáctica y por tanto introduce elementos importantes de la intencionalidad en el diseño de las situaciones, tal como se puede apreciar en los propósitos arriba expuestos.

Básicamente se propone una situación de acción, en la cual los estudiantes abordan su actividad matemática directamente en Cabri, pues desde el comienzo establecen una relación directa a través del arrastre de figuras.

Es importante la gestión del profesor para acceder a los archivos de la situación y permitir que los estudiantes exploren las distintas rotaciones, haciendo especial énfasis en el arrastre como elemento fundamental para reconocer la trayectoria de los objetos involucrados, polígonos regulares, cuando rotan alrededor de distintos centros.

³⁷ Por motivos de organización las situaciones No. 1, No. 3 y No.7 aparecen sombreadas, pues a ellas corresponde la realización del análisis *a posteriori*.

En esta situación de acción, se considera el aporte del medio, y sus intenciones didácticas, las reglas de juego para el desarrollo de la misma y las posibles estrategias ganadoras que pueden construir los estudiantes al enfrentarse a ella.

La consigna de determinar las características del movimiento, propone una hipótesis a los estudiantes de que probablemente, estas tres figuras, en un inicio estáticas, posiblemente pueden ser modificadas a partir de un movimiento, acción que puede entenderse como una posible emergencia, para los estudiantes, del movimiento como transformación.

La acción de “mover los objetos”, se constituye en un espacio para la gestión del profesor en la génesis colectiva del arrastre como instrumento en la actividad matemática, lo que en las selecciones generales se denominó el ESU del arrastre exploratorio.

Al ingresar al archivo “Situación 1” los estudiantes se enfrentan con determinadas figuras geométricas, aparentemente dispersas, que realmente comparten una característica común: son un triángulo equilátero que rota respecto a un centro exterior a la figura, un pentágono regular que rota alrededor de su centro geométrico y un cuadrado que rota alrededor de uno de sus vértices.

La primera rotación se realiza a partir de un triángulo equilátero respecto a un punto exterior, tal como aparece en la Figura 5.2. En las selecciones generales se hacía alusión a las variables micro – didácticas asociadas a las diferentes posiciones de los centros de rotación, en este caso, externos a la figura, haciendo uso de una figura convexa.

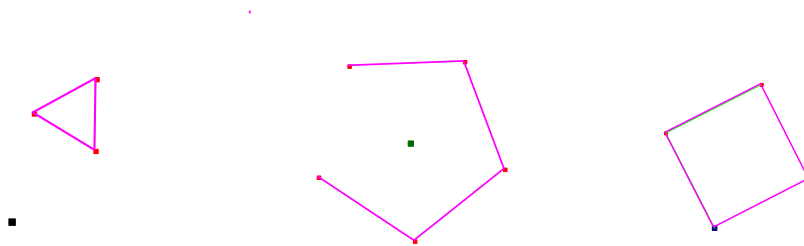


Figura 5.2 Configuración en pantalla presentada en la Situación 1 “Rotaro”

Este triángulo equilátero que “viaja a través de una circunferencia” oculta para los estudiantes, recrea por medio del arrastre la trayectoria circular típica en toda rotación. De esta manera se recrea la trayectoria a través de una circunferencia con centro en un punto exterior al triángulo.

La construcción desvelada en la Figura 5.3 es la que limita el movimiento del punto móvil. Esta construcción permite que un punto de la base del triángulo se

mueva sobre la circunferencia con centro O1, de manera que el triángulo no se deforme, es decir, se mantenga congruente.

Lo que posibilita que el triángulo se mueva en determinada trayectoria y no se deforme, es gracias a que en la construcción se utilizó la herramienta “Compás” de Cabri, para asegurarse que efectivamente el triángulo mantenga su forma y tamaño, a pesar del arrastre que puede hacerse de éste, respecto a un punto libre. Este aspecto es vital en el control teórico que el arrastre puede ejercer en lo que hemos denominado la fase pre - estructurada del ESU.

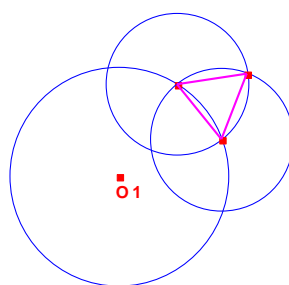


Figura 5.3 Construcción oculta Situación 1

Aunque la estrategia ganadora de los estudiantes consiste en encontrar este punto, que carece de nomenclatura, y lograr arrastrarlo sobre la circunferencia oculta, el centro no es susceptible de movimiento ya que es un punto “fijado” con la herramienta “Fijar/ liberar” de Cabri.

Finalmente lo que se busca es propiciar un arrastre exploratorio (RESTREPO, 2008) alrededor de las propiedades geométricas implicadas: que el triángulo gire alrededor de un centro y describa una trayectoria circular. En la Tabla 5.2, sintetiza el análisis *a priori* de la situación 1:

Situación de acción			
Consigna	Intención del medio	Reglas de juego	Estrategia ganadora
¿Qué tipo de movimiento tienen estas figuras?	Se restringe el arrastre de puntos por lugares ocultos, particularmente circunferencias. En este sentido, la situación plantea un arrastre de <i>lieu muet</i> .	Encontrar cuáles son los puntos susceptibles de arrastrar y lograr moverlos sobre la pantalla.	Utilizar un arrastre errante para encontrar un hecho importante: los objetos que se desplazan por la pantalla lo hacen alrededor de un centro y por tanto describen una trayectoria circular.

Tabla 5.2 Análisis Situación 1 “Rotaro”

De manera análoga se presentan las otras figuras con algunas variables bien diferenciables: el tipo de figura a transformar y la posición de los centros de rotación, tal como se aprecia en la Figura 5.2.

Por ejemplo, en el caso del cuadrado, en esta ocasión se retoma nuevamente una figura convexa, un polígono regular, pero donde su centro de giro es un vértice de la misma. Variable que se retomará más fuertemente en la situación siguiente, pero que aquí, simplemente quiere ayudar a explicitar el propósito de la situación, es decir, explorar la trayectoria de los objetos cuando rotan alrededor de un centro.

5.2 Situación 2: Figuras viajeras

En la Situación 2, básicamente lo que se pretende es que los estudiantes empiecen a formular posibles propiedades invariantes respecto a las exploraciones que han realizado en la Situación 1.

Lo anterior implica que los estudiantes tomen en consideración aspectos de la situación de acción anterior, y ese el espacio para que el ESU del arrastre inicie su proceso de emergencia. Y donde posiblemente se abran espacios para la realización de devoluciones por parte del profesor, las cuales se explicitarán en la gestión didáctica de los sistemas de instrumentos.

Es claro que, en la Situación 1, los estudiantes iniciaron con un arrastre errante, sin una intencionalidad clara de lo que estaban haciendo. A partir de las devoluciones del profesor, y las retroalimentaciones del medio, se posibilita que determinen una intencionalidad: ya saben lo que están buscando y esa necesidad apresura la emergencia colectiva del ESU.

Por supuesto, para poder determinar una posible intencionalidad en el arrastre de los estudiantes, el medio hace presiones al solicitarle que identifique propiamente qué objetos se pueden arrastrar y cuáles son los efectos de este arrastre, es decir, avanzar en el uso de un arrastre exploratorio.

Básicamente en la configuración que se les presenta a los estudiantes, encontraremos tres puntos susceptibles al arrastre, los cuales son igualmente dependientes y se mueven describiendo la trayectoria circular.

Así que discernir, qué puntos sí se pueden mover y cuál es la consecuencia de este movimiento, se inicia la emergencia del ESU arrastre exploratorio que se pretende movilizar.

Explícitamente, esta situación de comunicación busca que los estudiantes identifiquen e interpreten la información figural de la pantalla, articulada a su experiencia con el arrastre, propiciada en la situación anterior.

Lo anterior es vital en el contexto de esta situación, pues permite que los estudiantes organicen la información y la representen en lenguaje natural, lo cual brinda información acerca de sus aprendizajes.

Básicamente la información figural que se propone a los estudiantes se destaca por ser una composición de rotaciones concéntricas. Esto brinda una nueva posibilidad para explorar las propiedades de la rotación como transformación a partir de los efectos de la rotación sobre las figuras geométricas.

Como puede notarse en la Figura 5.4, en esta ocasión las figuras a transformar son diferentes: un segmento, una circunferencia (con su centro) y un punto, quienes giran alrededor de un centro, O_2 , los cuales se construyen como punto sobre objeto, cada uno en relación a una circunferencia cuyo centro es O_2 .

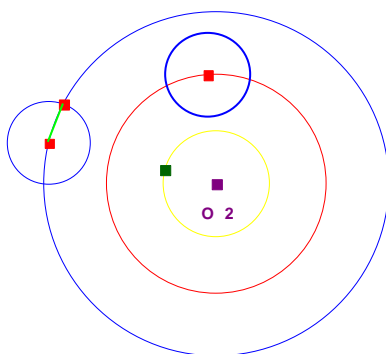


Figura 5.4 Construcción oculta Situación 2 “Figuras viajeras”

En la figura 5.4 se observa que por ser una composición de rotaciones concéntricas, un punto cualquiera de cada una de las figuras anteriores, al moverse alrededor del centro, describe distintas circunferencias concéntricas pero con distintos radios, lo cual posibilita mantener invariante el ángulo de rotación.

Dadas las condiciones de la construcción, que en términos instrumentales se acerca a la categoría de efectos estructurantes del artefacto sobre la actividad, es vital el papel que juega el control teórico que ejerce el arrastre, nuevamente por lugares ocultos.

Al igual que en la situación anterior, existen unos puntos que son móviles o libres, construidos como puntos sobre objeto, que le permiten a los estudiantes llevar cabo el arrastre y de esta manera la exploración propuesta.

La Tabla 5.3 presentada a continuación realiza una síntesis del análisis *a priori* de la Situación 2:

Situación de Comunicación			
Consigna	Intención del medio	Reglas de juego	Estrategia ganadora
Imaginen que necesitan contarle telefónicamente a un amigo que no vino a clase lo que pasa con estas figuras ¿Cómo le describirían lo que observan?	Propiciar la sistematización e interpretación de la información figural presentada en Cabri. Permitir que los estudiantes puedan enfatizar su actividad en la identificación de propiedades invariantes.	Describir en lenguaje natural la información figural que aparece en la pantalla, incluyendo la situación del arrastre.	Reconocer la configuración en relación con las rotaciones concéntricas involucradas y la respectiva trayectoria que describen los objetos cuando rotan.

Tabla 5.3 Análisis Situación 2 “Figuras viajeras”

5.3 Situación 3: Por el camino amarillo

En el desarrollo que se viene planteando de la secuencia didáctica, la Situación 3, “Por el camino amarillo”, se presenta como una situación de formulación. Nótese el manejo dado a las variables micro-didácticas puestas en juego en el diseño de esta situación, pues evidentemente rompe con el tratamiento que se viene dando en las situaciones precedentes.

Como puede verse en la Figura 5.5, se presentan tres semicírculos (que representan el “camino”), cada uno con centro en los puntos A, B y C, respectivamente. Igualmente se presentan ocho puntos verdes, los cuales todos en su totalidad son susceptibles de ser arrastrados en la pantalla, o puntos móviles.

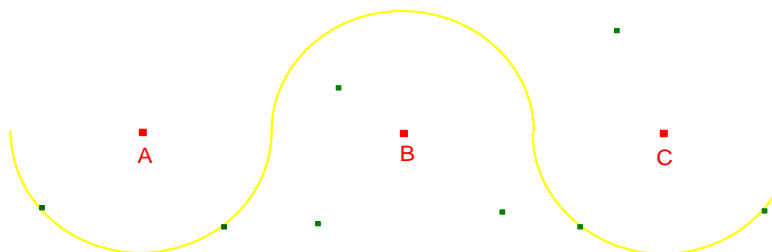


Figura 5.5 Configuración en pantalla presentada en la Situación 3 “Por el camino amarillo”

Sin embargo, debe anotarse algo particularmente importante para el análisis, en relación con lo expresado en las selecciones generales: en esta situación se propone un arrastre exploratorio alrededor de un arrastre que puede ser por un lugar oculto, o incluso, “semi-oculto” como en este caso, pero también un arrastre de borde, es decir, relacionado mediante la construcción de un punto sobre objeto.

Particularmente en este caso, esos puntos sobre objeto pudieron estar sobre las circunferencias o sobre segmentos. Este tipo de condiciones del diseño las abordaremos a continuación.

El control teórico se propicia gracias a las construcciones ocultas que pueden observarse en la Figura 5.6. Se resalta cómo los puntos móviles (verdes), pueden cumplir, o no, las condiciones del problema.

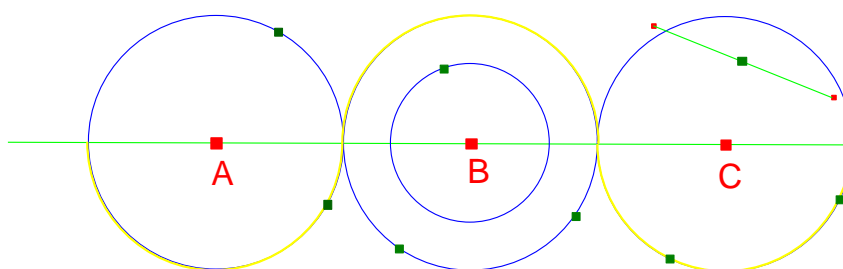


Figura 5.6 Construcción oculta Situación 3 “Por el camino amarillo”

Nuevamente las condiciones o restricciones de la construcción involucran aspectos pre-estructurantes de la actividad, respecto al ESU del arrastre exploratorio. Estas restricciones obedecen a una intencionalidad matemática por parte de quien lo ejerce, en este caso, preparada en un medio a-didáctico.

Por ejemplo, nótese que respecto al punto B, tendríamos dos circunferencias concéntricas. La circunferencia exterior, o aquella cuya longitud de radio es mayor, posibilita que dos puntos verdes, construidos sobre ella, y relacionados mediante una rotación con centro en B y ángulo de 90° , cumplen las condiciones del problema: estar sobre el camino amarillo.

Mientras que el punto construido sobre la circunferencia con centro en B y radio de menor longitud, a pesar de describir trayectoria circular alrededor de B, no cumple la condición de quedar sobre el camino amarillo. Lo cual, se pretende lleve a los estudiantes a cuestionarse sobre las condiciones que estos puntos verdes deberían tener para efectivamente cumplir con las condiciones que plantea el problema.

Una situación similar se presenta con el único punto que posee una trayectoria rectilínea, ya que su construcción se hizo sobre un segmento, oculto, por supuesto, para los estudiantes.

Al respecto aquí nuevamente se debilita una de las condiciones que lo puntos se suponen debería tener para estar “sobre el camino amarillo”, y es la de describir una trayectoria circular, alrededor de un centro, es decir, estar ubicado sobre una circunferencia que coincide con los semicírculos que representan el camino.

Se espera, entonces, que utilizando el arrastre exploratorio, los estudiantes puedan enfrentarse al problema planteado y explicitado en la consigna de la Tabla 5.4.

Nótese como la intención del medio se centra en la generación de retroacciones a las acciones de los estudiantes a partir de la pre-estructuración de la construcción, y su relación con el desarrollo del ESU del arrastre exploratorio que se intenta movilizar.

Situación de Formulación: Por el camino amarillo			
Consigna	Intención del medio	Reglas de juego	Estrategia ganadora
Había una vez un camino amarillo y siete puntos verdes. ¿Qué condición deben cumplir los puntos verdes para que todos puedan estar sobre el camino amarillo?	Restringir, por medio del control teórico del arrastre, dadas las características de la construcción, la exploración de las condiciones de los puntos involucrados.	Arrastrar los puntos y lograr dar una posible respuesta, en lenguaje natural, al problema que se plantea.	Identificar qué puntos son susceptibles de arrastrar, que cumplan las condiciones del problema, y reconocer las trayectorias circulares (respectos a los centros) que determina cada una.

Tabla 5.4 Análisis Situación 3 “Por el camino amarillo”

5.4 Situación 4: La flor

La propuesta en esta situación es trabajar en el contexto del arte, particularmente en lo referido a los rosetones, para indagar sobre algunas propiedades de la transformación de rotación, especialmente haciendo énfasis en la congruencia como propiedad invariante y en el ángulo de giro³⁸.

Actualmente entendemos que los rosetones constituyen un símbolo cristiano por excelencia, relacionado con los techos de las catedrales de influencia gótica, hecho que posiblemente ha ocasionado recurrentemente como objeto decorativo en distinto tipo de edificaciones³⁹.

³⁸ VASCO (2006) recoge parte de la complejidad de la noción de ángulo y las posibles relaciones con los giros, entendiéndose éstos como rotaciones de figuras en el plano.

³⁹ Históricamente se relacionan a los rosetones con el movimiento cultural y artístico, conocido como gótico, desarrollado principalmente en la Edad Media y en los inicios del

En el caso del famoso rosetón de la catedral de Notre Dame en París, presentado en la Figura 5.7 en su vista interior, aparecen con fuerza aspectos arquitectónicos propios del movimiento gótico: un uso decorativo que combina juegos de luz y sombra, representaciones de personajes religiosos utilizando materiales como el vidrio pintado.

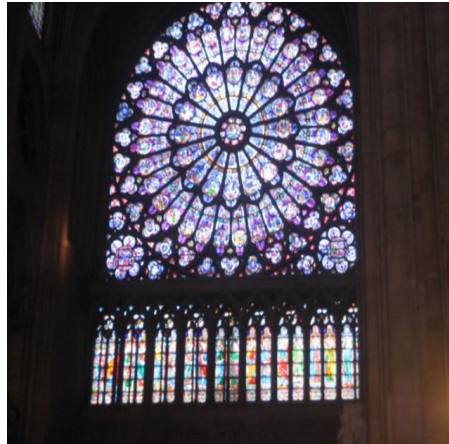


Figura 5.7 Rosetón Catedral de Notre Dame, París⁴⁰

Por otro lado, desde un punto de vista geométrico, puede interpretarse que la composición de un rosetón, como el anterior por ejemplo, presenta una influencia notoria de la transformación de rotación, pues es posible ubicar un centro y un conjunto de figuras congruentes que giran alrededor de éste, determinando distintos ángulos.

Desde una mirada curricular, puede decirse que esta situación, al igual que la anterior, recoge el espíritu exploratorio que plantea el enfoque de geometría activa, además de poner en relieve el contexto el arte y el diseño, como escenarios privilegiados para el aprendizaje de la geometría.

De igual manera, vale la pena señalar, desde una perspectiva epistemológica, el papel que juega la experimentación en relación con la exploración de propiedades invariantes, como la congruencia en este caso, y la realización de conjeturas respecto a éstas y sus efectos sobre las figuras.

Este planteamiento epistemológico, ya explicitado en capítulos antecedentes, se torna fundamental en estos análisis *a priori*, pues sustenta no sólo el tipo de situaciones a diseñar, sino también, el tipo de actividad matemática que se propone, en este caso, mediada por instrumentos.

Renacimiento. El rosetón se usa entonces como un tipo de ventana en forma circular, muy utilizada en la decoración de fachadas.

⁴⁰ Imagen rescatada de Internet, el 4 de septiembre de 2010, de <http://www.grandesguiaeseuropeas.com/ciudades/paris/notredame.htm>

En términos generales, la situación plantea el uso de una macroconstrucción, o simplemente macro, desarrollada a partir de una alternativa que ofrece Cabri y que se determina a partir de la delimitación del campo de acciones posibles del artefacto.

Como se ha visto anteriormente, el campo de acciones posibles de Cabri, en un sentido plenamente artefactual, permite delimitar posibles funciones sociales del mismo. En este caso, se retoma una función reconocida, como el uso de macroconstrucciones o macros, con el objeto de propiciar la emergencia del ESU del arrastre.

Una macro consiste en la aplicación de acciones grabadas y ejecutadas mediante una pulsación de tecla o una instrucción. Con el uso de macros se evita la introducción repetitiva de instrucciones, pues fácilmente éstas se pueden guardar en un archivo que el programa pueda identificar y el usuario fácilmente utilizar.

El trabajo en Cabri con macros se ha planteado desde hace varios años atrás, pues permiten que los estudiantes tomen en consideración los elementos constitutivos de la transformación a estudiar y la apliquen, de manera que puedan explorar sobre la figura, y conjeturar acerca de las propiedades invariantes en ésta.

Secuencias didácticas, como la propuesta por LOPEZ y SANTACRUZ (2004), que involucran el uso de macros ofrece una posibilidad en el estudio de transformaciones, debido a que un macro le proporciona al estudiante una figura inicial y final, mientras que su actividad matemática se centra en explorar sus relaciones y propiedades invariantes.

Investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas⁴¹, han mostrado que las mayores dificultades de los estudiantes residen en la identificación de las propiedades que se mantienen invariantes durante la transformación. Por tal razón, en esta situación se enfatiza en la noción de congruencia.

Se presenta la transformación de rotación en un contexto de diseño, relacionado con el arte gótico de los rosetones. A partir de una figura inicial y una composición de rotaciones concéntricas, el estudiante interactúa con una configuración determinada, la cual se facilita a través de la ejecución de una macro, lo que posibilita su posterior exploración por medio del arrastre.

⁴¹ Por ejemplo el trabajo realizado por ALSINA y otros (1993) en el cual se reportan algunos de los principales resultados investigativos de la época, respecto a las dificultades, errores y obstáculos los estudiantes cuando trabajan con transformaciones geométricas.

Dada una figura convexa, se realiza una transformación por rotación, con centro en uno de sus vértices y un ángulo positivo de 45 grados, tal como se presenta en la Figura 5.8.

Lo interesante es que una vez obtenida la figura imagen, ésta se constituye en una nueva figura inicial y se reinicia la transformación, generando una composición de rotaciones.

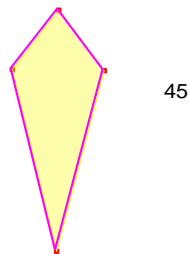


Figura 5.8 Configuración inicial Situación “Rosetón”

Paralelo a esta idea subyace una concepción de la figura como objeto geométrico dentro de una dialéctica global- puntual, ya reconocida en el ámbito de la didáctica de las matemáticas⁴². Con el desarrollo de la situación propuesta se pone en juego la concepción figural del estudiante, es decir, su concepción sobre los elementos que constituyen la figura y el papel que juegan éstos dentro de la transformación.

Al recrear una composición de rotaciones, se brinda un conflicto cognitivo rico en conceptos geométricos como la invariancia. Es probable que en el ejercicio visual los estudiantes vean “reproducciones” de la figura, pero también es posible que se acerquen a la reflexión en torno las propiedades de las figuras.

Un objetivo en la situación es el trabajo con las invariantes; el notar los cambios que surgen como efectos de la transformación, pero sobre todo, centrar la atención sobre aquellas características que no cambian y que hacen referencia a las propiedades de la figura, en este aspecto es notorio el esfuerzo por centrar la discusión acerca del centro de rotación.

⁴² La dialéctica global – puntual, desarrollada por JANH, A. y CLAROU, P. (1998), respecto al estudio de las transformaciones geométricas con Cabri, aborda desde la problemática que subyace a la re-configuración de la figura imagen, por medio de la concepción puntual. Es decir, que al realizar una transformación isométrica, se parte de una figura, luego ésta se desconfigura en sus elementos particulares, puntos en este caso, y posteriormente se reconfiguran dichos puntos, para formar la figura imagen. Este proceso constituye una dificultad para los estudiantes.

El diseño de la secuencia plantea que los estudiantes tengan la posibilidad de desarrollar situaciones de acción y, posteriormente, se propone una situación de formulación en la que se trata de elaborar ideas, hipótesis o conjeturas, a partir de la experimentación que el medio les brinda.

Esta situación propone un medio bastante particular: la interacción con un AGD a partir de la ejecución de una macro. Esto presupone dos cosas: primero, que la experimentación, se encuentra en relación con el campo de acciones posibles del artefacto y, segundo, que el ESU del arrastre, tal como se viene proponiendo, solo puede hacerse visible a partir de la delimitación de las restricciones consideradas en la fase pre-estructurada del mismo.

El número que representa la medida del ángulo implicado en la composición de rotaciones, hace parte del conjunto de elementos iniciales para ejecutar la macro: una figura inicial, un centro de rotación y un número; la experimentación se va a centrar en los efectos de este número sobre la figura puesta en consideración.

La Tabla 5.5 presenta una síntesis de los análisis *a priori* de la Situación 4:

Situación de Comunicación			
Consigna	Intención del medio	Reglas de juego	Estrategia ganadora
¿Qué había antes de aplicar la macro? ¿Qué pasó después? Imagina que le vas a contar a tu pareja cómo es la flor que obtuvimos después de aplicar la macro, ¿Qué le dirías?	A partir del control teórico del arrastre, generar retroalimentaciones al estudiante, enfatizando en la posible identificación de invariantes y, a partir de su experimentación, e intentar formular algunas conjeturas.	Ejecutar la macro y explicar las razones por las cuales la figura, es, o nó, un rosetón.	Determinar un procedimiento para ejecutar la macro, hacer uso del ESU del arrastre para conjeturar sobre posibles propiedades invariantes del rosetón, particularmente la congruencia.

Tabla 5.5 Análisis Situación 4 “La flor”

5.5 Situación 5: Rosetón

De una manera parecida a lo propuesto anteriormente, esta situación supone la actividad, nada trivial, ni “natural”, de explorar los objetos propuestos y determinar cuáles de ellos son susceptibles al arrastre.

Esencialmente esta es una situación de Formulación, que propone a los estudiantes la configuración presentada en la Figura 5.9, donde los estudiantes, en un contexto experimental, puedan conjeturar aspectos invariantes de los objetos con los cuales interactúan, a partir de un medio concebido alrededor de la emergencia del arrastre exploratorio.

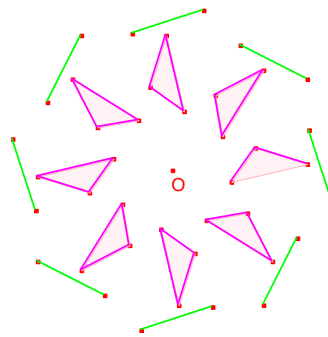


Figura 5.9 Configuración rosetón propuesto en la Situación 5

Nuevamente, se propone la movilización del ESU, con el propósito explícito de lograr algunos avances en el proceso de pasar de un arrastre errático, a uno que tenga la intencionalidad de explorar propiedades. Esa es la manera como se ha entendido y operado con el ESU del arrastre que se propone.

Igualmente, según lo planteado en el ESU del arrastre, se inicia con una fase pre-estructurada del esquema, correspondiente a las restricciones de la construcción geométrica que es proporcionada a los estudiantes. Asegurar el control teórico del arrastre, exige consideraciones acerca de la construcción que se presenta, en este caso, un rosetón.

La construcción en Cabri, representa un rosetón con centro en O , respecto al cual aparecen relacionados, mediante una composición de rotaciones, un conjunto de triángulos. De igual manera, utilizando el mismo ángulo y centro, se exhiben un conjunto de segmentos igualmente relacionados mediante una rotación.

Tenemos entonces, una composición de rotaciones concéntricas, pero, a diferencia de la rotación concéntrica que se presenta en la Situación 1, en ésta ocasión no se encuentran circunferencias ocultas delimitando la construcción.

En este caso, por haberse utilizado la herramienta “Rotación” disponible en Cabri, se puede garantizar que, a pesar de un arrastre errante, en cualquier dirección, la configuración construida y presentada a los estudiantes, siempre mantendrá invariantes sus propiedades geométricas.

Recordando las variables micro-didácticas que orientan el diseño de la secuencia, nótese, por ejemplo, el papel de la congruencia, haciendo uso de distintos tipos de figuras, y las relaciones que pueden establecerse entre la figura inicial, la figura final y el centro de rotación.

En situaciones anteriores se han podido lograr unos primeros avances en cuanto al ESU del arrastre, no obstante, en esta tarea nuevamente se retoma la Fase de

acción del ESU, centrada en la acción intencional de arrastrar determinados objetos en la pantalla.

Mientras que en esta situación, tal como lo pretende exhibir la Tabla 5.6, los estudiantes avanzan en la identificación de objetos que se pueden arrastrar, y que objetos no, va a ser muy importante el reconocimiento de propiedades invariantes. Es vital que los estudiantes exploren, por ejemplo, cómo las figuras, a pesar del arrastre, se mantienen congruentes, o en términos de los niños, “del mismo tamaño”.

Situación de Formulación			
Consigna	Intención del medio	Reglas de juego	Estrategia ganadora
¿Cómo sabemos que esta figura es un rosetón?	Evidenciar el control teórico del arrastre: las restricciones de la construcción geométrica, realizada a partir de la composición de rotaciones concéntricas, manteniendo invariante la medida del ángulo.	Encontrar cuáles son los puntos susceptibles de arrastrar y lograr moverlos sobre la pantalla.	Utilizar un arrastre errante para y lograr esbozar una conjetura: independientemente del arrastre que podamos hacer, siempre la configuración va mantener invariantes las propiedades de un rosetón.

Tabla 5.6 Análisis Situación 5 “Rosetón”

Posiblemente, una vez identificados los puntos libres, la exploración de los estudiantes los puede encaminar a que logren discernir entre la figura F (figura inicial) y sus respectivas homólogas. Aún así, va a ser muy importante la gestión del profesor, en términos de devoluciones, para que los estudiantes puedan reconocer éste tipo de fenómenos.

Sin embargo, debe ser claro, que el propósito central de esta tarea es explorar la congruencia como propiedad invariante, haciendo una relación directa con la trayectoria circular que ya se había explorado en situaciones anteriores.

La propuesta de lo artístico, particularmente de los rosetones, posibilita el trabajo con composiciones de rotaciones concéntricas, lo cual en relación con la naturaleza del objeto puesto en consideración, brinda una mirada particular respecto al papel que juega el centro de rotación, los ángulos y las figuras relacionadas por medio de la transformación.

Interesante será entonces, poder dar cuenta de las distintas “versiones” de rosetón que produzcan los estudiantes modificando la configuración por medio del arrastre. Posibles respuestas de los estudiantes serían las presentadas en la Tabla 5.7:

Cuando arrastramos...	Que cambia...	Que no cambia...
Un punto del triángulo	La forma y las posiciones de los triángulos.	Todos los triángulos son del mismo tamaño.
Un punto del segmento	El "largo" de los segmentos.	Todos los segmentos son del mismo tamaño mientras los movemos.
Otro punto del triángulo...	... las formas vuelven a cambiar.	Al mover el punto... todos los triángulos cambian lo mismo.
...	... las posiciones, las formas, los tamaños...	Al mover un triángulo o un segmento especial, todos los demás cambian también.
...	El tamaño del segmento (la longitud).	Al mover un punto del segmento, todos los otros también cambian.

Tabla 5.7 Posibles respuestas de los estudiantes en la Situación 5

El control teórico asegura que en esta construcción, siempre vamos a obtener un rosetón, aunque los estudiantes puedan encontrarse con versiones muy distintas al original. No obstante, en este caso, el papel del centro es fundamental (y cabe anotar que este punto es un punto inmóvil), y está íntimamente relacionado con el ángulo de rotación que determina al rosetón.

5.6 Situación 6: Loco rosetón

Las Situaciones 5 y 6 toman en consideración elementos comunes. Mientras que en la situación antecedente, el arrastre permitía generar cambios en la figura de manera que la congruencia se mantenga invariante su estructura como rosetón, en esta situación, se propone el uso de un arrastre que posibilite "forzar" la configuración inicial, para hacerla pasar por un rosetón.

Con la configuración presentada en la Figura 5.10, se espera entonces que afloren y se movilicen muchas concepciones de los estudiantes respecto al "tamaño" de los objetos involucrados.

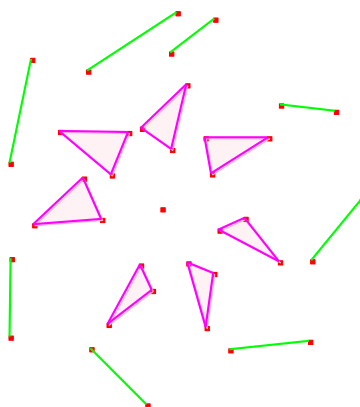


Figura 5.10 Configuración presentada en la Situación 6 "Loco rosetón"

Desde esta perspectiva, la congruencia, entendida a partir de la distancia entre dos puntos en el plano, remite a trabajos clásicos en el campo respecto a la conservación de la distancia, y además en este caso, del sentido.

Sin embargo, se propone un acercamiento caracterizado por variables visuales, para poder darle el mismo sentido y la misma longitud a los objetos involucrados.

Los estudiantes se enfrentan a la condición de la existencia de múltiples puntos móviles y otros tantos dependientes de éstos. Así que al presentarse movimientos, no todos dependientes, las variables visuales serán mucho más exigentes como lo intenta exhibir la Figura 5.11 a continuación:

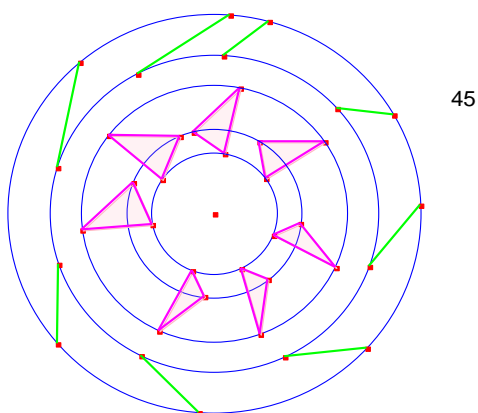


Figura 5.11 Construcción oculta Situación 6 “Loco rosetón”

Aunque la construcción desvelada en la Figura 5.11, explicita elementos importantes, tales como la existencia de un centro de circunferencias respecto a las cuales se determina la construcción de figuras que están relacionadas mediante distintas rotaciones que, aunque comparten el mismo ángulo y centro, no permiten que la configuración presentada pueda catalogarse como un rosetón.

Entonces, la pregunta se devuelve a ¿Cuáles son las características de un rosetón? Y ¿Qué condiciones debería cumplir esta configuración para ser considerada como un rosetón?

La Tabla 5.8 presenta una síntesis de los análisis a priori anteriormente realizados respecto a la Situación 6:

Situación de acción			
Consigna de la Tarea	Intención del medio	Reglas de juego	Estrategia ganadora
Modifiquen la figura para que sea un rosetón.	Utilización del ESU del arrastre, haciendo énfasis en la posible identificación de invariantes y, a partir de su experimentación, lograr cumplir con las condiciones del problema.	Determinar cuáles son los objetos que se pueden mover y lograr “arreglar” la figura para que visualmente parezca un rosetón.	Realizar un arrastre errante para lograr “deformar” la configuración presentada y reconocer la congruencia, a partir de la distancia, de figuras relacionadas mediante rotaciones.

Tabla 5.8 Análisis Situación 6 “Loco rosetón”

5.7 Situación 7: Círculos en parejas

Esta última situación “Círculos en parejas” se presenta en el marco de una dialéctica de validación. Aunque se intenta cerrar la secuencia, de todas formas, no logra agotarse el tratamiento que de la rotación se puede dar en el contexto escolar para este nivel de escolaridad. Ni este ha sido tampoco el interés central de la secuencia.

Sin embargo, la manera como se ha diseñado la secuencia, lleva a que los estudiantes en su última situación tengan que poner en juego mucho de lo que han ido construyendo en las situaciones anteriores.

Esta situación se concibe como un cierre al trabajo planteado. Pone en juego un tratamiento de las variables en relación con el centro; se trabaja una composición de rotaciones concéntricas, y en relación con las formas de las figuras, en este caso círculos, tal como lo presenta la figura 5.12:

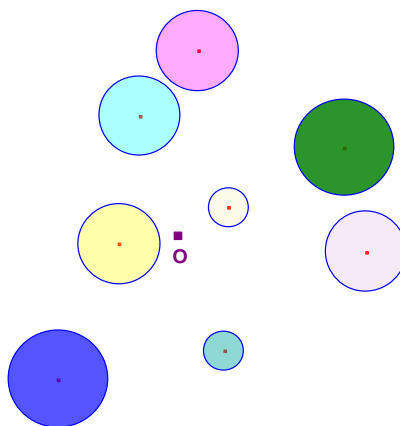


Figura 5.12 Configuración presentada en la Situación 7 “Círculos en parejas”

Frente a esto último, en la secuencia ha predominado el trabajo con figuras poligonales, y en esta situación el trabajo se propone con círculos. La razón es que los estudiantes deban apelar más directamente al “tamaño del círculo” que a su forma.

Así que se supone que al problematizar esas relaciones entre la forma y el tamaño, es posible que los estudiantes hagan uso del arrastre exploratorio para poder cumplir con los requerimientos del problema: determinar círculos congruentes.

Y es justamente frente a esto que la construcción planteada y desvelada en la Figura 5.13, garantiza que los círculos no se deformen ni abandonen la trayectoria de la circunferencia que sirve de base para su construcción, lo cual garantiza que por medio del arrastre se puedan superponer parejas de circunferencias congruentes.

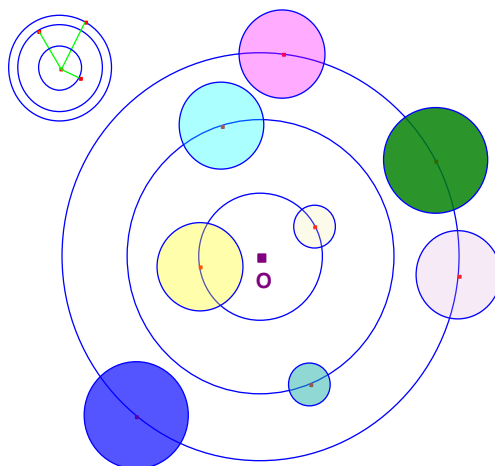


Figura 5.13 Construcción oculta Situación 7 “Círculos en parejas”

En este caso, la dialéctica de la validación pedirá que los estudiantes avancen de dar posibles explicaciones, a una primera aproximación de prueba pragmática, en el sentido de BALACHEFF (2000), es decir, aquella que recurre a la acción y la ostensión.

En esta sentido, la dialéctica de la validación en relación con la prueba está totalmente relacionada con la explicación, pero la supera. Entendemos por prueba una explicación reconocida y aceptada, es decir, validada en el contexto de la comunidad del salón de clases.

Ese paso de la explicación a la prueba, es entendida como un proceso social, que va a buscar “legitimar” un discurso, por parte de dicha comunidad.

Finalmente, la Tabla 5.9 presenta una síntesis del análisis *a priori* de la Situación 7 “Círculos en parejas”:

Situación de validación			
Consigna de la Tarea	Intención del medio	Reglas de juego	Estrategia ganadora
¿Qué círculos forman pareja? ¿Cómo sabemos que son una pareja?	Evidenciar el control teórico del arrastre: las restricciones de la construcción geométrica, propicia un arraste exploratorio, a partir de la composición de rotaciones concéntricas.	Identificar los puntos susceptibles a arrastrar (libres) y sus respectivos homólogos o dependientes.	Lograr superponer los círculos que efectivamente forman pareja y explicitar el tamaño (longitud del diámetro) y la trayectoria (circunferencia que los aloja) como las propiedades fundamentales.

Tabla 5.9 Análisis Situación 7 “Círculos en parejas”

5.8 Gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor

Aunque aparezca en un último momento, no significa que la gestión didáctica del sistema de instrumentos no sea importante. Al contrario, se hizo necesario explicitar el diseño de las situaciones para poder repensar la gestión en términos de la TSD.

Como se ha planteado anteriormente, la gestión didáctica de los sistemas de instrumentos a cargo del profesor, o simplemente gestión del profesor, hace parte central de los análisis *a-priori* y es un componente transversal del diseño de esta secuencia didáctica.

Queda claro que toda la secuencia didáctica ha presentado una estructura centrada en las variables didácticas privilegiadas. La gestión del profesor, no se escapa de esta concepción.

Al respecto, una de las actividades centrales del profesor se situará en relación con las tensiones del contrato didáctico que se pueden evidenciar en esta secuencia, principalmente en lo relacionado con las responsabilidades, roles y acciones de los estudiantes y profesor.

Evidentemente, el hecho de que la TSD inspire el diseño de la secuencia, supone al profesor una actividad menos dada a explicar, pero quizás más relacionada con escuchar, con preguntar, con gestionar.

Como hipótesis se sostiene que la gestión, entendida desde la perspectiva de la orquestación instrumental, tiene un impacto importante en el establecimiento de dicho contrato. Los propósitos y el tipo de situación, y la actividad del estudiante, se consideran aspectos relacionados con la posible actividad

matemática que éste pueda realizar, en este caso, asociada con el ESU del arrastre exploratorio.

Especialmente en este contrato, el profesor reconoce que la actividad matemática del estudiante se sustenta en la experimentación, principalmente en la producción de conjeturas acerca de propiedades invariantes, y que en este sentido deben ir encaminados sus actos de devolución.

Particularmente, la gestión de los sistemas de instrumentos, concernientes al profesor y ubicados en el sistema de explotación didáctica, se realiza por fases⁴³. ARTIGUE (1995) reconoce las fases como elementos de las variables micro-didácticas concernientes a una organización local, y por tanto, se considera que su uso posibilita un mayor nivel de organización.

Afinando esta consideración, MARGOLINAS (2009) plantea las fases en relación con las intencionalidades del diseño de la secuencia didáctica, de esta manera, la gestión didáctica de los sistemas de instrumentos se realizará de acuerdo a la naturaleza de la situación: fase de instalación del contrato didáctico, donde se explicitan las reglas de juego de la situación, y una segunda fase centrada en los actos de devolución por parte del profesor.

Los actos de devolución se consideran entonces centrales, y asume que aunque se propone una situación a-didáctica donde el estudiante interactúa directamente con el medio, representado en la interface de Cabri, el profesor siempre va a estar presente y muy activo durante el desarrollo de toda la situación. Sus devoluciones darán cuenta de ello, y de las responsabilidades que se hayan hecho explícitas en la fase de instalación del contrato.

Igualmente recae sobre el profesor la gestión de una fase de validación, entendida como un acto colectivo y, finalmente, una institucionalización de los conocimientos puestos en juego.

En cuanto a la fase de validación, ésta empieza a perfilarse como un espacio colectivo vital, no solo para las devoluciones del profesor en cuanto al objeto matemático, puesto en juego, sino que lo pone en relación directa con la emergencia del ESU del arrastre, que finalmente constituye el rasgo particular de la actividad matemática que se quiere proponer en esta secuencia.

Finalmente, el profesor podrá dar inicio a la fase de institucionalización, o de acuerdos colectivos. Es vital en este apartado realizar acuerdos respecto a las nociones matemáticas centrales: la trayectoria de una figura que rota alrededor de un centro y la congruencia como propiedad invariante.

⁴³ En el sentido de MARGOLINAS (2009) al realizar la diferenciación entre situación, episodio, fase o proceso, en relación con la Teoría de Situaciones Didácticas de BROUSSEAU (1986 a, 1986 b).

Aunque la gestión aparece dividida por fases, debe tenerse en consideración que éstas pueden superponerse, y que no existen unos límites absolutos entre ellas. En la dinámica de la clase es muy probable que mientras el profesor está en la fase de validación deba recurrir a los actos de devolución y al mismo tiempo gestionar tiempos.

Desde este punto de vista, a continuación se explicitan los criterios que pueden llegar a dar cuenta de la gestión del profesor en cada una de las fases anteriormente señaladas. Esto es importante considerarlo en el análisis *a-priori*, pues servirá de referencia importante para poder realizar el análisis *a-posteriori* de dicha gestión.

Primera fase: Gestión del contrato.

- Organización de los tiempos: el profesor determina cuándo inicia y finaliza el trabajo en una situación, cuándo inicia y finaliza la fase de acción y de la fase colectiva del ESU del arrastre exploratorio.
- Mecanismos de participación: el profesor establece los medios y momentos en los cuales pueden participar los estudiantes de manera colectiva.
- Explicita las consignas y reglas de juego: el profesor presenta las consignas de la tarea en cada situación, igualmente hace énfasis en las respectivas reglas de juego.

Segunda fase: Actos de devolución

- El profesor no revela la estrategia ganadora, al contrario realiza actos de devolución para que los estudiantes asuman como propio el problema.
- Se realizan devoluciones respecto a la fase de acción del ESU, es decir, la acción de identificar objetos susceptibles al arrastre y la acción intencional de arrastrar los objetos sobre la pantalla.
- Las devoluciones también se realizan durante la fase colectiva del ESU, cuando el interés se centra en el reconocimiento de las propiedades invariantes de las figuras, y se hace explícita una intencionalidad matemática.

Tercera fase: Validación

- Se determina el espacio en el que los estudiantes realizan una socialización (fase colectiva del ESU).
- A partir del uso del arrastre exploratorio, promueve la elaboración de argumentaciones por parte de los estudiantes.

Cuarta fase: Institucionalización

- Retoma elementos de las producciones (orales o escritas de los estudiantes) para llegar a acuerdos centrales sobre las propiedades invariantes de la rotación en cada una de las situaciones.
- Esta fase no debe desconocer el papel del arrastre exploratorio, el profesor debe intentar evidenciar las relaciones arrastre exploratorio – propiedades invariantes de la rotación.

Por su parte, la Tabla 5.10 intenta presentar, de una manera resumida, la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor:

Gestión didáctica del sistema de instrumentos			
Primera Fase Gestión del contrato	Segunda Fase Actos de devolución	Tercera Fase Validación	Cuarta Fase Institucionalización
<p>Gestiona tiempos y mecanismos de participación de los estudiantes.</p> <p>Explicita las consignas y reglas de juego.</p>	<p>Se abstiene de revelar la estrategia ganadora. Moviliza los conocimientos de los estudiantes a partir de preguntas:</p> <p>¿Qué fue lo que intentaron hacer? ¿Por qué creen que no funciona? ¿Qué otra cosa podrían intentar? ¿Qué pueden concluir de lo que hicieron?</p>	<p>El profesor gestiona un espacio de socialización en el que los estudiantes presentan sus trabajos e inicia un proceso de validación centrado en las argumentaciones que puedan desarrollar los estudiantes.</p>	<p>Al final de la situación, se realizan acuerdos profesor – estudiantes acerca de los conocimientos involucrados y movilizados a partir del posible arrastre exploratorio realizado por los estudiantes.</p>

Tabla 5.10 Análisis de la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor

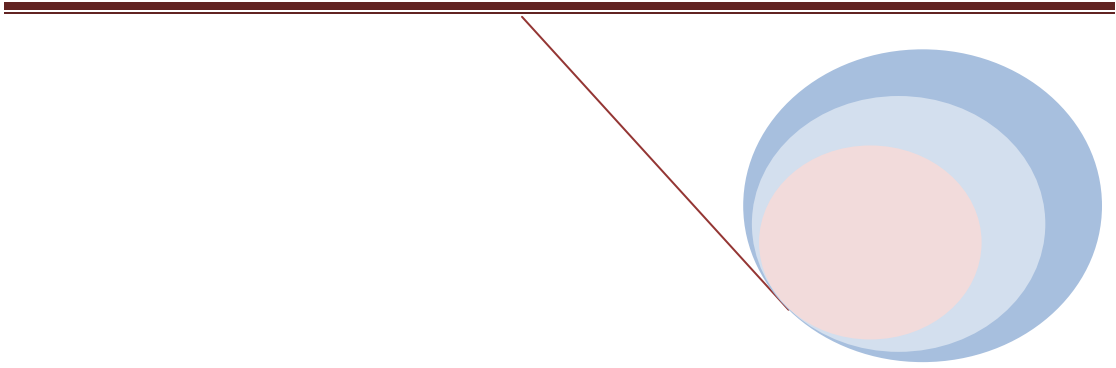
De esta manera, se finalizan los análisis *a priori*, queriendo enfatizar en aspectos fundamentales del diseño de las situaciones que conforman la secuencia didáctica.

Básicamente se trató de identificar la naturaleza de cada situación en virtud de su intencionalidad, fuera de acción, formulación, comunicación o validación. Para esto, las unidades de análisis involucradas se centraron en la consigna de la tarea, la intención del medio, las reglas de juego y la estrategia ganadora.

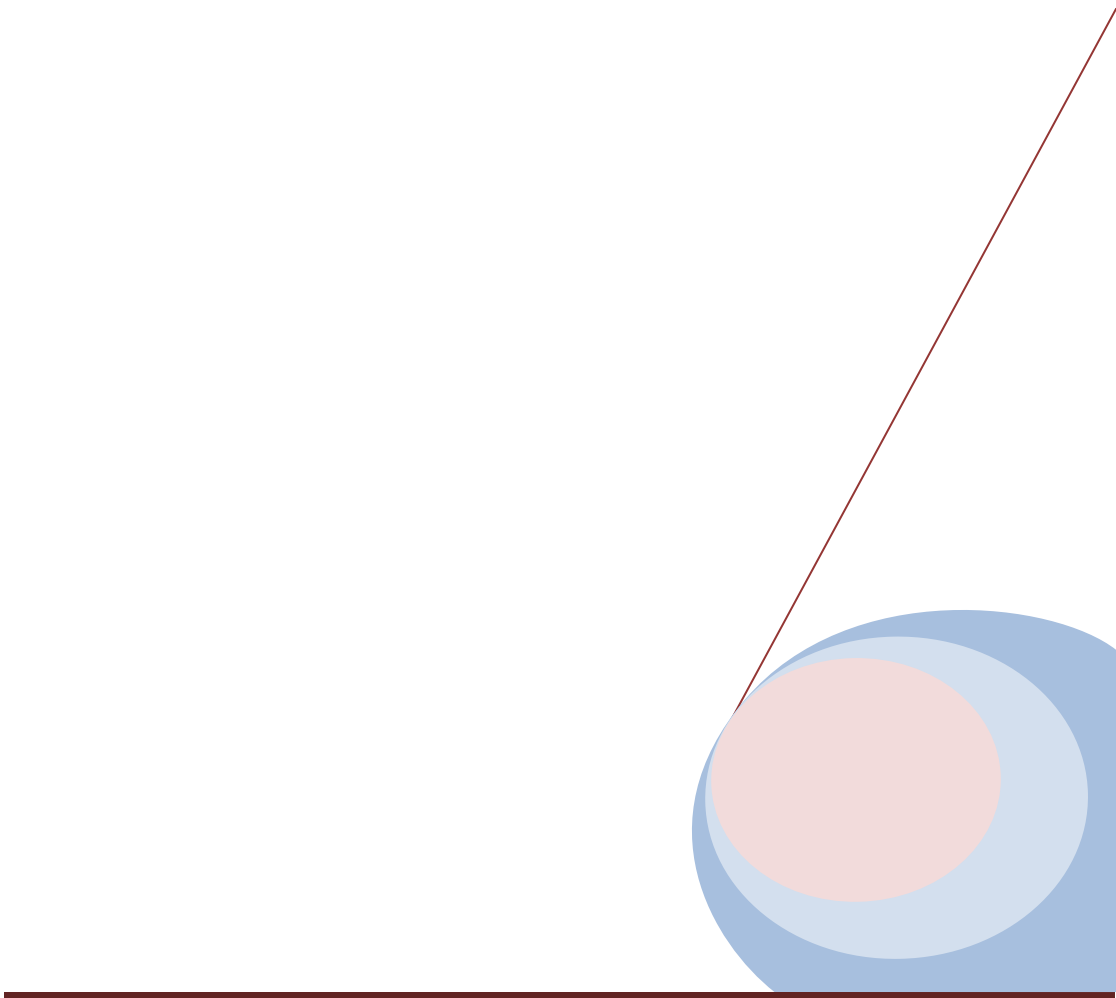
Sin embargo, como se subrayó anteriormente, éste análisis toma coherencia cuando los elementos anteriores convergen respecto a la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor. Para esto se propuso una gestión

por fases respecto a la instalación del contrato, los actos de devolución, la validación y finalmente, la institucionalización.

Serán los análisis *a posteriori*, objeto del capítulo siguiente, los que puedan exhibir los sentidos y alcances de estos *a priori* en un proceso de evaluación y validación interna de la investigación.



CUARTA PARTE
EVALUACIÓN Y VALIDACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN



CAPÍTULO VI

ANÁLISIS A POSTERIORI

Aunque el presente capítulo hace énfasis en la fase de evaluación de la secuencia didáctica, también es conveniente dejar claro los mecanismos por los cuales se realiza el proceso de validación interna de la investigación, en el sentido de la micro ingeniería didáctica.

En este sentido, se proponen posibles diálogos que se puedan realizar entre los análisis *a priori*, los *a posteriori* y las hipótesis de investigación. Esa triada se configura en el referente respecto al cual será evaluado el dispositivo experimental que se presentó anteriormente.



Figura 6.1 Proceso de validación interna de la investigación

Por su parte, la fase de análisis *a posteriori*, o evaluación de la secuencia didáctica, toma en consideración los datos, (producciones escritas de los estudiantes, fotografías, filmaciones) recogidos en la fase de experimentación o de aplicación.

Para esto, los análisis *a posteriori* toman tres referentes centrales: por un lado se considera el diseño de las situaciones, alrededor de lo presentado en los *a priori*, en relación con las condiciones y restricciones de la construcción geométrica, explicitada en la preparación del medio (Fase pre estructurada del ESU del arrastre exploratorio).

Ese diseño de las situaciones se conecta con las hipótesis del dispositivo experimental, que permitirían ver las condiciones de tensión en la sostenibilidad de un sistema de instrumentos, que se desarrolla en la clase, a partir de la secuencia didáctica propuesta.

Otro referente del análisis lo constituye, respecto a la actividad instrumentada de los estudiantes, la emergencia y evolución del ESU que se intentó movilizar en la secuencia, como eje central de la orquestación instrumental que se ha querido proponer.

Al respecto, la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor, constituye el último referente frente al cual, las hipótesis de investigación se han apoyado. El seguimiento al desarrollo de esta gestión permitirá evaluar el sentido, alcances y limitaciones de la secuencia didáctica, en relación con la orquestación instrumental que la estructura.

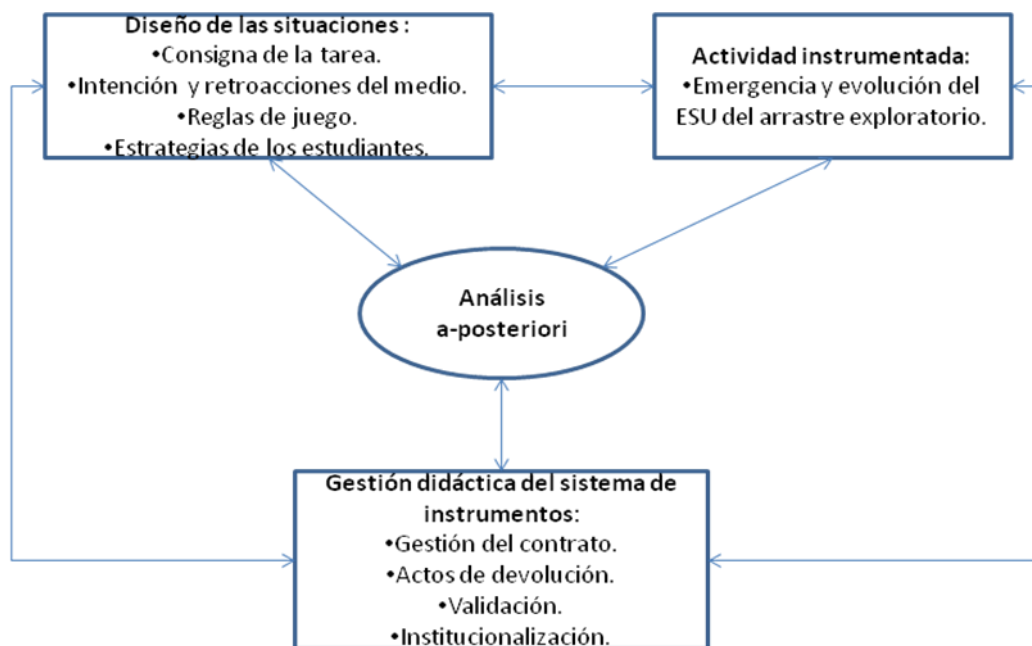


Figura 6.2 Estructura del análisis *a posteriori*

6.1 Caracterización de la población objeto

La fase experimental de la investigación se desarrolló con un grupo regular de grado quinto de educación primaria, perteneciente a una institución educativa pública del municipio de Yumbo (Valle), la cual atiende estudiantes desde el grado Jardín (4 años) hasta Undécimo (16 años).

La Sede en la cual se llevó a cabo la experiencia, desarrolla actividades para los grados Transición (5 años) a Quinto (10 años). Igualmente, se cuenta con una sala de sistemas que consta de 20 computadores conectados a Internet, un TV, DVD, un video beam, y tablero acrílico.

El grado quinto que participó en la experimentación, labora en la jornada de la tarde; presenta una población mixta de 41 estudiantes, con una edad promedio

de 10 años y medio, los cuales, en general, se adscriben a una condición socio económica media – baja.

Una condición particular de la propuesta pedagógica de la Institución en la cual se desarrolla la experiencia, es un énfasis en lo que ellos han reconocido como aprendizaje colaborativo, en el que los estudiantes, de todos los niveles, trabajan en pequeños equipos de hasta 5 estudiantes, en todas las áreas.

En clase de geometría, han trabajado algunas actividades con doblado y recorte de papel, construcciones geométricas sencillas haciendo uso de la regla, el compás y el geoplano. Al momento del desarrollo de la fase experimental, su trabajo en grado quinto, había correspondido al reconocimiento de propiedades, y clasificación de figuras planas.

En términos generales conocen polígonos regulares, clasificación de polígonos según su número de lados y algunas propiedades generales de los triángulos. Su intensidad horaria para la clase de geometría corresponde a una hora semanal.

Estos estudiantes han tenido anteriormente algunas experiencias básicas en el trabajo con computadores, sobre todo lo referente a procesadores de texto, de diapositivas, programas de dibujo y búsqueda de información por Internet. Alrededor de la mitad de los estudiantes tiene su correo electrónico y hacen uso de él, al menos una vez por semana.

Este grupo de estudiantes nunca se había relacionado previamente con Cabri Géomètre u otro AGD. En grados anteriores han trabajado algún software de dibujo como *Paint*.

6.2 Organización de la experimentación

La experimentación del dispositivo requirió una serie de aplicaciones previas con el propósito de hacer evolucionar el diseño de las situaciones. En una primera versión, se realizó la aplicación a una pareja de estudiantes de grado quinto. Posteriormente, se realizaron dos aplicaciones a grupos completos de estudiantes del mismo nivel de escolaridad.

Estas aplicaciones previas, permitieron refinar las situaciones, las consignas, el manejo de las variables micro-didácticas consideradas, y fueron un referente importante para el análisis *a-priori*. De alguna manera se intentó “mejorar” el diseño del dispositivo, antes de la realización de la fase experimental propiamente dicha.

Esta fase experimental de la investigación se dividió en dos grandes etapas. La primera etapa, se refiere al conocimiento previo del profesor, antes de aplicar la secuencia. La segunda etapa, hace alusión a la aplicación de la secuencia con el grupo de estudiantes.

En una **primera etapa** de la experimentación, se abordó al profesor con el objeto de poder realizar un panorama general de lo que sería la aplicación con el grupo de estudiantes.

Esta primera parte presentó una dificultad. Fue realmente difícil poder encontrar un profesor que cumpliera con unos requerimientos básicos para poder realizar la aplicación: en primer lugar el profesor debería contar con una formación suficiente en el campo de la geometría, y especialmente, en lo referente a las transformaciones geométricas; igualmente debería ser una persona con experiencia trabajando Cabri en el aula, a ese nivel de escolaridad, y tener unos conocimientos básicos de la TSD para poder interactuar con el diseño de las situaciones.

Finalmente se contó con la colaboración de un profesor Licenciado en Educación Primaria con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle. El profesor fue invitado a la Institución con el objeto de la aplicación de esta secuencia didáctica, por tanto, no es el profesor regular del grupo.

En esta primera parte se le entregó al profesor copia de los análisis *a priori*. La idea era que él pudiera contar con un documento de referencia, además se realizaron tres reuniones en las cuales se discutieron las situaciones y hubo la posibilidad de que el profesor conociera la secuencia didáctica.

Estas reuniones fueron grabadas en video. En ellas se presentó la idea general del trabajo de investigación, su intencionalidad, el diseño de las situaciones y se revisaron los análisis *a priori*. El profesor tuvo la oportunidad de hacer sus interpretaciones, e incluso, de realizar observaciones y sugerencias a los diseños.

Una idea importante que se movilizó en esta primera parte, fue que el profesor contaba con total libertad de interpretar las situaciones, y de realizar las modificaciones que en el momento considerara necesarias. Es importante resaltar esto, pues aunque el “Escenario de uso” constituyó en una referencia importante, el profesor estaba en la posibilidad de actuar de manera autónoma durante la aplicación, según sus criterios, realizar los ajustes que considerara necesarios, pues esto mismo constituye un aspecto central del análisis *a posteriori*.

La **segunda etapa** de la experimentación se llevó a cabo durante tres sesiones de trabajo, cada una con una duración aproximada de dos y horas, realizándose una sesión por semana, para un total de tres semanas. Los datos se recogieron con una estrategia mixta: por video y documentos (textuales y fotográficos).

El registro en video se realizó en simultáneo por dos cámaras, una panorámica que abordó una mirada general del salón de clase, y otra móvil, que realizaba acercamientos al trabajo de los estudiantes y el profesor.

Los documentos lo constituyen el material escrito que produjeron los estudiantes durante el desarrollo de las situaciones. En este material se puede identificar la consigna de la tarea correspondiente (Ver ANEXOS).

Sin embargo, debe de considerarse que aunque la primera etapa de la experimentación es fundamental, esta no es el objeto central del análisis *a posteriori*, por el contrario, la puesta en escena, o etapa dos, será la que ocupará primordialmente la atención.

6.3 Procesamiento de la información: Las rejillas de análisis

A continuación, en la Tabla 6.1, se sintetiza información relevante de la recolección y tratamiento de la información. Las unidades de análisis consideradas corresponden a las anteriormente presentadas en la Figura 6.1 estructura del análisis *a posteriori*.

Medio de recolección de la información	Unidades de análisis	Instrumento
Video Documental	Actividad instrumentada	Rejilla AI-1
	Emergencia y evolución del ESU del arrastre exploratorio.	
Video	Gestión didáctica del sistema de instrumentos	Rejilla GDSI-1
	Gestión del contrato. Actos de devolución. Validación. Institucionalización.	
Video	Diseño de las situaciones	Rejilla DS-1
	Consigna de la tarea. Intención del medio. Reglas de juego. Estrategias de los estudiantes	

Tabla 6.1. Tratamiento de la información Etapa 2 de la experimentación

A partir de lo planteado en la tabla anterior a continuación se presenta la información ya sistematizada, para luego ser sometida al diálogo entre el análisis *a priori* y *a posteriori*, y la confrontación con las hipótesis de investigación.

Vale la pena explicitar que las tres unidades de análisis se articulan alrededor de dos aspectos primordiales del trabajo: la emergencia del arrastre exploratorio, en el sentido de instrumento, la gestión didáctica del sistema de instrumentos y la noción de rotación puesta en juego.

Para dar cuenta de esto se diseña un sistema del tratamiento de la información, en la cual se han elaborado unos instrumentos de recolección y otros de procesamiento de la información, lo cual facilita un análisis final de los datos.

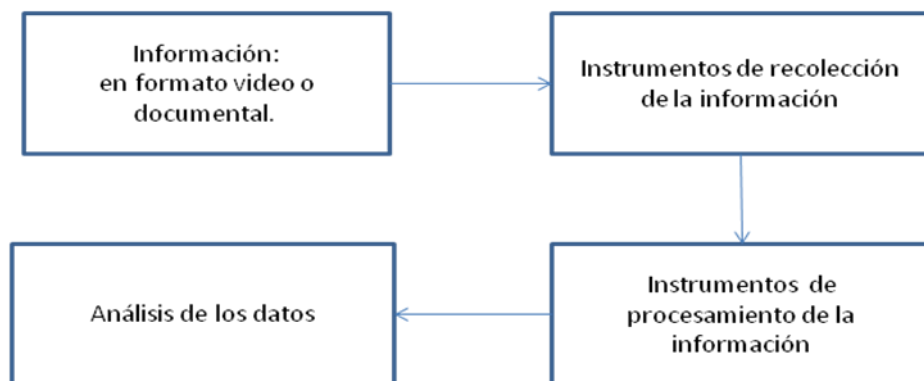


Figura 6.3. Sistema de tratamiento de la información recolectada

A continuación interesa dar cuenta de los instrumentos de procesamiento de la información. Se consideró más oportuno realizar una presentación en detalle de estos instrumentos dada la necesidad de la realización del respectivo análisis.

6.3.1 Actividad instrumentada

La rejilla AI-1, presentada en la Tabla 6.2, está diseñada para sistematizar la información recogida en formato de video o documental; el propósito central es dar cuenta de la emergencia y evolución del ESU del arrastre exploratorio (Figura 4.5).

Debe recordarse que la emergencia colectiva del ESU del arrastre exploratorio se divide en tres fases: una primera fase pre-estructurada, concerniente al diseño de las situaciones, una segunda fase de acción relacionada con el estudiante y una última fase colectiva, entre profesor y estudiantes.

Para dar cuenta de la actividad instrumentada como unidad de análisis, se toman tres elementos fundamentales referidos a la fase de acción del ESU, y la fase colectiva.

Rejilla AI-1		
Unidad de análisis		
Actividad instrumentada: Emergencia y evolución del ESU del arrastre exploratorio.		
Fase de acción del ESU (por el estudiante)	Identificar objetos susceptibles al arrastre.	
	Arrastrar objetos sobre la pantalla.	
Fase colectiva del ESU (profesor y estudiante)	Reconocer propiedades invariantes: intención matemática	

Tabla 6.2 Rejilla AI-1 Actividad instrumentada

6.3.2 Gestión didáctica del sistema de instrumentos

Tomando como referente la Tabla 5.6 sobre el análisis de la gestión didáctica del sistema de instrumentos realizada por el profesor, se configura la rejilla GDSI-1, presentada en la Tabla 6.3, en la cual se retoman las fases de dichas gestión con el objeto de favorecer el análisis:

Rejilla GDSI-1	
Unidad de análisis:	
Gestión didáctica del sistema de instrumentos	
Gestión del contrato	
Actos de devolución	
Validación	
Institucionalización	

Tabla 6.3 Rejilla GDSI-1 Gestión didáctica del sistema de instrumentos

6.3.3 Diseño de las situaciones

Para dar cuenta del diseño de las situaciones se hace referencia a la Fase pre-estructurada del ESU (Figura 4.5); sobre dos aspectos fundamentales: el control teórico del arrastre, es decir las restricciones en la construcción geométrica y las configuraciones en pantalla.

Esto es importante para poder articularlo con la actividad instrumentada y la gestión didáctica del sistema de instrumentos. Para esto, se tienen en cuenta los componentes propios del análisis a-priori, presentados en páginas anteriores y se estructura la Rejilla DS-1 presentada en la Tabla 6.4:

Rejilla DS-1	
Unidad de análisis:	
Fase pre-estructurada del ESU: control teórico del arrastre y configuraciones en pantalla	
Consigna de la tarea	
Intención y retroacciones del medio	
Reglas de juego	
Estrategias de los estudiantes	

Tabla 6.4 Rejilla DS-1 Diseño de las situaciones

6.4 Presentación de los análisis

En esta sección se presenta la información sistematizada, cada una con sus respectivos análisis a partir del diálogo *a priori* y *a posteriori*, con el objeto de dar cuenta de la validación interna del trabajo de investigación.

Cada presentación de los análisis se acompaña con transcripciones del audio de video, fotografías, o imágenes de las producciones de los estudiantes, con el propósito de apoyar la lectura de los mismos.

Aunque la secuencia consta de siete situaciones, por motivos del análisis se han seleccionado tres que se consideraron centrales en el desarrollo de la misma: la situación 1, la situación 3 y la situación 7.

6.4.1 Análisis *a posteriori* Situación 1: Rotaro

La experimentación de esta primera situación presenta las interacciones iniciales entre el profesor y los estudiantes. La gestión inicia con una presentación por parte del profesor, indicando cuántas sesiones van a trabajar juntos y llamando la atención sobre qué es Cabri, intentando crear un ambiente donde la introducción de este artefacto a la clase sea justificada.

P: ... Obviamente, no soy el profesor de ustedes, yo soy profesor de otro colegio en Cali ... Por lo pronto, voy a trabajar con ustedes aproximadamente unas tres sesiones de clase, en las cuales vamos a trabajar, por un lado, este programa que en este momento está en la pantalla de cada uno de sus monitores, ese programa se llama Cabri y nos sirve para trabajar algunos puntos de la geometría, que es lo que vamos a hacer el día de hoy, listo? ¿Hasta ahí claro para todos?

En entrevista previa con el profesor, él expresaba su inquietud respecto a la necesidad de un trabajo previo de los estudiantes con el objeto de que se familiarizaran con el programa. Su gestión reconoce inmediatamente esta inquietud, no inicia hablando del objeto geométrico a estudiar, sino del artefacto nuevo que se integra a la clase.

Como se presenta en el ANEXO 2, el profesor expresó algunas sugerencias al diseño inicial de la secuencia, las cuales se tuvieron en cuenta para la fase de experimentación, por ejemplo, una mayor restricción del Menú de Cabri de manera que los estudiantes solo accedieran a la función puntero.

Esto respeta lo que plantea RABARDEL (1999) sobre las tensiones que sufre el sistema de instrumentos ya instaurado a la clase cuando ingresa un artefacto nuevo a la clase. Esta tensión se expresa cuando el profesor intenta “justificar” la aparición de Cabri en la clase, ubicándolo en el contexto de la clase de geometría.

Una vez hecho esto, el profesor identifica las figuras que aparecen en la pantalla haciendo uso de la proyección del video beam. Al parecer, intenta familiarizar a los estudiantes con las configuraciones presentadas, y que hacen parte de la fase pre-estructurada del ESU del arrastre exploratorio.

P: Bien, entonces ¿Qué vamos a hacer? Ustedes se dan cuenta, cuando... ubican el mouse en este puntico o sobre cualquiera de estas figuritas o polígonos, ustedes se dan cuenta que tiene una crucecita y cuando llega a acá se vuelve una manito.

...

P: Si, una manito... Entonces, ¿qué van a hacer? Van a coger, o mejor dicho, van a ubicar esa manito, bien sea sobre cualquiera de las líneas, o sobre cualquiera de lo punticos. Cuando esté ubicada la manito, allí sobre la línea o los punticos, van a coger, van a sostener el click izquierdo, cierto? Lo sostienen de tal manera que la manito va a tratar de hacer algo.

Quando ustedes ubiquen la manito van a intentar mover la figura, es decir, que eso se mueva para alguna parte, bien sea acá o bien sea para allá, bien sea en esta forma, o donde ustedes traten o donde ustedes deseen, o traten de mover esta figura. Ahora chicos, hay algo específico, no porque ustedes coloquen la manito acá van a mover la figura, la meta de ustedes es descubrir en cada figurita cual es ese puntico. ¿Listo? Entonces vamos a empezar a trabajar.

Existe un interés del profesor por hacer “transparente el uso del arrastre”, es más, llega a identificar qué objetos pueden ser susceptibles al arrastre. La gestión se centra en los aspectos del sub-esquema sensorial inicialmente.

Para esto, hace uso intensivo de la proyección en el tablero de la pantalla de Cabri, invita a los estudiantes a que inicien su exploración, centrada en el sub-esquema sensorial.

Una vez el profesor considera que se ha “invisibilizado”, al menos parcialmente, el sub-esquema sensorial del arrastre, establece la intencionalidad matemática de la exploración: descubrir el punto susceptible al arrastre.

De esta manera empuja la fase de acción del ESU, por parte de los estudiantes, y se dispone a pasar por algunos de los puestos de los estudiantes quienes inician a identificar aquellos puntos desde los cuales evidentemente pueden realizar el arrastre.

P: A ver... un segundito, chicos. Miren, ya varios han descubierto los punticos que hacen mover el pentágono, el triángulo, y algunos el cuadrado, o los tres.

E: Si, yo los tres.

P: Observen, van a observar atentamente cómo se mueve cada figurita... observen bien cómo se mueven... Y, aparte de eso, van a tratar de fijarse en qué se parece el movimiento de las tres figuritas y en qué se diferencia... Vayan pensando eso a medida que van moviendo las figuritas.

Este “descubrimiento” constituye objeto de animación por parte de los estudiantes, y empiezan a reclamar la atención del profesor. Frente a esto, el profesor gestiona la intencionalidad matemática de la situación y empieza a retomar la consigna de la tarea que plantea la situación.

En este punto, la gestión empieza a dejar de estar centrada en el sub-esquema sensorial, y se empieza a perfilar el segundo momento de la fase de acción, referido a la acción intencional de arrastrar objetos sobre la pantalla.

Las devoluciones del profesor intentan que los estudiantes hagan visible la intencionalidad matemática del arrastre, y la discusión empieza a girar sobre las propiedades o invariantes que visualmente se pueden dar cuenta por medio del arrastre de las figuras.

P: Cuéntame, para ti ¿cómo se mueve la figurita? ¿Cómo es el movimiento? ... para ti, ¿el movimiento es circular? Bueno, ¿ya moviste los otros? Bueno, cuéntame cómo los mueves. Eso. Y para ti, ¿cómo es ese movimiento?

E: El del ventilador.

...

E: Todos se mueven alrededor de éste.

P: Bueno, ¿y qué pasa con éste? ... También... y ¿qué pasa con éste?

E: Está en el centro.

P: ¿Y éste?

E: Está... solo se mueve pa'l lado.

P: Bueno, tengan en cuenta eso, porque ahorita les voy a pedir que nos cuenten qué es lo que pasó allí... Lo que acaban de describir.

La actividad instrumentada de los estudiantes al intentar identificar los efectos del arrastre sobre las figuras, se centra en el movimiento circular que describen los objetos al ser arrastrados por el lugar oculto. Este hecho es predominante dado el uso de gestos, tanto de estudiantes y profesor, para intentar reconocer el movimiento circular: un uso predominante del gesto de la mano.

El ESU del arrastre exploratorio en su proceso de emergencia no solo ha involucrado el sub-esquema sensorial arriba detallado, sino que ha implicado otros esquemas sensorio-motrices, evidentes en los gestos de los niños al intentar describir los fenómenos que ocurren en Cabri a partir de movimientos corporales.

La geometría se encuentra nuevamente con el movimiento del cuerpo, al presentarse el arrastre en el AGD, parte de la interpretación del mismo, atraviesa el uso del cuerpo, los gestos. Esto se hará incluso cada vez más predominante.

La fase colectiva del ESU del arrastre exploratorio empieza a nutrir la actividad de los actores: el profesor tomará decisiones, sus devoluciones empiezan a ser de un mismo tipo respecto a la identificación de la trayectoria circular del movimiento.

Justamente en dicha gestión, la fase colectiva del ESU del arrastre exploratorio, requiere de ciertos niveles de validación. Las argumentaciones de los estudiantes son contrastadas con las retroacciones del medio: se hace uso del arrastre para provocar, complementar y contrastar los argumentos de los niños.

Pareciera que las intervenciones del profesor, asociadas a posibles usos de los actos de devolución giran alrededor de los argumentos de los estudiantes. Se establece una dialéctica entre las fases de devolución y validación, que más adelantan nutrirán la institucionalización.

P: ¿Qué pasaba con este puntico?, ¿Cómo estaba?, ¿Cómo era?

E: Estaba en el centro...

P: Que estaba en el centro de la figura, ¿qué pasaba con este punto?

E: Que... está fuera de la figura.

P: Ah, entonces ya tenemos otra cosa, bien, vamos a ver en qué estamos de acuerdo todos. Primero, este punto está adentro y este punto está afuera, ¿claro para todos?

E: Si.

P: Lo otro, este triángulo solamente se mueve circular, en cambio este lo tomo y...

E: Para donde quiera.

P: Para donde quiera, ajá.

La fase colectiva del ESU se relaciona directamente con las fases de validación e institucionalización de la gestión. El profesor aprovecha los espacios de socialización para que determinadas parejas exhiban su trabajo.

Esta socialización inicia con un refuerzo del sub-esquema sensorial alrededor de la identificación de los objetos susceptibles al arrastre. Cuando el niño empieza a mover el pentágono comienza a verificarse la fase pre-estructurada del ESU respecto a las restricciones en la construcción. Al existir dos puntos móviles, el del centro de la figura, que es un punto libre, gira exclusivamente sobre la circunferencia que circunscribe al pentágono.

Tal como lo ilustran los ANEXOS 3 y 4, los estudiantes logran determinar ambos movimientos y sus características, se hacen evidentes las alusiones a objetos que presentan un movimiento circular: una sombrilla, un remolino. Las restricciones de la construcción conlleva a que los niños identifiquen dos tipos de movimiento

relacionados con el arrastre: cuando se realiza por un lugar oculto o cuando es libre.

En los análisis *a priori* se había enfatizado el uso del arrastre por un lugar oculto, esencialmente circunferencias. La institucionalización se centra en este hecho y posteriormente, toma en consideración las variables micro-didácticas consideradas en el diseño.

Especialmente, el profesor centra su gestión en los movimientos de las figuras respecto a distintos centros. Empieza a “invisibilizarse” el sub-esquema sensorial y predomina el ESU del arrastre exploratorio.

El profesor insiste en la ubicación de los centros de giro y la trayectoria de las figuras mediante el arrastre por un lugar oculto. Su gestión entonces es bidireccional: hacia el sub-esquema sensorial y hacia la intencionalidad matemática.

6.4.2 Análisis *a posteriori* Situación 3: Por el camino amarillo

El propósito de esta tercera situación se centra en identificar los centros de rotación y trayectorias en distintas rotaciones. En la situación 2, no incluía directamente en este análisis, los estudiantes avanzaron en el reconocimiento de trayectorias de rotaciones concéntricas.

En el ANEXO 5 puede apreciarse, por ejemplo, el reconocimiento de los estudiantes de las trayectorias de los objetos que rotan alrededor del centro, y la evolución del ESU cuando se identifican los puntos susceptibles al arrastre (llamados puntos “clave”) por varios de ellos.

La estrategia de “encontrar el punto clave” consistió en determinar (por ensayo y error) cuál era el punto libre de la construcción, y por tanto, susceptible al arrastre. La denominación de “clave” le otorga un estatus de importancia en las estrategias de los niños al enfrentarse a la situación.

Por su lado, la experimentación de la Situación 3 muestra, al igual que en las situaciones anteriores, que antes de iniciar la clase, previamente se ha hecho el proceso de tener los equipos dispuestos en el archivo de la situación a trabajar. Esto puede ser significativo si se considera que el prender los equipos, encontrar los archivos y todo este tipo de acciones, aunque importantes, no hacen parte de la gestión del profesor que se intenta analizar aquí.

Sin embargo, la gestión del profesor centrada en el sistema de instrumentos, considera importante verificar, y de manera insistente, que todos las parejas de estudiantes cuenten con el archivo correspondiente. Si esto faltara sería necesario entrar a solucionar el inconveniente, adquiriendo el estatus de requisito para el inicio de la clase.

Aunque no se inicia con una lectura de la consigna, el profesor llama la atención sobre la existencia de siete puntos verdes en la pantalla, de esta manera, el profesor intenta crear un contexto para darle sentido a la situación: “*vamos a suponer que estos puntos verdes son unos amigos que están perdidos. La tarea de estos amigos es encontrar la ruta para llegar a un lugar no determinado*”.

P: Ustedes observan qué hay en la pantalla... siete punticos verdes.

Entonces vamos a suponer que esos siete punticos verdes son unos amigos que están perdidos, y ellos necesitan encontrar la ruta para llegar a un lugar... un lugar cualquiera. Entonces... estos amiguitos que están perdidos, específicamente estos que están por acá afuera, necesitan llegar a este caminito amarillito, ustedes lo ven aquí, como ven, es un caminito amarillito.

La idea muchachos es que ustedes van... ¿recuerdan la actividad pasada? Se acuerdan que movíamos el mouse, que la imagen se ubicaba sobre alguna figura y que formaba una manito, ¿cierto? Y que nosotros presionábamos el ratón y lo desplazábamos en la pantalla y las cosas se movían... Algunas figuras, por lo menos algunos puntos. Aquí va a pasar lo mismo con los punticos verdes, ellos tienen esa opción, ellos se van a mover ¿Cuál es la idea? Vamos a empezar a mover cada puntico verde, de tal manera que todos los siete queden dentro de este caminito. Esa es la tarea.

En un intento por dar a entender mejor la consigna, el profesor explicita apartes de la estrategia ganadora. Nuevamente el profesor recurre al sub-esquema sensorial al intentar hacer transparente la acción de identificar objetos susceptibles al arrastre, haciendo énfasis en los puntos verdes.

Sin embargo, el análisis de este fenómeno es importante de considerar. El profesor siente necesidad de “contextualizar” la situación, y se hace con mayor énfasis hacia el sub-esquema sensorial, haciendo que la situación matemática aparezca poco visible, al menos en esta primera parte.

La gestión del profesor nuevamente se ve fuertemente relacionada con la emergencia de este sub-esquema sensorial. Si bien es cierto que el profesor retoma la experiencia de los estudiantes en las sesiones anteriores, es ostensible el intento por institucionalizar este sub-esquema centrado en identificar que objetos son susceptibles al arrastre y efectivamente lograr arrastarlos por la pantalla.

Este sentido de la institucionalización se separa de lo que se había previsto en los análisis *a priori*, donde la institucionalización se centraba en las propiedades invariantes de la rotación a partir del arrastre exploratorio. La gestión concede importante papel a la fase de acción del ESU, centrada en el estudiante, pero donde la intencionalidad matemática queda inicialmente relegada.



Figura 6.4 Fase de acción del ESU del arrastre exploratorio en la Situación 3 “Por el camino amarillo”

De esta manera la fase colectiva del ESU, casi naturalmente, se relaciona con los espacios de validación y socialización que el profesor gestiona. Justamente en estos espacios, a partir de las devoluciones del profesor, empieza a hacerse visible la situación matemática que se intenta movilizar en la situación didáctica.

Así, ésta situación didáctica concebida como una situación de formulación, donde el control teórico del arrastre se evidencia en los lugares ocultos por los cuales es posible realizar el arrastre, posibilita que rápidamente los estudiantes empiecen a realizar suposiciones y posibles argumentos frente a la tarea planteada.

La tarea justamente se sobre-explicita, de manera que aparece como trivial, y la fase de acción del ESU del arrastre exploratorio se minimiza para darle un mayor espacio a la fase colectiva.

De hecho, un efecto de lo anterior es que los niños logran identificar las trayectorias de los puntos. El poder de retroacción del medio es tan poderoso, que frente a esta situación, los argumentos de los niños tendrán que emerger para poder entender lo que sucede.

Las devoluciones del profesor parecen estar agrupadas en dos tipos: aquellas que intentan movilizar el sub-esquema sensorial del arrastre, y otras enfatizadas en el reconocimiento de propiedades invariantes, es decir, alrededor de la intencionalidad matemática.

Respecto a la intencionalidad matemática, los estudiantes logran discernir las trayectorias de los puntos verdes y se dan cuenta que, evidentemente no todos logran estar sobre el camino amarillo. Diferencian entre las trayectorias circulares y la trayectoria rectilínea de uno de los puntos; lo mismo respecto a los puntos que giran pero lo hacen por fuera de la circunferencia que contiene el arco que pertenece al camino amarillo.

E: Solo metí estos dos, me faltan estos dos.

P: Bueno, ¿Cómo metiste estos dos acá dentro?, ¿Qué hiciste?

E: No, porque estos dos estaban aquí, entonces yo cogí y metí primero uno y como el otro lo perseguía yo lo metí, le di espacio y ahí se metió este.

P: ... Muy bien, pero, ¿Cómo era ese cuento de que lo perseguía?

E: ¿Cómo?

P: ¿Cómo es eso de que lo perseguía?

E: Porque si yo muevo éste y mire. (Señalando la pantalla).

P: Ah, ¿Por eso es que dices que lo persigue?

E: Si.

En el espacio de socialización que el profesor gestiona, fácilmente los estudiantes logran identificar los puntos que, efectivamente, no se pueden “meter” al camino amarillo. En los ANEXOS 7, 8 y 9, se ilustra en detalle cómo los estudiantes identificaron las trayectorias y sus producciones textuales para intentar dar cuenta de las condiciones que deben cumplir los puntos verdes, para coincidir con el camino amarillo.

En ese momento al profesor le interesa enfatizar en la intencionalidad matemática, alrededor de las características del movimiento de los puntos verdes. Estos espacios de socialización, contemplados en las fases de validación e institucionalización de la gestión del sistema de instrumentos, constituyen espacios propicios en los que las fases del ESU del arrastre exploratorio puedan movilizarse.

Es como si estas fases del ESU se volvieran a rebobinar durante la socialización, es más, aparecen solapadas entre sí, no como momentos separados, sino articulados principalmente alrededor de la intencionalidad matemática.

Sin embargo, pareciera que la gestión del profesor estuviera intencionalmente más relacionada con la validación de los argumentos de los estudiantes por medio del arrastre: una vez realizado un posible argumento o explicación, por parte de un niño, fácilmente se puede verificar, por medio del arrastre, si es aceptable o no.

Aunque este tipo de validación, carece del estatus de prueba, aún así constituye un aporte interesante, que permite vislumbrar el posible papel que el arrastre puede tener en el desarrollo de las mismas.

Otro aspecto que se identifica fácilmente en la gestión del profesor, corresponde a la necesidad de institucionalizar los acuerdos a los que se va llegando en esa negociación entre los propósitos de la situación, encarnados en las devoluciones del profesor, y los aportes de los niños.

P: Ustedes observaron, y vamos a hacerlo uno por uno, por favor mueve este puntico otra vez, y observen muy bien para que tengan en cuenta la observación y puedan responder la pregunta que les voy a formular... Muchas gracias, mueve cualquiera de estos dos por favor.

E: Se mueve en círculo grande.

P: Se mueve en el círculo grande, correcto, ahora mueve este por favor.

E: Se mueve en el círculo pequeño.

P: Círculo pequeño, ahora mueve este por favor.

E: Se mueve en el círculo grande.

P: Perfecto, es el círculo grande.

E: ¡Ese no es! El otro.

P:...Círculo grande. Bien, la preguntita es la siguiente, ¿Alrededor de quien se mueven esos puntos?

E: Del punto rojo, de la B y la C.

P: Vamos a ver lo siguiente, este se mueve, ¿Alrededor de quién?

E: De A...

P: ¿De A o de... B? Porque no lo vemos, vamos a moverlo otra vez. Muévelo otra vez para que veamos alrededor de quien se mueve.

E: Se mueve solamente debajo de la A porque llega hasta aquí.

P: Ah, pero si tiene que ver algo con la A.

E: Llega hasta aquí y vuelve a bajar

P: Ah, bien. Listo, estos dos puntos ¿alrededor de quién? Junto con este.

E: De B.

P: De B y ¿éstos?

E: De C.

P: Alrededor de C. Correcto.

De hecho, puede observarse cómo en distintos momentos el profesor integra a la institucionalización aspectos que no se habían considerado *a priori* pero que parecen importantes en la dinámica de las producciones de los niños.

La institucionalización se centró en la trayectoria de los puntos verdes bajo el arrastre. Se realiza un examen punto por punto, con el objeto de identificar, de manera explícita, las posibilidades de arrastre de cada uno. Frente a esto, los estudiantes empiezan a encontrar aspectos parecidos y diferencias entre la trayectoria de los puntos verdes.

Otro de los aspectos en los cuales la gestión didáctica del profesor centra su atención, es el reconocimiento de los centros de giro. Esto ha constituido una invariante en la gestión desde la primera situación, pero aún los estudiantes no logran determinar, al menos visualmente, el papel preponderante del punto que representa dicho centro.

Logran algunos acercamientos, sobre todo haciendo uso del arrastre para identificar visualmente el centro de las circunferencias que contienen los arcos

que conforman el citado camino amarillo, pero no lo reconocen como punto, lo confunden con su nomenclatura.

De todas formas debe considerarse que el análisis *a priori* de la situación no contempló el reconocimiento de los centros de giro como un propósito primordial de la misma, pero sin embargo, la gestión del profesor retoma este aspecto, vital en la transformación de rotación, y transversal a toda la secuencia.

Por otro lado, las producciones de los niños retoman algo que en el análisis *a priori* de la de la situación no se había mencionado: el uso de gestos relacionados con esquemas sensorio-motrices. Este uso se ha generalizado durante toda la secuencia y aparece como una estrategia, que les permite a los niños dar a entender mejor alguna idea, a falta de conocimientos sobre los objetos geométricos y sus propiedades, los niños crean una filiación con el movimiento para intentar dar cuenta de los mismos.

Así para intentar describir que un punto verde describe con su movimiento una semicircunferencia, una niña recrea este movimiento, propio del arrastre en el AGD, con un gesto de su mano, e incluso también lo relacionan con el movimiento pendular de algunos objetos.

6.4.3 Análisis *a posteriori* Situación 7: Círculos en parejas

El propósito de esta situación se enfocó en determinar la congruencia como propiedad invariante, en una composición de rotaciones concéntricas. Así, el matiz de la situación matemática propuesta, se ha ido perfilando hacia el reconocimiento de la congruencia como propiedad invariante de la rotación, y las situaciones 4, 5 y 6 fueron diseñadas desde esa perspectiva.

Por ejemplo, la congruencia en el contexto artístico que se intentó movilizar, toma sentido en relación con la simetría y un intento de conservación del ángulo, haciendo uso principalmente de simetrías centrales o semigiros. Cuando en la situación 4, después de explorar la macro los estudiantes dibujan cómo queda la flor, es ostensible como intentan conservar la congruencia como un efecto global de la figura.

La Figura 6.5 y el ANEXO 11, exhiben algunas estrategias de los niños relacionadas con la congruencia, haciendo un uso predominante de los semigiros o simetrías centrales, incluyendo el reconocimiento del centro. También introducen el uso de ejes de simetría, dadas las propiedades del rosetón puesto a consideración en la situación.



Figura 6.5 Conservación de la congruencia en diseños simétricos

Lo anterior aparece también en la situación 6, cuando por medio del arrastre exploratorio, intentan modificar la figura con el objeto de “hacerla parecida” a un rosetón. Aquí ocurre lo mismo, las estrategias de los estudiantes muestran que su intento se centra en conservar la congruencia de figuras, como una característica propia del rosetón.

En los ANEXOS 11 y 12, se observan distintas estrategias de los niños para conservar la congruencia, dadas las propiedades simétricas del rosetón. Nótese cómo el calco (sobre la pantalla) de los puntos o vértices del rosetón se convirtió en una estrategia que aunque no estuvo contemplada en los análisis *a priori*, arroja información sobre la interpretación del campo de los posibles de los artefactos, que como un computador se integran a una clase de matemáticas.

Así que después de ese trabajo previo, se esperaba un acercamiento bastante interesante a la congruencia, como propiedad invariante de la rotación en esta situación. El resultado es llamativo y se verá en mayor detalle más adelante.

Bien, al igual que en todas las anteriores situaciones y, tomando en consideración lo propuesto en la gestión del profesor, la experimentación de ésta situación se inicia explicitando la consigna.

Ocurre aquí un fenómeno ya observado en las situaciones anteriores, la línea que separa la presentación de la consigna y revelar, al menos en buena medida, la estrategia ganadora de la situación. En el discurso del profesor, y en su intención de movilizar la situación, la fase de acción del ESU del arrastre exploratorio, en el

que el estudiante debe tener una amplia oportunidad de exploración, se ve considerablemente limitada.

P: La idea es moverlos, moverlos de tal manera que, como indica ahí, cada cual encuentre su parejita, en el momento que encuentren su parejita... dejan el círculo ahí, en donde está su pareja...

...

P: Bien, ahora, ¿Estos dos son parejita?

E: Sí.

P: ¿Por qué serán (pareja)?

E: Porque estos dos son amarillos, estos dos son azules, esto dos son rosados y estos dos.

E: No. Este es verde y el otro azul y cuando se hicieron pareja se volvieron negro.

P: Ah. ¿Es que ustedes estaban acomodando la parejita por color?

E: Sí.

P: ... Muy bien, ¿Hay otra forma diferente del color para armar parejas?

E: Si.

P: ¿Por cuál?

E: El tamaño.

Indagar sobre las razones de éste tratamiento por parte del profesor, ameritaría un estudio complementario, pero pueden lanzarse algunas posibles hipótesis que intenten explicar estas razones. En primer lugar, la actividad matemática instrumentada que se propone en la situación, no es la más común, ni para los estudiantes, ni para el profesor. Esto ejerce tensiones en el contrato didáctico y suscita que la gestión del profesor “visibilice” la estrategia ganadora.

Así no sólo la integración didáctica de un nuevo artefacto a la clase crea tensiones importantes, sino también el tipo de actividad instrumentada que con el uso de este se genera. Aunque parezca trivial, esta relación aparece como un foco importante de reflexión para el análisis desde la perspectiva instrumental, pues genera una mirada que, desde la orquestación, es vital para la concepción y puesta en escena de situaciones didácticas.

Otra posible hipótesis es que, dada la naturaleza de la situación más cercana a una dialéctica de la validación, el profesor considere más importante centrar su gestión didáctica hacia la construcción de argumentos por parte de los estudiantes. La experimentación permite pensar que la gestión del profesor recoge aspectos de ambas hipótesis.

En cuanto a las estrategias de los estudiantes, hay algo importante que señalar. En los análisis *a priori* se consideró determinado juego con las variables microdidácticas consideradas en el desarrollo de la misma, especialmente las relaciones forma-tamaño y la determinación de círculos congruentes. Sin embargo, los resultados muestran estrategias de los estudiantes, donde la congruencia no aparece necesariamente en un lugar predominante.

A pesar, de que como se dijo anteriormente, el trabajo con las tres situaciones precedentes, se había pensando en facilitar el uso de la congruencia, las estrategias de los niños muestran que la “igualdad de tamaño” no asociada a un contexto donde la simetría aparece como una fuerte variable visual no determina necesariamente el reconocimiento de la congruencia.

P: Vamos... a indagar, grupo por grupo, qué está pasando, así que todos nos van a contar qué pasó, entonces vamos a arrancar por aquí, ustedes están intentando armar parejitas y para armar las parejitas tienen en cuenta los círculos.

E: Los colores.

P: Los colores... ¿Algo más?

E: Tamaño.

P: Ahora, segundo grupo, ¿Qué tienen en cuenta para armar la parejita?

E: El tamaño.

P: El tamaño.

E: El tamaño, los colores.

P: Tamaño y color, pero ¿que sean las dos al mismo tiempo o cada una por separado?

E: Las dos al mismo tiempo.

Mientras que el diseño de las situaciones 4, 5 y 6 enfatizaban en una composición de rotaciones concéntricas en relación con la estructura de un rosetón, las variables didácticas consideradas en el diseño de esta última situación son diferentes.

Aquí, la situación matemática implica, que de alguna manera, los estudiantes logren reconocer que dos figuras relacionadas mediante una rotación son congruentes, de manera que un punto A en la figura F (inicial), está relacionado con un único punto A' en la imagen o F'.

La congruencia se entiende de una manera totalmente distinta, porque se da como un efecto de la rotación y eso implica un tratamiento distinto. Esto se intenta movilizar con el problema propuesto: dado este conjunto de círculos, formar parejas entre ellos y encontrar las posibles razones que determinar dicha organización.

En la consigna se les solicita a los niños, que efectivamente, formen “parejas” entre los círculos, y efectivamente los estudiantes usaron características tan predominantes como los colores para realizar las parejas. Ante esto la gestión del profesor, principalmente sus devoluciones, intentarán movilizar argumentos de los estudiantes acerca de los criterios que efectivamente usaron para formar las parejas.

La gestión didáctica del profesor empieza con una exploración grupo por grupo de los criterios que usaron: tamaño, color, o una combinación de ambas. No desestima los argumentos de los estudiantes y sus devoluciones se centran en posibilitar el desarrollo de los mismos, pero efectivamente el argumento esperado: “*formé parejas con los círculos que coincidían exactamente*”, aparece de manera tardía, y no necesariamente, evidente.

Cuando al criterio del tamaño empieza a tomar relevancia, la primera opción necesariamente no es la congruencia o círculos del mismo tamaño. Los procesos de validar los argumentos se empiezan a relacionar cada vez más con el ESU del arrastre exploratorio.

P: Ustedes estaban armando parejas tanto por color y por tamaño, voy a retomar algo que dijeron dos grupitos de sus compañeros y que es bien interesante... Observen que ellos estaban armando parejas... por tamaño, entonces ellos cogieron esta figura y la acoplaron aquí... Primera pareja. Tomaron esta otra figura y la ubicaron aquí...

E: De esa no más, hay dos parejas.

P: Pero, ¿qué decían tus compañeros? Ellos nos decían, “profe, es que éstas dos y éstas dos se ubicaron por tamaño, resulta que estas parejas de acá las ubicamos por color porque por tamaño hay un pequeño problema” y es éste... recuérdanos que es lo que pasaba con los dos circulitos rápidamente.

E: Se movían en círculo y la amarilla no da bien el círculo.

P: O sea que... los círculos no coincidían.

...

P: ... Fijémonos, el movimiento de todas las figuritas... ¿Cómo era el movimiento exacto?

E: Circular.

P: ¿Circular, cierto? Entonces, para que esta figurita y esta otra igual... coincidieran, ¿Qué debería pasar?

E: ... Círculo.

...

E: Se bajará.

P: Se bajará acá... ¿Y con éstas dos?

E: Se juntarán.

P: ¿Y con estas dos qué pasaría?

E: Que se bajarán.

P: Que se bajarán... ¿Cuál?, ¿Esta?

E: No, que ésta se subiera y la amarilla se bajara a la azul.

P: Ya entendí.

Aparece el arrastre en un estatus con un toque diferencial, no para reconocer invariantes, sino para acompañar un argumento, sobre todo en la fase colectiva del ESU. Sin embargo la fase colectiva se aborda de manera muy rápida.

6.5 Consideraciones finales

La gestión didáctica del sistema de instrumentos, o gestión didáctica del profesor, aparece como el eje articulador de los análisis alrededor de la emergencia del ESU del arrastre exploratorio. Por esta razón varios de los aspectos de esta gestión se han abordado en los análisis *a- posteriori* de las situaciones arriba desarrolladas.

En los análisis *a priori* se consideró una planeación de la gestión del profesor, la cual se hizo de manera general con el propósito de construir, lo que TROUCHE (2002) denomina un sistema de aprovechamiento didáctico. En ese sentido, se realizan estas consideraciones finales.

Se había considerado *a priori* que la gestión del profesor se relacionaría con el tratamiento a las variables micro didácticas privilegiadas en el diseño de la secuencia. En este sentido, se privilegió el análisis respecto al campo de los posibles del artefacto a integrar: Cabri y su función de arrastre.

Frente a esto, se puede decir que el artefacto integrado al diseño de la secuencia, efectivamente logra pre-estructurar la actividad matemática de los estudiantes, al igual que el diseño de las situaciones y la gestión didáctica del profesor cuando pone la secuencia en obra.

Sin embargo, ésta gestión presenta niveles de “personalización”. Por ejemplo, al inicio de la Situación 4 “La Flor”, el profesor, antes de explicitar la consigna y poner la situación en escena, realiza una presentación de algunas características generales de los rosetones, y presenta imágenes de rosetones (ver ANEXO 10) para intentar generar un ambiente previo al desarrollo de las situación.

Esto, simplemente constata que cualquier profesor, al poner en escena el diseño de una secuencia didáctica, realiza posibles cambios, que quizás no estuvieron contemplados en los análisis *a priori* de la misma, y por eso la gestión siempre presentará esa “personalización” según las intenciones didácticas del profesor.

En cuanto a la pre-estructuración del arrastre, como artefacto, respecto a la actividad de los estudiantes, ha intentado dar cuenta el seguimiento a la emergencia del ESU del arrastre exploratorio que se ha hecho anteriormente. Así que ahora nos centraremos en los otros dos aspectos.

En los análisis *a priori* se intentó dar cuenta de los posibles usos del arrastre en el contexto de las situaciones diseñadas. Especialmente, pero no exclusivamente, respecto a las variables consideradas y el papel que se le otorgó al medio. Pero ya en la experimentación, la gestión del profesor tuvo que jugar con todos estos aspectos, de manera simultánea, compleja.

Su gestión del contrato, de los tiempos y de la organización, se complementó con los actos de devolución. Allí frente al medio, los retos e intenciones del profesor se explicitaron: que los estudiantes reconocieran las trayectorias que recorren los objetos cuando rotan alrededor de un centro, o identificar dicho centro.

La intención del profesor, de que los estudiantes, al enfrentarse a las situaciones propuestas, construyeran un conocimiento matemático a partir de la experimentación, fue explícito. Allí hubo ciertos niveles de entendimiento de la

TSD, la necesidad de los espacios para socializar y validar ciertos argumentos, las institucionalizaciones.

En general, la intencionalidad del diseño de las situaciones pudieron respetarse, pero el análisis se complejiza cuando se abre el espectro a considerar la emergencia del ESU del arrastre exploratorio.

Allí surgen tensiones en diferentes niveles. Desde la explicitación por parte del profesor del funcionamiento del arrastre (cómo tomar el mouse, a donde acercarlo), hasta los usos del arrastre para validar una explicación o un argumento.

Las tensiones afectan varios aspectos, entre ellos el contrato: las estrategias de participación, el manejo del tiempo, los usos asignados al computador, el seguimiento a las instrucciones del profesor. Se llega a una diferenciación clara de los roles y responsabilidades del profesor y los estudiantes durante la clase.

Pero este fenómeno relacionado con el contrato, no es ajeno al funcionamiento general del sistema didáctico, de hecho, RABARDEL (1999) lo relaciona con la integración de nuevos artefactos a la clase. Desde este punto de vista, las mayores tensiones reposan sobre el tipo de actividad matemática instrumentada de los niños y las estrategias que proponen para resolver un problema, que pueden ser diversas, e incluso inesperadas.

Las devoluciones por su parte, se agrupan según su orientación, en dos tipos. Aquellas dirigidas a las propiedades de la rotación, enfatizadas según la situación, y aquellas alrededor de la emergencia del ESU del arrastre exploratorio. Sin embargo, estas devoluciones no son separadas, si no complementarias, se matizan según la intención del profesor, pero no se excluyen.

Los espacios de socialización, en los cuales se intentó realizar los procesos de validación también participan en esa dialéctica. Allí se establece una comunicación estudiante – profesor – medio, en la cual incluso, a veces participan otros estudiantes. Por esto, los espacios de socialización constituyen un espacio rico para los actos de devolución del profesor y los procesos de validación.

Finalmente, la experimentación muestra esas interrelaciones, entre el diseño de las situaciones – la emergencia del ESU del arrastre exploratorio – gestión didáctica del sistema de instrumentos, lo cual puede interpretarse en el sentido de aquellos posibles campos en los cuales la gestión didáctica del profesor puede transitar, como lo muestra la Figura 6.6 a continuación:

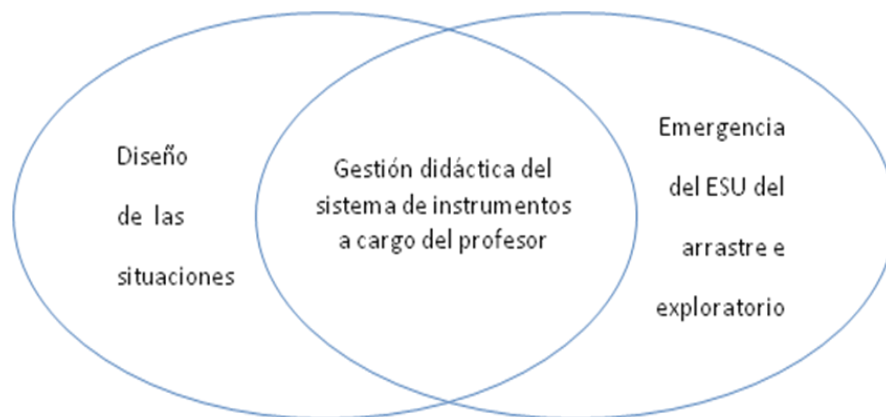


Figura 6.6 Campos posibles de la gestión del profesor

El campo del diseño de las situaciones, se sitúa principalmente alrededor del tratamiento de las variables didácticas consideradas, y el papel que se le otorga al medio; por otro lado la emergencia del ESU se relaciona con la gestión del contrato, los actos de devolución, los procesos de validación e institucionalización, en los cuales se destaca el papel colectivo de las acciones del profesor.

De acuerdo a esto, el ESU del arrastre exploratorio que se articuló al diseño de la secuencia, presentó unos niveles de movilidad mayores a los esperados *a priori*. En la Figura 6.7 aparecen las modificaciones, que la emergencia del ESU del arrastre exploratorio arrojó durante la experimentación (en líneas discontinuas los principales énfasis de la gestión del profesor).

Así, la fase pre-estructurada del ESU se retroalimentó con el papel otorgado al medio en el diseño de la situación y el papel que el profesor le otorga durante su gestión.

La fase de acción pasó de ser individual del estudiante, a convertirse en una fase colectiva entre los estudiantes y el profesor, donde los espacios de socialización, ocuparon un lugar importante, al poder estar dirigidos hacia la evolución del sub- esquema sensorial o al reconocimiento de invariantes.

Por su lado, la fase colectiva tomó mayor fuerza alrededor de los procesos de validación, especialmente aquellos asociados a la producción de argumentos por parte de los estudiantes. La institucionalización ocupó un lugar central en relación con los actos de devolución y el reconocimiento de propiedades invariantes.

En este sentido, la Figura 6.7 esquematiza la emergencia experimental del arrastre exploratorio a partir de las interrelaciones, entre el diseño de las situaciones, la emergencia del ESU del arrastre exploratorio y la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor:

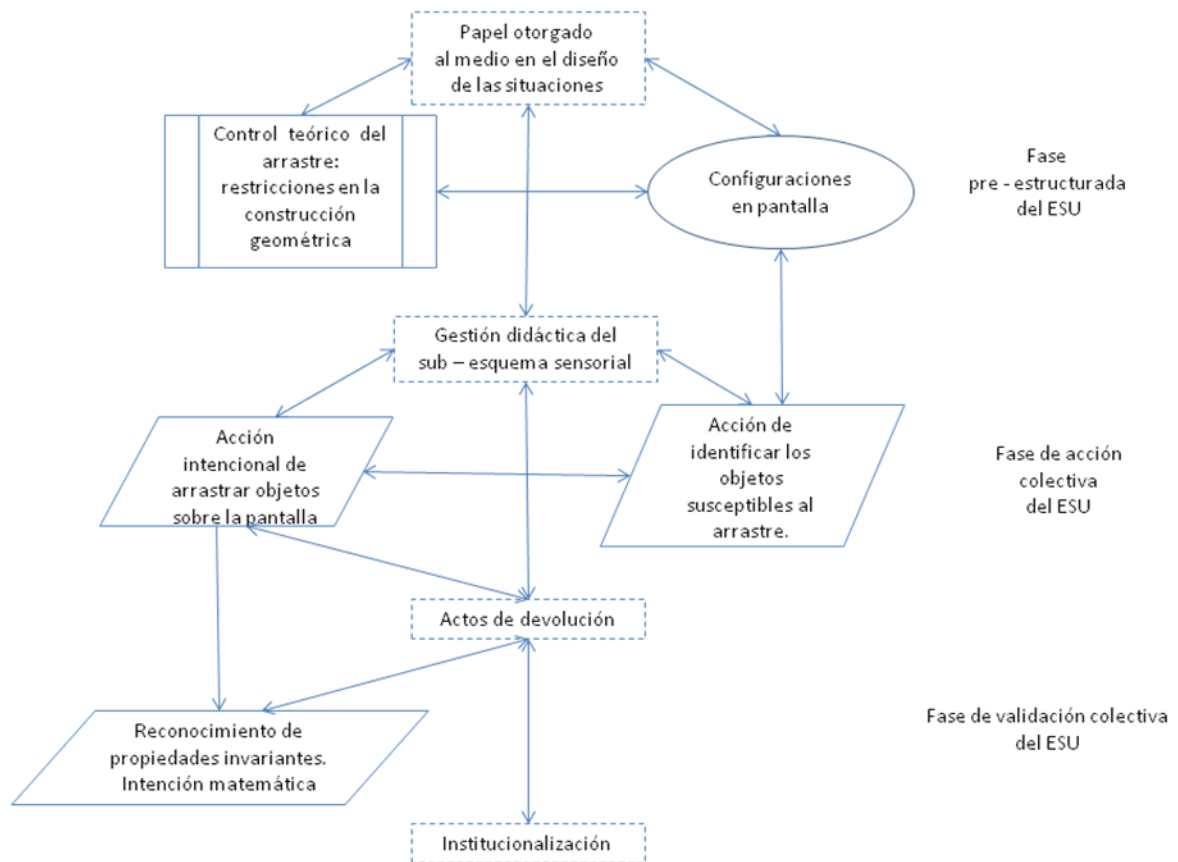


Figura 6.7 Emergencia experimental del ESU del arrastre exploratorio

Esto constituye finalmente, el resumen de los resultados de esta investigación: la gestión didáctica del sistema de instrumentos, como parte fundamental de la orquestación instrumental, constituye campos de acción, de posibilidades, que siendo complementarios, pueden variar según la intencionalidad didáctica del profesor.

Esta gestión permite un diálogo, una interdependencia entre los conocimientos matemáticos construidos y el desarrollo de instrumentos en la clase. Así en una orquestación se logra prever y coordinar posibles desarrollos, matemáticos e instrumentales de los estudiantes, propiciando un acompañamiento a los estudiantes en una amalgama de posibilidades donde el conocimiento matemático se construye con, y a partir, de instrumentos.

Por otro lado, en una mirada más amplia, es posible considerar categorizar la gestión didáctica del sistema de instrumentos, que se propuso en este trabajo, en términos de la actividad del profesor.

MARGOLINAS (2002) retoma la noción de medio como base para construir un modelo que permite categorizar la actividad del profesor. Si se toma en consideración que unos de los resultados de esta investigación es justamente el

papel preponderante que toma el medio en la gestión didáctica del profesor, se puede considerar la posibilidad de proponer un diálogo entre estos resultados con el modelo propuesto.

Básicamente, el modelo propone cinco niveles característicos de la actividad del profesor que se presentan en la Tabla 6.5:

Nivel noosférico o ideológico	+3
Nivel de construcción o concepción de un tema	+2
Nivel de proyecto de clase	+1
Nivel de la situación didáctica	0
Nivel de observación o devolución	-1

Tabla 6.5. Resumen de los niveles de la actividad del profesor (MARGOLINAS, 2002)⁴⁴

Retomando la propuesta del modelo, se podría pensar que la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor que se propuso en este trabajo podría ubicarse en el nivel de la situación didáctica (0) cuando el profesor pone en obra la secuencia didáctica en la clase. Allí podríamos ubicar las fases de instalación del contrato, validación e institucionalización que fueron objeto de los análisis *a priori* y *a posteriori* propuestos.

Por ejemplo, se podría pensar que el campo posible de la gestión didáctica del profesor respecto al diseño de las situaciones, donde la configuración del medio ocupa un lugar central, se ubicaría en este nivel 0.

Igualmente, la fase de devolución propuesta en la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor, podría ubicarse en el nivel de observación o devolución (-1), cuando efectivamente el profesor interviene respecto a la emergencia del ESU del arrastre exploratorio en los estudiantes.

De esta manera, se puede sostener que los campos posibles de la gestión didáctica del profesor (Figura 6.6) se ubicarían en los niveles 0 y -1 del modelo de MARGOLINAS (2002).

De la misma manera, la emergencia experimental del ESU del arrastre exploratorio (Figura 6.7) abordaría otros niveles del modelo así:

⁴⁴ La traducción a los apartados del texto de la obra de MARGOLINAS (2002) corresponde a una versión libre realizada por Marisol Santacruz en 2011.

Nivel noosférico o ideológico	+3	...
Nivel de construcción o concepción de un tema	+2	Papel otorgado al medio
Nivel de proyecto de clase	+1	
Nivel de la situación didáctica	0	Gestión didáctica del sub-esquema sensorial e Institucionalización
Nivel de observación o devolución	-1	Actos de devolución

Tabla 6.6. Niveles de la actividad del profesor vs. emergencia experimental del ESU del arrastre exploratorio.

Nótese como el nivel noosférico o ideológico (+3) no aparece directamente relacionado con la emergencia experimental del ESU del arrastre exploratorio, sin embargo, en los análisis *a posteriori* se apuntaba que las concepciones del profesor respecto al papel de Cabri en la clase, aunque no fueron objeto de esta investigación, si juegan un papel importante respecto a la gestión didáctica que efectivamente desarrolla en la clase.

De allí, que a manera de hipótesis, se podría pensar en la posibilidad de ubicar ese universo de las concepciones y creencias del profesor, acerca del papel de los instrumentos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en el nivel noosférico o ideológico (+3).

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES

En primer lugar, es importante ubicar este trabajo de investigación en relación con los desarrollos en didáctica de las matemáticas. En este plano, la construcción de un marco teórico propio del campo, alrededor de las articulaciones teóricas resultantes de los análisis preliminares, permitieron contextualizar el problema de investigación y darle salida al dispositivo experimental.

Así, lograr ubicar el arrastre en relación con las categorías de actividad con instrumentos, transformación de rotación, ESU y TSD, posibilitó la construcción de una integración de enfoques teóricos, que permitió explicar el problema de las relaciones, y tensiones, entre la emergencia de instrumentos en clase y la gestión del profesor, que constituyó el reto de esta investigación.

Respecto a la primera hipótesis de investigación (HI1), efectivamente, se puede sostener que la gestión didáctica de los sistemas de instrumentos, muchas veces llamada “gestión del profesor” de manera genérica en el desarrollo de este trabajo, constituye un aspecto central e ineludible, en la orquestación instrumental.

Frente a esto, se tienen varios aspectos para resaltar. En primer lugar, constatar que los procesos de construcción de los conocimientos matemáticos son articulados, y complementarios, a los procesos de construcción de instrumentos. Se da una relación interdependiente entre ambos, y la gestión del profesor debe considerarlo así para poder centrar de manera efectiva sus esfuerzos.

Sin embargo, esta gestión no constituye un aspecto aislado, sino que aparece explícitamente en contacto con la orquestación instrumental, y a través de ésta, con el diseño de la secuencia didáctica. Aquí la noción de orquestación enfatiza en un aspecto que TROUCHE (2002) había ya considerado, pero que en éste trabajo se maximizó: la relación orquestación instrumental – diseño de la secuencia didáctica.

Se ubicó la concepción, diseño y evaluación de la secuencia, desde la perspectiva de la TSD, en un lugar central, de hecho, la gestión del profesor siempre se entendió articulada a ella. La naturaleza y componentes del dispositivo experimental, inspirados en la orquestación, se articularon alrededor de la secuencia didáctica.

En este sentido, esta primera hipótesis representó un impacto en la construcción del dispositivo, de hecho, las hipótesis de diseño de las situaciones, retoman de manera explícita, la sostenibilidad de un sistema de instrumentos, en relación

con los artefactos a integrar y posibles ESU susceptibles a desarrollarse, de manera paralela, a los procesos de construcción de conocimiento matemático.

En relación con lo anterior, la segunda hipótesis de investigación (HI2) debe leerse en diálogo con la primera. Sin embargo, aquí el acento se ubica sobre las génesis instrumentales, y eso es algo que se puede evidenciar a lo largo del trabajo. Primero que todo, existe una necesidad imperante de determinar claramente, la situación matemática que sostiene el diseño de las situaciones didácticas que conforman la secuencia.

Para esto, las hipótesis del diseño de las situaciones lograron conjugar la exploración de la congruencia como una invariante en términos de la transformación de rotación, a partir de la evolución del ESU del arrastre exploratorio. Una llave que permitió dar cuenta experimentalmente de la mediación de instrumentos, particularmente el arrastre, en la construcción de conocimientos matemáticos, asociados principalmente a la rotación.

En este caso, las propiedades de la transformación de rotación, en especial la congruencia, pero en el contexto en el que se le dio viabilidad en la secuencia: a través del diseño, del arte. Esto determinaría no sólo buena parte del diseño de las situaciones, sino que también se relacionaría con la construcción de génesis instrumentales.

En un acercamiento más fino, se podría aventurar una posible reflexión a partir de esas relaciones entre el diseño de las situaciones y las génesis instrumentales que se pueden propiciar alrededor de ellas: la situación matemática, la situación didáctica, el control de las variables y el papel que se le otorga al medio.

Así, podríamos abrir el espectro de relaciones entre gestión del profesor – diseño de la secuencia – génesis instrumentales, intentando abrir puentes que los comuniquen. En este trabajo se exhibió que estas relaciones son altamente complejas, pero ineludibles.

En esta perspectiva, el desarrollo de las génesis instrumentales constituye un apartado que se debe considerar con detenimiento. Particularmente interesó la construcción colectiva del ESU del arrastre exploratorio, para esto se concibió una orquestación que posibilitara el diseño de un dispositivo experimental.

Esto significó, como RABARDEL (1999) lo señala, prever desarrollos instrumentales de los estudiantes, movilizados en el diseño de las situaciones a partir de la gestión didáctica del sistema de instrumentos a cargo del profesor. Frente a esto la experimentación aportó elementos interesantes para el análisis, que aunque no se desarrollan todos en este trabajo, es importante reconocerlos.

La gestión didáctica del profesor es en definitiva, una interpretación que hace de lo planeado, y resultado de su formación, de su experiencia y de sus

concepciones. En los análisis *a posteriori* se mostraba, cómo su gestión puede ser fruto de las concepciones que tiene sobre el papel de la integración didáctica de un nuevo artefacto a la clase, y el tipo de actividad instrumentada que con su uso se genera.

Así las tensiones en el sistema didáctico, cuando se realiza la integración didáctica de un nuevo artefacto y la búsqueda de un nuevo equilibrio en el sistema de instrumentos ya constituido, son aspectos fundamentales frente a los cuales, la gestión didáctica del profesor debe responder.

En cuanto al acompañamiento que el profesor hace del ESU del arrastre exploratorio, cabe anotar que representó el mayor énfasis, dada su relación directa con el problema de investigación.

En esta perspectiva, cabe resaltar el lugar preponderante que ocupó el diseño del dispositivo experimental, al intentar dar cuenta del problema de investigación. Para esto, fue necesario incorporar algunos elementos de la metodología de la microingeniería didáctica organizada en relación con la orquestación instrumental.

Esta decisión no fue ingenua. Metodológicamente interesaba no solo, ubicar el dispositivo en relación con los desarrollos del campo de la didáctica de las matemáticas, sino también, buscar la manera de poder realizar la experimentación desde la mirada de la orquestación instrumental alrededor de los artefactos a integrar, el diseño de la secuencia didáctica y la gestión del profesor.

Una de las principales características del dispositivo experimental, en diálogo con el problema de investigación, fue la propuesta, quizás arriesgada, de constituir un ESU del arrastre exploratorio, fundamentado desde las aproximaciones teóricas explícitas en los análisis preliminares.

La apuesta de estructurar un ESU del arrastre exploratorio, se trabajó articulado con la gestión del profesor, a partir del reconocimiento de los aspectos colectivos de las génesis instrumentales. Esto significó un elemento central y transversal de la gestión.

Efectivamente, la emergencia del ESU del arrastre exploratorio, constituyó un foco de tensión en relación con la gestión del profesor. Las actuaciones de éste, se presentaron en una compleja complementariedad alrededor de dos aspectos: que un grupo de de 5° de primaria reconocieran algunas propiedades centrales de la rotación, y que para esto, construyeran un ESU del arrastre que les permitiera explorar y construir argumentos alrededor de ésta.

Esto es en definitiva la conclusión central del trabajo frente al problema de investigación, las relaciones entre la de gestión didáctica del sistema de

instrumentos a cargo del profesor, se constituye en un acto complejo, que requiere ser parte de la formación de un profesor. Es un acto explícitamente intencional, premeditado, planeado, pero también sujeto a tensiones, principalmente al nivel del sistema didáctico y particularmente alrededor del contrato.

De esta manera se concluye que, la integración didáctica de nuevos artefactos a la clase, constituye un reto profesional para el profesor y un campo fructífero de investigación en didáctica de las matemáticas, dada su complejidad y la necesidad de construcción de marcos teóricos que posibiliten diseños experimentales que vayan ganando precisión y efectividad.

Al respecto, el principal hallazgo de esta investigación se centró en determinar la gestión didáctica del sistema de instrumentos, en el sentido de la orquestación instrumental, como un campo de acción, entendido como la apertura de distintas posibilidades para el profesor.

Estas posibilidades, tendrían la característica de ser complementarias, y diferenciarse según la intencionalidad del profesor. Así la gestión dirigida esencialmente al desarrollo de instrumentos en la clase, no deja por fuera, los procesos de construcción de conocimiento matemático.

Sin embargo, es la gestión didáctica del profesor la que arroja matices según la orientación de la misma, determinándose en cierta medida gracias al análisis de los artefactos a integrar y las características del diseño de la secuencia didáctica.

Intentando crear puentes entre los resultados experimentales de esta investigación y desarrollos actuales en Didáctica de las Matemáticas, se intentó ubicar la gestión didáctica del profesor en un modelo de actividad del profesor propuesto por MARGOLINAS (2002).

De esta manera se encontró que los campos posibles de la gestión didáctica del profesor se puede ubicar en los niveles de la situación didáctica (0) y el nivel de la observación y la devolución (-1). Respecto a la emergencia experimental del ESU del arrastre exploratorio, el papel otorgado al medio corresponde al nivel de construcción o concepción de un tema (+2), la gestión didáctica del sub-esquema sensorial y la institucionalización en el nivel de la situación didáctica (0) y los actos de devolución en el nivel -1.

Esto es importante porque permite categorizar la acción del profesor y abrir una perspectiva más amplia y compleja de la orquestación instrumental: una que toma en consideración, desde los aspectos ideológicos del profesor hasta su acción en la clase.

Finalmente, a manera de preguntas abiertas, derivadas de esta investigación, surgen principalmente dos interrogantes: el primero centrado en las relaciones entre el diseño de las situaciones y las génesis instrumentales, en términos de los alcances y limitaciones de concebir una secuencia didáctica que pre-estructure la actividad matemática e instrumentada de los estudiantes, y en cierta medida, del profesor.

Y en segundo lugar, la reflexión sobre las necesidades y expectativas de la formación, inicial y continuada, de los profesores de matemáticas, con el objeto de asumir los retos que la integración de TIC supone en la clase de matemáticas.

Para cerrar, es importante reconocer el aporte de este trabajo en intentar exhibir una mirada profesional del profesor, donde se promueven acercamientos teóricos que sobrepasan los voluntarismos y concepciones ingenuas acerca del papel de las TIC en el contexto escolar.

BIBLIOGRAFÍA

ACOSTA, M. (2005) Geometría experimental con Cabri: Una nueva praxeología matemática. En: Educación Matemática, diciembre. Vol. 17. No. 3. México: Santillana.

ALSINA, C. y otros. (1993) Simetría dinámica. Madrid: Editorial Síntesis.

ARTIGUE, M. (2002) L'intégration de calculatrices symboliques a l'enseignement secondaire: Les leçons de quelques ingénieries didactiques. En: GUIN, D. y TROUCHE, D. (Ed) Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

ARTIGUE, M. (1995) Ingeniería Didáctica. En: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L.; GÓMEZ, P. (Ed.) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

ARZARELLO, F; OLIVERO, F; PAOLA, D. y ROBUTTI, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. En: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) Vol. 34. No. 3. 2002.

BARON, M; GUIN, D. y TROUCHE, L. (2007) Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Paris: Lavoisier.

BALACHEFF, N. y KAPUT, J. (1996) Computer - Based learning environments mathematics. En: International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

BALACHEFF, N. (2000) Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogotá: Universidad de los Andes. Una empresa docente.

BING, R. (1960) Transformations. En: The American Mathematical Monthly. Vol. 67. No. 7. Part 2: Elementary Point Set Topology. Agosto – Septiembre de 1960.

BOYER, C. (1986) Historia de la Matemática. Madrid: Alianza Editorial.

BROUSSEAU, G. (1986, a) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques. Grenoble : La pensée Sauvage éditions.

BROUSSEAU, G. (1986, b): La relation didactique: le milieu. En: Actes de la IVème École d'été de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique. IREM de Paris VII. Paris: Université Paris VII.

BROUSSEAU, G. (1988): Les différents rôles du maître. En: Bulletin de l'A.M.Q. No. 23. 1988.

BROUSSEAU, G. (1998) Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

CAMPOS, A. (1994) Axiomática y Geometría. Desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki. Bogotá: Universidad Nacional.

CAMPOS, A. (2007) Huellas en los encuentros de geometría y aritmética. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

CARDONA, C. y otros. (2006) La geometría de Alberto Durero. Estudio y modelación de sus construcciones. Bogotá : Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano.

CHASLES, M. (1860). Les trois livres des porismes d'Euclide rétablir diaprés la notice et les lemmes de Pappus. París: Mallet - Bachelier.

CHEVALLARD, Y. (1992) Intégration et viabilité des objets informatiques. En : CORNU, B. (Ed.) L'ordinateur pour enseigner les mathématiques. París: PUF.

DE VILLIERS, M. (1996) Algunos desarrollos en la enseñanza de la geometría. Traducción de Martín Acosta. En: The Future of Secondary School Geometry. La lettre de la preuve. Noviembre – Diciembre. 1996.

FOLCHER, V. (1999) Des formes de l'activité aux formes des instruments: un exemple dans le champ du travail collectif assisté par ordinateur. Doctórate de psychologie ergonomique. Paris: Université Paris 8.

GARZÓN, D. y VALOYES, L. (2005) Geometría I. Notas de Clase. Instituto de Educación y Pedagogía. Cali: Universidad del Valle.

HANNA, G. (1997) Il valore permanente Della dimostrazione. En: Matematica e la sua didattica. No. 3. 1997.

HANSEN, V. (1998) Everlasting geometry. En: MAMMANA, C. y VILLANI, V. (Ed) An ICMI study: Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

JANH, A. y CLAROU, P. (1998) Notion de transformation géométrique en classe de seconde avec Cabri – Géomètre et la TI-92. En: Actes du colloque francophone européen: Calculatrices symboliques et géométriques, dans l'enseignement des mathématiques. Montpellier : Université Montpellier.

LABORDE, C. y CAPPONI, B. (1994) Cabri Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figura géométrique. Recherches des Didactique des Mathématiques. No.12. Grenoble: La Pensée Sauvage.

LABORDE, C. y PERRIN-GLORIAN, M. (2005) Introduction teaching situations as object of research: empirical studies within theoretical perspectives. En: Educational Studies in Mathematics. No. 59. New York: Springer – Verlag.

LABORDE, C. (1998) Los fenómenos visuales en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en un ambiente basado en computador. En: MAMMANA, C. y VILLANI, V. (Ed) Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21 Century. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

LAGRANGE, J; ARTIGUE, M; LABORDE, C. y TROUCHE, L. (2005) Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. En: Memorias Primer Seminario Internacional de Tecnologías en Educación Matemática. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

LOPEZ. L. y SANTACRUZ, M. (2005) Explorar la transformación de rotación en educación básica integrando Cabri al aula. En: Memorias Primer Seminario Internacional de Tecnologías en Educación Matemática. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

LUPIAÑEZ, J. y MORENO, L. (2002) Tecnología y Representaciones semióticas en el aprendizaje de las Matemáticas. En: Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Serie Memorias.

MAMMANA, C. y VILLANI, V. (1998) An ICMI Study: Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

MARIOTTI, M. (2000) Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment, (Special issue) En: Educational Studies in Mathematics. Vol. 44. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

MARIOTTI, M. (2003) Introduire les élèves à une théorie. La médiation du logiciel Cabri'. En: Actes du Séminaire national de didactique de mathématiques, Vol. 1. 2003.

MARGOLINAS, C. (2002) Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. En: DORIER, J. y otros. (Eds) Actes de la 11^e École d'Été de Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

MARGOLINAS, C. (2009) La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas. Bucaramanga: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

MARTIGNONE, F. y ANTONINI, S. (2009). Exploring the mathematical machines for geometrical transformations: a cognitive analysis. International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4. Thessaloniki.

MARTIN, G. (1982) Geometry Transformation. An Introduction to Symmetry. New York: Springer - Verlag.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2006) Estándares básicos de competencias. Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: Imprenta Nacional.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998) Lineamientos Curriculares. Matemáticas. Bogotá: Editorial Magisterio.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2002) Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Serie Memorias. Bogotá: Imprenta Nacional.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2004) Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Serie Documentos. Bogotá: Imprenta Nacional.

MORENO, L. (2002) Evolución y tecnología. En: Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá: Serie Memorias. Ministerio de Educación Nacional.

MORENO, M. (1998) Didáctica de la Matemática en la Educación Secundaria. Manual para la Formación Inicial para el profesorado de Secundaria. Almería: Universidad de Almería.

ONG, W. (1999) Oralidad y Escritura. Tecnologías de la Palabra. México: Fondo de Cultura Económica.

OLIVERO, F. (2003) The proving process within a dynamic geometry environment. Graduate School of Education. Tesis doctoral. Bristol: University of Bristol.

PERRIN-GLORIAN, M. J. (2009) Utilidad de la teoría de las situaciones didácticas para incluir los fenómenos vinculados a la enseñanza de las matemáticas en las clases normales. En: Revista Internacional Magisterio. No. 39. Junio - Julio. 2009.

PUIG, A. (1965) Geometría Métrica. Madrid: Editorial Síntesis.

PIAGET, J. (1990) La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo. Madrid: Siglo XXI.

PIAGET, J. y GARCÍA R. (1980) Psicogénesis e historia de la ciencia. México: Siglo XXI.

RABARDEL, P. (1999) Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. En : Bailleul M. (Ed.) Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques. Évolution des enseignants de mathématiques ; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques. Caen: IUFM de Caen.

RABARDEL, P. (1995) Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Collins.

RABARDEL, P. y BOURMAUD, G. (2005) Instruments et systèmes d'instruments. En : RABARDEL, P. y PASTRÉ, P. (Ed) Modèles du sujet pour la conception. Dialogues activités développement. Toulouse: Octarés.

RABARDEL, P. y SAMURÇAY, R. (2001) From Artifact to instrument mediated learning. Helsinki: University of Helsinki.

RESTREPO, A. (2008) Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6eme. Tesis doctoral. Grenoble : Université Joseph Fourier.

ROJANO, T. y MORENO, L. (2002) Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo. En: Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá: Serie Memorias. Ministerio de Educación Nacional.

ROSENFELD, B. (1988) Geometric Transformations. En: Toomer, G. (Ed) A history of non-eculidean geometry. Evolution of the concept of a Geometric Space. New York: Springer-Verlag.

THURSTON, W. (1994) On a proof and progress in mathematics. En: Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 30. No. 2.

TROUCHE, L. (2002) Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs. En: GUIN, D. y TROUCHE, L. (Ed) Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

TROUCHE, L. (2003) Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. Edición del IREM. Montpellier: Université Montpellier.

THURSTON, W. (1994) On proof and progress in mathematics. En: Bulletin of the American mathematical society. Vol. 30. No. 2. 1994.

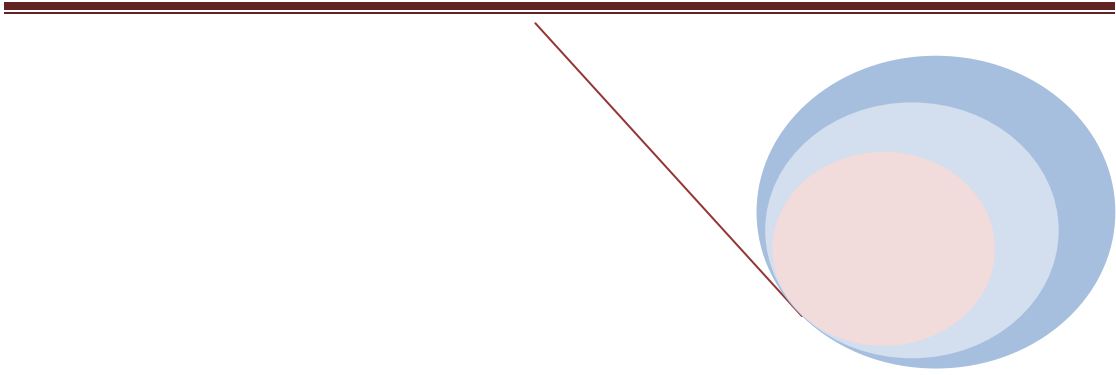
VASCO, C. (1992) Geometría Activa y Geometría de las Transformaciones. En: Ciencia y Tecnología. No. 2. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

VASCO, C. (2006) Didáctica de las matemáticas. Artículos selectos. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

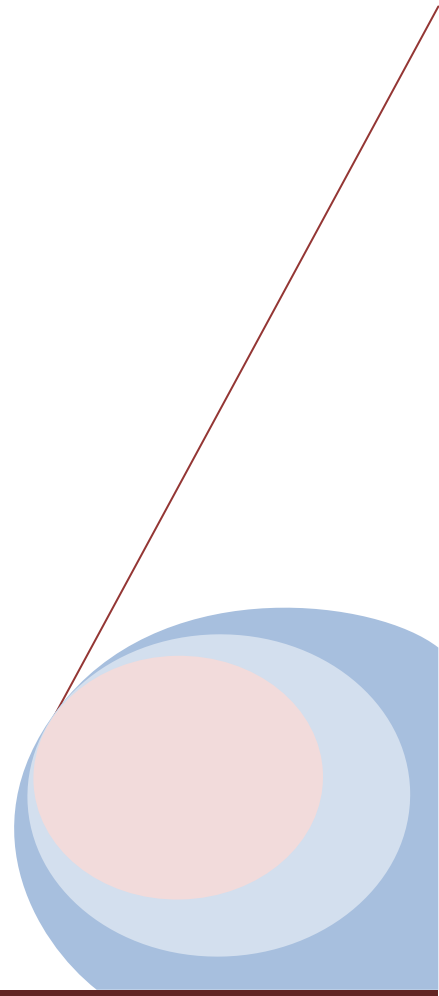
VIGOTSKY, L. (1930) Socialisticheskaia peredelka cheloveka. En: Varnitso. Vol. 10. No. 9.

WERTCHS, J. (1993) Voces de la mente. Madrid: Visor distribuciones.

YAGLOM, I. (1962) Geometric transformations. Translated from the Russian by Allen Shields. University of Michigan. New York: Random House.



ANEXOS



LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO 1. Consignas de las Situaciones	151
ANEXO 2. Sugerencias del profesor al diseño de la Secuencia	152
ANEXO 3. Información documental Situación 1 (1)	153
ANEXO 4. Información documental Situación 1 (2)	154
ANEXO 5. Información documental Situación 2 (2)	155
ANEXO 6. Información documental Situación 2 (3)	156
ANEXO 7. Información documental Situación 3 (1)	157
ANEXO 8. Información documental Situación 3 (2)	158
ANEXO 9. Información documental Situación 3 (3)	159
ANEXO 10. Gestión del profesor Situación 4	160
ANEXO 11. Registro fotográfico estrategias de los estudiantes Situación 5	161
ANEXO 12. Información documental Situación 5	163
ANEXO 13. Registro fotográfico estrategias de los estudiantes Situación 6	164
ANEXO 14. Protocolo Situación 1	165
ANEXO 15. Protocolo Situación 3	169
ANEXO 16. Protocolo Situación 7	172

ANEXO 1. Consignas de las Situaciones

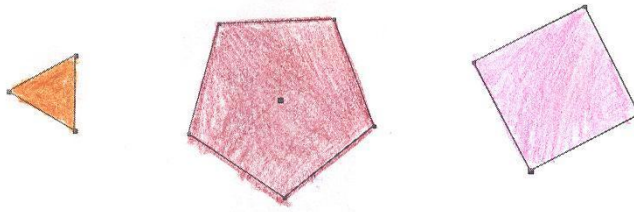
Situaciones	Tipología	Consignas
No. 1: "Rotaro"	Situación de acción.	¿Qué tipo de movimiento tienen estas figuras?
No. 2: "Figuras viajeras"	Situación de comunicación.	Imaginen que necesitan contarle telefónicamente a un amigo que no vino a clase lo que pasa con estas figuras ¿Cómo le describirían lo que observan?
No. 3: "Por el camino amarillo"	Situación de formulación.	Había una vez un camino amarillo y siete puntos verdes. ¿Qué condición deben cumplir los puntos verdes para que todos puedan estar sobre el camino amarillo?
No. 4: "La Flor"	Situación de comunicación.	¿Qué había antes de aplicar la macro? ¿Qué pasó después? Imagina que le vas a contar a tu pareja cómo es la flor que obtuvimos después de aplicar la macro ¿Qué le dirías?
No. 5: "Rosetón"	Situación de validación.	¿Cómo sabemos que esta figura es un rosetón?
No. 6: "Loco rosetón"	Situación de acción.	Modifiquen la figura para que sea un rosetón.
No. 7: "Círculo en parejas"	Situación de validación.	¿Qué círculos forman pareja? ¿Cómo sabemos que son una pareja?

ANEXO 2. Sugerencias del profesor al diseño de la Secuencia

- 1) Menú de la pantalla
 - c) Saber si el menú está condicionado, de tal manera que se limite el uso de las mismas con el fin de que el estudiante no distraiga su atención del trabajo que se realiza, haciendo uso de escas funciones que no se trabajaran y/o ~~con~~ elaborando o haciendo correcciones de elementos que aparezcan en la pantalla, que no son o forman parte de la situación a fin de restituirle a su forma original.
- 2) Las situaciones y el nivel de exploración pensado en cada situación, me parece acorde al grado en que se trabajaran, teniendo en cuenta además que los niños no han tenido de cubrir:

ANEXO 3. Información documental Situación 1 (1)

¿Qué movimiento tienen estas figuras?



El triángulo: el triángulo se mueve de una forma como un círculo y en forma de una pelota.

El Pentágono: El Pentágono tiene forma de un remolino y como una sombrilla, cuando le das mochas vueltas.

El cuadrado: El cuadrado tiene forma de un ventilador y como una fbr.

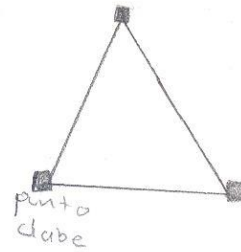
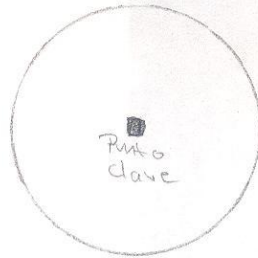
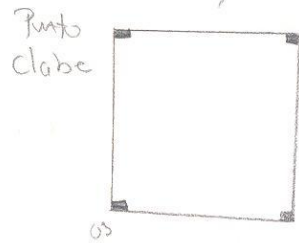
Ejemplo: Que todas las figuras anteriores se muevan igual, y el Pentágono solamente se mueve para todos los lados. En cambio las otras figuras no se pueden mover.

ANEXO 4. Información documental Situación 1 (2)

Hoy, Valeria me vino a casa y
 lo que hicimos hoy en Cabri fue hacer más
 figuras como un círculo, un triángulo, un cuadrado,
 un segmento y un punto color verde hay un punto cuadrado que
 dice O2 y otro O3 que no se podían mover cuando me
 mueve el cuadrado solo se mueve sobre el punto O3
 que es un punto cuadrado el triángulo son solo 3 puntos
 cuadrados todo esta sobre puntos cuadrados el programa
 se llama Cabri Situación 1 donde hicimos todo lo que estoy
 contando el punto O1 es color rojo, un punto no tiene número
 y es de color verde, el punto O2 es color morado, el punto O3 es de
 color negro.

Marzo 11 del 2010.

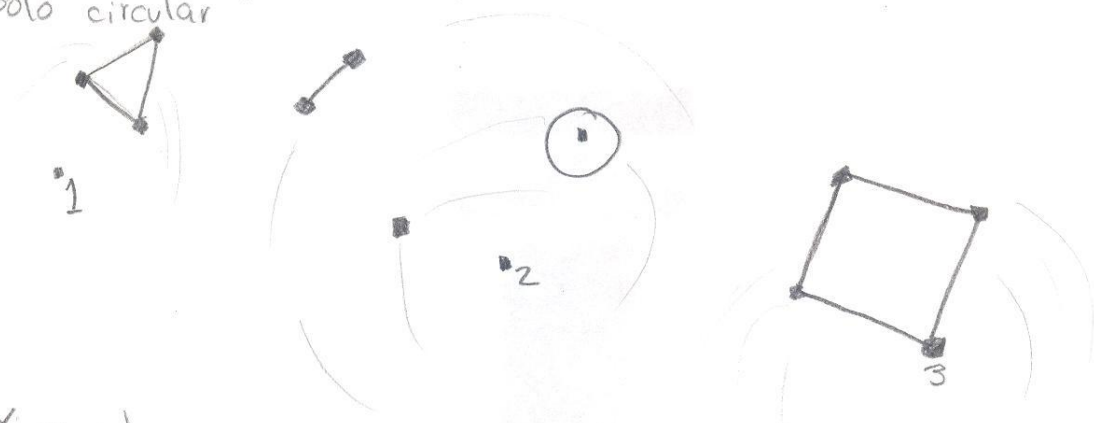
El triángulo es de color fucsia, el segmento es de color verde,
 el círculo es de color azul, el cuadrado es de color fucsia los
 puntos O2, O1 y O3 no se podían mover pero el punto verde es el
 único que si se puede mover



El círculo se puede girar de forma circular, el cuadrado
 también todas las figuras el cuadrado se mueve de forma
 circular sobre un punto llamado O3 y el triángulo sobre un
 punto llamado O1.

ANEXO 5. Información documental Situación 2 (2)

Yo le contaría que: todos abrimos una carpeta de cabri diseños 2 en tecnología, que luego de eso abrimos otra carpeta en la cual aparecieron unas figuras, un triángulo, un segmento, un cuadrado, un punto y un círculo, y todos se movían en forma circular, hacia los números el 1, el 2, y el 3, y no se podía mover de otra forma, solo circular.



Y que solo se podían mover de un punto, si uno intentaba mover la figura desde un punto, no se movía, había que buscar el punto clave.


así que de aquí se tiene que mover, no se mueve desde aquí


2


ANEXO 6. Información documental Situación 2 (3)



hoy nos fuimos a la sala de sistemas y nos metimos en Cabri diseños 2,




Situación 1. después de abrirnos metido vimos unas figuras geométricas y nos enseñaron a como podíamos moverlas las clases de figuras que habían eran un triángulo con tres puntos, , luego le uníamos el punto izquierdo y lo podíamos mover de un lado a otro.

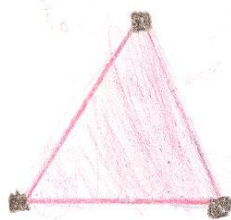
Luego había un cuadrilátero,  y también lo movíamos del punto izquierdo de un lado para otro.

Al lado de el cuadrilátero había un círculo,  Pero como ese no tenía varios puntos se movía con el punto de el medio.

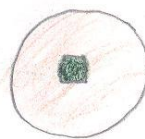
Además de esos tres había un segmento,  Al segmento lo movíamos con el punto que está abajo. Así 

y por último habían unos puntos , pero nomás se podía mover el verde porque los otros no se podía.

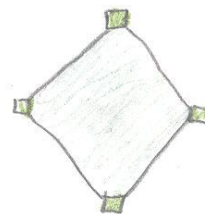
Como en las figuras geométricas tenían varios puntos y nomás se podía mover de un solo punto y se movían en círculo.



01



02



03

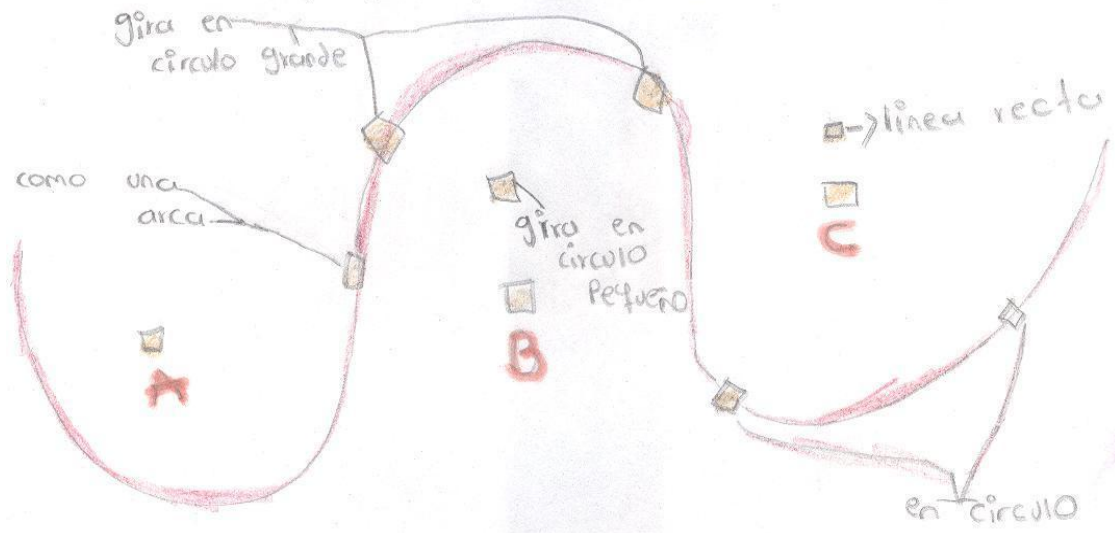
ANEXO 7. Información documental Situación 3 (1)

SECUENCIA DIDÁCTICA

EXPLORANDO LA ROTACIÓN CON CABRI

SITUACIÓN 3 POR EL CAMINO AMARILLO

Había una vez un camino amarillo y siete puntos verdes. ¿Qué condición deben cumplir los puntos verdes para que todos puedan estar sobre el camino amarillo?



ANEXO 8. Información documental Situación 3 (2)

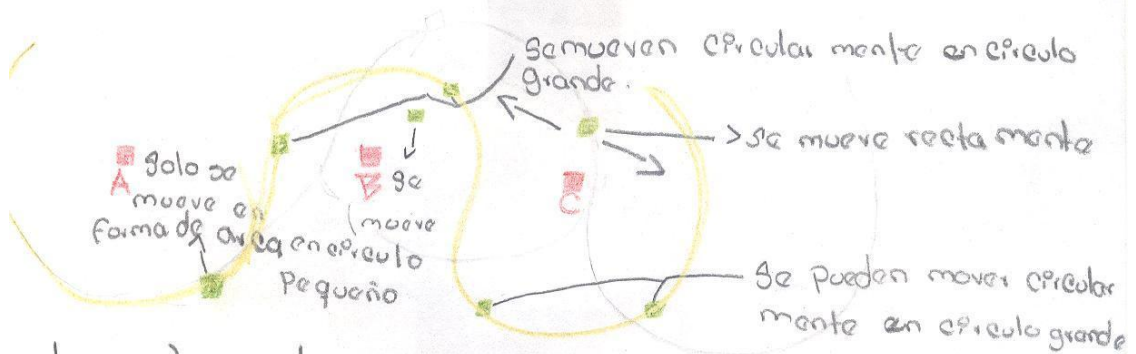
SECUENCIA DIDÁCTICA

EXPLORANDO LA ROTACIÓN CON CABRI

SITUACIÓN 3 POR EL CAMINO AMARILLO

Había una vez un camino amarillo y siete puntos verdes. ¿Qué condición deben cumplir los puntos verdes para que todos puedan estar sobre el camino amarillo?

Los puntos verdes deben cumplir la condición de entrar a la curva amarilla para poder seguir su camino a casa. ellos entran cuando los mueven circularmente algunos pueden entrar como ay



otros q' no alguno se mueven circularmente y otros se mueven con otra condición una se mueve como varca y la otra en círculo pero el problema es q' el círculo es muy pequeño

ANEXO 9. Información documental Situación 3 (3)

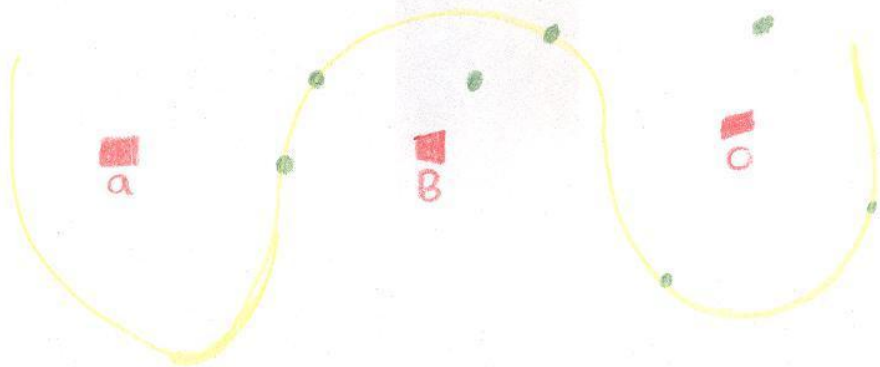
SECUENCIA DIDÁCTICA

EXPLORANDO LA ROTACIÓN CON CABRI

SITUACIÓN 3 POR EL CAMINO AMARILLO

Había una vez un camino amarillo y siete puntos verdes. ¿Qué condición deben cumplir los puntos verdes para que todos puedan estar sobre el camino amarillo?

solo Pueden entrar 5 Porque uno solo se mueve en circulo y el otro se mueve recto (o) intente meter ala raya amarilla Pero no se pudo lo intente de varias maneras Pero no se pudo.



ANEXO 10. Gestión del profesor Situación 4

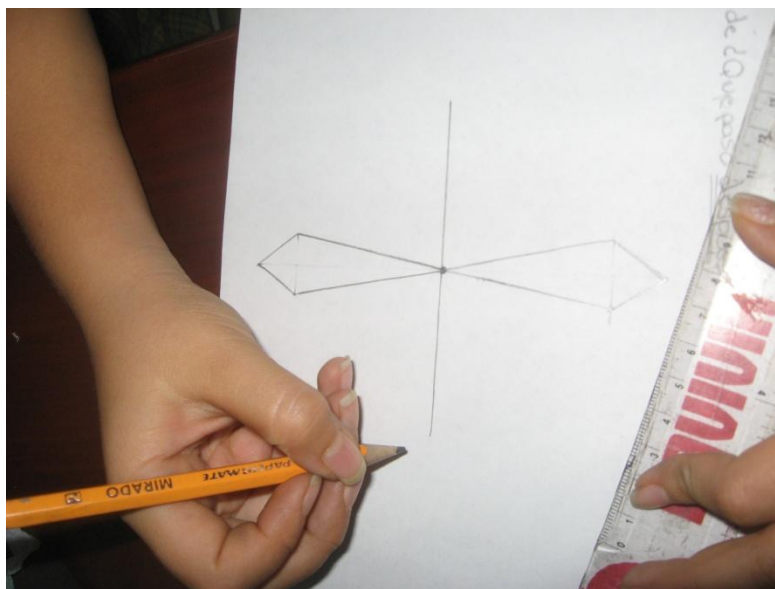


F 5.5

ANEXO 11. Registro fotográfico estrategias de los estudiantes Situación 5



F-5.1



F - 5.2

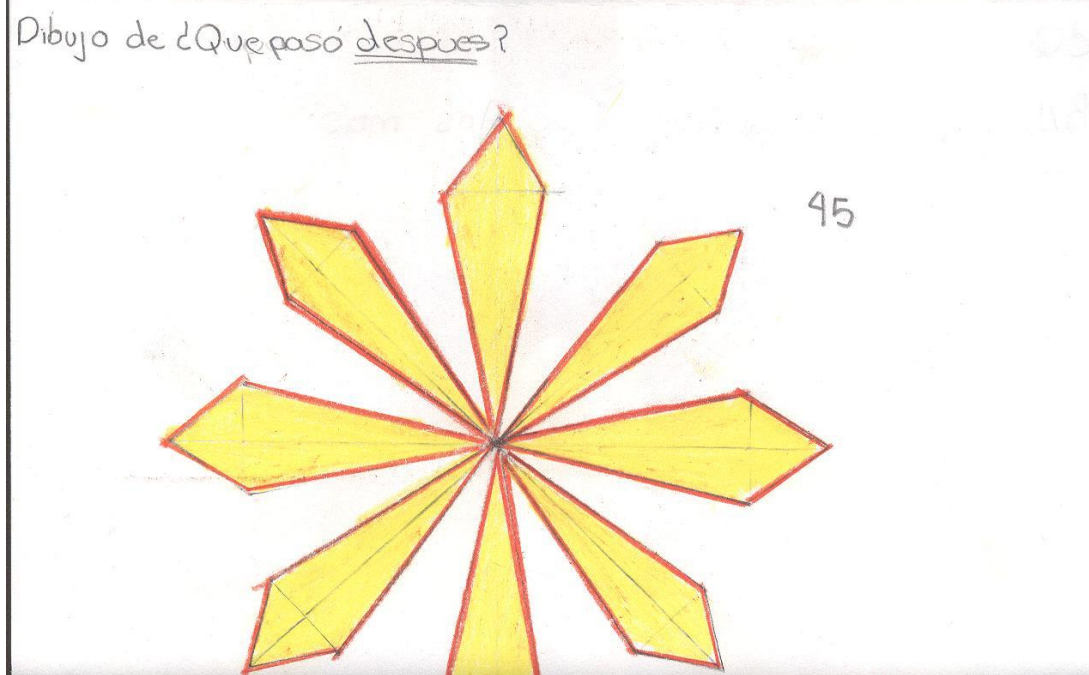
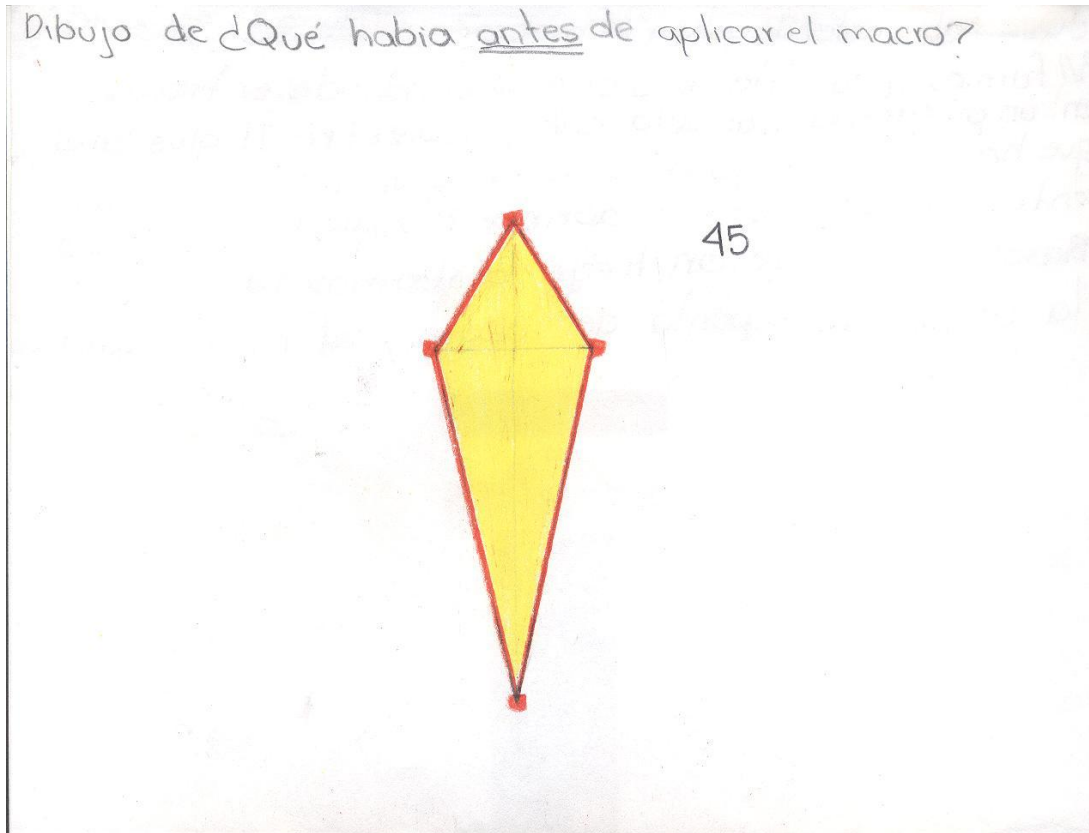


F 5.3

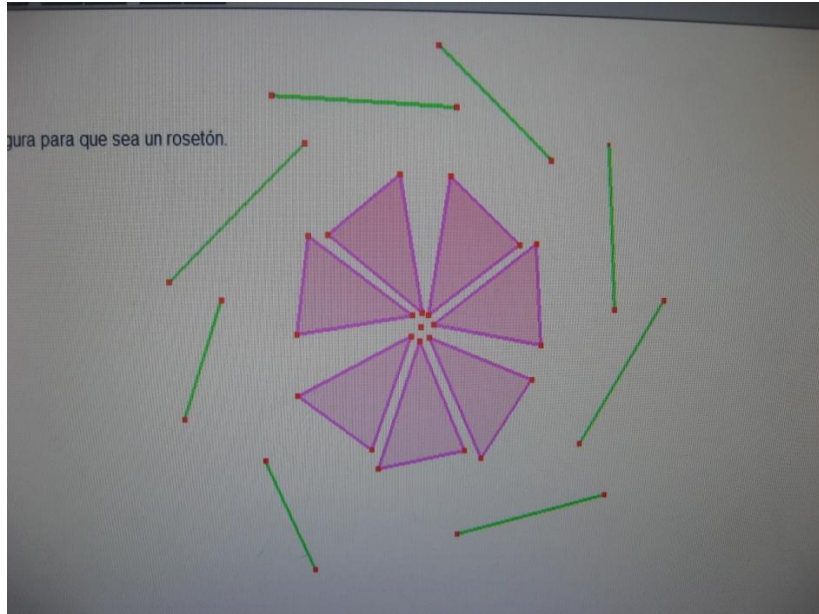


F - 5.4

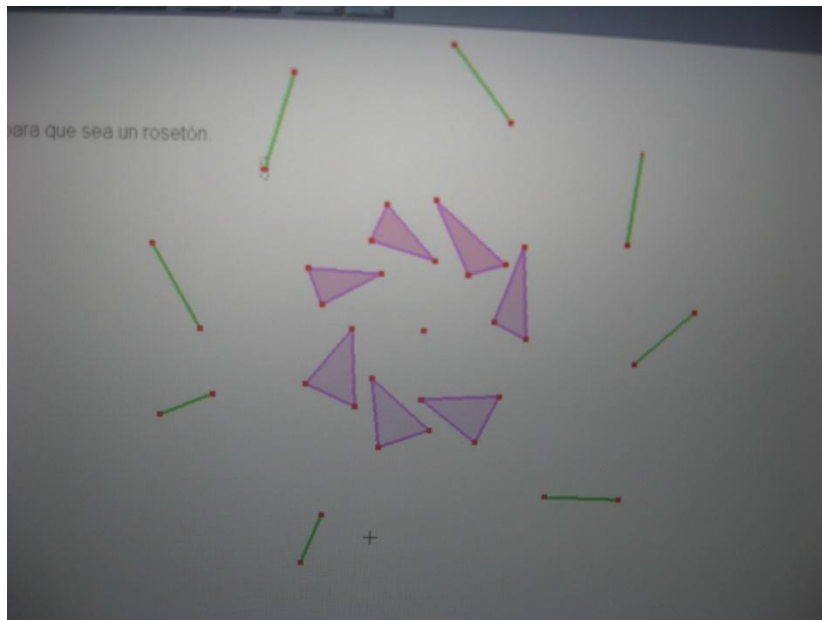
ANEXO 12. Información documental Situación 5



ANEXO 13. Registro fotográfico estrategias de los estudiantes Situación 6



F - 6.1



F - 6.2

ANEXO 14. Protocolo Situación 1

SITUACIÓN 1	
TIEMPO	REGISTRO
4:00 4:40	<p>P: Buenas tardes.</p> <p>E: Buenas tardes.</p> <p>P: mi nombre es ... obviamente no soy el profesor de ustedes, yo soy el profesor de otro colegio, en Cali; profesor del Colegio ... por lo pronto voy a trabajar con ustedes aproximadamente unas tres sesiones de clase en las cuales vamos a trabajar, por un lado, este programa que en este momento está en la pantalla de cada uno de sus monitores, ese programa se llama Cabri y nos sirve para trabajar algunos puntos de la geometría , que es lo que vamos a hacer el día de hoy, listo?, ¿Hasta ahí claro para todos?</p> <p>E: sí señor.</p>
5:30 6:00	<p>P: ustedes van a tomar el mouse que está al lado de ustedes en el computador, y van a poner ese mouse y van a empezar a desplazarlo por la pantalla alrededor de las figuras, hagan lo siguiente, cojan su mouse y acerquen este punto los que están aquí, sino se ubican en esta línea a ver que sale</p> <p>E: el nombre</p> <p>P: el nombre cierto? De este polígono</p>
6:00 7:20	<p>P: bien, entonces que vamos a hacer, ustedes se dan cuenta cuando ustedes ubican el mouse en este puntico o sobre cualquiera de estas figuritas o polígonos, ustedes se dan cuenta que tiene una crucecita y cuando llega a acá se vuelve una manito?</p> <p>E: sí señor,</p> <p>P: de color blanco</p> <p>E: como así</p> <p>P: si, una manito como así. Entonces, qué van a hacer, van a coger, o mejor dicho, van a ubicar esa manito bien sea sobre cualquiera de las líneas o sobre cualquiera de los punticos, cuando esté ubicada la manito allí sobre la línea o los punticos van a coger, van a sostener el click izquierdo, ¿cierto? Lo sostienen de tal manera que la manito va a tratar de hacer algo. Cuando ustedes ubiquen la manito van a intentar mover la figura, es decir, que eso se mueva para alguna parte, bien sea ara acá o bien sea para acá, bien sea en esta forma, o donde ustedes traten o donde ustedes deseen o traten de mover esta figura, ahora chicos, hay algo específico, no porque ustedes coloquen la manito acá van a mover la figura, la meta de ustedes es descubrir en cada figurita cual es ese puntico. ¿Listo? Entonces vamos a empezar a trabajar.</p>
8:30 9:01	<p>P: Ya?, cual es el punto?... ¿Este? Veo que en realidad la figurita se mueva, o sea, hagan la prueba, coloquen su mouse, vean donde hay que colocarlo y comiencen a mover... no es</p> <p>E: ahhh ya....</p> <p>P: claro!... A ver, cuál es el punto? Eso, muy bien! Ahora, en qué parte de este...</p> <p>E: profe (llamado de varias estudiantes)</p>
11:02 11:45	<p>P: A ver, bien, un segundito, chicos!, miren, ya varios han descubiertos los punticos que hacen mover el pentágono, el triángulo y algunos el cuadrado o los tres.</p> <p>E: si, yo los tres!</p> <p>P: observen, van a observar atentamente cómo se mueve cada figurita listo, observen bien cómo se mueven listo? Y, aparte de eso, van a tratar de fijarse en qué se parece el movimiento de las tres figuritas y en qué se diferencian, listo? Vayan pensándose eso a medida que van moviendo las figuritas.</p>
12:00 12:52	<p>P: Cuéntame, para ti como se mueve la figurita? Cómo es el movimiento? ... para ti el movimiento es circular? Bueno, ya moviste los otros? Bueno, cuéntame cómo los mueves, eso! Y para ti cómo es ese movimiento.</p> <p>E: el del ventilador,</p> <p>P: el del ventilador</p> <p>E: todos se mueven alrededor de este.</p>

	<p>P: a bueno, y qué pasa con este? ... También!... y qué pasa con este? E: está en el centro P: y este? E: está... solo se mueve pa'l lado P: bueno, tengan en cuenta eso, porque ahorita les voy a pedir que nos cuenten, ¿qué es lo que pasó allí, listo? Lo que acaban de describir.</p>
17:00 18:10	<p>P: Nuevamente, atención! Miren, como ya la mayoría de ustedes o todos descubrieron cuáles son los punticos que hacen mover la figura, entonces qué vamos a hacer, como me queda muy complicado pasar por cada uno de ustedes escuchándolos, quiero saber qué están pensando, vamos a hacer lo siguiente, la profesora va a repartir esta hojita, miren que la figurita que está ahí, es la misma que está en la pantalla de su computador. Miren que ésta pregunta que está aquí <i>qué movimiento tienen estas figuras</i> también aparece allí en la pantalla de su computador, se acuerdan que hace ratito yo les decía, tengan en cuenta cómo se mueven cada una de las figuritas? Cómo es ese movimiento? En qué se parecen? En qué se diferencian? Y además, eso que ustedes me están contando, que se mueve en forma de sombrilla, que se mueve en forma circular, todo eso que me han dicho vamos a empezar a escribirlo aquí en esta hojita listo? Entonces, los que ya les entregaron esta hojita, empiecen a trabajar.</p>
18:55 19:20	<p>P: ...el movimiento que tiene la figurita, entonces tu me vas a contar cómo se mueve esto, me describe, el cuadrado se mueve de tal forma, o yo descubrí que el triángulo se mueve de esta manera, se diferencia con el cuadrado porque este se mueve así y este se mueve de otra manera, o son iguales porque el movimiento de este una forma parecida a este, y esa forma parecida es tal!</p>
28:02 28:15	<p>P: dice que se puede mover en un punto cierto? Además donde está el punto? Está ahora donde? E: en una esquina P: bueno, agrégame eso aquí, que está alrededor de un punto y que el punto está en una esquina. Listo?</p>
28:30 29:10	<p>P: cuando tú me dices que gira para cualquier lado, como un ventilador, qué me quieres contar? E: jejejeje. P: si, descríbelo así con tus palabras... piensa que estás frente la pantalla del computador y estás moviendo esta figurita E: que gira como un ventilador, así! P: así, cómo? E: Jejeje... para cualquier lado! P: para cualquier lado? Cómo así para cualquier lado, a ver! E: ehh P: si, tu, qué me ibas a contar? E: gira así, uno le hunde aquí y entonces va girando</p>
30:30 33:45	<p>P: para los que les hace falta escribir, para los que de pronto quieran complementar algo, ahora, vamos a sacar a unos cuantos de sus compañeritos que nos van a contar lo mismo que me contaron a mi pero que ustedes no pudieron escuchar, ahora ellos les van a contar a ustedes listo? Lo que observaron cómo se mueven estas figuras, listo? Y a penas finalicemos esa parte nuevamente ustedes van a tener la posibilidad de complementar o terminar de escribir lo que les hace falta listo? E: si señor. P: entonces vamos para eso, vamos a empezar a llamar a los dos compañeritos de allá atrás. Vengan aquí que hay un computador para ustedes. Cómo hicieron para mover esas figuritas, vamos a ver... ahí está el mouse E: ahh, el mouse... <i>(el estudiante arrastra un punto del pentágono hacia la izquierda alrededor del punto central, luego desplaza la figura a través del movimiento del punto central)</i> P: eso, muy bien! Ahora, los compañeritos nos van a contar, primero vamos a</p>

	<p>escucharlos a ellos y luego escucho a cualquiera de ustedes. Cuéntenos, para ustedes cómo es el movimiento de esta figura?</p> <p>E: como un círculo</p> <p>P: ¿qué más? Que me puedes decir de que se mueve como un círculo?</p> <p>E: que lo que se mueve no cambia la forma, sino que sigue igual</p> <p>P: sigue igual, ajá... qué más puedes decirnos?</p> <p>E: que se mantiene en un solo punto</p> <p>P: que se mantiene en un solo punto?, cómo así? Cuéntanos</p> <p>E: porque aquí la figura no más está rodando aquí y se mantiene en un solo punto, ya otra cosa es que si usted le pone el mouse en el punto del centro, ya la figura se comienza a mover</p> <p>P: chicos, le voy a pedir allá atrás que escuchemos a los compañeritos de adelante que eso les va a servir para complementar lo que ustedes están escribiendo, a ver, lo que tu nos estás contando, muéstranos! Tu nos acabas de decir que hay un punto cierto? Y que la figura se mueve alrededor de ese punto? Es lo que es?</p> <p>E: si</p> <p>P: ahora, cómo es eso? Muéstranos cómo es eso!... bueno, entonces alrededor de qué se está moviendo la figura?</p> <p>E: del punto!</p> <p>P: de cuál de todos?</p> <p>E: de este (<i>punto central</i>)</p> <p>P: de ese! Cierto? Ahh bueno, listo!... y con respecto al otro movimiento? Cuando tu colocabas la manito aquí, y la movías para un lado?</p> <p>E: ahora si se puede mover la figura completa, porque se está moviendo el punto del centro</p> <p>P: ahh ya, entonces de aquí se mueve completa, y cuando la cojo de acá no se mueve completa, sino que cómo se mueve?</p> <p>E: alrededor del centro como una rueda</p> <p>P: como una rueda, muy bien!</p>
<p>34:56 35:56</p>	<p>P: Bien, entonces vamos a concluir con esta figurita entre todos algo, primero, cómo es el movimiento de la figura?</p> <p>E: circular</p> <p>P: circular! , Pero cuando es circular?</p> <p>E: cuando se mueve uno de sus puntos</p> <p>P: muy bien, cuando se mueve uno de sus puntos, y si no se mueve ninguno de sus punto, sino que se mueve a partir de aquí?</p> <p>E: entonces se mueve la figura cometa para cualquier lado</p> <p>P: para cualquier lado, se mueve la figura completa y para cualquier lado cierto? Muy bien, entonces tenemos ya tres cosas claras, uno, que la figura se mueve en forma circular cuando se mueve desde una esquina cierto? De la segunda, de aquí se mueve para cualquier lado y se mueve toda la figura completa cierto? Y como decían los compañeritos, que se parece una sombrilla que se está moviendo o se ve como un remolino, o como el decía, parece una rueda girando.</p>
<p>37:32 38:53</p>	<p>P: tu cuando me dices que no se mueve, es porque no se va para ninguna otra parte, sino que siempre hace esto?</p> <p>E: siempre hace el círculo</p> <p>P: siempre hace el círculo, entonces recordemos, si este circulito siempre hace este movimiento alrededor de quién se estaría moviendo?</p> <p>E: del punto</p> <p>P: de este punto cierto? Ahora miremos lo siguiente, por eso era también la idea que hiciéramos diferencias, ustedes me acaban de decir que este se mueve alrededor de este punto, y que este alrededor de este punto, qué diferencia hay entre estos dos puntos?</p> <p>E: que el de allá se mueve y del de allá no</p> <p>P: que el de allá se mueve y el de acá no</p>

	<p>E: para todas partes y el de allá no!, que el allá se mueve como una sombrilla y el de acá como un sol, y que este no se mueve para cualquier lado sino solo el circulo y que este si para toda parte</p> <p>P: que este si, ajá, si?</p> <p>E: que cuando está de ese punto, ese punto que está ahí se puede mover par cualquier parte, en cambio este también se puede mover para cualquier parte, pero no para arriba ni para los lados, solamente en forma circular.</p> <p>P: bueno, nuestros amiguitos nos iban a contar algo. Recuérdenos, se acuerdan qué decían ustedes sobre estos dos puntos?</p>
39:00 39:30	<p>P: qué pasaba con este puntico? Cómo estaba? cómo era?</p> <p>E: estaba en el centro...</p> <p>P: que estaba en el centro de la figura, qué pasaba con este punto?</p> <p>E: que ese está fuera de la figura</p> <p>P: ahh, entonces ya tenemos otra cosa, bien, vamos a en qué estamos de acuerdo todos. Primero, este punto está adentro y este punto está afuera, claro para todos?</p> <p>E: si!!</p> <p>P: lo otro, este triángulo solamente se mueve circular, en cambio esto lo tomo y</p> <p>E: para donde quera</p> <p>P: para donde quiera, ajá.</p>

ANEXO 15. Protocolo Situación 3

SITUACIÓN 3	
TIEMPO	REGISTRO
0:30 0:56	<p>P: Buenas tardes para todos, tanto niños como niñas, bueno... ya todos en cada uno de sus equipos están sobre este archivo de Cabri?</p> <p>E; si señor</p> <p>P: alguien no lo tiene aun en la pantalla? Alguien, alguno de pronto no tiene este archivo en la pantalla de su computador que esté abierto? ... bueno ya todos están.</p>
1:00 2:22	<p>P: Vamos a pensar que.. Ustedes observan que hay en la pantalla seis (6) punticos verdes, ahh no, dos, cuatro seis, siete punticos verdes. Cierto? Entonces vamos a suponer que esos siete (7) punticos verdes son unos amigos que están perdidos, y ellos necesitan encontrar la ruta para llegar a un lugar... un lugar cualquiera, entonces cual es la idea, estos amiguitos que están perdidos, específicamente estos que están por acá afuera, necesitan llegar a este caminito amarillito, ustedes lo ven aquí, como ven es n caminito amarillito, entonces cuál es la idea! La idea muchachos es que ustedes van... ustedes recuerdan la actividad pasada cierto? Se acuerdan que movíamos el mouse, que la imagen se ubicaba sobre alguna figura y que formaba una manito cierto? Y que nosotros presionábamos el ratón y lo desplazábamos en la pantalla y las cosas se movían cierto? Algunas figuras por lo menos algunos puntos, aquí va a pasar lo mismo con los punticos verdes, ellos tienen esa opción, ellos se van a mover!Cuál es la idea? Vamos a empezar a mover cada puntico verde de tal manera que todos los siete queden dentro de este caminito esa es la tarea, simple!</p>
3:52 4:24	<p>E: solo metí estos dos, me faltan estos dos.</p> <p>P: bueno, como metiste estos dos acá dentro? Qué hiciste?</p> <p>E: no porque estos dos estaban aquí, entonces yo cogí y metí primero uno y como el otro o perseguía yo lo metí le di espacio y ahí se metió este.</p> <p>P: ahh muy bien, pero como era ese cuento de que lo perseguía?</p> <p>E: cómo?</p> <p>P: cómo es eso de que lo perseguía?</p> <p>E: porque si yo muevo este y mire</p> <p>P: ahh por eso es que dices que lo persigue?</p> <p>E: si</p> <p>P: mmmm ya.</p>
4:56 5:31	<p>P: aquí no se pueden meter los dos, porque este se mueve en circulo</p> <p>P: ajá</p> <p>E: este se mueve en circulo pequeño, y ese se mueve así</p> <p>P: y los que metieron cómo hicieron para meterlos?</p> <p>E: pues es que, estos si se podían meter porque estos eran como... como mas grandes, el circulo grande, y este estaba adentro del arco. Ahh y los otros si se pueden meter, porque los otros dan forma circular pero dan forma circular grande</p> <p>P: ahh ya!.</p>
8:33 9:12	<p>P: Bien!, cuales son los puntos que causan problema para meter?</p> <p>E: (algarabía)</p> <p>P: para mi será mas fácil, venga por favor,</p> <p>E: venga yo voy,</p> <p>P:venga y nos señalas cuales son los puntos que generaron problemas</p> <p>E: venga yo voy!!</p> <p>P: venga y nos dice cuales son, ella nos lo dice... cuales no se pueden meter al caminito?</p> <p>E: este</p> <p>P: este que está aquí?</p> <p>E: si</p> <p>P: y cual otro mas?</p>

	<p>E: ese P: cuál? Estos dos?</p>
10:11 12:37	<p>P: tú nos vas a hacer el favor y meter los otros puntos en el camino, cómo lo hiciste? ... correcto! Chicos! Ahora vamos a observar ciertas características, miremos! Haznos el favor y muévenos este puntico E: no se mueve, E: si se mueve!! E:si? P: vamos a ver, mira, mira! Síguelo moviendo, a ver chicos! E: se mueve, P: cómo se mueve este puntico? E: como una barca, P: como una barquita, ahh, pregunta, miren lo que hizo ella con estos dos puntos, se acuerdan que estos dos estaban por acá y ella los introdujo dentro del color amarillo? E: pues porque el color amarillo está... P: porque ese que? E: porque ese sigue tiene camino al del color amarillo P: que ese tiene camino, como así? Como es el cuento de que ese tiene camino? E: movelo P: como es el hecho de que ellos tienen camino E. que da un círculo y que es abierto y se va hacia el amarillo P: y se va hacia el amarillo, bien!, miren dos observaciones importantes: una, ella nos dijo que esto se mueve en círculo y que el círculo coincide exactamente con este camino, primera observación importante. Segunda, y de allí vamos a partir para mirar que pasa con este puntico, ustedes observaron que este puntico, que estos dos salen cierto? Del camino y regresan. Alguno de ustedes de pronto se le ocurrió coger este puntico y tratar de sacarlo del camino? E: yo! P: y qué pasó? E. no se puede P: no se puede? E: porque está como que cerrada la... el camino P: ahh, entonces siempre se mantiene sobre el camino? Si? Vamos a probar esto... trata de sacarlo del camino a ver si es cierto. E: no se puede P: no, no se puede definitivamente? E: no, no se puede. P: muy bien!, y ahora miremos, entonces ahh... perdón, tenemos dos cosas no? Estos dos punticos salían del camino pero volvían al camino, este siempre está dentro del camino hasta ahí es claro para todos cierto? Estamos? E: si P: listo.</p>
13:18 13:46	<p>P: listo, cuéntanos tu qué pasa con este punto, porqué no entra al camino? E: ese punto pues no se mueve... Pues si se mueve, pero solamente así, así pero... y pues yo creo que es como si el punto ya fuera a salir del laberinto P: del laberinto ahh E. del camino P: si, parece salido del camino cierto?</p>
15:10 16:44	<p>P: ustedes observaron y vamos a hacerlo uno por uno, por favor mueve este puntico otra vez, y observen muy bien para que tengan en cuenta la observación y puedan responder la pregunta que les voy a formular, listo! Muchas gracias, mueve cualquiera de estos dos por favor, E: se mueve el círculo grande, P: se mueve en el círculo grande, correcto, ahora mueve este por favor E: se mueve en el círculo pequeño</p>

	<p>P: círculo pequeño, ahora mueve este por favor, E: se mueve en el círculo grande P: perfecto, es el círculo grande E: ese no es! el otro! P: ajá. Círculo grande. Bien, la preguntita es la siguiente, alrededor de quien se mueven esos puntos? E: del punto rojo, de la b y la c! P: vamos a ser lo siguiente, este se mueve alrededor de quién? E: de a A, (algarabía) de la a! P: de a A o de la B? porque no lo vemos, vamos a moverlo otra vez! Muévelo otra vez para que veamos alrededor de quien se mueve. E: se mueve solamente debajo de la A porque llega hasta aquí, P: ahh, pero si tiene que ver algo con la A E: llega hasta aquí y vuelve a bajar P: ahh, bien! Listo, estos dos puntos alrededor de quién? Junto con este, E: de la B P: de la B y estos? E: de la C, P: alrededor de C, correcto!</p>
--	---

ANEXO 16. Protocolo Situación 7

SITUACIÓN 7	
TIEMPO	REGISTRO
47:02 47:20	<p>P: la idea es moverlos, moverlos de tal manera que como indica ahí, cada cual encuentre su parejita, en el momento que encuentren su parejita,</p> <p>E: como así?</p> <p>P: dejan el círculo ahí, en donde está su pareja, a ver!</p> <p>E: profesor!</p>
47:37 48:03	<p>P: bien, ahora, estos dos son parejitas?</p> <p>E: si!</p> <p>P: porque serán</p> <p>E: porque estos dos son amarillos, estos dos son azules, esto dos son rosados y estos dos.</p> <p>E: no! Este es uno verde y el otro azul y cuando se hicieron pareja se volvieron negro</p> <p>P: ahh es que ustedes estaban acomodando la parejita por color?</p> <p>E: si</p> <p>P: mmm... muy bien, hay otra forma diferente del color de armar parejas?</p> <p>E: si</p> <p>P: por cual?</p>
51:38 52:24	<p>P: vamos esta vez a indagar grupo por grupo qué está pasando, así que todos nos van a contar qué pasó, entonces vamos a arrancar por aquí, ustedes están intentando armar parejitas y para armar las parejitas tienen en cuenta los círculos</p> <p>E: los colores</p> <p>P: los colores cierto? Algo más? A parte de eso?</p> <p>E: tamaño!</p> <p>P: ya voy para allá, algo más? Ahora, segundo grupo, que tienen en cuenta para armar la parejita?</p> <p>E: el tamaño,</p> <p>P: el tamaño,</p> <p>E: el tamaño, los colores,</p> <p>P: tamaño y color, pero que sean las dos al mismo tiempo o cada una por separado?</p> <p>E: las dos al mismo tiempo,</p>
57:58 59:30	<p>P: Bien chicos, prestan atención por favor todos, todos, tanto niños como niñas prestan atención, bien, entonces, ustedes estaban armando parejas tanto por color y por tamaño, voy a retomar algo que dijeron dos grupitos de sus compañeros y que es bien interesante, los dos chicos de allá y la chica que está aquí, en el caso tuyo, listo? Observen que ellos estaban armando parejas básicamente les entendí que por tamaño, entonces ellos cogieron esta figura y la acoplaron aquí, cierto? Primera pareja! Toaron esta otra figura y la ubicaron aquí, cierto? Y después hicieron esto, dijeron a ésta lo ubicó aquí y ésta la ubicó acá</p> <p>E. de esa no mas hay dos parejas,</p> <p>P. pero qué decían tus compañeros, ellos nos decían, "profe, es que éstas dos y éstas dos se ubicaron por tamaño, resulta que estas parejas de acá las ubicamos por color porque por tamaño hay un pequeño problema y es este... recuérdanos que es lo que pasaba con los dos circulitos rápidamente.</p> <p>E: se movían en circulo y la amarilla no da bien el circulo</p> <p>P: o sea que... eso! Que los círculos no coincidían</p>
59:34 60:20	<p>P: Ahora, chicos! Fijémonos, el movimiento de todas las figuritas de qué forma... cómo era el movimiento exacto?</p> <p>E: circular!</p> <p>P: circular cierto? Entonces para que esta figurita y esta otra igual que estos dos coincidieran qué debería pasar?</p> <p>E: ... circulo</p>

	<p>P: que el circulo de esta...? E. Se bajara! P: se bajara acá, cierto? Y con estas dos? E: se juntaran P: y con estas dos qué pasaría? E: que se bajaran P: que se bajaran, que se bajara cuál? esta? E: no!, que esta se subiera y la amarilla se bajara a la azul P: ahh ya entendí E. ahí no más hay dos parejas.</p>
--	--