DESARROLLO CONCEPTUAL DE LA INTEGRAL Y LA MEDIDA: UN TRÁNSITO ENTRE LO GEOMÉTRICO Y LO ANALÍTICO

DOCTORADO INSTERINSTITUCIONAL EN EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DEL VALLE

SEPTIEMBRE DE 2012

DESARROLLO CONCEPTUAL DE LA INTEGRAL Y LA MEDIDA: UN TRÁNSITO ENTRE LO GEOMÉTRICO Y LO ANALÍTICO

Tesis presentada por
MARTHA LUCÍA BOBADILLA
Para la obtención del título de
Doctora en Educación

Dirigida por
Dr. LUIS C. RECALDE

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
DOCTORADO INTERINSTITUCIONAL EN EDUCACIÓN
SEPTIEMBRE 2012

Tabla de Contenido

Tabla de figuras

INTRODUCCIÓN

Conscientes de la fuerte influencia que ejercen, sobre las prácticas educativas, las diferentes posturas epistemológicas acerca de la constitución de conocimiento matemático, pretendemos analizar y caracterizar el proceso mediante el cual los conceptos de medida e integral, alcanzan su forma general y abstracta en la tesis doctoral *Intégrale, longueur, aire*, del matemático francés Henri Lebesgue. Nos interesa identificar el proceso que le permitió a Lebesgue constituir su teoría de integración cimentada en la medida de conjuntos, mediante la interacción de lo geométrico y lo analítico. De esta manera, esperamos que este documento pueda servir de referencia en investigaciones que buscan la fundamentación teórica de la didáctica de las matemáticas, en particular a las investigaciones en didáctica del análisis matemático.

Partiendo del supuesto que la matemática, como toda ciencia, tiene por objetivo elaborar teorías satisfactorias a partir de la observación de hechos[1], entenderemos por teoría "el establecimiento de cierta armazón de conceptos que permiten poner en orden los hechos" (Cavaillès, 1938, pág. 78). Sin embargo hay que anotar que existe una relación dialéctica entre los conceptos y la teoría; los conceptos no se dan a través de definiciones nominales, sino que cobran sentido en la dinámica de la teoría, esto es, en las operaciones, relaciones y contrastes.

En este sentido develar la construcción o constitución de una teoría será equivalente a determinar las partes constitutivas de ese "armazón de conceptos" y la manera como se articulan tales partes. Por esto, el estudio de la constitución de cada teoría matemática

[1] Cuando nos referimos a "observación de hechos" no sólo hacemos alusión a cuestiones de índole empírico, sino también a los constructos abstractos propios de las matemáticas.

requiere del análisis de un proceso histórico propio en el que se combinan múltiples aspectos.

Por otra parte, consideramos que la relación historia-epistemología es necesaria, puesto que el hecho histórico de carácter científico es una idea que se asume como tal, pero requiere de una explicación epistemológica que permita ubicarlo en un sistema de pensamiento. El análisis epistemológico se refiere a los aspectos internos y es lo que permite desentrañar el enmarañado cuerpo de conceptos. En palabras de Bachelard “el epistemólogo tendrá, pues, que esforzarse en captar los conceptos científicos en efectivas síntesis psicológicas…, estableciendo, respecto de cada noción, una escala de conceptos, mostrando cómo un concepto produce otro, cómo se vincula con otro” (Bachelard, 1938, pág. 20).

El objetivo general de esta tesis es analizar el proceso histórico de constitución de la teoría de la medida y la teoría de integración de Lebesgue. La directiz de este análisis es epistemológica. Para ello se tomará como referencia principal la tesis doctoral de Lebesgue, la cual enmarca su pensamiento matemático y a su vez se constituye en la base de las teorías modernas de la medida y la integración. Sin embargo, puesto que el problema de la medida y la integración es un problema transversal al desarrollo de las matemáticas, para lograr nuestro objetivo y dimensionar el logro de Lebesgue, es necesario analizar el proceso de constitución desde su problema original, que es la medida de magnitudes geométricas. Para caracterizar dicho proceso de constitución hemos usado una reglilla de análisis histórico fundamentada en el análisis arqueológico, en términos de *umbrales*, propuesto por Foucault en la *Arqueología del Saber*, lo que se constituye en nuestro aporte principal a la problemática sobre constitución histórica de teorías y conceptos matemáticos.

Por otra parte, con la obra Lebesgue se evidencia que el corazón de lo analítico está en lo geométrico, lo que explica la estrecha relación entre medida e integración. Esto significa que el problema de la integración no se puede resolver mediante métodos netamente analíticos, sino que es necesario volver al método geométrico y reinscribirlo dentro de lo analítico. En este trabajo presentamos la caracterización del proceso que le permitió a Lebesgue constituir su teoría de la medida y la integración, mediante la interacción de lo geométrico y lo analítico, estableciendo el concepto de integral en su forma más general y abstracta. Para ello fue indispensable llevar a cabo una lectura minuciosa de su tesis doctoral y de otros trabajos relacionados, tratando de obtener información no sólo de la lógica del discurso matemático, sino también de las características propias del pensamiento matemático del autor y el método utilizado para la construcción de su teoría de integración a través de su tesis doctoral.

Para lograr nuestro objetivo general: develar el proceso de constitución de la teoría de la medida y la teoría de integración de Lebesgue, organizamos este trabajo en tres capítulos. En el primer capítulo presentamos un recorrido histórico para establecer cómo se fue estructurando esta armazón teórica a lo largo de los años y cuáles fueron los problemas, conceptos, métodos y apuestas teóricas que influenciaron el trabajo de Lebesgue. En el segundo capítulo se exponen con detalle los desarrollos de Lebesgue relacionados con los conceptos de área, medida e integral, que aparecen fundamentalmente en su tesis doctoral. Este desarrollo teórico pormenorizado nos es indispensable para identificar el entramado teórico construido por Lebesgue, e identificar esa estrecha relación entre lo geométrico y lo analítico. El tercer capítulo incluye el análisis epistemológico del proceso histórico presentado en el primer capítulo. También, se analiza el papel de este tipo de análisis históricos-epistemológicos del saber en la didáctica de las matemáticas, a la vez que se establece la relación entre el saber sabio de Chevallard y el saber de Foucault. Se presenta la concepción de Lebesgue sobre la relación entre geometría y análisis, apoyándonos tanto en sus desarrollos investigativos como en sus propios comentarios, y usamos esta concepción para reflexionar sobre la enseñanza de los conceptos de área, medida e integral. A continuación detallamos el contenido de estos tres capítulos.

En el primer capítulo se presenta una historiografía de la evolución de los conceptos de integral y medida desde sus orígenes primigenios, que comprende el amplio período desde la antigüedad griega hasta finales del siglo XIX. Aunque es claro que las nociones de función, número irracional, medida abstracta e integral fueron establecidos a partir del siglo XVIII, nos interesa identificar los problemas primigenios que van delineando y favoreciendo su desarrollo; en este sentido se describen con cierto detalle los principales trabajos que favorecieron la constitución de la teoría de la integración moderna, y se muestra cómo desde sus inicios su desarrollo estuvo en íntima relación con el problema de la medida. Se muestra la transformación de un problema geométrico en un problema analítico y posteriormente en un problema de medida de conjuntos de puntos, y cómo para su solución se conjugan los desarrollos, métodos y conceptos de diversas ramas de la matemática: la geometría, el cálculo, el análisis, la teoría de conjuntos de puntos y la teoría de la medida. Este capítulo comprende 14 secciones, que describimos a continuación.

En las tres primeras secciones se muestra cómo los griegos intentan dar salida al problema de la medida de magnitudes geométricas mediante una medida relativa. Se presentan los aspectos más importantes de los libro I, II, XI y XII de *Los Elementos*, mostrando la forma cómo Euclides establece lo que hemos llamado una medida relativa, es decir cómo mide una magnitud desconocida mediante la equivalencia con una figura referencial, para el caso de segmentos, superficies planas y sólidos. En la sección 1.3 se explica cómo Arquímedes utiliza el método de exhaustivo y un método mecánico para obtener cuadraturas de figuras curvilíneas, generando dos estilos metodológicos para abordar el problema de las cuadraturas; uno fundamentado en los infinitesimales y el otro fundamentado en los indivisibles.

En la sección 1.4 se muestra cómo Cavalieri construye su teoría de los indivisibles, redescubriendo las bases metodológicas del método mecánico y utilizando procesos algebraicos, lo que le permitió calcular cuadraturas de regiones limitadas por curvas de ecuación x^n, para $n = 1, 2, \cdots, 9$. Se muestra el paso de los indivisibles a los infinitesimales con Wallis, quien retoma los resultados de Cavalieri, pero abandona el marco geométrico. En su *Arithmetica Infinitorum* aritmetiza la *Geometría Indivisibilibus* de Cavalieri. Básicamente su método consiste en asociar valores numéricos a los infinitos indivisibles de Cavalieri. En Wallis el problema de las cuadraturas se transforma en el problema de hallar el área bajo la una curva regida por una ecuación cartesiana. Aquí se muestra cómo Wallis establece el área del rectángulo como el producto de la base por la altura, lo que se constituye en un resultado muy significativo para la medida de superficies planas.

A lo largo del siglo XVII, el uso de las cantidades infinitesimales fue imponiéndose en la solución de problemas de cálculos de tangentes, áreas, volúmenes, etc. Además se usaban más expresiones algebraicas y menos objetos geométricos. Gracias a la geometría analítica de Descartes se tiende el puente entre la geometría y el análisis, lo que permitió ampliar considerablemente el dominio de las curvas geométricas. La aparición de nuevas curvas hizo imprescindible el desarrollo de nuevos métodos para calcular tangentes y áreas. Estos aspectos constituyen el marco conceptual de la sección 1.5. En esta sección se exponen los aportes de Newton y Leibniz a la constitución del concepto de integral. Gracias al reconocimiento, de la relación inversa entre el problema de la cuadratura y la tangente. Newton y Leibniz lograron resolver de manera general todos los problemas de cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes y centros de gravedad, que habían ocupado a sus predecesores, sintetizando los diferentes métodos infinitesimales en las tablas de cuadraturas y anticuadraturas. Otro aporte importante de Leibniz, que tratamos en esta sección, es el relacionado con la simbología; la introducción de la notación "*dx*" y el símbolo $\int$, fue un aspecto importante en la introducción y manejo de algoritmos para la derivada y la integral.

En la sección 1.6 se muestra cómo se fue transformando el cálculo infinitesimal. Describimos la manera en que el concepto de función va tomando protagonismo, y cómo el problema de representación en series se relaciona con el problema de la integración.

Gracias a los trabajos de Fourier sobre la transmisión del calor, se amplió el dominio de las funciones, más allá de las continuas, y se dedicaron grandes esfuerzos a establecer las condiciones que debía cumplir una función para ser representada en series trigonométricas. Una de estas condiciones era la integrabilidad de la función sobre un intervalo determinado. Se hizo necesario reconsiderar el concepto de integral. Sin embargo, debemos precisar que el problema de la integración sería tratado, durante muchos años, como un problema subsidiario del problema central de la representación de una función en series trigonométricas. La integral era considerada como una herramienta de solución necesaria, pero no era inicialmente el concepto principal de estudio. Con Fourier se vuelve a la integral como el área bajo la curva y se plantea la cuestión ¿Qué tan discontinua puede ser una función para que sea integrable?

En la sección 1.7 se describe la forma cómo Cauchy, a través de los conceptos de límite, función y convergencia, logra proporcionar una definición analítica de la integral definida para funciones continuas. Cauchy separa la integral del cálculo diferencial y la define como un límite de sumas. Sin embargo, tal como lo describimos, demuestra la relación inversa de la derivada y la integral a través del teorema fundamental del cálculo, en su primera versión histórica.

Con Dirichlet y su función característica de los racionales, aparece la pregunta en relación con la exigencia que debían cumplir los infinitos puntos de discontinuidad para que la función fuese integrable. En la sección 1.8 se discuten estos aspectos, llamando la atención en el hecho de que Dirichlet establece la falsa condición de que es suficiente que los puntos de discontinuidad formen un conjunto diseminado para que la función sea integrable.

En la sección 1.9 se muestra que Riemann, basándose en las concepciones de Cauchy y Dirichlet, incorporó una definición de integral que acogía funciones arbitrarias altamente discontinuas. La definición de la integral de Riemann incluye funciones que tengan en un intervalo finito un conjunto denso de discontinuidades. Riemann introduce dos condiciones suficientes y necesarias para que una función sea discontinua; una de estas condiciones será el antecedente más importante del criterio de integrabilidad en términos de la medida del conjunto de discontinuidades.

A partir de los trabajos de Dirichlet, matemáticos como Riemann y Lipschitz enfocan su atención hacia los conjuntos infinitos de puntos de singularidades (puntos de discontinuidad y extremos locales); la cuestión era determinar las propiedades que debían cumplir estos conjuntos para que la función tuviera representación en series trigonométricas o fuera integrable en un intervalo dado.

Describimos en la sección 1.10 la forma en que Lipschitz, intentando demostrar el falso criterio de integrabilidad de Dirichlet, desarrolla un amplio análisis sobre la distribución de puntos infinitos de discontinuidad y de extremos locales, y su relación con la integración; llamando la atención sobre los conjuntos de puntos de acumulación.

De esta forma, podemos observar que las raíces de la noción de conjunto se pueden relacionar con el análisis real, la teoría de series trigonométricas y concretamente en la cuestión de la representación de funciones discontinuas mediante series de Fourier. Estas cuestiones incentivaron a Hankel y Cantor a realizar una indagación detallada de los conjuntos de puntos. Hankel intenta generalizar la condición de integrabilidad de la función de Riemann en términos del concepto de salto de una función, clasificando las funciones en integrables y no integrables. Con esto, la obra de Hankel inicia el enfoque conjuntista de la teoría de la integración, lo cual permitirá fundar la teoría de la integración moderna sobre el concepto de medida; esto se explica con detalle en la sección 1.11.

En la sección 1.12 se muestra la confusión existente entre un conjunto despreciable desde el punto de vista topológico (diseminado) y desde el punto de vista de la teoría de la medida (contenido exterior nulo), y cómo gracias a los trabajos de Cantor y sus conjuntos derivados, se estableció esta diferencia.

En la sección 1.13 se muestra cómo en la obra de Darboux, los trabajos de Riemann sobre la integral encuentran continuidad y a la vez se evidencian sus limitaciones con respecto al paso al límite y el problema de la antiderivada. Darboux enuncia el primer criterio de integrabilidad de Riemann en términos de la igualdad de los límites de las sumas superiores e inferiores y demuestra el teorema fundamental del cálculo para la integral de Riemann. Apoyándose en este teorema, Dini llama la atención sobre la existencia de funciones con derivada acotada que no son Riemann integrables. Posteriormente Volterra construye una función de este tipo y evidencia la limitación de la integral de Riemann con respecto al paso al límite.

En la sección 1.14 se establece la relación entre el contenido de un conjunto y la integral de Riemann. Allí se muestra que los primeros intentos modernos por definir una función medida que asigne un valor numérico a cualquier conjunto de puntos se deben a Harnack, Stolz y Cantor, quienes definen el contenido exterior; pero este concepto no cumplía la propiedad de la aditividad. Peano y Jordan definen el contenido (o área) interior y el contenido (o área) exterior, logrando así una definición de contenido más general que cumplía con la aditividad finita; sin embargo esta definición no da cuenta de la medida de muchos conjuntos, entre ellos el conjunto de los racionales. Simultáneamente, Jordan y Peano se preocuparon por establecer una definición formal del concepto de área de una superficie, problema que fue retomado por Lebesgue.

En esta misma sección se muestra la manera en que Borel definió una medida que cumplía la propiedad de aditividad numerable para subconjuntos de reales, extendiendo la longitud ordinaria de un intervalo a conjuntos abiertos, basándose en la propiedad de que todo abierto es la unión numerable y disjunta de intervalos abiertos. A partir de estos resultados, como se estudia en esta sección, se inició el establecimiento formal de la teoría abstracta de la medida y gracias a Jordan se explicitó la relación entre la medida y la integración, mediante la integral superior e inferior, previamente introducidas por Darboux.

Lebesgue se propuso en su tesis doctoral generalizar la noción de integral con el propósito de solucionar los problemas que no pudieron resolver sus antecesores: la definición general del concepto de área, y una definición integral lo suficientemente general y útil que permitiera resolver el problema del cálculo de primitivas para un conjunto suficientemente amplio de funciones. Lebesgue se apoyó en el concepto de contenido de Jordan y en la medida de conjuntos de Borel, brindando una salida conceptual al problema de la medida y estableciendo una teoría de integración más general.

La metodología usada para la elaboración de este primer capítulo es la comúnmente empleada en las historiografías. Se trata de estudios de corte hermenéutico, pues se busca interpretar y esclarecer el desarrollo de las nociones de medida e integral en un periodo de mas de 25 siglos. Esto requirió la revisión de memorias originales y de fuentes secundarias como (Andersen, 1985), (Hawkins, 1979), (Recalde, 2011) y (Stedall, 2004). El aporte en este sentido es la manera personal de sistematizar, reestructurar y reescribir la información proporcionada por las fuentes citadas.

En el segundo capítulo se hace un análisis epistemológico estudiando el entramado conceptual mediante el cual Lebesgue desarrolla su teoría, allí presentamos los desarrollos teóricos relacionados con los conceptos de medida, integral y área, consignados en la Tesis doctoral de Lebesgue (Lebesgue, 1902), y para el caso del concepto de área se incluye la memoria (Lebesgue, 1903). Se expone la teoría de Lebesgue en un lenguaje matemático actual, dotándola a la vez de una estructura lógica deductiva acorde a los cánones de rigor modernos, pero respetando la argumentación de Lebesgue. Para ello se han complementado con notas aclaratorias y algunas demostraciones de resultados que consideramos claves y que Lebesgue no demuestra. Tal es el caso de la proposición 2.2.18, la cual establece que la unión numerable de conjuntos medibles es medible, cuya demostración requiere de ciertas construcciones que Lebesgue describe de manera intuitiva, tal vez por la carencia de una simbología apropiada; además esta proposición se apoya en la proposición 2.2.17, la cual Lebesgue no enuncia explícitamente, ni demuestra. En este capítulo se describe la manera como Lebesgue enuncia el problema de la medida y define lo que es un conjunto medible, mostrando que el concepto de medida, para conjuntos acotados, es una extensión de los conceptos de longitud, área y volumen. En relación a la teoría de integración, se presentan las definiciones de la integral definida y la integral indefinida. Inicialmente se define la integral de una función continua como el área de un dominio plano, lo que conduce a definir la integral de una función discontinua acotada como la medida de un cierto conjunto de puntos. A continuación esta definición geométrica es reemplazada por una definición analítica, la integral se presenta entonces como el límite de una sucesión de sumas similares a las consideradas en la definición de Riemann. Lebesgue denomina *sumables* aquellas funciones a las cuales se aplica dicha definición geométrica; y establece que es sumable toda función que pueda definirse por medio de las operaciones aritméticas y del paso al límite, y las funciones Riemann-integrables. En general toda función derivada acotada es sumable. Una vez se establecen estos resultados y todas las propiedades de la integral de Lebesgue, se define la integral indefinida en términos de la integral definida.

Con respecto al problema del área, mostramos los desarrollos expuestos en la tesis doctoral de Lebesgue, donde se define el área para dominios cuadrables y no cuadrables. También incluimos los desarrollos de la memoria de 1903, puesto que en su tesis Lebesgue no logra resolver el problema general del área. En la memoria de 1903 se presenta una solución al problema del área de dominios no cuadrables, explicando el error cometido en la tesis doctoral en relación a la aditividad del área de dominios no cuadrable. En esta memoria Lebesgue define con más precisión los conceptos necesarios para obtener una definición del área de un dominio no cuadrable que cumpla las condiciones requeridas para que el problema del área tenga solución. Para demostrar la validez de su definición, Lebesgue necesita la construcción de una curva no cuadrable, tipo fractal, que contiene sólo arcos de primera especie; ésta es tal vez la parte más interesante de esta memoria. La lectura de esta memoria es complicada, a diferencia de su tesis doctoral, pues incluye varias definiciones de corte intuitivo; tal vez esto se deba a que Lebesgue estaba escribiendo sobre un problema que no logró resolver. Para facilitar su lectura, además de la organización axiomática, hemos incluido gráficos ilustrativos. Vale la pena aclarar que el problema del área para las superficies alabeadas es un problema abierto que no ha sido suficientemente tratado ni por los matemáticos, ni por los historiadores de las matemáticas.[2]

El tercer capítulo se divide en tres secciones. En la sección 3.1 consignamos la posición de Lebesgue sobre la actividad matemática, donde se llama la atención sobre la relación entre lo concreto y lo abstracto; relación que, según Lebesgue, se debe preservar para no correr el riesgo de llegar a generalizaciones estériles que no permitan ver sus variadas aplicaciones. Lebesgue considera que el análisis matemático está fundado sobre la recta geométrica y por tanto en la geometría; por esto, a pesar de que la integral es un concepto analítico, para su enseñanza, así como él lo hizo en su investigación, se debe partir de la medida de las magnitudes y paulatinamente pasar del lenguaje geométrico al lenguaje lógico del análisis. También exponemos en esta sección la diferencia que establece Lebesgue entre definición constructiva y definición descriptiva ilustrando sus diferencias mediante las definiciones de medida e integral. Aquí se muestra que Lebesgue se apoya en su experiencia investigativa para hacer su "filosofía de segunda zona" y opinar sobre la forma en que se construyen conceptos o teorías matemáticas y la forma apropiada de enseñar los conceptos matemáticos, en particular en relación a los conceptos de área, medida e integral.

En la sección 3.2, se presenta una reflexión sobre el concepto de *saber* desde la óptica de Chevallard y la de Foucault, y sobre el papel que juega el análisis epistemológico del saber en la didáctica de las matemáticas. Esto nos permitirá establecer cuáles son las características de un análisis histórico que pueda ser tomado como referente para las investigaciones didácticas. La teoría de la transposición didáctica de Chevallard nos da pie para mostrar que desde la mirada del matemático creador se encuentran importantes aportes para el análisis de la transposición didáctica.

Los dos primeros capítulos tienen dos enfoques diferentes, el primero da cuenta de una generalidad, el segundo muestra un momento de síntesis histórica en una obra particular; por esto, para alcanzar el objetivo de la tesis, es necesario someter la información registrada en los dos primeros capítulos, a un análisis que permita ver la interacción entre los

[2] Ver (Gandon & Perrin, 2009)

diferentes momentos de conceptualización y constitución de la teoría en cuestión. Las unidades de análisis utilizadas son los umbrales de Foucault, los cuales actúan como una "lupa" o un "zoom" sobre los análisis históricos generales, o como bisagras que permiten articular diferentes momentos o unidades teóricas. Por esto, se describen y analizan los umbrales de Foucault y se toman para estructurar una reglilla de análisis del desarrollo histórico de la integral y la medida que hemos descrito en el primer capítulo. Aunque Foucault manifiesta sus reservas con respecto a la aplicación de estos umbrales a la historia de la matemática, en la tesis se muestra la conveniencia de su aplicabilidad para la descripción de teorías particulares como la de la medida y la integral. Al hacer nuestro análisis al desarrollo histórico de la integral y la medida, usando los umbrales de positividad, epistemologización, cientificidad y formalización, nos hemos encontrado con que el umbral de formalización, por incluir múltiples apuestas teóricas, requiere ser analizado en su interior en términos de las mismas categorías de umbrales. Además, hemos adicionado el *umbral de estructuración*, el cual toma como referencia el ideal de erigir las matemáticas bajo la noción de estructura.

En la sección 3.3 se presenta una reflexión sobre la enseñanza del área, la integral y la medida fundamentadas en los desarrollos de Lebesgue y en sus propias reflexiones pedagógicas sobre la necesidad de evidenciar la relación, a veces oculta, entre geometría y análisis. En (Lebesgue, 1936) el autor nos da pautas sobre cómo se establecen los procesos cognitivos; aunque su posición puede parecer ingenua porque la establece desde su práctica y no desde una teoría cognitiva o didáctica, mostramos que su punto de vista se puede poner en correspondencia con algunas unidades de análisis propios de dichas teorías.

Como resultados indirectos de nuestra investigación, esperamos que nuestra propuesta pueda ser usada como referencia metodológica para estudios históricos-epistemológicos similares. Igualmente, queremos poner nuestra investigación a disposición de investigadores matemáticos y de investigadores en educación matemática.

1 EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LAS NOCIONES DE MEDIDA E INTEGRAL

1.1 El problema de la medida en la antigüedad griega

Muchos de los problemas de las matemáticas surgen por el afán de resolver cuestiones concretas provenientes del mundo fenomenológico; el problema de la medida no es una excepción. Los egipcios y babilonios, por ejemplo, necesitaban hacer mediciones para sus obras civiles y la división de sus campos. Sin embargo estas civilizaciones contaban con una geometría rudimentaria y parecía no existir un interés por conceptualizar o formalizar sus métodos. Es con la geometría griega que se establece un cuerpo teórico que formaliza los procesos intuitivos de medir:

> En su genuina determinación, el problema matemático de la medida se funda en la antigüedad griega, y se enmarca en la perspectiva del λογος, logos. Concepto que algunos lo asimilan a la palabra *razón* y a la expresión de la razón de una manera argumentativa. Pero la misma expresión razón o argumentación tiene varios sentidos. Para Heráclito, al igual que para los estoicos, la razón es la ley universal que ordena el universo. En Zenón, forma parte de la dialéctica. Para Platón, el logos obra como intermediario entre lo divino y lo humano. En Euclides el logos se toma en el sentido de razón o relación cuantitativa entre magnitudes. En todos los casos, se identifica con lo sereno lo armonioso, ordenado, claro, medible y limitado (Recalde, 2007, pág. 105).

El desarrollo de la geometría griega estuvo dirigido por el intento de resolver los tres problemas de la medida de magnitudes: La duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Su objetivo central era establecer una forma de medir, diferente a la medición empírica directa, puesto que este método no permitía determinar grandes longitudes como: la altura de las pirámides, la distancia al sol, el ancho de un rio, la distancia de un barco al faro sobre el puerto, etc.

Tales de Mileto implantó los primeros métodos que permitieron calcular estas grandes distancias; estableciendo una correspondencia entre la experiencia empírica y la experiencia abstracta. Su aporte fue transformar un problema físico en un problema matemático; esta forma de pensamiento lo condujo a obtener cuatro importantes resultados de la geometría relacionadas con la operación de medir: Todo diámetro biseca al círculo, los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes, el ángulo inscrito en un semicírculo es recto y los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

En relación con la cuadratura del círculo, Antífone, contemporáneo de Sócrates, observó que si se inscribe en un círculo un cuadrado, y se dobla sucesivamente el número de lados, se construyen los polígonos regulares inscritos de 8, 16, 32,... lados, etc. Llegando así a un polígono que por la pequeñez de sus lados coincide con el círculo. En la segunda mitad del siglo V a.C., Hipócrates de Chío enunció su teorema sobre los círculos y los cuadrados circunscritos, y demostró que el área de un círculo es proporcional al cuadrado de su diámetro. Este teorema se constituye en el primer resultado formal sobre la medida de figuras curvilíneas en la matemática griega.

Sin embargo, para los antiguos griegos la acción de medir no tiene aún una acepción precisa. Con los pitagóricos encontramos los primeros indicios de la operación genérica de medir a partir del proceso de comparación. A Pitágoras se le atribuye el método de "aplicación de áreas" consistente en la superposición de un área sobre otra.

Para Pitágoras el concepto de armonía era aplicable al universo entero. El número permitía revelar el orden que regía todos los fenómenos naturales y, a su vez, constituía la única realidad. Esta es una concepción retomada por Platón en el *Timeo*, donde concibe el universo como "armonía", la cual sólo es posible conocer a partir de la relación del todo con los elementos constitutivos; lo que se logra mediante la combinación de la división aritmética, la geométrica y la armónica. Así, encontramos en los pitagóricos los fundamentos básicos de una teoría matemática de la medida, la cual se basa en la existencia de una estructura numérica. Para los pitagóricos, esa estructura correspondía a los números de contar. Esto significaba que dadas dos magnitudes cualesquiera A y B, era posible encontrar dos números m y n, tales que $mA = nB$. Pero el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables puso en cuestionamiento este enfoque pitagórico. La respuesta al problema planteado por las magnitudes inconmensurables se da a través de la teoría de proporciones de Eudoxo, sistematizada por Euclides en sus *Elementos*.

Veremos cómo Euclides, en la misma línea de sus antecesores, establece un procedimiento teórico, fundamentado en las operaciones de descomponer, recomponer y superponer, para medir mediante comparación.

1.2 La medida en los *Elementos* de Euclides

En los *Elementos* de Euclides encontramos el primer compendio sistemático de una teoría de la medida[3]; a lo largo de los trece libros, se evidencia que el objetivo euclidiano es establecer la medida de magnitudes: segmentos, ángulos, figuras planas y sólidos. Euclides no presenta una definición de medida, pero establece la operación de medir mediante un proceso de comparación, respetando el principio de homogeneidad, en el sentido de que sólo es posible comparar magnitudes de igual dimensión. De esta manera el problema de la medida se establece en tres niveles. En el caso unidimensional, se trata de comparar un segmento con otro tomado como unidad referencial. Para dos dimensiones, el problema es encontrar un cuadrado equivalente a una figura plana cualquiera. Análogamente, para el caso de tres dimensiones el problema consiste en hallar un cubo equivalente a un sólido cualquiera. En los *Elementos* se encuentran soluciones sólo para casos particulares de estos tres problemas; sin embargo, estas respuestas parciales, los métodos utilizados y los fundamentos conceptuales establecidos, marcaron los desarrollos teóricos que condujeron a la constitución de la teoría de la medida y la integración.

Para desarrollar su teoría de la medida, Euclides utiliza, sin una definición previa, algunas categorías básicas: la congruencia, la igualdad o equivalencia, mayor y menor. Sin embargo, el desarrollo de la teoría permite aclarar estas nociones. La igualdad o equivalencia se refiere a la cantidad: cosas iguales son aquellas que tienen la misma cantidad; más concretamente, son aquellas que tiene igual medida. Mientras que la noción de congruencia, según algunos traductores, está relacionada con la acción de "encajar" o "ajustar", dos cosas serían congruentes si “la una encaja perfectamente sobre la otra”. Tampoco define lo que entiende por “medir”, sin embargo igual que para Aristóteles y sus

[3] Esta es una concepción que compartimos con Luis Recalde, y con Luis Vega quien establece que en los *Elementos* hay una “teoría inducida” de la medida y que la metáfora todo/partes cobra especial importancia en los libros V y VII en el sentido que permite conceptualizar una relación de medida. (Vega, 1999, págs. 7-11).

antecesores, medir es comparar. Explícitamente la palabra aparece por primera vez en el libro V, en la primera definición: "Se dice que una magnitud es parte de otra mayor cuando la mide".

El concepto moderno de "medida" se fundamenta básicamente en el concepto de función, y un campo numérico continuo y ordenado. Euclides no contaba con estos aspectos para elaborar una teoría abstracta de la medida; sin embargo, podemos mostrar que en los *Elementos* se desarrolla una teoría de la medida relativa: Euclides mide segmentos, mide ángulos, mide áreas, mide volúmenes y mide números.

Para el caso de la longitud de segmentos, el algoritmo de Euclides, enunciado en la proposición VII.2, permite hallar una unidad de medida U común a dos segmentos conmensurables cualesquiera, AB y CD (proposición X.3), de tal forma que $AB = nU$ y $CD = mU$. Podríamos decir que Euclides está hallando el "máximo común divisor de dos segmentos" restando geométricamente el segmento pequeño al grande hasta obtener una división geométrica exacta. Proceso que sería finito por la conmensurabilidad de los segmentos. Al ser U el último segmento por el que se ha dividido, resultará ser, por la construcción del mismo, la máxima unidad de medida común a ambos segmentos. Una vez se obtiene U, se pueden asociar a los segmentos AB y CD los respectivos números naturales: n y m, de tal manera que cada segmento contiene al segmento U esa cantidad de veces, n y m. La existencia del segmento U permite asociar a cada par ordenado de segmentos conmensurables (AB, CD) cualesquiera, el par ordenado de números (n, m) que obtenemos por el proceso descrito anteriormente, el cual los griegos denominaban *antiphaieresis*.

Las proposiciones 5 y 6 del libro X establecen que dos magnitudes son conmensurables si y sólo si están en la misma razón que un par de números están entre sí. Es decir AB y CD son conmensurables si y sólo si existen números naturales n y m tales que $\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m}$.

Observemos que para Euclides lo que importa es hallar la razón $\frac{AB}{CD}$, no se impone ninguna condición para la unidad de medida común a los segmentos AB y CD, no es necesario que sea la máxima unidad de medida común U; de hecho no se exige la unicidad de n y m. Puesto que si tomamos parte o copias de la unidad común U[4], la razón $\frac{AB}{CD}$ no cambia: Si $AB = nU$ y $CD = mU$ se tiene también que $AB = n\left(\frac{kU}{k}\right)$ y $CD = m\left(\frac{kU}{k}\right)$, y si hacemos $V = kU, n' = nk$ y $m' = mk$ tenemos que $AB = n'V$ y $CD = m'V$, por lo que $\frac{AB}{CD} = \frac{n}{m} = \frac{n'}{m}$.[5]

Lo anterior significa que para comparar dos segmentos no es indispensable conocer las veces que contienen, cada uno de ellos, a un segmento unidad que cabe una cantidad exacta de veces en ambos; lo importante es conocer la relación entre ambos segmentos $\frac{AB}{CD}$. Esta razón permite establecer la medida relativa de los segmentos; es decir, permite saber que tan grande es un segmento con respecto al otro.

Si siempre fuese posible hallar esta razón, es decir si cada par de segmentos fueran conmensurables, la teoría de proporciones de números resolvería el problema de la medida de segmentos. Sin embargo, aparecieron segmentos a los cuales es imposible asociarles una pareja de números naturales (n, m), como el caso del lado del cuadrado y la diagonal, y el lado del pentágono y la diagonal,

El descubrimiento de los inconmensurables, trae consigo la imposibilidad de asociar a cada par de segmentos (AB, CD) cualesquiera, un par de números (n, m), lo que distancia la geometría de la aritmética, y muestra a los antiguos griegos que no “todas las cosas son número”. Al no poderse asociar números a todos los segmentos el orden total de los números de contar no es suficiente para compararlos; en términos modernos no es suficiente el orden total de los números naturales $(\mathbb{N}, \leq)$ para comparar segmentos, y por tanto para medir segmentos.

En el libro V de los *Elementos* de Euclides aparece una revisión de la teoría de proporciones, original de Eudoxo, que permite saber cuando un par de segmentos (o magnitudes arquimedianas, en general) (AB, CD) cualesquiera es proporcional a otro par de segmentos (o magnitudes arquimedianas, en general) (a, b); pares que se denominan

[4] Podemos denotar una parte de la unidad U como $\frac{U}{k}$, o copias de U como kU.

[5] Hablando en términos modernos, al par de segmentos $(AB.CD)$ no se le está asociando sólo una razón $\frac{n}{m}$, o un par de números (n, m), sino todas las razones iguales a $\frac{n}{m}$, implícitamente se está definiendo una clase de equivalencia.

razones, sin necesidad de que los segmentos (o magnitudes arquimedianas, en general) sean conmensurables.

Para comparar dos segmentos dados AB y CD, se construye un segmento igual a CD a partir del extremo A de AB, o se construye un segmento igual a AB a partir del extremo C de CD, según sea el caso. De esta manera dados dos segmentos cualesquiera se puede "echar un segmento encima de otro", y establecer cuál de los dos es el menor. Si se hecha un segmento AB sobre otro segmento CD y AB queda totalmente contenido en CD, podemos intuitivamente afirmar que AB es menor que CD. Es decir si AB está contenido en CD, la longitud de AB es menor o igual que la longitud de CD, la longitud cumple la propiedad de monotonía de la medida tal como en la teoría moderna de la medida de Lebesgue, si $I_1 \subseteq I_2$ entonces $m(I_1) \leq m(I_2)$.

Para el caso de las superficies planas, la comparación no puede hacerse tan directamente como se hace con los segmentos. Por ejemplo, si consideramos las dos superficies A y B de la figura "no podríamos encajarlas". Sin embargo, si las descomponemos en cuadrados, como muestra la Figura 1.1, por la noción común 2 del libro I de los *Elementos* de Euclides, "si se añaden cosas iguales a cosas iguales, entonces los totales son también iguales", las dos figuras se pueden generar añadiendo magnitudes iguales (los cuadrados) sucesivamente a figuras iguales, entonces los totales, es decir, las figuras del dibujo, son iguales. Obsérvese que este es un razonamiento acorde con la aditividad de la medida, es decir que la medida de la unión disjunta es la suma de los números asociados.

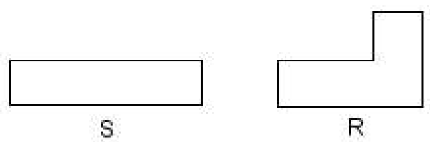


Figura 1.1 – Superficies iguales no congruentes

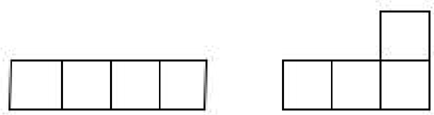


Figura 1.2 – Superficies como unión de cuadrados

Una situación similar a la de las superficies ocurre con los sólidos, no se pueden comparar simplemente "echando uno sobre el otro", como en el caso de los segmentos. Lo que permite comparar segmentos de esta manera es que "dos segmentos son congruentes si y sólo si son iguales"; condición que no cumplen los sólidos y las superficies, donde la congruencia no es condición necesaria para la igualdad, no todas las figuras iguales son congruentes o "encajables". Por este motivo, la teoría de razones y proporciones de Euclides no es suficiente para resolver totalmente el problema de la medida relativa.

Para resolver este impase, Euclides asocia a cada figura plana o cada sólido otra figura equivalente, es decir, de igual magnitud superficial o de igual magnitud volumétrica; que, por su forma, sean fácilmente comparables. La comparación de figuras se realiza comparando estas figuras asociadas de igual magnitud, que por tener una forma especial, como el circulo, el cuadrado, la esfera o el cubo, son fácilmente comparables, En el caso del círculo y la esfera, bastaría con comparar sus radios, y en el caso del cuadrado y el cubo, bastaría con comparar sus lados.

Para medir figuras planas Euclides utiliza cuadrados de igual magnitud que las figuras en cuestión. En el libro I, cuando Euclides habla de figuras iguales está hablando de la igualdad de la medida de sus áreas. En términos modernos, Euclides en el Libro I nos muestra que las figuras planas rectilíneas se pueden representar como unión disjunta de cuadrados y así su medida se puede establecer mediante la suma de la medida de cuadrados. De manera análoga, Lebesgue recubrirá conjuntos para calcular su medida mediante la suma de las longitudes de los intervalos que conforman el recubrimiento.

El proceso para convertir una figura rectilínea en un rectángulo lo desarrolla en las últimas proposiciones del libro I. Lo primero que realiza es una triangulación de la figura, en la proposición I.41 explica cómo obtener un paralelogramo equivalente a un triángulo. Pero esto es insuficiente pues obtendría una serie de paralelogramos que al unirlos no necesariamente darían otro paralelogramo. Para superar este inconveniente incorpora las siguientes proposiciones:

> Proposición I.42: En un ángulo rectilíneo dado construir un paralelogramo equivalente a un triángulo dado.
> Proposición I.45: En un ángulo rectilíneo dado, construir un paralelogramo equivalente a una figura rectilínea dada.

Una vez se tiene un paralelogramo dado, se debe encontrar un cuadrado equivalente. Con la proposición II.14 se alcanza el objetivo propuesto de cuadrar una figura rectilínea dada, de esta manera Euclides da una respuesta parcial al problema de la medida de figuras planas.

Euclides desarrolló un proceso abstracto mediante el cual halla un cuadrado equivalente a una figura rectilínea cualquiera. Esto lo hace tomando como referencia el teorema de Pitágoras, el cual constituye un algoritmo que permite obtener un cuadrado equivalente a la suma de otros dos cuadrados. Este proceso establecido por Euclides implica una acción de descomposición-recomposición de la figuras; podríamos pensar en un *tangram*: la figura dada se descompone en piezas con las cuales se pueda "armar un cuadrado".

Resolver el problema de la cuadratura es hallar el lado del cuadrado equivalente a la figura rectilínea dada. Desde una visión moderna podríamos decir que Euclides define una función entre las figuras rectilíneas y los segmentos:

$$f: \{\text{figuras planas rectilíneas}\} \rightarrow \{\text{segmentos}\}.$$

De esta manera, los *Elementos* se constituye en el primer tratado que proporciona una salida teórica al cálculo de áreas.

Con respecto al problema de la cubatura, el objetivo principal de los Libros XI y XII es encontrar una relación de proporcionalidad entre magnitudes, que posibilite una teoría de la medida relativa de algunos sólidos geométricos. En el libro XI Euclides establece la medida relativa de los paralelepípedos, compara paralelepípedos entre sí, estableciendo condiciones para su igualdad; también los compara con prismas triangulares. En este sentido sigue los delineamientos planteados en el libro I, utilizando una figura referencial como base para medir las otras. Haciendo el paralelo entre la geometría del plano y del espacio, podemos afirmar que el paralelogramo es al paralelepípedo como el triangulo es al prisma de base triangular.

El libro XII, estudia el área del círculo y volúmenes de algunos sólidos, para ello Euclides se basa en procedimientos que se remontan a Eudoxo y utiliza el método exhaustivo, el cual se fundamenta en la proposición X.1:

> Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

En términos modernos, lo que Euclides establece en esta proposición es una condición suficiente para que una sucesión converja a 0. Podemos interpretar dicha proposición y su demostración, como sigue:

Sean M_0 y ε dos magnitudes positivas dadas tal que $M_o > \varepsilon$, y sea $M_0, M_1, M_2, \cdots M_n, \ldots$ una sucesión tal que $M_1 < \frac{M_0}{2}, M_2 < \frac{M_1}{2}, \cdots, M_n < \frac{M_{n-1}}{2}, \cdots$, entonces existe n tal que $M_n < \varepsilon$, es decir, $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$.

Demostración: Dados M_0 y ε , por el axioma de Arquímedes existe $m\epsilon\mathbb{N}$ tal que $m\varepsilon > M_0$. Por hipótesis tenemos que $M_o > \varepsilon$, por lo que $m \geq 2$ y multiplicando por $\frac{\varepsilon}{2}$ se obtiene $\varepsilon \leq \frac{m}{2}\varepsilon$, lo que es lo mismo:

$$m\varepsilon - 2\varepsilon \geq 0$$

$$(m\varepsilon - 2\varepsilon) + m\varepsilon \geq 0 + m\varepsilon$$

$$(2m\varepsilon - 2\varepsilon) \geq m\varepsilon$$

Pero se tiene que $m\varepsilon > M_0$, de donde:

$$(2m\varepsilon - 2\varepsilon) = 2(m-1)\varepsilon \geq m\varepsilon > M_0$$

$$(m-1)\varepsilon \geq \frac{1}{2}m\varepsilon > \frac{1}{2}M_0$$

Por hipótesis $M_1 < \frac{M_0}{2}$, por lo que $(m-1)\varepsilon > M_1$.

Repitiendo el mismo argumento para esta última desigualdad se obtiene

$$(m-2)\varepsilon > M_2.$$

Después de $(m-1)$ pasos se llega a la conclusión de que $\varepsilon > M_m$.

En términos generales, el método exhaustivo consiste en inscribir una sucesión de polígonos en la figura no rectilínea que se quiere cuadrar, la sucesión se escoge de tal manera que las diferencias entre la medida de la figura a cuadrar y la medida de cada polígono formen una sucesión que satisfaga la hipótesis de la anterior proposición. Es entonces entendible el por qué son necesarios los conceptos de límite y convergencia para definir analíticamente el concepto de integral definida.

En las dos primeras proposiciones del libro XII, Euclides nos presenta un primer acercamiento al método exhaustivo de Eudoxo, donde podemos ver los primeros rasgos de la operación que hoy llamamos "del paso al límite". En estas proposiciones se establece la relación de proporcionalidad que existe entre el radio y el círculo, lo cual se constituye en un paso importante para el cálculo del área del círculo.

> Proposición XII.1. Los polígonos semejantes inscritos en círculos son entre sí como los cuadrados de los diámetros.

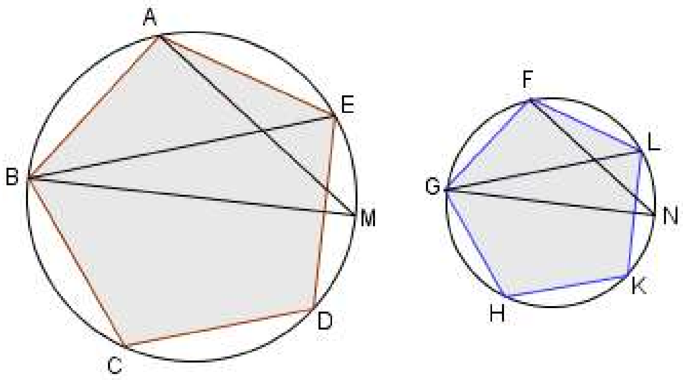


Figura 1.3 – Relación entre polígonos inscritos y diámetros

Demostración: Consideremos los polígonos ⬠$ABCDE$ y ⬠$FGHKL$ semejantes e inscritos en círculos de diámetros *BM* y *GN*, respectivamente. Tracemos las rectas *AM*, *BE*, *FN* y *GL*.

Por semejanza de polígonos se tiene que $\angle EAB = \angle LFG$ y $BA : AE = GF : FL$. Los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle FGL$ son semejantes por la proposición VI. 20, por lo tanto $\angle AEB = \angle FLG$. Además por proposición III.27 $\angle AEB = \angle AMB$ y $\angle FLG = \angle FNG$, de donde $\angle AMB = \angle FNG$. Por proposición III.31 $\angle MAB = \angle NFG$ son rectos. Por lo tanto $\triangle ABM$ y $\triangle FGN$ son equiángulares, entonces semejantes, luego por la proposición VI.4 $BM : GN = BA : GF$.

Por lo cual, de la proposición VI.20 se tiene que ⬠ $ABCDE$: ⬠ $FGHKL = BA^2 : GF^2$, y por transitividad podemos concluir que ⌂ $ABCDE$: ⬠ $FGHK = BM^2 : GN^2$ ■

> Proposición XII.2. Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros.

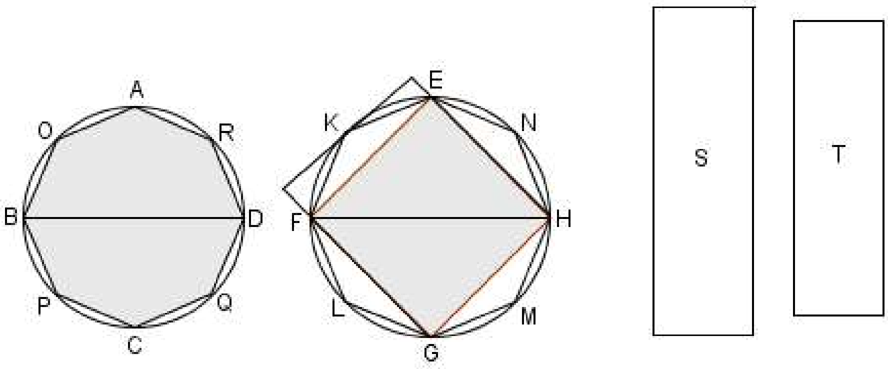


Figura 1.4 – Relación entre círculos y diámetros

Demostración: Sean los círculos $\bigcirc ABCD$ y $\bigcirc EFGH$ de diámetros BD y FH, respectivamente. En dichos círculos se inscriben dos polígonos: ⌂$AOBPCQDR$ y ⌂$EKFLGMHN$, respectivamente, de tal forma que sean semejantes.

Decimos que $\bigcirc ABCD : \bigcirc EFGH = BD^2 : FH^2$, de no ser así, se tienen los dos siguientes casos:

$\bigcirc ABCD : \bigcirc EFGH < BD^2 : FH^2$ ó

$\bigcirc ABCD : \bigcirc EFGH > BD^2 : FH^2$.

Supongamos que $\bigcirc ABCD : \bigcirc EFGH < BD^2 : FH^2$

Sea $S < \bigcirc EFGH$ tal que $\bigcirc ABCD : S = BD^2 : FH^2$ (Proposición VI.12). En virtud del método exhaustivo, la construcción de los polígonos, se realiza de tal forma que cumple con la desigualdad $\bigcirc EFGH -$ ⌂$EKFLGMHN < \bigcirc EFGH - S$, es decir:

$$S <\ ⌂EKFLGMHN. \quad (*)$$

Por proposición XII.1 tenemos que:

$$\bigcirc ABCD : S = BD^2 : FH^2 =\ ⌂AOBPCQDR :\ ⌂EKFLGMHN.$$

Por la noción común 8[6] $\bigcirc ABCD >$ ⌂$AOBPCQDR$, luego por V.14 se tendría que $S >$ ⌂$EKFLGMHN$, lo que contradice la desigualdad (*).

Para el caso $\bigcirc ABCD : \bigcirc EFGH > BD^2 : FH^2$, se procede de igual que en el caso anterior y se llega también a una contradicción.

6 El todo es mayor que la parte

Por lo tanto, $\bigcirc ABCD : \bigcirc EFGH = BD^2 : FH^2$ ■.

Observemos cómo en esta proposición XII.2, Euclides demuestra que un círculo se puede agotar por medio de polígonos inscritos, lo que podemos interpretar como sigue:

Dado un círculo C y un número $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de polígonos $\{P_n\}$ inscritos en C, tal que para algún n se cumple que $a(C) - a(P_n) < \varepsilon$, donde $a(C)$ y $a(P_n)$ representan las áreas respectivas del círculo C y del polígono de n lados.

De igual manera utiliza este método exhaustivo para obtener los siguientes resultados:

- Equivalencia entre la pirámide y la tercera parte del prisma de igual base.
- Equivalencia entre el cono y el cilindro de igual base.
- Proporcionalidad entre esferas y cubos construidos sobre sus diámetros.

En el libro XII, Euclides también señala el tipo de relaciones que se pueden dar entre magnitudes de distinta naturaleza, siendo ésta la continuación de las diferentes clases de relaciones que establece en los libros V y VI. Aunque no obtiene fórmulas de cuadratura, sí obtiene sus razones, por ejemplo "las esferas son entre sí como las razones triplicadas de sus diámetros".

Otro aspecto importante para tener en cuenta, es la forma como Euclides suma volúmenes, recordemos la idea de descomposición-recomposición de figuras planas rectilíneas para obtener su cuadratura, Euclides trata de hacer lo correspondiente para los sólidos.

Euclides afirma que dados dos sólidos, es posible hacer su suma, cuando se pueden superponer dos caras de ellos y producir otro sólido. El nuevo sólido es el sólido suma. Es decir, no existe un algoritmo como el teorema de Pitágoras, tal que la suma de dos cubos de un cubo. La suma de volúmenes que se plantea en los libros XI y XII es determinada por unas características especiales, como los son tener la misma altura y una cara en común, según este método es imposible lograr que la suma de dos cubos sea un cubo. Este método es utilizado en las demostraciones de algunas proposiciones del libro XI (25, 28, 31, 32, 33 y 39). En la proposición XI.25, por ejemplo, se suman los paralelepípedos *LQ*, *KR* y *AU* para formar el paralelepípedo *LU*.

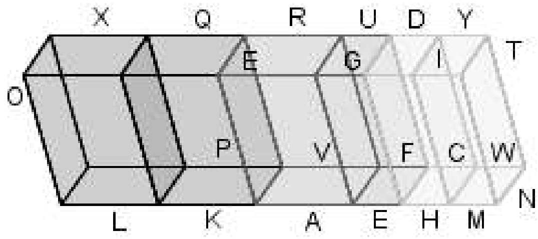


Figura 1.5 – Suma de paralelepípedos

En las proposiciones 3-15, 17 y 18 del libro XII, Euclides nos muestra cómo descomponer sólidos. Por ejemplo en la proposición XII.3, realiza la descomposición de una pirámide triangular en dos pirámides y dos prismas. En la proposición XII.7 descompone el prisma de base triangular en tres pirámides.

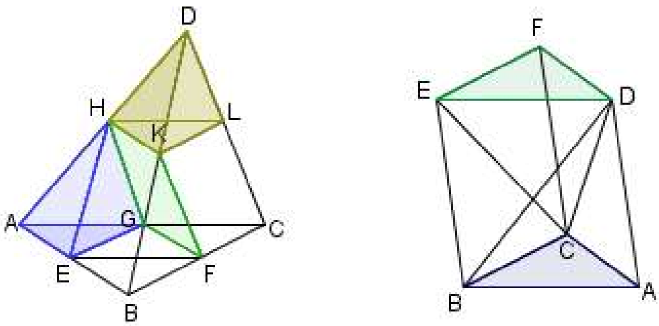


Figura 1.6 – Descomposición de sólidos

La duplicación del cubo es uno de los problemas que más preocuparon a los griegos y geómetras durante muchos siglos, este problema consiste en construir el lado de un cubo cuyo volumen sea el doble del volumen del cubo inicial, es decir, éste sería un caso particular del algoritmo donde la suma de dos cubos da como resultado un cubo. Para eso habría que construir un segmento de longitud igual a la raíz cúbica de 2, construcción imposible con regla y compás.

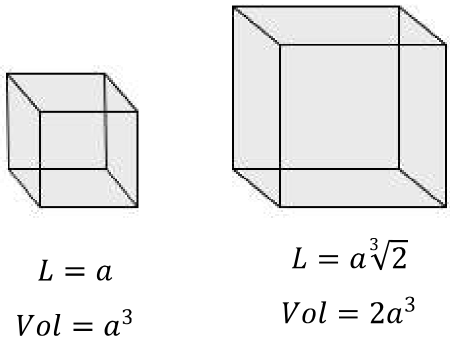


Figura 1.7 – Duplicación del cubo

Es probable que una vez resuelto el problema de la duplicación del cuadrado, por medio del teorema de Pitágoras, los antiguos geómetras intentaran generalizarlo para el cubo, sin embargo esto los conduciría a construir la diagonal del cubo de arista 1, y puesto que su longitud es $\sqrt[3]{2}$, se enfrentaron a la imposibilidad de construir con regla y compás la arista de un cubo de doble volumen que otro dado. Como sabemos, es un problema cuya solución es un irracional que depende de la solución de una ecuación de tercer grado, la cual no se puede resolver con regla y compás.

Podemos ver entonces que en la geometría euclidiana se encuentra el germen de la noción de medida superficial y medida volumétrica que se tiene en la actualidad. A pesar de que en Euclides no existe una noción de medida absoluta, sí establece lo que denominamos una teoría de la medida relativa, mide una magnitud desconocida mediante la equivalencia con una figura referencial.

1.3 Arquímedes: El método exhaustivo y el método mecánico

Arquímedes (287-212) da continuidad a los trabajos de Euclides relacionados con la medición de magnitudes por comparación; logrando calcular áreas de figuras curvilíneas, como es el caso del segmento de parábola, para lo cual hace uso de un método heurístico que combina lo geométrico con las leyes de la mecánica, y del método exhaustivo. Estos dos métodos darán lugar, respectivamente, a los indivisibles y los infinitesimales

En el libro I de *Sobre la esfera y el cilindro*, Arquímedes generaliza la definición V.4[7] de los *Elementos* en el principio 5, el cual se conoce en la actualidad como axioma de Arquímedes:

> De dos magnitudes desiguales, líneas, superficies o sólidos, la diferencia entre la mayor y la menor, añadida a sí misma un número suficiente de veces, puede sobrepasar cualquier magnitud dada (del mismo tipo que las comparadas).

Arquímedes perfecciona el método exhaustivo, creando un algoritmo para su aplicación donde utiliza la reducción al absurdo. Con ayuda de consideraciones teóricas, se presume el "límite" en la sucesión de las figuras inscritas o circunscritas, y por reducción al absurdo se demuestra que dicho límite es igual al área buscada. De esta manera el método exhaustivo consiste en una aproximación entre figuras geométricas de medida conocida, inscritas y circunscritas, que acotan la figura que se quiere conocer, de manera que la diferencia entre unas y otras sea tan pequeña que se consideren equivalentes. La reducción al absurdo proporciona el razonamiento lógico que garantiza la verdad de las aseveraciones geométricas.

Dijksterhuis[8] presenta una interesante clasificación del método exhaustivo

- Por «aproximación», en la que una sucesión de polígonos regulares se inscribe en la figura curva en cuestión y se establece que la diferencia de áreas entre la figura curva y los polígonos es menor que una cantidad dada para un número suficientemente grande de lados del polígono regular. Normalmente cada polígono se obtiene del anterior doblando el número de sus lados.
- Por «compresión-diferencia», en la que se encierra la figura curvilínea mediante sucesiones de polígonos regulares inscritos y circunscritos, tales que la diferencia entre ellos (el circunscrito menos el inscrito) puede hacerse menor que cualquier cantidad dada por pequeña que esta sea. De ese modo, la diferencia entre la curva dada y los términos de ambas secuencias, con mayor razón, será menor que la cantidad dada.

[7] Se dice que dos magnitudes tienen razón, cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra.
[8] Citado por (Montesinos, 1992, pág. 341).

- Por «compresión-división», procedimiento semejante el anterior, salvo que la razón (división) de las áreas de los polígonos se acerca a la unidad a medida que se incrementa el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos.

Podemos observar que la exhausción por "aproximación" es la forma primera del método exhaustivo que debemos a Eudoxo y aplica Euclides en el libro XII de los *Elementos*; mientras que las otras dos formas se las debemos a Arquímedes, la descripción del método que presentamos aquí corresponde a la "comprensión-diferencia".

Euclides en el libro XII establece las relaciones de proporcionalidad entre el área del círculo y el radio: $\mathcal{A}_{\odot} = \pi_1 r^2$, y la longitud de la circunferencia y el diámetro: $\ell_{\odot} = \pi_2 d$. Arquímedes va más allá calculando la constante de proporcionalidad. Cuando Arquímedes demuestra la proposición 1 de la *Medida del Círculo:*

> Un círculo es equivalente un triangulo rectángulo cuyos catetos son iguales al radio y a la circunferencia del círculo.

Está dando una prueba de que las dos constantes son iguales: $\pi_1 = \pi_2$, al establecer que $\mathcal{A}_{\odot} = \frac{1}{2} r(\ell_{\odot})$. Veamos cómo Arquímedes prueba este resultado utilizando reducción al absurdo.

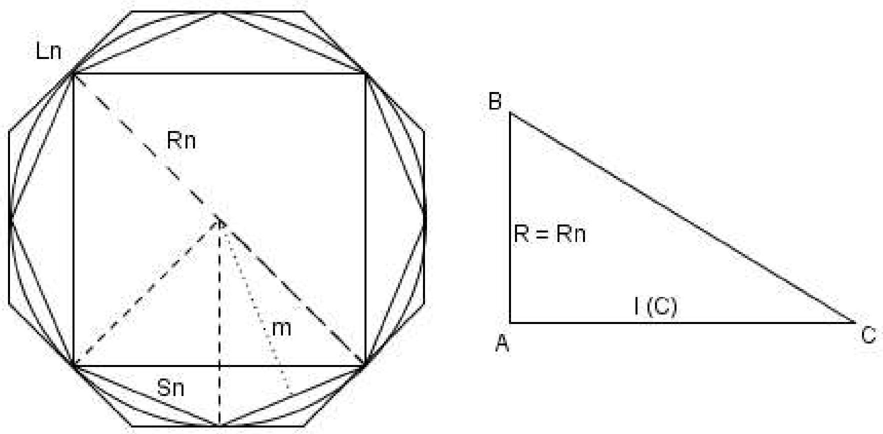


Figura 1.8 – Un círculo equivalente a un triángulo

Primero se supone que $\mathcal{A}(C) > \mathcal{A}(T)$, es decir $\mathcal{A}(C) - \mathcal{A}(T) > 0$, donde T es el triangulo ABC.

Por la proposición XII.2 de los *Elementos*, existe un polígono P_n inscrito en la circunferencia, tal que $\mathcal{A}(C) - \mathcal{A}(P_n) < A(C) - \mathcal{A}(T)$, de donde $\mathcal{A}(P_n) > A(T)$.

De otro lado, si consideramos ℓcomo la longitud de la circunferencia, se tiene que $\mathcal{A}(P_n) = \frac{1}{2}r_n s_n m < \frac{1}{2}R\ell(C) = \mathcal{A}(T)$, es decir $\mathcal{A}(P_n) < \mathcal{A}(T)$, lo que contradice el resultado anterior.

En segundo lugar se supone que $\mathcal{A}(C) < \mathcal{A}(T)$, y usando los mismos razonamientos anteriores para el caso de polígonos circunscritos, se llega a que esta desigualdad tampoco se puede dar, y por lo tanto $\mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(T)$ ■

Con esta demostración de la equivalencia entre el círculo y el triángulo, Arquímedes transforma el problema de la cuadratura del círculo en el problema de la rectificación de la circunferencia, es decir la construcción de π con regla y compás. En la proposición 18 de *Sobre las espirales* obtiene una rectificación de la circunferencia a través de la espiral, la cual es una curva mecánica no construible con regla y compás. Arquímedes se aleja de los métodos de construcción con regla y compás, encontrando un procedimiento que le permitió obtener una aproximación de la constante de proporcionalidad π.

Mediante el uso del método exhaustivo por "comprensión-diferencia", en la proposición 3 de la *Medida del Círculo*, Arquímedes calcula la longitud de la circunferencia estableciendo una aproximación para π, por exceso y por defecto:

> La circunferencia de un círculo es igual al triple del diámetro más una parte de este, la cual es menor que la séptima parte y mayor que los diez setenta y un avos del diámetro mismo.

En lenguaje moderno Arquímedes estableció que para una circunferencia de longitud C y diámetro D, se tiene que $3D + \frac{10}{71}D < C = D\pi < 3D + \frac{1}{7}D$. Es decir,

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

En su demostración utiliza polígonos inscritos para hallar la cota inferior, y polígonos circunscritos para la cota superior.

Vemos en esta proposición 3, tanto en su enunciado como en su demostración, una clara muestra del nuevo enfoque de la geometría Arquimediana, a diferencia de la Euclidiana, donde no se nota preocupación alguna por los cálculos numéricos, en particular por el cálculo de π.

Para hallar la cuadratura de un segmento parabólico Arquímedes exhibe sus dos métodos: el exhaustivo y el mecánico, en el cual combina las leyes de la palanca con las propiedades geométricas.

En *De la cuadratura de la Parábola* mediante el método exhaustivo demuestra la proposición 24:

> El área del segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de la de un triángulo de la misma base y de la misma altura que el segmento.

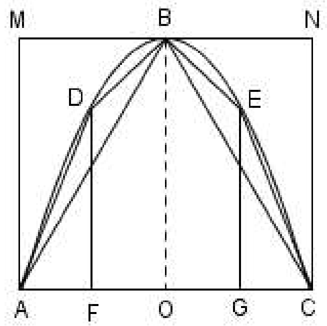


Figura 1.9 – Cuadratura de la parábola mediante el método exhaustivo

Para obtener este resultado, se genera una sucesión de polígonos inscritos. El primer término equivale al área del triángulo P_0, el segundo P_1 sería la suma de las áreas de los dos triángulos inscritos en las dos áreas delimitadas por el triángulo y la parábola, y así sucesivamente

De las propiedades de la parábola se obtiene:

$$\mathcal{A}(P_1) = \mathcal{A}(P_0) + \frac{1}{4}\mathcal{A}(P_0).$$

A través de razonamientos análogos, se demuestra que,

$$\mathcal{A}(p_n) = \mathcal{A}(p_0) + \frac{1}{4}\mathcal{A}(p_0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \mathcal{A}(p_0) + \cdots \left(\frac{1}{4}\right)^n \mathcal{A}(p_0) \cdots$$

Luego se demuestra que $\mathcal{A}(P_0) > \frac{1}{2}S, y\ S - P_0 < \frac{1}{2}S$. Tenemos entonces, que P_0 agotó más de la mitad del área *S*, y empleando el mismo proceso se puede generalizar el resultado para los otros miembros de la sucesión. Con lo cual se demuestra que la sucesión especificada cumple con las hipótesis de la proposición XI.1 de los *Elementos*.

El paso siguiente consiste en la búsqueda del límite de la sucesión de figuras inscritas. En general, el procedimiento para la obtención del límite no se especifica; se recurre a la intuición se supone que se ha recurrido al proceso prueba error, intentando visualizar una ley de formación en la suma.

Teniendo en cuenta que,

$$P_n = P_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{P_0}{4^k} = \frac{4}{3}P_0 - \frac{1}{3}\frac{P_0}{4^n},$$

Puesto que el sustraendo puede ser tan pequeño como se quiera, entonces Arquímedes concluye que $S = \frac{4}{3}P_0$.

Para llegar a lo anterior, Arquímedes utiliza el siguiente resultado:

Si $S = A + B + C + D + E$, y $A : B = B : C = C : D = D : E = 4 : 1$, entonces,

$$S = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E.$$

Resultado que se puede extender a cualquier número de sumandos.

Por otra parte, mediante medios mecánicos y geométricos demuestra la proposición 1 de *El Método*:

> Sea ABT un segmento de parábola limitado por la recta AT y la parábola ABT, D el punto medio de AT, y tracemos la recta DBE paralela al eje de la parábola y las rectas AB y BT. Digo que el segmento de parábola ABT equivale a las cuatro terceras partes del triángulo ABT.

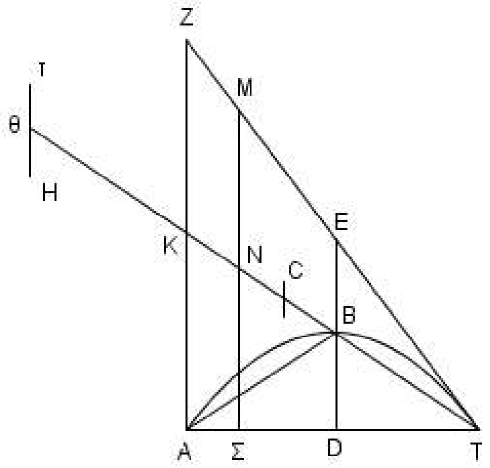


Figura 1.10 – Cuadratura de la parábola mediante el método mecánico

Para su demostración construye el triángulo AZT, rectángulo en A y tal que ZT es tangente al segmento parabólico. Por las propiedades geométricas de la parábola demuestra que el triángulo AZT es cuatro veces el triángulo ABT, y por las leyes de la mecánica, "equilibrando el segmento de parábola y el triángulo AZT" establece que

$$\frac{\mathcal{A}(SegmentoABT\ )}{\mathcal{A}(TrianguloAZT)} = \frac{1}{3}$$

Y de esta manera concluye que $\mathcal{A}(SegmentoABT) = \frac{4}{3}\ \mathcal{A}(Triangulo\ ABT)$.

En *El Método,* el segmento de la parábola es visto como formado por líneas rectas que empiezan en la base del segmento y terminan en el arco de la parábola. Este punto de vista parece ser una manifestación de una concepción general presentada en dicho libro, donde cada figura es considerada como formada por todas las líneas interiores. Arquímedes usó el principio de la palanca para equilibrar cada línea de la parábola con cada línea correspondiente en el triángulo adecuadamente elegido, cuya área era conocida; el área bajo el segmento parabólico era entonces el resultado de la suma de todas las líneas que componían ese segmento, que era igual a la suma de todas líneas del triángulo.

Obsérvese cómo en estos procedimientos, Arquímedes, tal como lo hiciera Euclides, usa implícitamente dos axiomas de la medida: si una región es interior a otra, la medida de la interior es menor que la medida de la exterior; y si una región se descompone en una o varias partes, la medida de toda la región es igual a la suma de las medidas de las partes. Lo que modernamente conocemos como la propiedad de monotonía de la medida y la propiedad de la sigma-aditividad.

En cada uno de los métodos de Arquímedes, descritos anteriormente, podemos identificar dos intuiciones diferentes de área, correspondientes a la dicotomía fundamental de las ciencias en cuanto a la naturaleza del espacio y la materia: naturaleza atómica y naturaleza continua. En la intuición de los indivisibles puede verse un punto de vista atómico, mientras que la intuición de área que se utiliza en el método exhaustivo corresponde a la divisibilidad infinita del espacio.

En relación con esas dos intuiciones, Arquímedes establece dos formas de operar con el infinito. En el método mecánico incorpora los indivisibles y recurre a las leyes de la mecánica para manipularlos, allí aparece la idea de que es posible determinar las relaciones entre objetos a partir de las relaciones existentes entre sus correspondientes elementos constitutivos, sin embargo se enfrenta al problema de formalizar su uso dentro de la matemática. Con el método exhaustivo elude la operatividad con lo infinitamente pequeño, mediante la presunción de la existencia de un "límite"; esta perspectiva de lo infinitamente pequeño será recurrente hasta el siglo XIX.

Lo más importante de estos dos métodos es su riqueza conceptual, por lo cual serán retomados en las investigaciones de los matemáticos del siglo XVII sobre el problema de las cuadraturas. Bonaventura Cavalieri (1598-1647) siguiendo la corriente de los indivisibles, empleó la noción de suma de líneas contenidas entre las figuras. Mientras que Kepler y Gregory St. Vincent, siguiendo la perspectiva de lo infinitamente pequeño, emplearon infinitos rectángulos infinitamente pequeños para calcular áreas de figuras irregulares; basados en la noción de divisibilidad infinita del espacio, lo que sería desarrollado posteriormente por Fermat y Cauchy. Esta sería la base del concepto moderno de integral definida.

1.4 Del cálculo de cuadraturas al área bajo la curva: indivisibles vs infinitesimales

Kepler (1571-1630) definió un infinitesimal como aquel pequeño elemento que compone las figuras, pero que conserva las dimensiones de la misma. Para calcular el área del círculo, lo consideraba compuesto por infinitos triángulos con vértice común en el centro y con alturas casi iguales al radio del círculo. A esta noción de lo infinitamente pequeño, Cavalieri opone la de lo indivisible, que no es infinitamente pequeño y que tiene una dimensión $n-1$ si el objeto estudiado es de dimensión n. El empleo de los indivisibles, en lugar de lo infinitamente pequeño, permite a Cavalieri evitar el paso al límite, con sus dificultades y sus imposibilidades lógicas, reemplazándolo por la intuición geométrica, y al mismo tiempo, conservar todas las ventajas de los métodos infinitesimales cuya fecundidad había demostrado Kepler. Mientras que Kepler sigue la tendencia arquimediana de sumar los elementos infinitesimales en que se descompone cada figura, Cavalieri evita la sumación directa y se limita a comparar dos figuras para deducir la extensión de una mediante la otra. Mientras que el método exhaustivo utilizado por Arquímedes opera sobre las propias figuras, el método de los indivisibles sustituye a una figura dada por la suma de infinitos elementos que tienen una dimensión menor. De acuerdo con (Brunschvicg, 1929, pág. 192), Cavalieri sustituye la evaluación de una suma infinita de elementos infinitamente pequeños, que se hacía con el método exhaustivo, por la razón entre dos sumas infinitas de elementos finitos, en número ilimitado. Puesto que los elementos finitos de los términos de la razón pueden ser representados, mientras que los elementos infinitamente pequeños de la suma no podrían serlo.

Buenaventura Cavalieri (1591–1647) publicó su primer tratado de indivisibles en 1635, bajo el nombre de *Geometría indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*[9]. Este es un compendio de 7 libros. En el libro I, Cavalieri presenta los presupuestos teóricos respecto a las figuras planas y sólidas. En el libro II, desarrolla su primer método de los indivisibles a través del concepto de “todas las líneas”, el cual denomina “método colectivo”. Los libros III, IV y V, están dedicados a las cuadraturas y cubaturas relacionadas con las secciones cónicas. El libro VI está dedicado a la cuadratura de la espiral y al estudio de propiedades referentes a cilindros, esferas, paraboloides y esferoides. En el último libro Cavalieri presenta su segundo método de los indivisibles que denomina “método distributivo”.

[9] Geometría avanzada de una nueva manera por los indivisibles del continuo, abreviadamente *Geometría de los indivisibles*

Mediante el método colectivo determina la razón entre dos figuras, comparando los dos conjuntos completos de indivisibles correspondientes. Mientras que en el método distributivo se equiparan dos figuras de la misma altura, comparando de forma individual los correspondientes indivisibles homólogos, es decir, que estén a la misma altura en la figura correspondiente.

Los indivisibles de Cavalieri, para figuras planas, son cada una de las líneas paralelas a una *regula* y que generan la figura. En general, para objetos de dimensión n los indivisibles son objetos de dimensión n-1.

Para el caso particular de las superficies el concepto de "todas las líneas", le permite establecer relaciones cuantitativas. Para visualizar este aspecto, tomemos la figura plana $F = ABC$ y definamos la línea AC como *regula*.

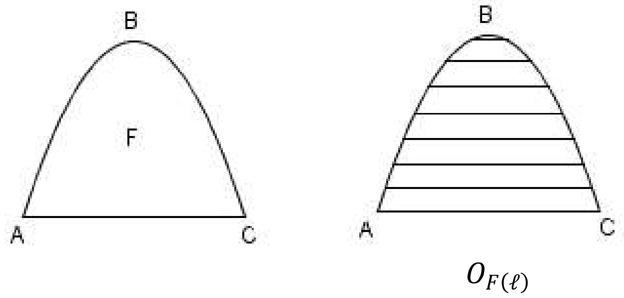


Figura 1.11 – Todas las líneas

En este caso la colección de "todas la líneas" corresponde a la totalidad de cuerdas "l" de F que son paralelas a la regula AC. $O_F(l)$ denota esta colección (La O corresponde a la primera letra de *ommes lineae*).

Cuando se trabaja en tres dimensiones, Los cortes de la figura con los planos constituyen los indivisibles. Así, la noción utilizada para recomponer una figura volumétrica es la de "todos los planos" (*omnes quadratum*). Cavalieri imagina un volumen conformado de una cantidad infinita de capas sin espesor superpuestas como se visualiza en la Figura 1.12

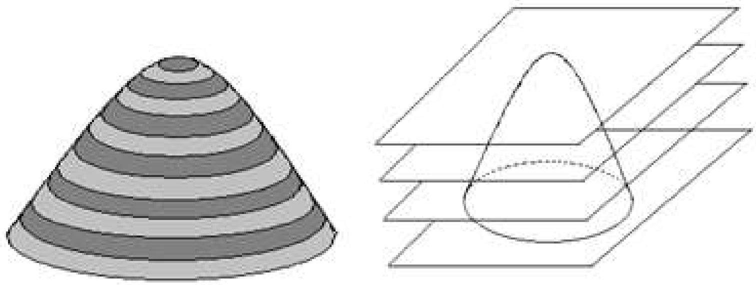


Figura 1.12 – Todos los planos

Otro aspecto fundamental en esta teoría es el llamado *principio* de Cavalieri, el cual es enunciado en el libro VII de la *Geometría*, allí se establece la relación entre los objetos volumétricos y sus indivisibles.

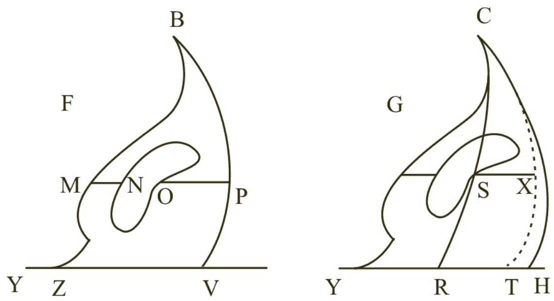


Figura 1.13 – Principio de Cavalieri

En primer lugar, se puede enunciar la versión directa del *principio de Cavalieri* aplicado a rectas y superficies planas de la siguiente manera:

Principio de Cavalieri (Versión 1): Sean las figuras $F = BZV$ y $G = CRT$, que tienen iguales alturas con respecto a la regula YH, y tal que las correspondientes cuerdas (o la suma de cuerdas) son iguales, es decir $MN + OP = SX$, entonces $F = G$ (área de BZV igual al área de CRT)[10].

A continuación Cavalieri plantea el resultado cuando las cuerdas están en proporción. Para el caso anterior se plantearía así: tomando $l_1 = MN + OP$ y $l_2 = SX$, si $\frac{l_1}{l_2} = k$, entonces $\frac{F}{G} = K$.

[10] Ver (Andersen, 1985, pág. 300)

Pero la versión más conocida del principio de Cavalieri es la que relaciona áreas y volúmenes:

Principio de Cavalieri (Versión 2): Si dos volúmenes tienen igual altura, y si secciones hechas por planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una razón fija, entonces los volúmenes de los sólidos también están en esa misma razón.

Cavalieri prueba este resultado de una manera que podría considerarse intuitiva, pero que está en correspondencia con el aparato teórico definido al inicio. La idea general reposa en la conformación del sólido a través de la superposición de los elementos indivisibles que son las áreas seccionales.

En el libro II de la *Geometría* Cavalieri establece los primeros desarrollos teóricos del método de los indivisibles, utilizando lo que él denominó método colectivo. Estos desarrollos le merecerán un papel protagónico en la historia de la teoría de la medida, pues a partir de ellos se resuelve el problema del cálculo del área bajo una curva polinómica o, lo que es equivalente, la integral definida de una función polinómica.

Cavalieri halla la medida de una región plana acotada a partir de la suma de todas sus líneas. Si cada línea tiene longitud *l*, se designa como *omnes linae l*, lo que simbolizamos como $omn.(l)$. Así, para el caso de un cuadrado lado a, $omn.(a) = (cuadrado_a)$.[11] Si trazamos la diagonal del cuadrado y designamos por *x* la medida de cada una de las líneas paralelas a uno de los lados y que componen uno de los triángulos, se tendrá que $omn.(x) = \frac{(cuadrado_a)}{2}$, es decir el triángulo considerado es la mitad del cuadrado de lado *a*. De manera similar, teniendo en cuenta que $(cuadrado_a)$ representa un cuadrado de lado a, el cual es la sección del cubo de lado a, se tiene que $omn.(x^2) = \frac{(cubo_a)}{3}$.

[11] Obsérvese que Cavalieri inicialmente está pensando exclusivamente en términos geométricos, está sumando objetos geométricos: con la suma de todas las líneas indivisibles obtiene un cuadrado, o con la suma de los cuadrados indivisibles obtiene un cubo. Sin embargo, una vez establece estos resultados, da un salto a dimensiones superiores, lo que le exige desprenderse del referente geométrico.

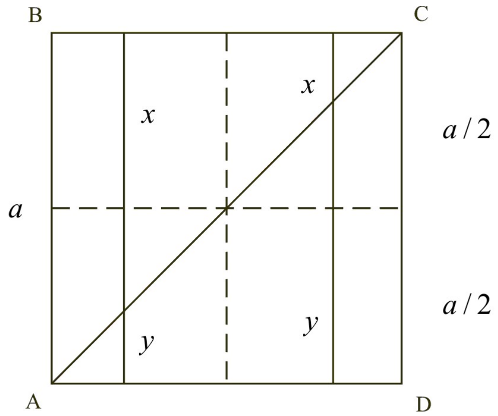


Figura 1.14 - Medida de una región plana a partir de todas sus líneas

Además, se tiene que $O(cuadrado_a)_{AB} = (cubo_a)$.

Otro aspecto relevante en el libro II es cómo Cavalieri establece una primera generalización de dimensión, considerando la suma de indivisibles de tres dimensiones como una figura geométrica de cuatro dimensiones; en este sentido considera $O(cubo_a)_{AB}$, la suma de "todos los cubos" (*omnes cubi*), como un hipercubo (*quadrato-quadrata*).

$$O(cubo_a)_{AB} = (hipercubo)_a,$$ [12]

Después de publicada la *Geometría*, Cavalieri sigue buscando una generalización de sus resultados. Luego de la suma de hipercubos (*omnes quadrato-quadrata*), consideró la suma de los indivisibles de n-1 dimensiones de una figura de *n* dimensiones (*omnes potestades*).

En 1647 se publica *Exercitationes geometricae sex*, esta obra consta de 6 libros, en el libro I Cavalieri presenta una versión revisada del método colectivo y sugiere algunas simplificaciones. En el libro II exhibe una nueva presentación del método distributivo. El libro III consta de una defensa de su método ante la crítica del suizo Paul Guldin en su libro *Centrobarytica*, donde lo acusa de "trastocar la geometría de los antiguos, en lugar de haberla extendido". En el libro IV presenta una generalización del método colectivo lo que le permite trabajar con curvas algebraicas de grado mayor que 2. En el libro V utiliza parcialmente el método de los indivisibles para determinar centros de gravedad. En el libro VI presenta una miscelánea de temas.[13]

[12] Para facilidad en los desarrollos algebraicos, en adelante usaremos la notación a^2para representar el cuadrado de lado *a,* a^3para representar el cubo de lado *a*, etc. Sin embargo no se debe olvidar la referencia geométrica.

[13] Para más detalle ver (Andersen, 1985)

En el IV libro Cavalieri obtiene $omn.(x^n) = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ para los casos n = 3, 4, 5, 6 por verificación directa a través de arduos procesos algebraicos. Para n = 9, asume los resultados de n = 7 y n = 8 y mediante inducción obtiene $omn.(x^9) = \frac{a^{10}}{10}$.

Exercitationes se publica 10 años después de conocerse la *Geometría* de Descartes, es lógico pensar que Cavalieri conoció los resultados sobre las curvas geométricas de ecuación x^n, en este sentido podríamos afirmar que Cavalieri está buscando cuadraturas de figuras limitadas por estas curvas, y que con los desarrollos anteriores estaba en la búsqueda de la generalización del cálculo de cuadraturas. Recordemos que en el caso de Arquímedes, solo era posible calcular el área de figuras limitadas por curvas que representan polinomios de segundo grado.

De esta forma, con Cavalieri se generaliza el cálculo de cuadraturas, a través de un proceso que abandona el método exhaustivo, abriendo nuevas perspectivas en la búsqueda de un método que permita obtener cuadraturas en general.

Sin embargo, sus ideas fueron fuertemente atacadas por algunos matemáticos de la época. La crítica se basaba fundamentalmente en la creencia de que toda magnitud geométrica es homogénea: la suma de líneas es una línea, y suma e superficies es una superficie. Por lo que la noción de "todas las líneas" introducida por Cavalieri entraba en contradicción; sin embargo, la terminología de Cavalieri estaba mal interpretada: cuando él habla de "todas las líneas" (*omnes lineae*) o de "todos los planos" (o*mnia plana*) de una figura geométrica y los declara equivalentes a aquélla, en absoluto pretende formar las "sumas" de estas líneas o de estos planos. En ningún momento Cavalieri afirma que las figuras geométricas estén compuestas por "todas las líneas" sólo está afirmando que pueden trazarse sobre la correspondiente figura geométrica.

Cavalieri está razonando de manera analítica y no sintética: no parte del punto, de la línea, del plano, para llegar, mediante una adición imposible, a la línea, a la superficie, al sólido. Por el contrario, parte del sólido, de la superficie, de la línea, y mediante un corte de los objetos geométricos en cuestión con un plano y una recta, obtiene los elementos "indivisibles": la superficie, la línea y el punto, que son elementos referentes, más no componentes.

La obra de Cavalieri es fuertemente criticada en dos sentidos: por un lado están los aspectos relacionados con el continuo y el infinito y, por otro lado, su forma de exposición retórica y los extensos e intrincados razonamientos geométricos, que hacen difícil su lectura y comprensión. Además, a pesar de que los indivisibles son el elemento fundamental de su teoría, en ninguna parte de la *Geometría de los Indivisibles* aparece una definición explícita de indivisible. Sin embargo, su aporte desde el punto de vista conceptual y metodológico influenció notoriamente los trabajos de sus contemporáneos y sucesores, trazando un camino fructífero hacia la solución general del problema del cálculo de cuadraturas y cubaturas.

Como consecuencia de las críticas a los trabajo de Cavalieri, personajes como Fermat, Roberval, Wallis y Pascal, simpatizantes de sus ideas, crearon una alternativa intermedia entre los dos puntos de vista sobre la estructura del espacio matemático. Con sus trabajos se presenta una ruptura, conceptual y metodológica, con el enfoque estrictamente geométrico de Cavalieri, dándose una progresiva Aritmetización que condujo al uso implícito del límite. Fermat, Roberval y Wallis relacionaron los indivisibles, las líneas de Cavalieri, como límites de rectángulos inscritos infinitamente divisibles. A pesar de reconocer que el continuo no está constituido de indivisibles, ellos resultan ser una efectiva herramienta para obtener la medida de magnitudes geométricas.

Con Descartes y su geometría analítica, se genera un cambio cualitativo en la forma de hacer matemáticas. Descartes establece clasificaciones de curvas e incorpora la representación algebraica de algunas de ellas. Una parábola, por ejemplo, es vista como una ecuación cuadrática y no como el corte de un plano sobre un cono. El universo de las curvas aumenta, especialmente por el reconocimiento de las llamadas curvas mecánicas, designadas luego como curvas trascendentes y que darían paso a las funciones del mismo nombre. También aparecen las curvas logarítmicas, las trigonométricas, las exponenciales, la cicloide y muchas otras más, las cuales se construían a partir de tablas de valores y se definían recurriendo al movimiento continuo de un punto en el plano. Desde entonces lo analítico se convirtió en el método apropiado para reemplazar la intuición geométrica en los procesos de contar y medir, se tiende el puente entre la geometría y el análisis.

La aparición de las nuevas curvas hizo imprescindible el desarrollo de nuevos métodos para calcular tangentes y áreas, se usaban más expresiones algebraicas y menos objetos geométricos. A lo largo del siglo XVII, el uso de las cantidades infinitesimales fue imponiéndose en la solución de problemas de cálculos de tangentes, áreas, volúmenes, etc. La geometría analítica transformó el problema de las cuadraturas en el problema de hallar el área bajo la curva.

En términos modernos la medida de áreas se define a través de una función cuyo dominio está constituido por las porciones acotadas de superficies y su codominio es el conjunto de los números reales no negativos. Dicha definición requiere identificar magnitudes lineales con números y permite, a su vez, establecer el producto entre magnitudes; operación que carecía de sentido para Euclides. Descartes hace un aporte fundamental al definir el producto de segmentos como otro segmento, lo que dota al producto de segmentos de la propiedad clausurativa. Tal como lo expresa Recalde:

> Este resultado permitirá a Wallis establecer implícitamente que el área del rectángulo es igual al producto de la base por la altura; sin embargo no es desarrollado en toda su extensión por la ausencia de un corpus numérico donde esté bien definido el producto (Recalde, 2007).

John Wallis (1616-1703) presenta el desarrollo su teoría en *La Aritmética de los Infinitesimales*, su objetivo es establecer un nuevo método para investigar la cuadratura de curvas. A través de 194 proposiciones, estableció una teoría general para algunas familias de cuadraturas. Para ello utilizó su denominado *modus induction* (conclusión por analogía o método de inducción incompleta)[14] e interpolaciones.

Wallis se da cuenta que las sumas necesarias para el cálculo de cuadraturas pueden realizarse aritméticamente mejor que en términos de razones geométricas. Las Omnes lineae de Cavalieri, a partir de cero, son tratadas por Wallis como series aritméticas; como sumas de sucesiones que tienden a un límite. Por ejemplo, para el cálculo del área de un triángulo basta considerar una progresión aritmética, para hallar el área del paralelogramo se calcula la suma de una sucesión constante; y para el área de la parábola, una suma de cuadrados o raíces cuadradas. Esto motivó a Wallis a conducir sus investigaciones hacia el problema de encontrar las sumas de las series de potencias, o más bien la proporción de

[14] Wallis usa el razonamiento inductivo para generalizar resultados establecidos, con cierto rigor, en casos particulares

tales sumas de cantidades conocidas. Para el cálculo de cuadraturas, busca la razón existente entre la serie correspondiente a las líneas de la figura en cuestión, y la serie correspondiente a las líneas de un paralelogramo circunscrito a la figura.

En la proposición 1 de *La Aritmética de los Infinitesimales,* Wallis establece que:

> Dada una serie, de cantidades en proporción aritmética (o como la sucesión de números naturales) continuamente creciente, empezando en un punto o en 0 (esto es, cero, o nada), tal como 0, 1, 2, 3, 4, etc., la cual se considera para investigar la razón de la suma de todos ellos, con la suma de igual número de términos iguales al mayor.[15]

Obsérvese que al Wallis decir "empezando en un punto o en 0 (esto es, cero, o nada)" quiere explicitar que su proposición se cumple tanto para cantidades numéricas como para magnitudes geométricas. Además, después de determinar que la razón entre las sumas dadas es $\frac{1}{2}$, enuncia un corolario donde muestra que el triángulo es al paralelogramo como 1 es a 2. Esto lo repetirá en muchas de sus proposiciones, una vez establece la razón entre sumas, muestra la respectiva interpretación geométrica. Wallis evidencia su preocupación por trasladar lo geométrico al lenguaje aritmético. Con respecto a esto, Stedall observa que:

> En su intento de relacionar la aritmética a la geometría, Wallis incluso utilizó dos vocabularios distintos pero paralelos: por ejemplo, primera potencia, segunda potencia y tercera potencia en aritmética, y lado, cuadrado y cubo, en geometría. Los verbos latinos *multiplicare* y *dividere* en aritmética, y *ducere* y *applicare* en geometría (Stedall, 2004, pág. xxi).

Para demostrar la proposición 1, usa su método de inducción incompleta, considerando 6 casos concluye que la razón $\frac{0+1+2+\cdots+n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$ para cualquier número de sumandos. En la segunda proposición establece que la razón entre las sumas consideradas es como 1 a 2; y aclara que si el primer término de la sucesión es 0, el segundo 1 y el último es *l*, la suma será $\frac{l+1}{2}l$, donde el número de términos es $l+1$. O "si se toma *m* para el número de términos, independientemente del segundo término: $\frac{1}{2}ml$". Obsérvese cómo Wallis esta preocupado por independizar *m* del último término *l*.

Luego, Wallis enuncia el siguiente corolario: "un triángulo es a un paralelogramo (de igual base e igual altura) como 1 a 2". En su demostración hace referencia a la proposición 1 de *On conic sections*:

---

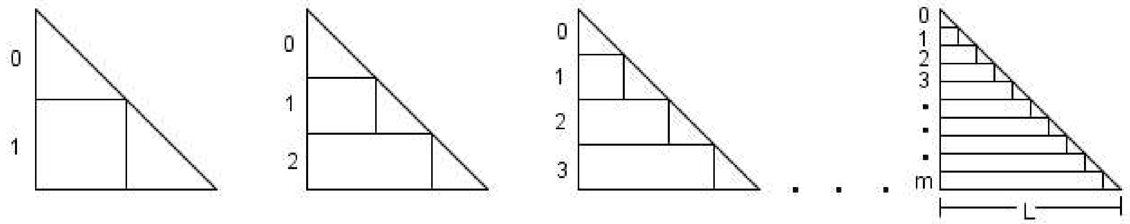
[15] Citado por (Stedall, 2004, pág. 13)

> Supongo, como un punto de partida (de acuerdo a la geometría de los indivisibles de Bonaventura Cavalieri) que cualquier plano está constituido, por así decirlo, de un número infinito de líneas paralelas. O más bien (lo cual yo prefiero) de un número infinito de paralelogramos de igual altura, la altura de cada uno de ellos de hecho puede $\frac{1}{\infty}$ de la altura total, o una parte infinitamente pequeña (∞ denota un número infinito)[16], y por lo tanto la altura de todos en conjunto igual a la altura de la figura.[17]

Además, en el comentario después de la proposición 182 afirma:

> …si un triángulo con altura A y base B, se inscriben paralelogramos, cada uno de los cuales tiene altura $\frac{1}{\infty}A$, y el aumento de anchura es $\frac{1}{\infty}B$, la altura inscrita será $\infty \times \frac{1}{\infty}A$ y, y la base no será B, pero si $B - \frac{1}{\infty}B$.[18]

Si hacemos una interpretación geométrica de lo que afirma Wallis, podemos afirmar que en la proposición 2 de *La Aritmética de los Infinitesimales*, el número de términos m correspondería al número de rectángulos y l correspondería a la altura del último rectángulo de la sucesión, de esta manera podríamos afirmar que $m = \left(\infty \times \frac{1}{\infty} m\right)$, es la altura del triángulo, y $l = l - \frac{1}{\infty} l$, la base; por lo que Wallis en esta proposición nos estaría dando la fórmula del área del triángulo $\frac{m \times l}{2}$.



$$m = \left(\infty \times \frac{1}{\infty} \mathrm{m}\right), \mathrm{L} = \mathrm{L} - \frac{1}{\infty} L$$

Figura 1.15 – Área del triángulo

De la proposición 3 podemos, entonces afirmar que Wallis está estableciendo que el área del paralelogramo de base l y altura m, es $m \times l$.

---

[16] Wallis es quien utiliza por primera vez este símbolo, para denotar el infinito. Además establece que $\infty \times \frac{1}{\infty} A = A$.

[17] Citado por (Stedall, 2004, pág. xxii)

[18] Citado por (Stedall, 2004, pág. 143)

De acuerdo con (Recalde, 2011) esta presentación contempla un salto cualitativo profundo, pues asigna un valor numérico a cada cuadratura, lo que modernamente corresponde la noción de área. El establecimiento del área de un rectángulo como base por altura, permite interpretar cada sumando de la expresión $\left(\frac{0.a}{h}\right)^n + \left(\frac{1.a}{h}\right)^n + \cdots + \left(\frac{i.a}{h}\right)^n + \cdots + \left(\frac{h.a}{h}\right)^n$, que corresponde a una línea, como un rectángulo de base $\frac{a}{h}$ y altura i, para $i =$ 1, 2,…, h. Cuando h tiende a infinito, el ancho de cada uno de los rectángulos corresponde a la noción de infinitesimal.

En las proposiciones 19 y 20, establece resultados análogos a los enunciados en las dos primeras proposiciones, pero para una sucesión de cuadrados (geométricos o aritméticos):

$$\frac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

$$\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}.$$

Hasta el caso para $n = 6$

$$\frac{0+1+4+9+16+26+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252} = \frac{13}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{36}.$$

Aplicando inducción llega a que $\frac{0^2}{n^2} + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$, y como n crece indefinidamente, la razón entre las dos series es $\frac{1}{3}$. Utiliza este resultado para demostrar que la razón entre el cono y el cilindro, o la pirámide y el prisma es como 1 a 3.

Estos procedimientos los repetirá varias veces, aumentando las potencias de los términos de las sumas; insistiendo en que los resultados son válidos tanto para cantidades numéricas como para magnitudes geométricas, evidenciando su objetivo de aritmetizar los indivisibles.

De esta manera Wallis pasa de los indivisibles geométricos de Cavalieri, a los rectángulos de altura infinitesimal $m\frac{1}{\infty}$, que terminan siendo líneas cuando el número de rectángulos tiende a infinito, de manera que utilizando fórmulas sobre series se obtiene la cuadratura cuando el número de términos de la serie tiende a infinito. Vemos en Wallis una ruptura total con el rigor de la geometría griega y la tradición aristotélica de evitar el infinito. Wallis incorpora el símbolo ∞, para referirse al innombrable de Aristóteles, y mediante su método de inducción incompleta, generaliza los resultados obtenidos para las sumas finitas a las series infinitas (uso intuitivo del paso al límite). Al respecto Gonzales comenta que:

> Al corriente del álgebra literal de Vieta, de los métodos analíticos de Descartes y Fermat, y de las tendencias hacia los límites de los matemáticos de los países bajos (Stevin, Saint Vincent,...) y franceses (Roberval, Fermat,...), Wallis se propone rescatar e independizar a la aritmética de las representaciones geométricas, rompiendo con el álgebra geométrica de los antiguos, llegando incluso a presentar aritméticamente lo que para los griegos era la intocable teoría general de las proporciones de Eudoxo, con ello Wallis es, entre los predecesores del cálculo, quién más próximo está a la idea de límite y quien con mayor soltura lo utiliza, por lo menos a nivel intuitivo (Gonzales, II - 1995, pág. 418).

Para Wallis, el problema de la cuadratura de una curva se reduce a calcular la razón entre el área de la figura curvilínea OAB (área buscada), formada por la curva y los segmentos paralelos a los ejes coordenados, y el cuadrilátero $COAB$ de área conocida, circunscrito en OAB. Wallis suma una sucesión finita de indivisibles, produciendo una serie infinita.

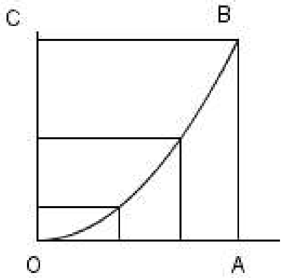


Figura 1.16 – Cuadratura de una región limitada por una curva $y = x^n$

Se trata de calcular *X*, en la proporción $\frac{OABT}{COAB} = \frac{1}{X}$.[19] Mediante arduos cálculos y su novedoso método de inducción incompleta, obtiene los siguientes resultados:

$$\frac{\text{Cuad. } OAB}{\text{Cuad. } OCAB} = \left[\frac{\sum_{i=0}^{l} i^n}{\sum_{i=1}^{l+1} l^n}\right]_{h\to\infty} = \frac{1}{n+1}.$$

Esto significa que en la proporción, $\frac{\text{Cuad. } OAB}{\text{Cuad. } OCAB} = \frac{1}{X}$, $X = n + 1$.

Si consideramos la región limitada por la curva $y = x^n$, la recta $x = a$ y el eje x, dado que el área del paralelogramo $OCAB$ es a^{n+1} (tiene base a y altura a^n), entonces $\frac{1}{n+1}a^{n+1}$

[19] Nótese que Wallis está usando el principio de Cavalieri

corresponderá a la cuadratura de la región OAB; resultado que puede escribirse como:$Cuad.\,[x^n]_0^a \quad = \frac{1}{n+1}a^{n+1}$.

Para calcular la cuadratura del círculo, Wallis considera la región OAB de la figura, limitada por la curva $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ y los ejes coordenados.

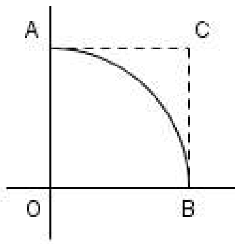


Figura 1.17 – Cuadratura del círculo

La cuadratura del círculo corresponde a los valores $p = \frac{1}{2}$ y $q = \frac{1}{2}$, en la curva $y = \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q$. Wallis busca extrapolar los elementos de las tablas que ha elaborado para valores enteros, a valores de p y q racionales. Elabora una nueva tabla que incorpora argumentos fraccionarios; sin embargo no puede obtener todos los argumentos, pues no tiene regla de formación para las ubicaciones donde los dos índices son ambos fraccionarios. En particular no le proporciona información para el caso $p = \frac{1}{2}$ y $q = \frac{1}{2}$ por lo que procede mediante aproximaciones sucesivas obteniendo la siguiente relación:

$$\frac{\square}{2}\prod_{n=1}^{v}\frac{2n}{2n-1} < \prod_{n=1}^{v}\frac{2n+1}{2n} < \frac{\square}{2}\prod_{n=1}^{v+1}\frac{2n}{2n}.$$

$$\prod_{n=1}^{v}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} < \frac{2}{\square} < \left(\prod_{n=1}^{v}\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\right)\frac{2n+2}{2n+1}.$$

De acuerdo a las condiciones dadas tenemos que $\frac{2}{\square} = \frac{\pi}{2}$. Wallis se da cuenta que a medida que n aumenta, los valores de la derecha y de la izquierda de la desigualdad anterior se van aproximando, pues el valor de $\frac{2n+2}{2n+1}$ tiende a uno. Esto lo lleva a su resultado:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\,.2\,.4\,.4\cdots}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,\cdots}.$$

El libre uso de su intuición y su poderoso método de inducción incompleta le permitieron a Wallis generalizar sus resultados de las potencias enteras, a las potencias racionales, hasta las potencias irracionales logrando de esta manera:

> … dar carta de naturaleza aritmética a lo irracional, superando el imperativo pitagórico de considerar lo irracional sólo en el campo de la Geometría, removiendo uno de los obstáculos que impedía la formulación del concepto de límite y por tanto la elaboración rigurosa del nuevo cálculo (Gonzales, II - 1995, pág. 418).

Con Wallis se transforma el problema del cálculo de cuadraturas en el problema de hallar el área bajo la curva. Muestra que la cuadratura de la figura limitada por la curva de ecuación cartesiana $y = x^n$, desde 0 hasta a, es $\frac{a^{n+1}}{n+1}$. Utilizando el método de interpolaciones deduce la regla para curvas cuya ecuación cartesiana es de la forma $y = x^{\frac{p}{q}}$ y posteriormente la generaliza al caso de exponentes no racionales.

En los trabajos de Wallis, se identifican cuatro elementos que jugarón un papel importante en la conceptualización de la integral definida: la determinación del área del rectángulo como el producto de base por altura, la división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños (rectángulos infinitesimales de altura determinada por la ecuación de la curva), la aproximación a la determinación numérica de la suma de esos elementos, y un intento de expresar el equivalente de lo que será el límite de esta suma cuando el número de elementos crece indefinidamente a medida que se hacen infinitamente pequeños.

Al periodo del desarrollo del cálculo, introducido por Wallis, Fermat y Roberval, Gonzales le asigna el nombre de *etapa empírica del cálculo*. Gonzales afirma que a partir de esta etapa:

> Se plantea históricamente la necesidad de dos hechos fundamentales: *a*) la generalización y unificación de los problemas y métodos infinitesimales, es decir la elaboración de un algoritmo aplicable a todos los problemas. *b*) la reformulación sobre bases rigurosas del nuevo análisis infinitesimal (Gonzales, II - 1995, pág. 435).

Este primer hecho corresponde a los resultados de los trabajos de Newton y Leibniz lo que dio lugar al cálculo infinitesimal; el segundo corresponde a la *Aritmetización del análisis*, que es la fundamentación del cálculo por parte de Cauchy y sus sucesores.

Correspondió entonces a Newton y Leibniz, el implementar algoritmos generales, en términos algebraicos y no geométricos, lo que permitió resolver los más diversos problemas; y así reconocer los conceptos y métodos propios del nuevo cálculo infinitesimal.

1.5 La operación de integración como una generalización del cálculo de cuadraturas

En el último cuarto del siglo XVII, Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Von Leibniz (1646-1716), sintetizaron y enriquecieron un cúmulo de técnicas y métodos interrelacionados, como la geometría analítica de Descartes, el método de los indivisibles de Cavalieri, el cálculo de tangentes por parte de Descartes, Fermat y Roberval, el método para calcular máximos y mínimos de Fermat y, sobre todo, la instauración de una primera formalización de los procesos infinitos por parte de Wallis, quien establece el tránsito de los indivisibles a los infinitesimales.

Gracias a la sistematización de los resultados de sus antecesores, y al reconocimiento de la relación inversa entre el cálculo de cuadraturas y el cálculo de tangentes, tanto Newton como Leibniz, lograron establecer un instrumento algorítmico para el cálculo sistemático. De esta manera, para resolver todos los problemas de cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes, centros de gravedad, etc. que habían ocupado a sus predecesores, bastaban las tablas de cuadraturas y anticuadraturas.

Tanto Newton como Leibniz, desarrollaron algoritmos que involucraban procesos infinitos, en los cuales, implícitamente, usaban el paso al límite de manera operativa. Por su parte, Newton es consciente de que los desarrollos en series de potencias permiten asignar una expresión analítica a muchas curvas que aparentemente no se podían representar a través de ecuaciones algebraicas. Las series de potencias le permiten dar un tratamiento matemático a las llamadas curvas trascendentes, similar al de las curvas algebraicas, por lo cual la generalización de la cuadratura de las curvas de la forma $y = x^n$, como $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ para n natural, resultaba inmediata.

Uno de los aspectos más destacados de los desarrollos de Newton, y que lo ubica en la línea de creadores del análisis, es su tratamiento del problema de las cuadraturas. Para

Newton el problema central consiste en hallar la ecuación de la curva que corresponde a la cuadratura de otra curva.

Antonio Durán en (Newton, 2003, pág. 9), cita el reconocimiento que hace Newton al aporte de Wallis a su nuevo método:

> Por la regla 59 del *Arithmetica infinitorum* publicada por el señor Wallis en 1655, si ponemos x para la abcisa de una curva y m y n son números, y $x^{m/n}$ la ordenada erigida en ángulo recto, entonces el área de la figura será $\frac{n}{m+n}x^{\frac{n}{m+n}}$.

Antes de enunciar la regla I de su *De analysi*, Newton escribe:

> Sea aplicada la perpendicular BD a la base AB de una curva cualquiera[20], AD: y llámese $AB = x$, y $BD = y$; y sean $a, b, c,$ &c. cantidades dadas y m, n números enteros. Por ende,
> Regla I: Si $ax^{\frac{m}{n}} = $ y, será $\frac{an}{n+m}x^{\frac{n}{m+n}} =$ área ABD (Newton, 2003, págs. 12,13).

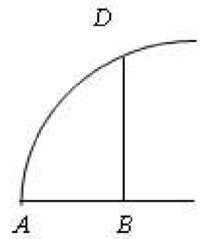


Figura 1.18 – Cuadratura bajo la curva $y = \frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$

Esta regla corresponde a la primera versión explícita del teorema fundamental del cálculo[21]. De acuerdo con Durán, lo importante de esta regla no es tanto su enunciado, pues ya había sido enunciada por Wallis, lo verdaderamente novedoso es la técnica que usó para deducir tal fórmula, la cual describe Newton para un caso particular, antes de la demostración de la regla I al final del *De Analysi*:

[20] Observese que Newton aquí, como en la nota anterior al escribir "la ordenada erigida en ángulo recto", se está refiriendo a coordenadas rectangulares. Al respecto Durán comenta que Newton, al igual que lo hacemos modernamente para la representación gráfica de funciones, está definiendo los ejes de coordenadas, y también usa coordenadas oblicuas en sus cálculos previos a la clasificación de las cúbicas; aunque nunca utilizará esta expresión en su *Analysis*,

[21] Es gracias a Isaac Barrow que en el siglo XVII se establece la relación inversa entre estos dos problemas milenarios. Se considera que el primer enunciado del teorema fundamental del cálculo aparece en términos geométricos en las *Lecciones Geometricæ* de Isaac Barrow. Contrario a Barrow, Newton tiene una mirada más aritmética, lo que le permite, una vez conocidos los trabajos de su maestro, establecer, por primera vez de manera explícita, la relación inversa entre el trazado de tangentes y el cálculo de áreas.

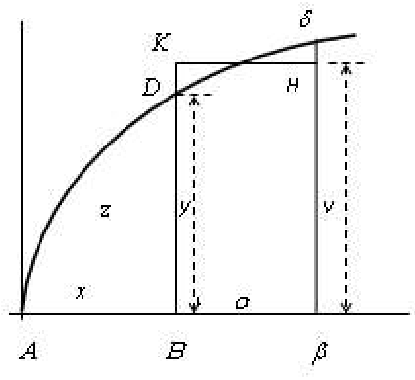


Figura 1.19 – Cuadratura de $z = \frac{2}{3}x^{3/2}$

Sean pues $AB = x$, base de una curva cualquiera $AD\delta$, la aplicada en la perpendicular $BD = y$ y el área $ABD = z$ como antes. Sean así mismo $B\beta = o$, $BK = v$, y el rectángulo $B\beta HK(ov)$, igual en espacio a $B\beta\delta D$.
Luego $A\beta = x + o$, y $A\delta\beta = z + ov$. Esto por delante, busco y a partir de la relación entre x y z asumida arbitrariamente del modo que verás en lo que sigue.
Se asume a discreción que $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, ó $\frac{4}{9}x^3 = zz$. Substituidos entonces x por $x + o(AB)$ y z por $z + ov(A\delta\beta)$, aparecerá (por la naturaleza de la curva)
$\frac{4}{9}\overline{x^3 + 3x^3o + 3xo^2 + o^3} = z^3 + 2zov + o^2v^2$.
Y quitados los iguales $\left(\frac{4}{9}x^3 \text{ y } zz\right)$, y divididos los restante por o, queda
$\frac{4}{9}\overline{3x^2 + 3xo + o^2} = 2zv + ov^2$.
Si suponemos ahora disminuir $B\beta$ hasta infinito y desvanecerse, o ser nada o, serán iguales v e y, y los términos multiplicados por o se desvanecen, razón por la cual quedará $\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv$, ó $\frac{2}{3}xx(= zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, ó $x^{\frac{1}{2}}\left(= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y$. Y por lo cual, al contrario, si $x^{\frac{1}{2}} = y$ sería $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.
O, en general, $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; o lo que es igual, poniendo $\frac{na}{m+n} = c$ y $m + n = p$, si $cx^{\frac{p}{n}} = z$ o lo que es igual $c^n x^p = z^n$; entonces, sustituyendo x por $x + o$ y z por $z + ov$ (o lo que es lo mismo $z + oy$); resulta $c^n\overline{(x^p + pox^{p-1}, \&c.)} = z^n + noyz^{n-1}, \&c.$ Omitiendo los otros términos que a la larga se desvanecerán. Quitados ahora los iguales $c^n x^p$ y z^n, y divididos por o los restantes, queda
$c^n px^{p-1} = nyz^{n-1}\left(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^nx^p}{cx^{\frac{p}{n}}}\right)$.
O dividiendo por $c^n x^p$, será
$px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$,
O $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; o restituyendo $\frac{na}{m+n}$ en lugar de c y $m + n$ en el de p, esto es, m en lugar de $p - n$ y na en el de pc, se hará $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Razón por la que, al contrario, si $ax^{\frac{m}{n}} = y$ sería $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$ Q.E.D.
(Newton, 2003, págs. 55-57)

Para demostrar este resultado, Newton incorpora el símbolo "o" que representa, en el desarrollo operativo, una cantidad muy pequeña pero diferente de cero. Ello significa que puede actuar como denominador, pero cuando aparece sumando se desvanece, por ser tan pequeña que no adiciona nada: "*o*" simboliza un incremento infinitesimal. Basado en este procedimiento, establece la operación inversa de la cuadratura, elaborando una serie de tablas de cuadraturas y anticuadraturas.

Observemos que Newton utiliza métodos infinitesimales al introducir inicialmente "*o*" como una cantidad muy pequeña y luego haciéndola desvanecer. Sin embargo, a pesar de los problemas de rigor, la regla I de Newton se constituye en uno de los principales aportes para el cálculo, pues establece, de manera algebraica, la relación inversa fundamental entre cálculo de tangentes y cálculo de áreas, al respecto Boyer comenta:

> Tenemos aquí una expresión para el área a la que se ha llegado no determinando la suma de áreas infinitesimales, no a través de algún método equivalente como los usados por los predecesores a Newton desde Antifón hasta Pascal. En vez de eso, fue obtenida considerando el incremento momentáneo del área en el punto en cuestión. En otras palabras, si los métodos de cuadraturas previos habían sido encontrados por la equivalencia de la integral definida con los límites de sumas, Newton aquí determina, primero la velocidad de cambio del área, y entonces de aquí encuentra el área misma por lo que nosotros hoy llamaríamos la integral indefinida de la función que representa la ordenada. Debe ser señalado que aún el proceso que se muestra como fundamental en esta proposición es la determinación de las velocidades de cambio. En otras palabras, lo que hoy llamaríamos derivada es tomado como idea básica, mientras que la integral es definida en términos de esta.[22]

Con las reglas II y III, Newton enseña cómo obtener cuadraturas de las curvas compuestas a partir de las simples, mediante varios ejemplos. En la regla II establece la linealidad:

> Si el valor de *y* se compone de varios términos de este género, se compondrá el área, asimismo, de las áreas que dimanan de los términos singulares (Newton, 2003, pág. 15).

En la regla III establece cómo reducir ecuaciones no polinómicas a series convergentes:

> Si no es que el valor de *y* o de alguno de sus términos sea más compuesto que los precedentes, que entonces ha de reducirse a términos más simples, operando en las letras de idéntico modo que en los números decimales los aritméticos dividen, extraen raíces o resuelven las ecuaciones afectadas, y de estos términos obtienes finalmente la superficie de la curva requerida mediante las reglas precedentes (Newton, 2003, pág. 18).

Cómo ejemplo de esta tercera regla Newton presenta su cuadratura del círculo:

[22] Citado por Durán en (Newton, 2003, pág. 56)

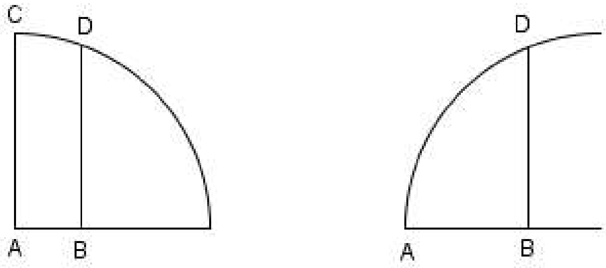


Figura 1.20 – Cuadratura del círculo de Newton

Del mismo modo[23], si $\sqrt{aa-xx}=y$ será su raíz $a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$&c. Con que el área buscada ABDC será igual a $ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}\&c.$ Y ésta es la cuadratura del círculo. O bien, si pones $\sqrt{x-xx}=y$, será la raíz igual a la serie infinita $x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}-\frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}$&c. Y el área buscada será igual a $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$&c., ó $x^{\frac{1}{2}}$ multiplicado por $\frac{2}{3}x-\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{28}x^3-\frac{1}{72}x^4-\frac{5}{704}x^5$&c. (Newton, 2003, pág. 24)

Por otra parte, Newton extiende su desarrollo binomial para el caso de exponentes racionales. A partir de analizar lo que sucede con las curvas de ecuaciones:

$$(1-x^2)^0, (1-x^2)^{\frac{2}{2}}, (1-x^2)^{\frac{4}{2}}, (1-x^2)^{\frac{6}{2}}\cdots.$$

Y teniendo en cuenta que,

La cuadratura de $y=(1-x^2)^0$es x.

La cuadratura de $y=(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$, es $x-\frac{1}{3}x^3$.

La cuadratura de $y=(1-x^2)^{\frac{4}{2}}$, es $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$.

Newton identificó las leyes de formación de los denominadores y numeradores de los coeficientes: los denominadores y los exponentes de la variable seguían la secuencia de los impares, mientras los numeradores se guiaban por el desarrollo del triángulo de Pascal, es decir según la regla $\left\{1, n, \frac{n(n-1)}{1.2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \cdots\right\}$; generalizó el proceso para n = ½, y aplicando el proceso inverso llegó al desarrollo binomial,

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\frac{5}{128}x^8-\cdots.$$

[23] En el ejemplo anterior muestra con detalle cómo obtiene la raíz $\sqrt{aa+xx}$ para calcular la cuadratura de la hipérbola.

Resultado que comprobó de manera directa a través del producto del miembro de la derecha por sí mismo. Obviamente este proceso, de multiplicar términos con infinitos componentes, no se puede hacer de manera directa; Newton utilizó una extensión de la propiedad distributiva y luego fue generalizando.

En *The Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum,* para hallar el valor de π , Newton utiliza la cuadratura del círculo de ecuación $y = \sqrt{x - x^2}$. En términos modernos, considera una semicircunferencia de centro $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y de radio $r = \frac{1}{2}$, el punto medio $B\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ y el ángulo $BCD = \frac{\pi}{3}$.

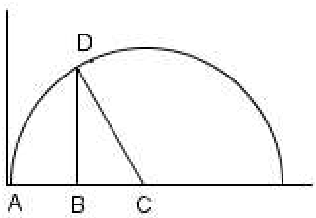


Figura 1.21 – Cálculo de π

Dado que $a(ABD) = a(ADC) - a(DBC)$ y que $a(ADC) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) = \frac{\pi}{24}$, se tiene que

$$a(ABD) = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

Por otra parte, por la cuadratura del círculo:

$$a(ADB) = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \cdots\right]_0^{1/4} = \frac{2}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{28.2^7} - \frac{1}{72.2^9}\cdots.$$

De donde se obtiene:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{28.2^7} - \frac{1}{72.2^9}\cdots\right).$$

En sus *Principia Mathematica*, Newton se representa el área como el espacio recorrido por un móvil que se desplaza a una velocidad constante k en un tiempo *t*, $A = kt$; o como generada por el movimiento continuo de una recta de longitud *k* (la ordenada). Cuando transcurre un tiempo infinitesimal ("muy pequeño"), lo que modernamente denotamos por *dt*, la ordenada se desplaza también una distancia infinitesimal. Entonces, en ese tiempo se producirá un incremento infinitesimal "del área", que denotaremos por *dA* y se obtiene $dA = k.dt$, lo cual se puede interpretar como "la variación del área es directamente proporcional a la variación del tiempo". El cociente ("razón de cambio") $\frac{dA}{dt}$ nos produce la velocidad con la cual varía el área. Luego analiza el caso en que el móvil se desplaza con velocidad uniformemente acelerada, $A = \frac{1}{2}at^2$, entonces $dA = at.dt$. Lo que se puede interpretar mediante un modelo físico-geométrico:

Supongamos que el triángulo dado *ABC* está generado por el desplazamiento uniforme de *BC:*

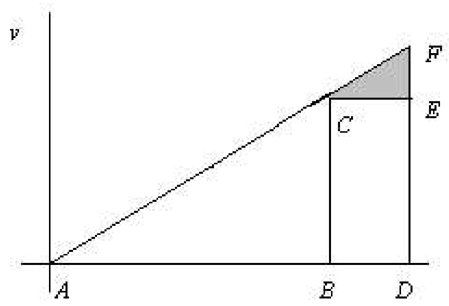


Figura 1.22 – Variación instantánea de un triángulo

Entonces al fluir uniformemente la base *AB*, ésta adquiere un incremento *BD* y en consecuencia el triángulo *ABC* adquiere un incremento *BDEFC*. De este incremento el triángulo *EFC* es consecuencia de la aceleración del movimiento (no del movimiento de *BC*, que fluye uniformemente, sino del móvil cuya velocidad $v = BC$).

Por lo tanto, si *BD* es infinitamente pequeño, durante ese tiempo el incremento de la velocidad (del móvil) es *EF* que es también infinitamente pequeño. De allí que la variación instantánea del triángulo *ABC* está representada por el rectángulo *BDEC.*[24]

Los infinitesimales aparecen en los *Principia* como "momentos", como principios generadores de cantidades finitas. Una variable es una cantidad que fluye y lo que es, en el instante mismo que empieza a fluir, es el momento de dicha cantidad; se afirmaba entonces que una cantidad infinitesimal era una entidad discreta que preserva cualidades de lo continuo. Más adelante, en *de la Cuadraturas de Curvas*, Newton considera las cantidades como generadas por el movimiento continuo por oposición a los infinitesimales que sugieren siempre un tratamiento discreto, con cierta dosis de continuidad.

[24] Tomado de (Waldegg, 1982)

> No considero aquí las cantidades matemáticas constituidas por partes, cuan mínimas quepa, sino descritas por el movimiento continuo (Newton, 2003, pág. 103).

Una curva se genera por el movimiento continuo de un punto, una superficie por el movimiento continuo de una línea, los ángulos por rotación de lados, y así otras cantidades.

> Tal génesis tiene verdaderamente lugar en las cosas de la naturaleza y a diario es discernible en el movimiento de los cuerpos. Y de este modo enseñaron los antiguos la génesis de los rectángulos, llevando rectas móviles en la longitud de las rectas inmóviles. (Newton, 2003, pág. 103).

Newton determina las cantidades a partir de las velocidades de los movimientos con los cuales son generadas. Conociendo la rapidez de cambio del área, se determina el área (conocida $\frac{dA}{dx}$ se puede conocer A). Este tratamiento físico de las cantidades geométricas le permite a Newton ver la relación inversa entre tangentes y áreas

Las fluentes son cantidades generadas por movimientos continuos y las fluxiones son las velocidades de dichos movimientos. Las fluxiones son proporcionales a los aumentos de las fluentes, cuando se consideran intervalos de tiempo iguales pero muy pequeños.

> Tal como si las áreas *ABC, ABDG* son descritas por las ordenadas *BC*, *BD*, que progresa con movimiento uniforme sobre la base *AB*, las fluxiones de dichas áreas serán entre sí como las ordenadas que las describen, *BC* y *BD,* y podrían exponerse mediante éstas, por cuanto esas ordenadas son como los aumentos nacientes de las áreas (Newton, 2003, pág. 104).

En términos geométricos y dinámicos, Newton muestra la relación inversa entre el cálculo de cuadraturas y el trazado de tangentes en la introducción de *a la Cuadratura de las curvas*.

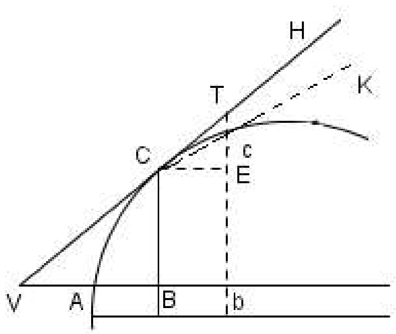


Figura 1.23 – Relación entre cuadraturas y tangentes

Se desplaza la ordenada BC hacia una nueva posición bc, se completa el paralelogramo $BCEb$ y “llévese VTH a que toque la curva en C”. Sea V el punto de intersección de esta recta con la recta AB y T el punto de intersección con la recta *bc*. Entonces, *Bb* es el incremento de la abscisa AB, y EC es el incremento de la ordenada *BC.* Si estos incrementos ocurren en tiempos pequeños, los lados del triángulo *CET* estarán "en razón primera a tales aumentos nacientes" como las fluxiones de AB y BC, y podrán ser representadas por estos lados o, lo que es lo mismo, por los lados del triángulo *VBC* que es semejante al triángulo *CET*.

Luego se traza la recta *K* uniendo C y c, y retrocedemos la ordenada *bc* hasta *BC*, cuando los puntos *c* y *C* coincidan, la secante *CK* coincidirá con la tangente *CH.*[25] Es decir, la tangente en un punto, se puede considerar como la última razón de la secante. Al respecto Waldeg observa que:

> Mediante estos argumentos, se puede visualizar fácilmente que la derivación y la integración son proceso inversos: al avanzar la ordenada *BC* con un movimiento continuo, generamos el área *ABC* (integración). Cuando retrocedemos la ordenada *bc* hasta su posición original, generamos la tangente en *C* (derivación). Este razonamiento nos permite ver el significado geométrico del Teorema Fundamental [del cálculo] (Waldegg, 1982, pág. 21).

En el *Methodus Fluxionum et Serierum*, escrito en 1672 y publicado hasta 1736, Newton reformula el problema fundamental en términos dinámicos: "dada una relación entre dos fluyentes, obtener la relación entre sus fluxiones y recíprocamente". Klein[26] (Klein, 1972) observa como la primera versión presentada en 1669 está influenciada por el indivisible estático de Cavalieri, mientras que esta segunda versión está influenciada por el pensamiento dinámico de Galileo. Para Newton el área de una región es una variable, por tanto se puede hablar de su fluxión y operar con ella como se hace con las demás variables.

Las cantidades "fluyentes" son aquellas cantidades que varían respecto al tiempo. La rapidez de cambio de estas cantidades las llamó "fluxiones". De esta manera, Newton concebía la curva generada a partir del movimiento de un punto genérico, lo cual ocasionaría que las coordenadas x y y, así como la cuadratura z "fluyeran" o cambiaran con el tiempo. En términos modernos, Newton estaba describiendo la curva de acuerdo a una ecuación paramétrica $(x(t),\ y(t))$. En primera instancia, usó letras diferentes para diferenciar las fluxiones de sus fluentes; pero luego adoptó la notación que conocemos, en

[25] Tomado de (Waldegg, 1982, págs. 20-21)
[26] (Klein, 1972)

la cual las fluxiones se representan con un punto superior de las fluentes; si x, y representan las cantidades fluentes, $\dot{x}, \dot{y}$ representan las fluxiones respectivas.

La manera como varían las fluentes en el tiempo es arbitraria, incluso muchas veces supone que una de ellas varía uniformemente, es decir que su fluxión es 1. Esto se debe a que a Newton no le interesan las fluxiones individualmente, sino la razón $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$, que corresponde a la pendiente de la tangente. Si se tienen las fluxiones, encontrar las fluentes es equivalente a encontrar la cuadratura de la curva.

> Proposición II. Sea ABC una figura con que se ha de dar, BC la ordenada, aplicada en ángulo recto, y AB, la abcisa. Prolónguese CB hasta E y sea $BE = 1$, y complétese el paralelogramo $ABED$: las fluxiones de las áreas ABC, $ABED$ serán como BC y BE. Asúmase por tanto una ecuación cualquiera que defina la relación de las áreas , y de ahí dará la relación de las ordenadas BC y BE, por la Prop. I[27] Q.E.I.

Lo que podemos interpretar como $\frac{dS}{dx} = y$, donde dA es la variación del área ABC, $x = AB$ y $y = BC$; el $área\ (ABED) = x.1$, por lo que la variación del área $ABED$ es dx. Si se conoce la fluxión $\frac{dS}{dx} = y$, encontrar la fluente S es equivalente a encontrar el área bajo la curva determinada por la ordenada y.

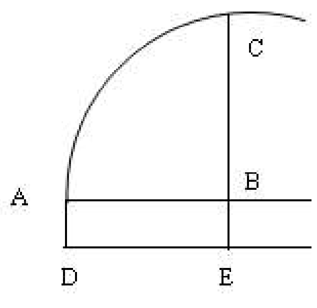


Figura 1.24 – Fluxiones y fluentes

Newton pensaba que incorporando una visión cinemática al tratamiento de curvas podría justificar el uso de los incrementos infinitamente pequeños, pues según él las nociones físicas estaban bien fundamentadas. Sin embargo las críticas por la falta de rigor matemático que involucraban estas cantidades evanescentes que aparecían y desaparecían continuaban.

[27] La proposición I de *De la Cuadratura de curvas*: Dada una ecuación cualquiera en que estén envueltas cantidades fluentes, dar con las fluxiones (Newton, 2003, pág. 112)

Sin atender a estos cuestionamientos, Newton logró encontrar procesos algorítmicos eficientes. Los incrementos correspondientes a las fluxiones las expresó en función de los incrementos de tiempo. De esta forma si se identifica con o a un incremento infinitesimal de tiempo, entonces los incrementos correspondientes a $x, y, z, \ldots$ serían $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o$ Para clarificar estos aspectos, Newton presenta el siguiente ejemplo: considera la ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Sustituyendo por los incrementos respectivos obtiene $(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$

Desarrollando los binomios, estableciendo las cancelaciones respectivas, dividiendo por o y finalmente despreciando los términos en los que figure el factor o, llega a la siguiente ecuación:

$$3\dot{x}\,x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0.$$

De lo cual se puede obtener el cociente diferencial,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}.$$

Lo que modernamente corresponde al cociente de las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^3 - ax^2 + axy - y^3$.

Con su nuevo enunciado en términos de fluxiones, Newton pretendía eliminar los inconvenientes de rigor de los indivisibles. Si bien no lo logra, en este trabajo presenta un método más general. En una carta escrita a John Wallis el 10 de diciembre de 1672, que proporciona los elementos de su método y un ejemplo, Newton afirma:

> Este es un [caso] particular, o más bien un corolario, de un método general, que puede aplicarse, sin ningún cálculo complicado, no sólo al dibujo de las tangentes de cualquier línea curva, tanto geométrica como mecánica...sino también para resolver otros tipos más abstrusos de problemas sobre curvaturas, áreas, longitudes, centros de gravedad de curvas, etc...Tampoco está limitado a las ecuaciones que no contengan cantidades irracionales. He entretejido este método con el de las ecuaciones, reduciéndolos a las series infinitas. [28]

Recordemos que los antecesores de Newton se habían limitado a tratar con funciones algebraicas racionales, por esto él llama la atención al hecho de que ha ampliado el dominio a funciones más generales, objetivo que perseguirán muchos de sus sucesores: ampliar cada vez más el dominio de las funciones tratadas en el análisis.

[28] Citado por (Klein, 1972, pág. 479)

Por su parte, Leibniz utiliza las series y un método similar al de los indivisibles de Cavalieri. Leibniz define la cuadratura como una sucesión de ordenadas equidistantes, argumentando que si la distancia entre ordenadas es infinitamente pequeña se obtiene una aproximación de cuadratura exacta. La diferencia entre ordenadas sucesivas sería, por consiguiente, la pendiente de la tangente.

En la *Historia et origo calculi defferentialis*,[29] Leibniz reconoce que sus primeros trabajos sobre sucesiones de sumas y diferencias de números fueron claves en el desarrollo de sus trabajos posteriores sobre el cálculo infinitesimal. Inspirado en el triángulo aritmético de Pascal, Leibniz construye su triángulo armónico. Estos dos arreglos guardan cierta relación inversa: cada columna del triángulo aritmético contiene las sumas de los términos de la columna precedente, mientras que cada columna del triángulo armónico contiene las diferencias los términos de la columna precedente.

El interpretar la cuadratura como suma de ordenadas, y la pendiente de la tangente como diferencia entre ordenadas sucesivas, le permite a Leibniz descubrir la relación inversa entre los dos problemas. Este descubrimiento lo hace basándose en el *triángulo característico*, usado por Pascal para demostrar la proposición I del *Tratado de senos de un cuadrante de círculo:*

> La suma de los senos (ordenadas) de un arco de un cuadrante (de un círculo) es igual a la porción de la base entre el seno extremo multiplicado por el radio.[30]

Leibniz advierte el uso general que se le puede dar al triángulo característico en una curva arbitraria, donde la normal jugará el papel del radio del círculo de Pascal.

---

[29] Ver (Edwards, 1982, pág. 234)

[30] Citado por (Edwards, 1982, pág. 240)

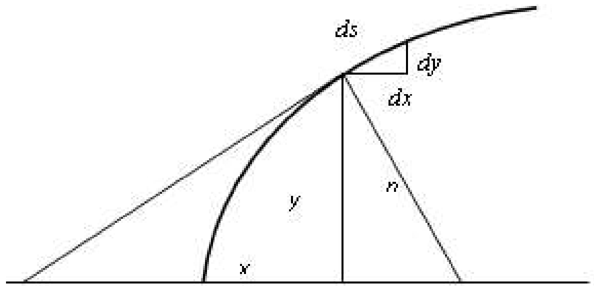


Figura 1.25 — Triángulo Característico

Por la semejanza de los triángulos rectángulos (figura 1.40), se tiene que $\frac{ds}{n} = \frac{dx}{y}$ o $yds = ndx$. Sumando los infinitesimales se llega a $\int y.ds = \int n.dx$. Lo que Leibniz enuncia como: "el momento de la curva dada alrededor del eje x es igual al área bajo la segunda curva cuya ordenada es la normal n a la curva dada". Multiplicando el momento por 2π se obtiene el área $A = \sum 2\pi yds$ de la superficie de revolución obtenida por rotación de la curva original alrededor del eje x.[31]

Si denotamos por v a la subnormal a la curva dada (figura 1.40) tenemos que $\frac{dy}{v} = \frac{dx}{y}$ y $\int v.dx = \int y.dy$. Leibniz anota que si la curva pasa por el origen y su base es el intervalo $[0, b]$, entonces obtenemos el área del triángulo cuya base y altura son iguales a b: "líneas rectas que continuamente se incrementan desde cero, cuando cada una se multiplica por su elemento de incremento, forman un triángulo".

De manera similar, Leibniz utiliza el triángulo característico para relacionar los problemas de rectificación y cuadratura de curvas. La rectificación de una curva dada la reduce al problema del cálculo del área de la región entre el eje y, y una segunda curva cuya abscisa x es la tangente a la curva dada.

[31] Ver (Edwards, 1982, pág. 242)

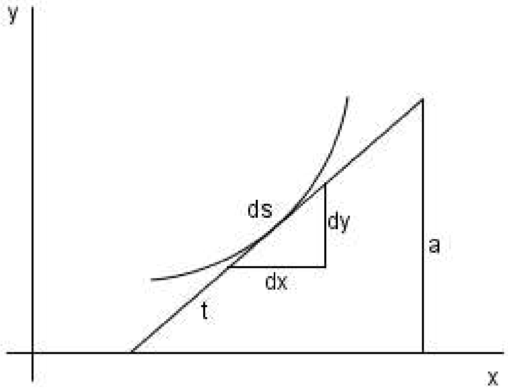


Figura 1.26 – Rectificación y Cuadratura

Por semejanza de triángulos se tiene que $\frac{ds}{t} = \frac{dy}{a}$, luego $a.ds = t.dy$, por lo que:

$$\int a.ds = \int t.dy.$$

Leibniz resume sus resultados de la siguiente manera:

> Así, para encontrar el área de una figura dada, se busca otra figura tal que sus subnormales sean respectivamente iguales a las ordenadas de la figura dada, y entonces esta segunda figura es la cuadratiz de la dada; y así, de esta extremadamente elegante consideración, obtenemos la reducción de las áreas de superficies descritas por rotación a cuadraturas planas, así como la rectificación de curvas; al mismo tiempo, podemos reducir estas cuadraturas de figuras a un problema inverso de tangentes (Edwards, 1982, pág. 243).

Además de la identificación de la relación inversa entre el problema de la cuadratura y la tangente, estos resultados le permiten a Leibniz implementar el método de integración por sustitución. Si en la integral $\int v.dx = \int y.dy$, se hace $v = y\left(\frac{dy}{dx}\right)$, se obtiene

$$\int y\left(\frac{dy}{dx}\right).dx = \int y.dy.$$

En una carta a L`Hopital, veinte años después de estas investigaciones de 1673, Leibniz resume sus resultados y cuenta cómo el triángulo característico le permitió sistematizar los resultados de sus antecesores y desarrollar un método algorítmico que unificó los distintos resultados y técnicas ya conocidos:

> Con el uso de lo que yo he llamado el triángulo característico, formado con los elementos de las coordenadas y de la curva, encontré como en un parpadeo, casi todos los teoremas que después encontré en los trabajos de Barrow y Gregory. Hasta entonces, yo no estaba lo suficientemente versado en el cálculo de Descartes y no hice uso de las ecuaciones para expresar la naturaleza de las curvas; pero por consejo de Huygens, me puse a trabajar en él, y estuve lejos de arrepentirme de hacerlo, porque me dio los medios casi inmediatamente para encontrar mi cálculo diferencial. Esto fue como

sigue: Yo había experimentado desde hace algún tiempo cierto placer por encontrar las sumas de series de números, y para esto había usado el bien conocido teorema que, en una serie infinita decreciente, el primer término es igual a la suma de todas las diferencias. De esto obtuve lo que llamo el triángulo armónico, en oposición al triángulo aritmético de Pascal…Reconociendo de esto la gran utilidad de las diferencias y viendo que por el cálculo de Descartes las ordenadas de la curva podían ser expresadas numéricamente; vi que encontrar cuadraturas o las sumas de las ordenadas era lo mismo que encontrar una ordenada (la de la cuadratiz) de la cual la diferencia es proporcional a la ordenada dada. Reconocí también, casi inmediatamente que encontrar las tangentes no es otra cosa que encontrar diferencias, y que encontrar cuadraturas no es otra cosa que encontrar sumas, teniendo en cuenta que uno supone que las diferencias son incomparablemente pequeñas.[32]

Después de sus trabajos sobre el triángulo característico, Leibniz descubre su *método de transmutación*, mediante el cual se pueden deducir todos los resultados sobre cuadraturas conocidos en la época; éste método está basado en los indivisibles de Cavalieri y en los de aquellos que usaron rectángulos indivisibles para el cálculo de cuadraturas, tal como el mismo Leibniz lo afirma en su respuesta a la *Epistolar prior* de Newton:

Mi método es como un corolario de una teoría general de transformaciones, con ayuda del cual, cualquier figura, dada por cualquier ecuación, se reduce a otra figura analíticamente equivalente, […] Más aún, el método general de transformaciones me parece adecuado para ser considerado entre los más poderosos métodos del análisis, porque no solamente sirve para series infinitas y aproximaciones, sino también para soluciones geométricas y un sinfín de cosas, difícilmente manejables de otra forma…El principio de las transformaciones es el siguiente: una figura dada, con innumerables líneas (ordenadas) trazada de alguna manera (de acuerdo a alguna regla o ley) puede ser resuelta en partes, y las partes, y las partes – u otras iguales a ellas) -, cuando se reacomodan en otra posición o en otra forma, componen otra figura, equivalente a la primera o de la misma área aunque la forma sea totalmente diferente; así, se puede obtener la cuadratura de muchas formas…Estos pasos son tales que los puedo encontrar de una vez cualquiera que proceda metódicamente bajo la guía de la naturaleza misma; y contiene el verdadero método de los indivisibles con una concepción más general y hasta donde yo sé , hasta ahora no había sido expuesto con suficiente generalidad. Porque, no sólo a rectas paralelas o convergentes, sino a otras líneas, rectas o curvas, construidas mediante una ley definida, se les puede aplicar la resolución (de la figura original en partes que se van a reunir formando otra figura)… ciertamente todas las cuadraturas, absolutas o hipotéticas hasta ahora conocidas, no son sino casos particulares de ésta.[33]

Al respecto Edwards comenta que Leibniz está describiendo aquí el principio conocido en el siglo XVII como "transmutación": Sean A y B dos regiones planas (o del espacio), cada una dividida en indivisibles (éstos pueden ser tomados como una infinidad de rectángulos o prismas infinitesimales). Si existe una correspondencia uno a uno entre los indivisibles en A y los de B, tales que indivisibles correspondientes tengan iguales áreas (o volúmenes), entonces se dice que B es derivado de A por *transmutación*, concluyendo que tiene áreas (o volúmenes) iguales.

[32] Citado por (Edwards, 1982, págs. 244-245)
[33] Citado por (Edwards, 1982, pág. 245)

Veamos la forma cómo Leibniz utiliza el triángulo indivisible en un proceso de transformación[34]:

Consideremos la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = A$ y $x = B$. Tomemos un punto $P(x, y)$ y formemos el triángulo característico PQR, tal que $Q\ (x + dx, y + dy)$. Sea la tangente determinada por el arco infinitesimal $ds \cong PQ$, cuya prolongación corta al eje y en el punto $T(0, z)$; localizamos el punto S, tal que OS (de longitud p) sea perpendicular a la tangente SQ, como se muestra en la figura.

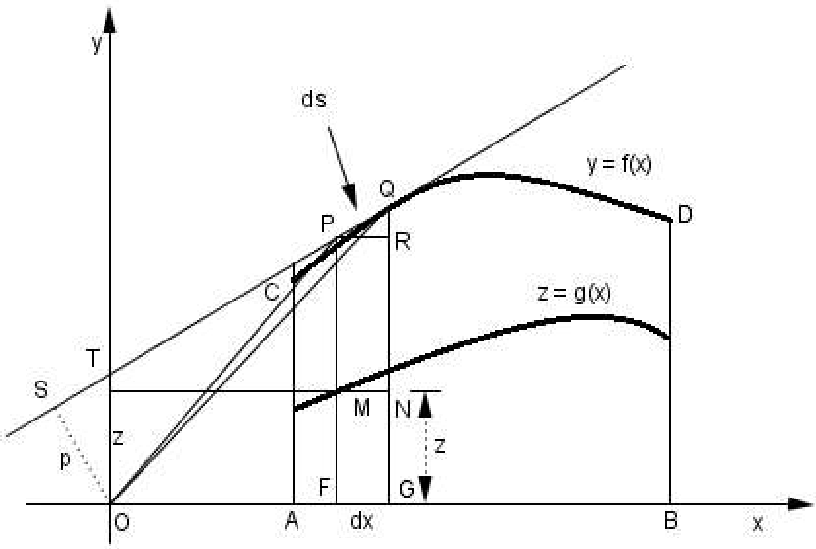


Figura 1.27 – Transmutación

Como los triángulos PQR y TMP son semejantes se tiene que,

$\frac{TM}{PR} = \frac{MP}{QR}$, es decir $\frac{x}{dx} = \frac{y-z}{dx}$,

De lo cual se tiene que $z = y - x\,\frac{dy}{dx}$ (1)

También se tiene que $\frac{dx}{p} = \frac{ds}{z}$, pues los triángulos PQR y OTS son semejantes.

El área del triángulo infinitesimal OPQ es $a(OPQ) = \frac{1}{2}p.ds = \frac{1}{2}\ z.dx$.

---

[34] Tomado de (Recalde, Lecciones de Historia, 2011)

.

De esta forma, si se considera la región acotada por $f(x)$ y los segmentos *OC* y *OD* formada por los triángulos infinitesimales *OPQ*, entonces se tiene

$$a(región\ OCD) = \frac{1}{2}\int_A^B zdx, \text{ donde } z = g(x).^{35} \quad (2)$$

De las condiciones del problema, y tal como se puede verificar de la gráfica, se tiene que:

$$a(ACDB) = a(\Delta ODB) + a(\text{región } OCD) - a(\Delta OCA)$$

Expresión que es equivalente a:

$$\int_A^B ydx = \frac{1}{2}B.f(B) - \frac{1}{2}A.f(A) + a(región\ OCD) = \frac{1}{2}[xy]_A^B + a(región\ OCD).$$

Remplazando la condición (2) se obtiene,

$$\int_A^B ydx = \frac{1}{2}\left([xy]_A^B + \int_A^B zdx\right). \quad (3)$$

Esta fórmula (3) es conocida como "el teorema de transmutación" de Leibniz, en el cual podemos visualizar el teorema fundamental del cálculo. La curva $z = g(x)$, llamada la cuadratriz, proviene de $f(x)$ a través de la intervención de la tangente en cada punto. Además al sustituir (1) en (3) se tiene la fórmula de integración por partes:

$$\int_A^B ydx = [xy]_A^B + \int_{f(A)}^{f(B)} xdy.$$

Una ilustración importante del método de transmutación es la *cuadratura aritmética del círculo*:

[35] En la época en que Leibniz desarrolló estas investigaciones aún no incorporaba el símbolo para la integral ∫; sin embargo se utiliza aquí por simplicidad.

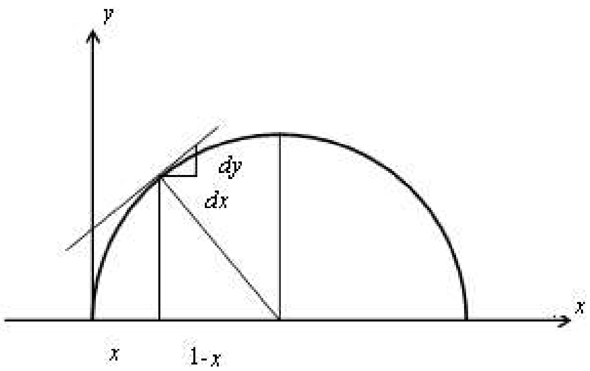


Figura 1.28 – Cuadratura aritmética del círculo

Leibniz considera el semicírculo superior de ecuación $y = \sqrt{2x - x^2}$. Se tiene que $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$, por transformación $z = y - x\frac{1-x}{y} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$, es decir $x = \frac{2z^2}{1+z^2}$. Aplicando la fórmula de transmutación para calcular el área de un cuarto de círculo se obtiene:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 ydx = \frac{1}{2}([x\sqrt{2x - x^2}]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 zdx).$$

Para calcular $\int_0^1 zdx$, Leibniz recurre a la relación que se visualiza en la gráfica:

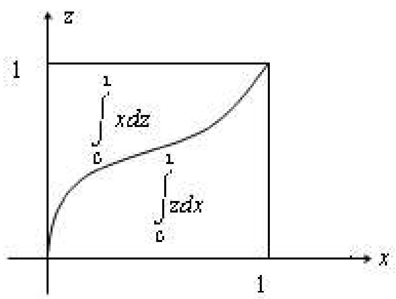


Figura 1.29 – Cálculo de $\int_0^1 zdx$

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 ydx = \left(\frac{1}{2}[x\sqrt{2x - x^2}]_0^1 + \int_0^1 zdx\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(1 - \int_0^1 xdz\right)\right).$$

Sustituyendo *x*:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \int_0^1 \frac{z^2dz}{1+z^2}.$$

Por la expansión de la serie geométrica:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \int_0^1 z^2(1 - z^2 + z^4 - \cdots).$$

Integrando término a término:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 + \cdots\right]_0^1.$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Leibniz parece no haber quedado muy satisfecho con este resultado, pues se necesitarían más de cien mil términos para obtener una mejor aproximación de π que la obtenida por Arquímedes. Sin embargo, su método de "transmutación" lo erige como uno de los creadores del cálculo. Puesto que, en dicho método Leibniz recoge toda la tradición anterior, especialmente el principio de los indivisibles de Cavalieri, y establece, de manera general, la relación inversa entre el problema de trazado de tangentes y el problema del cálculo de cuadraturas.

El otro gran aporte de Leibniz a la constitución de los conceptos de integral y derivada, además de la identificación de su relación inversa, es la incorporación de los símbolos "*d*" y "∫", para representar las operaciones de diferenciación y sumación, respectivamente. Puesto que en matemáticas, se tiene un concepto debidamente formalizado una vez se le asigne un nombre, una definición y un símbolo. Además, se reconoce que históricamente la incorporación de una simbología apropiada permite el descubrimiento de nuevos resultados, los cuales aparecen como consecuencia de la íntima relación entre contenido y forma, tal es el caso de la notación incorporada por Leibniz:

> el cálculo infinitesimal [de Leibniz] es el ejemplo supremo en toda la ciencia y las matemáticas, de un sistema de notación y terminología tan perfectamente acoplado con su sujeto en cuanto que reflejan fielmente las operaciones básicas lógicas y los procesos de aquel sujeto (Edwards, 1982, pág. 232)

El desarrollo conceptual y simbólico del problema de las cuadraturas, por parte de Leibniz, aparece en sus manuscritos del 25 de octubre de 1675. Allí aborda el problema desde varios puntos de vista; usa, por ejemplo, el simbolismo de Cavalieri tratando de obtener de manera analítica, un proceso que le permita obtener cuadraturas en términos generales. Partiendo de la diferencia entre ordenadas sucesivas, utilizando el símbolo "$omn(l)$" para simbolizar las sumas infinitesimales, recalcando que es una operación generadora de dimensiones superiores; así, *omn*. antepuesto a *l* genera un área, antepuesto a

xl genera un sólido, etc. Parece que precisamente estas consideraciones le sugirieron a Leibniz el uso de un solo símbolo $\int$ en lugar de omn, tal como él mismo lo expresa:

> Sería conveniente escribir "$\int$ " en lugar de "omn" de tal manera que $\int l$ represente $omn(l)$, es decir la suma de todas las l. [36]

El signo "$\int$ " proviene de la primera letra de la palabra suma, un poco alargada y en forma de bastardilla. En este mismo manuscrito introduce el símbolo "d" tomado de la primera letra de la palabra "diferenciación", como operación inversa a la "sumación", representada por "$\int$ ". Tal identificación le permite trabajar con dichos signos en términos de operadores:

> Dada l y su relación con *x*, hallar $\int l$. Esto se puede obtener mediante el cálculo inverso, es decir, supongamos que $\int l = ya$, y sea $l\, ya/d$; entonces de la misma manera que $\int$ aumenta las dimensiones, d las disminuirá. Pero la $\int$ representa una suma y *d* una diferencia, y de la *y* dada podemos encontrar siempre y/d, es decir la diferencia de las *y*.[37]

Leibniz introduce en realidad el símbolo "$1/d$" debido a su interpretación dimensional; sin embargo, después se da cuenta que justamente d no representa una división como tal, sino una operación de diferencias, por lo cual escribe "$d(ya)$" en lugar de "ya/d", lo que más tarde utiliza de manera adimensional.

Con respecto a las diferencias entre los trabajos de Newton y Leibniz, relacionadas con el teorema fundamental del cálculo, Gratan-Guiness comenta:

> Otra diferencia entre los dos cálculos es la que se refiere al concepto de *integral* y al papel del *teorema fundamental*. Para Newton el objeto de la integración era el de *hallar la cantidad fluente de una fluxión dada*; así pues, en su versión del cálculo el teorema fundamental era una consecuencia inmediata y trivial de la definición de integral. Leibniz en cambio veía la integración como *suma* y, por lo tanto, para él el teorema fundamental del cálculo no venía implicado por la definición de la integral, sino que era una consecuencia de la relación inversa que hay entre las operaciones de sumar y tomar diferencias. Los Bernoulli, sin embargo reinterpretaron la integral de Leibniz como la inversa de la diferenciación, así que durante todo el siglo XVIII el teorema fundamental del cálculo fue una consecuencia inmediata de la definición de la integración. (Grattan-Guinness, 1980, pág. 124)

Sin embargo, es extraño que Grattan-Guines hable de "definición de integral" en Newton y Leibniz, puesto que en ninguno de sus trabajos encontramos tal definición; es más, no vemos en sus escritos ninguna preocupación por definir los conceptos que utilizan,

---

[36] Citado por (Grattan-Guinness, 1980, pág. 92)
[37] Citado por (Grattan-Guinness, 1980, pág. 93)

excepto cuando lo necesitan para explicar su operatividad o la forma cómo funcionan dentro de los procesos, tal es el caso de las fluentes y fluxiones.

> [...]denominando fluxiones a esas velocidades de movimientos o incrementos, y fluentes a las cantidades generadas, paulatinamente fui a dar, en los años de 1665 y 1666, con el método de fluxiones del que aquí hago uso en la cuadratura de curvas (Newton, 2003, pág. 104)

Newton, buscaba un método para determinar las cantidades matemáticas; y por cantidades matemáticas se refería a las líneas, superficies, sólidos y ángulos. Podríamos decir que el objetivo de Newton era determinar la medida de tales objetos.

Tanto los trabajos de Newton como los de Leibniz, se refieren a procesos o algoritmos para hallar cuadraturas o resolver otro tipo de problemas relacionados con curvas. En sus trabajos es evidente la búsqueda de una herramienta que permita resolver de manera general dichos problemas.

Consideramos que el concepto de integral moderno está íntimamente relacionado con el concepto de función, por lo que en el cálculo infinitesimal aún no podemos ver el concepto de integral. Sin embargo teniendo en cuenta el proceso de generación de los nuevos objetos descrito por (Giusti, 1999), podemos entonces decir que la integral aparece en los trabajos de Newton y Leibniz como solución de problemas. La integral aparece como algo que soluciona un problema, como una herramienta de solución, como una operación de sumación en Leibniz, y como un proceso en Newton, más no como un concepto.

En cuanto al concepto de área, Leibniz no da una definición explícita, pero en todos sus trabajos se adivina la definición operativa a través de la sumación. Hay una total identificación entre el proceso de sumación y el cálculo del área bajo una curva; en todos sus trabajos se evidencia una preocupación por mostrar la correspondencia entre los resultados de su cálculo operativo y los resultados geométricos ya conocidos. Para Newton el área es una cantidad matemática generada por el movimiento de una ordenada, el área de una región es una variable, por tanto se puede hablar de su fluxión y operar con ella tal como se hace con cualquier variable.

Por otra parte, observemos que Newton y Leibniz no sólo trataron con una clase más amplia de curvas, sino que también lograron dar un tratamiento unificado a los problemas que antes habían sido atacados, de forma independiente, mediante diferentes métodos.

Ambos lograron un importante trabajo de generalización y sistematización, obteniendo potentes métodos para solucionar muchos de los problemas planteados por sus antecesores. Sin embargo, sus trabajos fueron fuertemente criticados por falta de rigor. Tanto Newton como Leibniz eran conscientes de los problemas de rigor de sus trabajos e intentaron, darle una fundamentación rigurosa al cálculo. Con respecto a esto Kitcher hace una interesante observación:

> Hemos encontrado una situación en la cual una demanda por el rigor emerge de manera legítima. […] muestra que cierto tipo de razonamiento nos lleva a conclusiones verdaderas, sin embargo cuando intentamos encontrar un argumento riguroso que nos muestre por qué el razonamiento nos lleva a conclusiones verdaderas, fallamos. [...] Newton y Leibniz desarrollaron una técnica para la solución de problemas. La técnica fue racionalmente aceptada por que los resultados que generaba eran bien confirmados, y por que prometía sistematización de los resultados. Pero una demanda de rigor era razonable debido a las dificultades de comprensión del por qué la técnica era exitosa. (Kitcher, 1981, pág. 479)

A pesar del alcance de los resultados de Newton y Leibniz, y que gracias a sus trabajos el cálculo se constituyó en una rama de las matemáticas; sus métodos, además de presentar problemas de rigor, trajeron como consecuencia el distanciamiento del problema geométrico inicial del cálculo de cuadraturas y terminó convirtiéndose en una simple ecuación.

1.6 El nacimiento de la integral

Alrededor de 1700 los Bernoulli introducen el nombre de integral, y la definen como la inversa de la diferencial. Es importante reconocer, tal como lo afirma Recalde,[38] que este es un hecho epistemológicamente significativo, puesto que "con la incorporación de un nombre para designar una operación específica, se está identificando una noción que amerita un tratamiento especial". La integral deja de ser sólo una herramienta para resolver el problema general del cálculo de cuadraturas para convertirse paulatinamente en un nuevo concepto con sus propios problemas y métodos. Sin embargo, esto no es suficiente para alcanzar el estatuto de noción matemática propiamente dicha. Antes de que la integral adquiera dicho estatus, fue necesario el reconocimiento de la noción de función como objeto del análisis matemático.

[38] (Recalde, 2011)

A principios del siglo XVIII el análisis matemático se trabaja como un análisis de ecuaciones, y el problema de la integración consistía en hallar una ecuación que representara la solución de una ecuación diferencial.

El desarrollo de la teoría moderna de la integración ha estado íntimamente ligado a la cuestión de la representación de funciones en series. Euler, en su *Introductio an analysis infinitorum* (1748), define:

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria por esa variable y por números y cantidades constantes.[39]

Las funciones algebraicas corresponden a las representadas por expresiones algebraicas, y las funciones trascendentes estarán determinadas por expresiones trascendentes; además, para Euler "las funciones trascendentes juegan un papel primordial en la integración". Más adelante, a raíz de sus investigaciones relacionadas con el problema de la cuerda vibrante, se ve obligado a cambiar su definición de función. Puesto que las soluciones de las ecuaciones diferenciales que modelaban el movimiento de la cuerda, involucraban funciones arbitrarias; en su *Institutiones calculi differentialis* establece que:

> Función de ciertas cantidades variables es una cantidad variable que depende de las primeras, de manera que siempre que ellas cambien, la función experimenta también un cambio: la función puede ser determinada por una ley cualquiera a partir de las variables. [40]

Las funciones trascendentes son aquellas que admiten un desarrollo en series de potencias. De alguna manera, hay implícito en Euler un convencimiento de que toda función es representable en series de potencias, y que la integración y la representación de una función en series de potencias van ligadas. Para Euler el problema de la integral consiste en hallar una función primitiva de la función que se desea integrar:

> El cálculo integral es el método para hallar, desde una relación dada de los diferenciales, la relación entre estas mismas cantidades; y la operación que permite hacer esto es habitualmente llamada "integración".[41]

A finales del siglo XVIII y comienzos del siglo XIX, los analistas intentaron abolir toda intuición geométrica pero, con los conceptos de continuidad y discontinuidad de funciones, se presentaron nuevos problemas, cuya resolución exigía retornar a lo geométrico.

---

[39] Ver (Recalde, 2010, pág. 5)
[40] Ver (Recalde, 2010, pág. 6)
[41] Citado por (Recalde, 2007, pág. 114)

Desde el siglo XVIII con Euler y durante todo el siglo XIX, el problema de la representación de una función en series, cautivó el interés de los matemáticos más prominentes. A partir de los trabajos de Fourier, se dedicaron grandes esfuerzos a establecer las condiciones que debía cumplir una función para ser representada en series trigonométricas. Simultáneamente, la cuestión sobre la integrabilidad de las funciones discontinuas fue evolucionando al punto que a finales del siglo XIX, fue considerada independientemente como un problema importante del análisis matemático, dando lugar a la Teoría de la Integración.

En sus investigaciones sobre la transmisión del calor en un cuerpo sólido de 1807, Fourier obtiene la siguiente serie trigonométrica como solución a la ecuación diferencial de la difusión:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \text{ con } x \in [0,2\pi]$$

Fourier calcula los coeficientes mediante integración término a término, suponiendo que la integral de una suma infinita es igual a la suma de las integrales sin preocuparse por las condiciones de convergencia, obteniendo las siguientes expresiones:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \;\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

De esta manera, la representación de una función en series de Fourier, depende de la integrabilidad de la función en el intervalo correspondiente. Fourier estaba convencido de que las funciones "arbitrarias" o discontinuas de Euler eran representables en series trigonométricas, pero sus funciones arbitrarias incluían un conjunto más amplio y su definición de función, que presenta en su *Thèorie analytique de la chaleur,* hace más énfasis en la arbitrariedad de las ordenadas en el sentido de que

> No estén sujetas a una ley común a todas ellas; se suceden unas a otras de una manera arbitraria, y cada una de ellas viene dada como si fuera una cantidad aislada. (Fourier, 1822, art 147).

En la época en que aparece la obra de Fourier, al considerar una función se pensaba ante todo en una expresión analítica, y de acuerdo con ello se concebía la integración y la diferenciación al estilo 'algebraico', como operaciones sobre fórmulas. El considerar la integral simplemente como una antiderivada, carecía de sentido para funciones discontinuas.

Al ampliarse el dominio de las funciones, más allá de las continuas, se hizo necesario reconsiderar el concepto de integral, sin embargo el problema de la integración sería tratado durante muchos años como un problema subsidiario del problema central de la representación de una función en series trigonométricas. La integral definida es considerada como una herramienta de solución necesaria, pero inicialmente no es el concepto principal de estudio.

Fourier planteó que para calcular los coeficientes de la serie trigonométrica es suficiente tener un área para la región bajo $\varphi(x)\operatorname{sen} nx$, de esta manera plantea la necesidad de volver a la interpretación geométrica de área e identificar el concepto de integral como un área:

> [...]el área de la curva reducida tomada desde $x = 0$ a $x = \pi$ da el valor exacto de los coeficientes de $\operatorname{sen} x$; y cualquiera que sea la curva dada puede ser la que corresponde a $\varphi(x)$ ya sea que podamos asignarle una ecuación analítica o que no dependa de ninguna ley regular, es evidente que siempre sirva para reducir de cualquier manera la curva trigonométrica, así que el área de la curva reducida tiene, en todos los casos posibles, un valor definido el cual es el valor de los coeficientes de $\operatorname{sen} x$ en el desarrollo de la función. El caso es el mismo con los coeficientes b o $\int \varphi(x)\operatorname{sen} 2x\, dx$ (Fourier, 1822).

El nuevo problema es entonces ¿cómo se puede definir la integral como un área cuando la función es arbitraria? Esta cuestión tiene un significado primordial para el desarrollo de la teoría de la integración puesto que evoca la interpretación de integral como el área bajo la curva. Sin embargo, el movimiento de *aritmetización del análisis* del siglo XIX, impone el abandono de la intuición geométrica que había predominado en el cálculo del siglo XVIII, se lleva a cabo una separación de las nociones de la geometría intuitiva ligadas al movimiento físico, y se hace énfasis en los conceptos de función, variable, límite, con un carácter esencialmente aritmético y lógico. Se trata de "desgeometrizar" el cálculo a partir de un corpus teórico con una dialéctica propia. Esto se da a partir de los trabajos de Cauchy, en los cuales se va delineando el *análisis matemático* como rama de las matemáticas. En este escenario, el problema de la integral definida se transforma en un problema del análisis.

1.7 La definición analítica de la integral de Cauchy

Cauchy (1789-1857) emprende el proceso de rigorización del análisis, fijando como base los conceptos de límite, función y convergencia. A través de estos conceptos logra proporcionar una definición analítica de la integral definida, dando respuesta al cuestionamiento de Fourier.

Lebesgue afirma que Cauchy, de manera accidental, fue el primero en dar una definición lógica de las nociones de longitud, área y volumen. Para poder obtener una definición lógica, estas nociones se deben tratar como números:

> [...]se pueden dilucidar las nociones de área de un dominio plano y de volumen de un cuerpo, despojándolas de su sentido metafísico, al considerarlas como números y construyendo estos números por la repetición indefinida de las operaciones mismas, consideradas antes como proveedoras aproximadamente de las medidas de áreas y volúmenes, a causa de axiomas y postulados no enunciados explícitamente y cuya enunciación explícita, o la demostración, proporciona la definición lógica buscada. Se sabe que Cauchy construyó, mediante un procedimiento análogo, la integral definida de las funciones continuas y demostró, así, la existencia de las funciones primitivas (Lebesgue, 1936, pág. 68).

Cauchy fue el primero en introducir una designación aritmética y funcional de los conceptos de longitud, área y volumen a través de una definición analítica de la integral definida.

Cauchy era consciente de la necesidad de demostrar la existencia de las integrales o funciones primitivas antes de discutir sus propiedades, así lo expresa en el prólogo de su *Résumé*:

> En el cálculo integral me ha parecido necesario demostrar en general la existencia de las integrales o funciones primitivas antes de dar a conocer sus diversas propiedades. Para lograr esto, fue necesario establecer por principio la noción de “integrales tomadas entre límites dados” o integrales definidas.[42]

Por lo que es indispensable una definición general de integral; y para ello es necesario conceptualizar las nociones de cantidad, función, límite, continuidad y convergencia de series, entre otros.

Con respecto a las cantidades y al límite, Cauchy escribe:

> Vamos a indicar primero qué idea nos parece adecuada atribuir a estas dos palabras: número y cantidad.
> Tomaremos siempre la denominación de *número*, en el sentido empleado en aritmética, al hacer nacer los números de la medida absoluta de las magnitudes, y aplicaremos la denominación de *cantidad* a las cantidades *reales positivas* o *negativas*; es decir, a los números precedidos de los signos + ó -[...] Al partir de esos principios, es fácil dar cuenta de las diversas operaciones que podemos efectuar sobre las cantidades.
> Se llama cantidad *variable* a aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes los unos de los otros [...] se llama cantidad *constante* a toda cantidad que recibe un valor fijo determinado. Cuando los

[42] Citado por (Waldegg, 1982, pág. 127)

> valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabará por diferir de éste tan poco como se quiera, este último se llamará el *límite* de todos los demás. Así por ejemplo un número irracional es el límite de diversas fracciones que dan valores cada vez más próximos de él. En geometría, la superficie del círculo es el límite hacia el cual convergen las superficies de los polígonos inscritos, mientras que el número de sus lados crece cada vez más (Cauchy, 1994, pág. 76).

Antes de Cauchy, el límite siempre estuvo vinculado al cálculo en procesos de aproximación, tal como lo muestra en los ejemplos citados. A partir de Cauchy, al constituirse en la base de su teoría, se contará con una definición precisa y sus correspondientes propiedades. El concepto de límite le permitirá a Cauchy definir las cantidades infinitamente pequeñas como aquellas que tienen límite cero y las cantidades infinitas como aquellas que ascienden por encima de cualquier número dado:

> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera que descienden por debajo de cualquier número dado, esta variable deviene lo que suele llamarse un *infinitamente pequeño* o una cantidad *infinitamente pequeña*.
> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable crecen más y más, de manera que ascienden por encima de cualquier número dado, se dice que esta variable tiene por límite al *infinito positivo* [...] los infinitos positivos y negativos son designados conjuntamente bajo el nombre de *cantidades infinitas* (Cauchy, 1994, pág. 76)

En la primera parte de su *Análisis Algebraico*, presenta la siguiente definición de función:

> Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable (Cauchy, 1994, pág. 78).

Cauchy amplía el universo funcional de Euler; y aunque establece una clasificación similar a la de Euler, entiende que las funciones especificadas pertenecen a un tipo especial, el de las funciones continuas. En este sentido, Recalde[43] observa que Cauchy incorpora de manera implícita la primera gran clasificación fundamental: funciones continuas y funciones discontinuas[44]. El análisis de Cauchy corresponde a las funciones continuas, y es a él a quien debemos la primera definición formal de una función continua en un intervalo:

> La función $f(x)$ permanecerá continua respecto de x entre los límites dados si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función (Cauchy, 1994, pág. 90)

---

[43] Ver (Recalde, 2010)

[44] También Bolzano había establecido esta clasificación en 1816.

Cauchy define el concepto de integral definida para funciones continuas, volviendo a la concepción geométrica (intuitiva) de área, pero reinterpretándola en términos de los nuevos conceptos del análisis matemático y sin consideraciones geométricas. Pero antes de definir la integral, respetando el rigor que él mismo le ha impuesto a su análisis, Cauchy debe demostrar la existencia del límite de las sumas que la determinan:

> Supongamos que la función $y = f(x)$es continua respecto a la variable x entre dos límites finitos $x = x_o, x = X$. Supongamos también que se designa por $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ a nuevos valores de x interpuestos entre estos límites y que vayan creciendo o decreciendo desde el primer límite hasta el segundo. Será posible servirse de esos valores para dividir a la diferencia $X - x_o$ en elementos
> $$x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \cdots, X - x_{n-1}$$
> Que serán todos del mismo signo. Consideremos ahora que cada elemento se multiplica por el valor $f(x)$ que corresponde al *origen* de ese mismo elemento; a saber, el elemento $x_1 - x_0$ por $f(x_0)$, el elemento $x_2 - x_1$ por $f(x_1) \cdots$, en fin, el elemento $X - x_{n-1}$ por $f(x_{n-1})$; y sea
> $S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$. (Cauchy, 1994, pág. 287)

Cauchy aclara que *S* depende tanto del número *n* de elementos de la partición como de su tamaño, pero "si los valores numéricos de los elementos devienen muy pequeños y el número *n* muy grande, el modo de división sólo tendrá una influencia insensible sobre el valor de *S"*. Demuestra entonces, suponiendo la continuidad de *f*,[45] que si *S* es independiente de la partición y que a medida que se refina la partición *S* tiende a un valor numérico constante y concluye:

> Cuando los elementos de la diferencia $X - x_0$ devienen infinitamente pequeños, el modo de división tiene sobre el valor de *S* tan sólo una influencia sensible; y, si se hacen decrecer indefinidamente los valores numéricos de esos elementos, al aumentar su número, el valor de *S* terminará por ser sensiblemente constante o, en otras palabras, terminará por alcanzar un cierto límite que dependerá únicamente de la forma de la función $f(x)$ y de los valores extremos x_0 y *X* de la variable *x*. Este límite es lo que llamamos una *integral definida* (Cauchy, 1994, pág. 291).

A medida que se refina la partición las sumas asociadas van formando una sucesión de Cauchy que converge al valor de la integral definida. De esta manera aproxima el área bajo una curva $f(x)$, en un intervalo $[x_0, X]$, por medio de sumas de una cantidad finita de áreas rectangulares $(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1})$. Cauchy agrega que:

> Si se designa por $\Delta x = h = dx$ a un incremento finito atribuido a la variable *x*, los diferentes términos de los que se compone el valor de *S*, [...] estarán todos comprendidos en la fórmula general $hf(x) = f(x)dx$ [...] Se puede decir entonces que la cantidad *S* es una suma de productos... $\sum hf(x) = \sum f(x)\Delta x$. En cuanto a la integral definida hacia la cual converge *S*, al devenir los elementos de la

[45] La continuidad en realidad debe ser uniforme en el intervalo $[x_0, X]$ pero Cauchy aún no establece tal diferencia. Al respecto Álvarez anota que Heine es quien introduce explícitamente la diferencia entre continuidad y continuidad uniforme, en 1872. (Cauchy, 1994, pág. 291).

> diferencia $X - x_0$ infinitamente pequeños, convenimos en representarla por la notación $\int hf(x)$ o $\int f(x)\,dx$, en la cual la letra $\int$, que sustituye la letra $\sum$, no indica a una suma[...], sino al límite de una suma de esta especie (Cauchy, 1994, pág. 293).

Además como el valor de la integral definida considerada depende de los valores extremos x_0 y X, Cauchy conviene usar alguna de las notaciones:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx, \quad \int f(x)dx \binom{x_0}{X}, \quad \int f(x)dx \binom{x=x_0}{x=X}.$$

Aclarando que la primera, que fue incorporada por Fourier, es la más simple. Para el caso de las funciones constantes $f(x) = a$, puesto que independiente de la partición $S = a$, Cauchy concluye que $\int_{x_0}^{X} adx = a(X - x_0)$, y si $a = 1$ se obtiene $\int_{x_0}^{X} dx = (X - x_0)$.

Observemos que Cauchy separa la integral del cálculo diferencial, no la define como la operación inversa de la derivada sino como un límite de sumas. Una de las principales ventajas de su método, según el punto de vista de Cauchy, es que él puede "demostrar en forma general la existencia de integrales o funciones primitivas"[46], de las cuales varias propiedades, pueden ser estudiadas solamente después de una prueba de existencia.[47]

A pesar de que Cauchy enuncia la definición de la integral independizándola de todo referente geométrico, no desconoce su interpretación geométrica como el área bajo la curva. Cauchy es consciente de que el concepto de integral es un concepto analítico y no geométrico, pero no desconoce las aplicaciones que dicho concepto tiene en la geometría:

> Vamos a suponer que el límite X es mayor que x_0 y que la función $f(x)$ es positiva desde $x = x_0$ hasta $x = X$; x, y designan las coordenadas rectangulares y A designa la superficie comprendida entre el eje de las x y la curva $y = f(x)$ y entre las ordenadas $f(x_o), f(X)$. Esta superficie, cuya base es la longitud $X - x_0$ medida sobre el eje de las x, será una media entre las áreas de los dos rectángulos construidos sobre la base $X - x_0$ y cuyas alturas respectivas son iguales a la menor y a la mayor de las ordenadas levantadas de entre los diferentes puntos de esta base. Ella será pues equivalente a un rectángulo construido sobre una ordenada media representada por una expresión de la forma $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$, de modo tal que se tendrá

[46] Citado por (Hawkins, 1979, pág. 10)

[47] En este sentido resulta interesante el comentario de (Kleiner, 1991, pág. 307) con respecto a las pruebas de existencia; "Una característica prominente de la matemática del siglo XIX es la existencia de resultados no constructivos". Menciona varios ejemplos de esta nueva tendencia: Gauss con el teorema fundamental del álgebra prueba la existencia de las raíces de ecuaciones polinomiales pero no muestra cómo hallarlas, Cauchy y otros prueban la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales sin dar una solución explícita, Cauchy probó la existencia de la integral de una función arbitraria pero frecuentemente no fue capaz de evaluar la integral de una función específica, también presenta los test de convergencia de series sin indicar a donde convergen. A finales del siglo, Hilbert prueba la existencia de bases finitas para anillos de polinomios, pero no las construye explícitamente. Agrega Kleiener que esta tendencia aparece por primera vez en el siglo XIX y, a pesar de que estos ejemplos abundan, todas estas pruebas fueron rechazadas por los intuicionistas.

$$A = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)], \quad (8)$$

En donde θ designa un número menor a la unidad. Si se divide la base $X - x_o$ en elementos $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \cdots, X - x_{n-1}$, la superficie A se encontrará dividida en elementos correspondientes cuyos valores estarán dados por ecuaciones semejantes a la fórmula (8). Se tendrá también

$$A = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \cdots + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} +$$
$$\theta n-1X-xn-1, \qquad (9)$$

En donde $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1}$ designan a números menores que la unidad. Si en ésta última ecuación se hacen decrecer indefinidamente los valores numéricos de los elementos de $X - x_o$, se obtendrá al pasar al límite

$$A = \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx. \text{ (Cauchy, 1994, pág. 307)}$$

Aunque Cauchy no se preocupa por obtener una definición de área, al signarle un número a la superficie bajo la curva está dando un primer paso hacia la definición de área; tal como lo afirma Lebesgue, esta noción hay que tratarla como número para poder obtener una definición lógica. De forma similar, el área de una superficie curva es considerada por Cauchy como la solución de una ecuación diferencial parcial.

Después de definir la integral, se muestra la relación entre la integral y la derivada, mediante el Teorema del Valor Medio para el cálculo integral que es demostrado por Cauchy, y sintetizado en la siguiente fórmula:[48]

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (X - x_0)\, f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

Si en la integral definida $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$ se hace variar uno de los dos límites; por ejemplo la cantidad *X*, la integral variará junto con esa cantidad. Si se sustituye el límite de la variable *X* por *x*, se obtendrá como resultado una nueva función de *x* que será llamada una integral tomada a partir del *origen* $x = x_0$. Sea

$$\mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx. \qquad (1)$$

Esta nueva función. Se obtendrá de la fórmula (19) (lección 22)[49]

$$\mathcal{F}(x) = (x - x_0)f[x_0 + \theta(x - x_0)], \mathcal{F}(x_0) = 0, \qquad (2)$$

Donde θ es un número menor que la unidad, y de la fórmula (7) (lección 23)[50]

---

[48] Ver lección 22 del Curso de análisis (Cauchy, 1994, págs. 295-299)

[49] La fórmula a la que se refiera Cauchy es la del teorema del valor medio, que enunciamos antes.

[50] $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx.$

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x + \theta x)$$

O bien

$$\mathcal{F}(x+\alpha) - \mathcal{F}(x) = \alpha f(x+\theta\alpha). \qquad (3)$$

Se sigue de las ecuaciones (2) y (3) que si la función $f(x)$ es finita y continua en la vecindad de un valor particular atribuido a la variable *x*, la nueva función $\mathcal{F}(x)$ será finita y además continua en la vecindad de este valor, ya que a un incremento infinitamente pequeño de *x* corresponderá un incremento infinitamente pequeño de $\mathcal{F}(x)$. Así, si la función $f(x)$ es finita y continua desde $x = x_0$ hasta $x = X$, lo mismo será válido para la función $\mathcal{F}(x)$. Podemos añadir que si se dividen entre α los dos miembros de la fórmula (3) se concluirá, al pasar al límite,

$$\mathcal{F}^{'(x)} = f(x). \qquad (4)$$

Así la integral (1), considerada como función de *x*, tiene como derivada la función $f(x)$ que se encuentra bajo el signo $\int$. Se probará de igual manera que la integral

$$\int_x^X f(x)dx = -\int_X^x f(x)\,dx,$$

Considerada como función de *x* tiene como derivada a $-f(x)$. Se tendrá entonces

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = f(x) \text{ y } \frac{d}{dx}\int_{x}^{X} f(x)\,dx = -f(x).$$ (Cauchy, 1994, págs. 311-312)

Así demuestra Cauchy el primer teorema fundamental del cálculo. Más adelante se plantea el problema de encontrar la solución general de la ecuación $dy = f(x)dx$, la cual es $y = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \varpi(x)$, donde $\varpi(x)$ es tal que $\varpi'(x) = 0$, es decir $\varpi(x)$ es constante. A partir de aquí define la integral indefinida: "cualquiera que sea el origen x_0 de esta integral, se representa en el cálculo por medio de la simple notación $\int f(x)dx$, y recibe el nombre de *integral indefinida*". Además demuestra que $\int f(x)\,dx = F(x) + \varpi(x)$, donde $F(x)$es tal que $F'(x) = f(x)$, y finalmente demuestra el segundo teorema fundamental del cálculo:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(x) - F(x_0).$$

Respecto a estos resultados de Cauchy, Álvarez [51] resalta la diferencia entre la forma como aparece esta relación inversa entre integrabilidad y diferenciación, en el cálculo de Newton y Leibniz y el análisis de Cauchy. Mientras que en el cálculo dicha relación inversa aparece como la base del mismo; en el análisis aparece posteriormente, una vez se han

[51] Ver (Cauchy, 1994, págs. 312-315)

definido de manera independiente la integral y la derivada, unificando estas dos vertientes. Tal como el mismo Cauchy lo reconoce:

> A través de la teoría de las cuadraturas podemos considerar a cada integral definida, tomada entre dos límites reales, simplemente como la suma de los valores infinitamente pequeños de la expresión diferencial bajo el signo $\int$ que corresponde a los distintos valores reales de la variable entre dichos limites. Me parece que este modo de concebir a una integral definida debe prevalecer porque se adapta a todos los caso, aún para aquellos en los que no es posible pasar fácilmente de la función que aparece bajo el signo $\int$ a la función primitiva. Tiene además la ventaja de dar valores reales para las integrales que corresponden a funciones reales. No sería posible obtener todo esto si se considera a una integral definida, tomada entre dos límites, como equivalente necesariamente a la diferencia de los valores de una función primitiva discontinua.[52]

La definición de integral definida introducida por Cauchy permite ver que la existencia de la integral no depende de la existencia de una ecuación que defina la función a integrar. Así Cauchy resuelve el problema de rigor que había quedado inconcluso en Newton y Leibniz, pero no resuelve completamente el problema general de la integral de las funciones arbitrarias (discontinuas) planteado por Fourier, el cual, geométricamente, plantea el dilema de la existencia de una medida para figuras geométricas de contorno no continuo.

Posteriormente en su *Memoire sur les fonctions discontinues* de 1849, Cauchy muestra que su integral existe para funciones acotadas con un número finito de discontinuidades en el intervalo $[a,b]$; él afirma que si f es acotada en $[a,b]$ y discontinua en un punto c de (a,b) entonces $\lim_{\tau\to 0^+}\int_a^{c-\tau} f$ y $\lim_{\tau\to 0^+}\int_{c+\tau}^{b} f$ existen y la integral puede ser definida como $\int_a^b f = \lim_{\tau\to 0^+}\int_a^{c-\tau} f + \lim_{\tau\to 0^+}\int_{c+\tau}^{b} f$.[53]

1.8 La integración de funciones discontinuas y la condición de Dirichlet

Lejeune Dirichlet (1805-1859) en su memoria de 1829 *Sur la convergence des séries trigonomètriques qui servent a représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, presenta la primera demostración formal de la convergencia de las series de Fourier para funciones acotadas, continuas y monótonas a trozos.

[52] Citado por Álvarez en (Cauchy, 1994, págs. 312-313)
[53] Citado por (Hawkins, 1979, pág. 12)

> Si la función $\varphi(x)$, cuyos valores se suponen finitos y determinados, no presentan más que un número finito de soluciones de continuidad[54] entre los límites $-\pi$ y π, y si además no tiene mas que un número determinado de máximos y mínimos entre esos mismos límites, la serie [de Fourier] cuyos coeficientes son integrales definidas dependientes de la función $\varphi(x)$ es convergente a un valor expresado generalmente por $\frac{1}{2}[\varphi(x+\varepsilon)+\varphi(x-\varepsilon)]$, donde ε designa un número infinitamente pequeño (Dirichlet, 1829, págs. 168-169).

Es decir, si una función acotada es continua a trozos y monótona a trozos, su serie de Fourier converge en cada punto a la semisuma de los límites laterales de la función.

Dirichlet comenta que el único trabajo conocido sobre la convergencia de las series de Fourier es el presentado por Cauchy en 1823, pero que su demostración no es válida:

> El autor [Cauchy] de este trabajo reconoce que en su demostración se encuentra un defecto en relación con ciertas funciones para las cuales la convergencia es sin embargo indiscutible Un examen atento del Informe citado me llevó á creer que la demostración que es expuesta no es suficiente ni para los casos en los cuales el autor lo considera aplicable (Dirichlet, 1829, pág. 157).

Usando los presupuestos teóricos establecidos por Cauchy en su análisis, Dirichlet estudia las integrales, hoy llamadas de Dirichlet

$$\int_0^h \frac{\sin n\beta}{\sin \beta} f(\beta)\partial\beta,$$ [55]

Donde $0 < h \leq \frac{\pi}{2}$ y f es una función monótona y continua en el intervalo $[0, h]$

Dedica gran parte de su memoria a demostrar con todo detalle que:

> Cualquiera que sea la función $f(\beta)$, con tal que permanezca continua entre los límites 0 y h (siendo h positivo y a lo más igual a $\frac{\pi}{2}$) y tal que crezca o decrezca desde el primero de estos límites hasta el segundo, la integral íntegra $\int_0^h \frac{\sin n\beta}{\sin \beta} f(\beta)\partial\beta$ acabará por diferir constantemente de $\frac{\pi}{2} f(0)$ en una cantidad menor que todo número asignable, cuando *i* crece más allá de todo límite positivo (Dirichlet, 1829, pág. 164)

Para demostrar dicho resultado, divide la integral dada en integrales equivalente a las integrales de la forma

$$K_v = \varrho_v \int_{(v-1)\frac{\pi}{n}}^{\frac{v\pi}{n}} \left(\frac{\sin n\beta}{\sin \beta}\right) \partial\beta$$

[54] Dirichlet utiliza la expresión "soluciones de continuidad" para referirse a los puntos de discontinuidad de la función.
[55] Esta notación, utilizada por Dirichlet, no se refiere a una derivada parcial.

Donde ϱ_v es una valor entre $f\left(\frac{(v-1)\pi}{n}\right)$ y $f\left(\frac{v\pi}{n}\right)$, dichas integrales son positivas o negativas según $v-1$ es par o impar. Luego analiza la convergencia de las sumas de estas integrales cuando i tiende a infinito y así obtiene el límite hacia el cual converge la integral inicial. Más adelante generaliza este resultado:

> La letra h designa una cantidad positiva a lo más iguala a $\frac{\pi}{2}$, y g una cantidad también positiva y además inferior a h, la integral
> $$\int_g^h \frac{\sin n\beta}{\sin\beta} f(\beta)\partial\beta$$
> En la cual la función $f(\beta)$es continua entre los límites de integración y es siempre creciente o decreciente desde $\beta = g$ hasta $\beta = h$, convergerá a un cierto límite, cuando el número i se hace más y más grande. Este límite es igual a cero, excepto en el caso en que g tiene un valor nulo, en tal caso [la integral] tiene un valor de $\frac{\pi}{2}f(0)$ (Dirichlet, 1829, pág. 165).

Al final de su memoria sobre la convergencia de las series de Fourier, una vez ha enunciado las condiciones suficientes para que la función $\varphi(x)$ sea representable en series de Fourier, aclara que faltaría por considerar los casos donde las condiciones sobre el número de las "soluciones de continuidad"[56] y sobre los valores de máximos y mínimos dejan de cumplirse: "estos casos singulares pueden ser reducidos a los que acabamos de considerar. Hace falta solamente que la serie tenga sentido cuando las soluciones de continuidad están en número infinito", y la serie tiene sentido para estas funciones con infinitos puntos de discontinuidad siempre que:

> Si a y b representan dos cantidades arbitrarias incluidas entre $-\pi$ y π, sea posible siempre encontrar otras cantidades r y s entre a y b, lo suficientemente próximas para que la función permanezca continua en el intervalo de r a s (Dirichlet, 1829, pág. 169)

A lo cual agrega:

> Sentiremos fácilmente la necesidad de esta restricción considerando que los diferentes términos de la serie son integrales definidas y nos remontan a la noción fundamental de las integrales. Veremos que la integral de una función significa algo sólo cuando la función satisfaga la condición anteriormente enunciada (Dirichlet, 1829)

Dirichlet subraya de esta manera la estrecha relación entre la representación en series de Fourier y la integrabilidad.

Para que la función sea integrable no es necesario que sea continua, ni que el conjunto de puntos de discontinuidad sobre el intervalo de integración sea finito. Según Dirichlet,

[56] Es curioso que Dirichlet utiliza esta expresión para referirse a los puntos de discontinuidad de la función.

una función con un número infinito de puntos de discontinuidad es integrable si el conjunto de los puntos de discontinuidad es un conjunto diseminado [57] (denso en ninguna parte). Este concepto de conjunto diseminado será introducido posteriormente por Hankel: "un conjunto es diseminado, si entre dos puntos cualesquiera del conjunto existe un intervalo que no contiene puntos del conjunto".

Durante un largo período de tiempo, varios matemáticos, entre ellos Lipschitz y Hankel, seguirán convencidos de que la integrabilidad de las funciones discontinuas depende de la distribución de los puntos de discontinuidad sobre el intervalo de integración. Además pensaban que al estar los puntos de discontinuidad diseminados sobre el intervalo de integración, esto puntos se podían "aislar" fácilmente. Actualmente se sabe que este tipo de conjuntos son difíciles de tratar.

A partir de estos resultados de Dirichlet, las cuestiones sobre representación de funciones en series de Fourier y la integración de funciones discontinuas evolucionarán paralelamente; y los trabajos relativos a la integrabilidad de funciones discontinuas se concentrarán en el análisis sobre la distribución de los puntos de discontinuidad, lo que llevarán a matemáticos como Hankel y Cantor a comenzar un estudio detallado de los conjuntos de puntos, dando lugar a los desarrollos sobre la teoría de conjuntos de puntos lineales. Es así como la cuestión de la representación de funciones discontinuas mediante series de Fourier se convertirá en un elemento movilizador del desarrollo de la teoría de integración y la teoría de conjuntos.

Otro aporte importante de Dirichlet a la teoría de integración, es que da respuesta al interrogante planteado por Fourier respecto a la integrabilidad de funciones arbitrarias, exhibiendo una función arbitraria con infinitos puntos de discontinuidad que no cumple su condición: Sea

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x \text{ es racional} \\ d & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

> La función así definida tiene valores finitos y determinados para todo valor de x, y sin embargo no es posible sustituirla en la serie, en vista de que las diferentes integrales que aparecen en dicha serie pierden todo su significado en este caso (Dirichlet, 1829, pág. 169).

[57] Modernamente se dice que un conjunto es diseminado o denso en ninguna parte si el interior de su cerradura es vacío, es decir su cerradura no contiene ningún intervalo abierto.

Podemos interpretar esta pérdida de significado de las integrales desde dos aspectos, uno relacionado con el hecho de que el concepto de integral definida de Cauchy no contempla este tipo de funciones, por lo cual se carece de una definición que permita calcular la integral definida; el otro tiene que ver con la afirmación de Fourier de que los coeficientes son áreas “el área de la curva reducida tomada desde $x = 0$ a $x = \pi$ da el valor exacto de los coeficientes de $\operatorname{sen} x$”, por lo que para tal función no sería posible calcular sus coeficientes, al no determinar un área.

Al respecto Duoandikoetxea [58] observa que el trabajo de Dirichlet clarifica los términos en que se planteaba el problema sobre la representación en series de Fourier. Por una parte, no podemos hablar de coeficientes de Fourier más que para las funciones para las cuales las integrales que aparecen en las fórmulas tienen sentido. Por otra, Dirichlet comprendió que no había que buscar un resultado tan general como Fourier sugería, sino condiciones suficientes que asegurasen la convergencia de la serie. Inaugurando así los criterios de convergencia. En un trabajo posterior amplió su resultado al caso de funciones no acotadas, con la condición de que sean absolutamente integrables.

A partir de Dirichlet queda abierta la pregunta en relación con la exigencia que debería cumplir una función arbitraria para que ella fuese integrable ¿Qué tan discontinua puede ser la función para que sea integrable? ¿Qué restricciones deben cumplir los infinitos puntos de discontinuidad para que la función sea integrable?

A fines de los años 1840 Dirichlet enseñaba en Universidad de Berlín, donde, siguiendo las nuevas tendencias de la Universidad reformada, no enseñaba temas elementales, sino que en sus clases se trataban asuntos relacionados con investigaciones en curso y ofrecían seminarios de investigación para estudiantes avanzados. Así sus trabajos sobre representación en series de Fourier e integración encontrarán continuidad en las investigaciones de sus alumnos Bernhard Riemann (1826-1866) y Rudolph Lipschitz (1832-1903).

---

[58] Ver (Duoandikoetxea, 2007)

1.9 Las condiciones de integrabilidad de Riemman

Riemann escribe en 1854 su memoria *Uber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* en la que se encuentra la tesis que presentó para su habilitación como profesor en Gotinga, la cual fue publicada por Dedekind en 1868. Al inicio de dicha memoria Riemann muestra que el concepto de integral definida aparece como herramienta en el intento de resolver el problema planteado por Fourier sobre la representación de funciones en series trigonométricas:

> El siguiente tratado sobre las series trigonométricas consta de dos partes esencialmente distintas. La primera parte contiene una historia de las investigaciones y concepciones de las funciones arbitrarias (dadas gráficamente) y su representación por medio de series trigonométricas. En su composición me fue dado emplear algunas indicaciones del conocido matemático a quien se debe el primer trabajo riguroso sobre este tema. En la segunda parte ofrezco una investigación sobre la representación de una función mediante una serie trigonométrica, que incluye los casos no resueltos hasta el momento. Ha sido necesario anteponerle un breve tratado sobre el concepto de integral definida y el ámbito de su validez (Riemann, 2000, pág. 41).

Cuando Riemann habla del matemático "a quien se debe el primer trabajo riguroso sobre este tema", se refiere a Dirichlet. En esta primera parte de su memoria, Riemann describe la evolución histórica del problema de la representación de funciones en series trigonométricas desde d'Alembert hasta Dirichlet. Una vez ha descrito el trabajo de Dirichlet, resume su resultado de la siguiente manera:

> De aquí se deduce que mediante una serie trigonométrica es representable toda función que se repite periódicamente según el intervalo 2π, y que admite integración en todo su recorrido, no tiene infinitos máximos y mínimos, y toma, donde su valor cambia por saltos, el valor medio entre los límites por ambos lados. (Riemann, 2000, pág. 51).

Agregando que la última condición es necesaria, pero que la investigación de Dirichlet no dice nada acerca de las funciones que no cumplen las dos primeras condiciones. Sin embargo, para el caso de todas las funciones que se dan en la Naturaleza el problema queda totalmente resuelto por Dirichlet. De acuerdo con Riemann el estudio de los casos de aquellas funciones que no son resueltos por Dirichlet, que no se dan en la naturaleza, merecen ser estudiados por dos razones: la primera, tal como lo reconoce Dirichlet, este asunto está en estrecha relación con los principios del cálculo infinitesimal y puede proporcionar una mayor claridad en dichos principios, tal es el caso de la integrabilidad; la segunda razón es que las series de Fourier se aplican también, además de las investigaciones físicas, a un campo de la matemática pura, la teoría de números, y allí aparecen funciones cuya representación en series no es contemplada por Dirichlet.

Riemann incorporó una definición de integral que acogía funciones arbitrarias, altamente discontinuas, basándose en las concepciones de Cauchy y Dirichlet. La definición de la integral de Riemann incluye funciones que tengan en un intervalo finito un conjunto denso de discontinuidades. En su memoria, Riemann dedica una apartado al concepto de integral definida, argumentando que la indeterminación que reina en algunos puntos fundamentales de la teoría de las integrales definidas lo fuerza a plantearse dos interrogantes con respecto a la definición y a las condiciones de posibilidad de la integral definida, respectivamente:

> ¿Qué hay que entender por $\int_a^b f(x)\,dx$?
>
> Para determinarlo, tomemos entre a y b una serie de valores $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ que se suceden de acuerdo con su magnitud, y para abreviar designemos $x_1 - a$ por δ_1, $x_1 - x_2$ por $\delta_2 \cdots, b - x_{n-1} \ldots$, por δ_n y con ε una fracción positiva. Entonces, el valor de la suma
> $$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$
> dependerá de la elección de los intervalos δ y de la magnitud ε. Si ahora tiene la propiedad de que, comoquiera que se hayan elegido δ y ε, se aproxima a un límite fijo *A* infinitamente, tan pronto como los δ se hagan infinitamente pequeños, entonces este valor se llama $\int_a^b f(x)dx$.
>
> Si no tiene esa propiedad, entonces $\int_a^b f(x)dx$ no tiene ningún significado (Riemann, 2000, pág. 53).

Riemann observa que existen varias extensiones de este concepto de integral definida, hay una en particular que ha sido adoptada por todos los matemáticos, que es la de Cauchy:

> Si la función $f(x)$ se hace infinitamente grande al aproximarse a un único valor *c* en el intervalo (a, b), obviamente la suma *S* puede tomar cualquier valor arbitrario, sea cual sea el grado de pequeñez que se quiera prescribir a los *δ*. De modo que no tiene un valor límite, y $\int_a^b f(x)dx$ carecería de significado de acuerdo con lo anterior.
> Más si entonces $\int_a^{c-\alpha_1} f(x)dx + \int_{c+\alpha_2}^b f(x)dx$, cuando α_1 y α_2 se hacen infinitamente pequeños, se aproxima a un límite fijo, se entiende por $\int_a^b f(x)dx$ este valor límite (Riemann, 2000, pág. 54)

Aclara que otras consideraciones de Cauchy, para el caso en que no se aplica el concepto básico, pueden ser convenientes para casos particulares pero que no han sido introducidas en forma general y son tratados de manera arbitraria, por lo cual "resultan escasamente apropiadas"

En relación a lo que Riemann llama "la validez del concepto" se plantea el interrogante ¿En qué casos admite una función integración, y en cuáles no? Para lo cual presenta dos condiciones equivalentes, en términos de la oscilación de la función, que permite determinar si una función dada es integrable o no sobre un determinado intervalo. La importancia de estos criterios radica en el hecho de que su estudio llevó a caracterizar la integrabilidad de una función en términos del tamaño del conjunto de sus discontinuidades:

> Consideramos primero el concepto de integral en sentido estricto, es decir, suponemos que la suma S converge cuando todos los δ se hacen infinitamente pequeños. Designemos pues la oscilación máxima de la función entre a y x_1, esto es, la diferencia entre su mayor y su menor valor en este intervalo, mediante D_1, entre x_1 y x_2 mediante $D_2 \cdots$, entre x_{n-1} y b mediante D_n; en ese caso, $\delta_1 D_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n D_n$ debe hacerse infinitamente pequeño con las magnitudes δ. Supongamos, además [59], que, en tanto los δ sean todos menores que d, el mayor valor que puede tomar esa suma sea Δ; Δ será entonces una función de d, que disminuye siempre con d y se hace infinitamente pequeña con esa magnitud. Si ahora la magnitud total de los intervalos en los que las oscilaciones son mayores que σ es = s, la contribución de estos intervalos a la suma $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ será obviamente ≥ σs. Así pues se tiene
> $\sigma s \leq \delta_1 D_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n D_n \leq \Delta$, por consiguiente $s \leq \frac{\Delta}{\sigma}$.
> Ahora, dado σ, $\frac{\Delta}{\sigma}$ puede siempre hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo d adecuadamente; lo mismo vale pues para s, con lo que se obtiene:
> Para que la suma S converja, cuando todos los δ se hacen infinitamente pequeños, se requiere, además de la finitud de la función $f(x)$, que la longitud total de los intervalos en los que las oscilaciones son $> \sigma$, sea cual sea σ, pueda hacerse tan pequeña como se quiera eligiendo d adecuadamente.
> Esta proposición puede ser invertida:
> Si la función $f(x)$ es siempre finita, y, al disminuir infinitamente todas las magnitudes δ, la magnitud total s de los intervalos en los que las oscilaciones de la función $f(x)$ son mayores que una cantidad dada σ, acaba siempre haciéndose infinitamente pequeña, entonces la suma S converge al hacerse infinitamente pequeños todos los δ.
> Pues aquellos intervalos en los que las oscilaciones son > σ contribuyen a la suma en una cantidad menor que s multiplicada por la máxima oscilación de la función entre a y b, la cual (por hipótesis) es finita; los restantes intervalos contribuyen $< \sigma(b - a)$. Obviamente podemos ahora, primero, tomar σ tan pequeño como queramos y, luego, determinar la magnitud de los intervalos (por hipótesis) de tal modo que también s se hará tan pequeño como queramos, con lo que la suma puede hacerse pequeña a voluntad, y por tanto el valor de la suma S puede ser encerrado entre límites tan próximos como se quiera.
> Hemos encontrado pues condiciones que son necesarias y suficientes para que la suma S converja con la disminución infinita de las magnitudes δ, de modo que se pueda hablar en sentido estricto de una integral de la función $f(x)$ entre a y b.
> Si ahora se expande el concepto de integral como arriba, es evidente que, para que la integración sea posible en todo el recorrido, la última de las dos condiciones que hemos encontrado sigue siendo necesaria; en lugar de la condición de que la función sea siempre finita, interviene en cambio la condición de que la función *sólo* se haga infinita al aproximarse el argumento a valores *aislados*, y de que se obtenga un determinado valor límite cuando los límites de integración se aproximen infinitamente a dichos valores.

Esta segunda condición de integrabilidad muestra que la función característica de Dirichlet tampoco es Riemann integrable. Si consideramos la función característica de los racionales en el intervalo $[0,1]$, para cualquier partición sobre dicho intervalo, todo

[59] De acuerdo con Ferreirós aquí se está suponiendo, implícitamente, la continuidad uniforme de la función.

subintervalo contendrá al menos un número racional y otro número irracional, ya que ambos conjuntos son densos en los reales; por lo que el valor máximo de la función en el intervalo es 1, y el mínimo es 0, es decir el valor de la suma S no tiende a un límite único.

Cabe mencionar que, a pesar que esta segunda condición de Riemann dejaba ver incipientemente que la noción de "tamaño" del conjunto de los puntos de discontinuidad de la función tenía que basarse en el concepto de "longitud". Durante catorce años después de la publicación del trabajo de Riemann sobre integración, se siguió intentando caracterizar a las funciones Riemann integrables en términos del “tamaño topológico” del conjunto de sus discontinuidades. Este hecho estuvo influenciado por la confusión que había generado Dirichlet, al considerar que los únicos conjuntos diseminados eran aquellos con un número finito de puntos de acumulación.[60] Cuando se logró distinguir entre los conjuntos diseminados y los de primera especie, y se introdujo el concepto de contenido nulo, se logrará transformar la segunda condición de Riemann en una caracterización de la integrabilidad de una función usando una noción de "longitud generalizada" o medida.

La condición necesaria y suficiente para que f sea integrable, es que la suma total de las longitudes de los intervalos de la partición donde la oscilación supera a un número positivo dado, pueda hacerse arbitrariamente pequeña con la norma de la partición, es decir:

La función f es integrable en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si $\forall\varepsilon > 0, \forall\sigma > 0, \exists d > 0$, tal que para toda partición P, con $\|P\| < d$, se tiene que $S(P,\sigma) < \varepsilon$, donde $S(P,\sigma) = \sum_{i\in T} \Delta x_i$, con $T = \{i\colon D_i > \sigma\}$. La demostración rigurosa de este criterio de integrabilidad fue dada por Karl J. Thomae en 1875.

Criterio que en términos de la teoría de la medida podemos enunciar como: f es Riemann integrable si y sólo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida cero.

Con Riemann aparece ya el concepto de función integrable independientemente de cualquier consideración acerca de la continuidad de la función, la existencia de la integral sólo depende de la existencia del límite de las sumas.

[60] Actualmente sabemos que la relación de inclusión estricta entre los conjuntos de primera especie, los de medida cero y los diseminados es la siguiente: $\{A\colon A \text{ } es\ de\ primera\ especie\} \subset \{A\colon A\ es\ de\ medida\ nula\} \subset \{A\colon A\ es\ diseminado\}$. Por ejemplo, el conjunto de Cantor es de contenido cero pero no es de primera especie y el conjunto de Smith-Volterra-Cantor (*fat Cantor set*) tiene medida ½ y no contiene intervalos, es decir tiene medida no nula y es diseminado (ver 1.9 de este trabajo).

Una vez que Riemann ha establecido sus dos condiciones de integrabilidad, muestra la existencia de funciones integrables que poseen un conjunto denso de discontinuidades en un intervalo acotado, mediante el siguiente ejemplo:

> …comenzaremos por las funciones que entre dos límites, por cercanos que estén, presentan infinitas discontinuidades. Como estas funciones nunca han sido tratadas, será bueno comenzar con un ejemplo concreto.
> Designemos, para abreviar, con (x) el excedente de *x* sobre el número entero más próximo, o bien, si *x* está situado a mitad de camino entre dos y la determinación se hace ambigua, el valor medio entre los dos valores ½ y –½, o sea el cero; designemos además con *n* un número entero, con *p* un entero impar, y construyamos entonces la serie
> $$f(x)=\frac{x}{1}+\frac{2x}{4}+\frac{3x}{9}+\cdots=\sum_{1,\infty}\frac{(nx)}{n.n}$$
> como es fácil ver, esta serie converge para cada valor de *x*; su valor se aproxima, pues, a un límite fijo, tanto al disminuir el argumento continuamente a *x*, como al aumentar continuamente. En concreto, si $x=\frac{p}{2n}$ (donde *p*, *n* son primos relativos), entonces
> $$f(x+0)=f(x)-\frac{1}{2n.n}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots\right)=f(x)-\frac{\pi.\pi}{16n.n}$$
> $$f(x-0)=f(x)+\frac{1}{2n.n}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots\right)=f(x)+\frac{\pi.\pi}{16n.n}$$
> en otro caso, tenemos siempre que $\mathrm{f}(x+0)\ =\ f(x)$ y $f(x-0)\ =\ f(x)$.
> Así pues, esta función es discontinua para todo valor racional de *x* que expresado en forma reducida es una fracción con denominador par, y por tanto presenta infinitas discontinuidades entre dos límites cualesquiera, por cercanos que estén, pero de tal modo que el número de los saltos que son mayores que una magnitud dada es siempre finito. Admite integración en todo el recorrido. De hecho bastan para ello, junto con su finitud, las dos propiedades de que tiene valor límite $f(x+0)$ y $f(x-0)$ por ambos lados para cada valor de *x*, y que el número de los saltos que son mayores o iguales a una magnitud dada σ es siempre finito. Pues si aplicamos nuestra investigación anterior, es obvio que, a consecuencia de estas dos circunstancias, *d* se puede siempre tomar tan pequeño, que en todos los intervalos que no contengan esos saltos las oscilaciones sean menores que σ, y que la magnitud total de los intervalos que contienen esos saltos sea tan pequeña como se quiera.

Esta idea de "condensación de singularidades" que Riemann empleó en este ejemplo sería luego sistematizada y generalizada por Hankel y Cantor. A partir de Riemann los trabajos relacionados con la integración se dedicarán a buscar las condiciones que debe cumplir la función para que exista su integral.

Con el concepto de integral definida de Riemann, es posible integrar funciones que no son la derivada de otra función e, incluso, funciones que para cualquier intervalo que se considere no tienen primitiva. Es precisamente en este punto donde presenta problema la concepción de integral como primitiva. Parece estar claro que la integral como límite de una suma surge dentro del contexto de la fundamentación y no en el contexto de las aplicaciones. Con lo que se replantea el problema fundamental del cálculo integral: encontrar una función de la cual se conoce su derivada.[61]

1.10 La distribución de puntos infinitos de discontinuidad y extremos locales de Lipschitz

Otro aporte importante a la teoría de la integración lo encontramos en los trabajos de Rudolf Lipschitz (1832-1903), también alumno de Dirichlet, quien en 1864 en su tesis doctoral, *Recherches sur le développement en séries trigonométriques des fonctions arbitraries d'une variable et principalement de celles qui, dans un intervalle fini, admettent une infinité de máxima et de minima*, complementa los resultados de su maestro sobre la convergencia de las series de Fourier. Allí aborda el problema de cómo extender las condiciones de Dirichlet al caso donde la función toma valores infinitos, o tiene un número infinito de oscilaciones o discontinuidades. Dirichlet ha demostrado que la suma de los $2n + 1$ primeros términos de la serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\begin{cases}\cos x\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha + \cos 2x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\cos 2\alpha\,d\alpha + \cdots\\ \operatorname{sen} x\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha + \operatorname{sen} 2x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha)\operatorname{sen} 2\alpha\,d\alpha + \cdots\end{cases}$$

Se puede expresar mediante la siguiente integral definida,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha - x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - x)}$$

Si esta integral admite un límite cuando $n \to \infty$, este valor límite es la suma de la serie. Lipchitz [62] observa que los razonamientos de Dirichlet reposan sobre la condición de que $\varphi(x)$ sea finita sobre todo el intervalo $(-\pi, \pi)$ y que no tenga más que un número finito de discontinuidades y de extremos locales. Las funciones que no cumplen dicha condición pueden ser clasificadas en tres tipos:

> …en el intervalo $(-\pi, \pi)$, toman valores infinitos o poseen un número infinito de discontinuidades o un número infinito de máximos y mínimos. Basta con examinar cada uno de estos tres casos, por

[61] En la sección 1.13 trataremos este aspecto con más detalle.
[62] (Lipschitz, 1864, pág. 282)

decirlo así, en sí mismo, la reunión de dos o de tres de estos casos modifican más bien la forma que la naturaleza y las propiedades de la serie (Lipschitz, 1864, pág. 283).

Lipchitz se propone encontrar las restricciones a las cuales debe someterse la función $\varphi(x)$ en los dos primeros casos, buscando condiciones para que las integrales definidas, que desempeñan el papel de coeficientes en la serie, tengan sentido.

> En el primer caso, si (a, b) es un intervalo comprendido entre $-\pi$ y π, es necesario que la integral $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ siga siendo una función finita y continua en las variables a y b. Sean $c_1, c_2, \cdots, c_n$ todos los valores de x para los cuales la función es infinita y sean $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ cantidades tan pequeñas como se quiera; uno puede dividir el intervalo $(-\pi, \pi)$ en n intervalos parciales $(c_1 - \delta_1, c_1 + \delta_1), (c_2 - \delta_2, c_2 + \delta_2), \cdots, (c_n - \delta_n, c_n + \delta_n)$ que nosotros llamaremos intervalos de primera especie. En cuanto al espacio restante, está formado por un número finito de intervalos de una segunda especie, en cada uno de los cuales la función $\varphi(x)$ satisface las condiciones impuestas a la función $f(\beta)$ en el teorema (I)[63] (Lipschitz, 1864, pág. 263).

Para el segundo caso, en el cual la función $\varphi(x)$ posee un número infinito de discontinuidades en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Lipschitz afirma que si $\varphi(x)$ cumple la condición de Dirichlet para que sea integrable, de allí "por un razonamiento convincente" se deduce que se puede dividir el intervalo $(-\pi, \pi)$ en intervalos de primera y segunda especie tal como se hizo para el primer caso. Donde cada intervalo de primera especie tiene una longitud arbitrariamente pequeña y contiene un número infinito de discontinuidades. En cada intervalo de segunda especie, la función $\varphi(x)$ es monótona creciente o monótona decreciente.

De esta manera para calcular la integral definida sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$, se divide el intervalo en intervalos de primera y segunda especie, y a estos intervalos Lipschitz asocia integrales de primera y segunda especie, respectivamente; la integral se expresa entonces como una suma de integrales de primera y segunda especie. Las integrales de primera especie pueden ser tan pequeñas como se quiera, haciendo una elección adecuada de los δ_i, de tal manera que su suma se haga tan pequeña como se quiera. Las integrales de segunda especie se constituyen de tal suerte que cada una tiene límite cuando $n \to \infty$.

---

[63] Teorema que ha sido previamente enunciado por (Dirichlet, 1829, pág. 165). Sean g y h cantidades tales que $0 \leq g < h \leq \frac{\pi}{2}$. Sea $f(\beta)$ una función definida desde el valor $\beta = g$ hasta el valor $\beta = h$, finita, constante o creciente en todo el intervalo considerado, o bien constante o decreciente. Entonces, la integral $\int_g^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta$ tiene límite cuando $k \to \infty$. Este límite es nulo cuando la cantidad g es positiva e igual a $\frac{\pi}{2} f(0)$ cuando la cantidad g es nula

Cuando Lipschitz se refiere a un "razonamiento convincente" para que se pueda dividir el intervalo $(-\pi.\pi)$ en intervalos de primera y segunda especie, pareciera estar pensando en que "si el conjunto de discontinuidades es diseminado entonces su conjunto de puntos limite es finito", y de esta manera sería posible encontrar recubrimientos del conjunto de los puntos límite de longitud total arbitrariamente pequeña, lo cual no es cierto.[64]

Para el tercer caso, donde la función es continua en el intervalo de integración, salvo un número finito de discontinuidades, pero posee un número infinito de máximos y mínimos; Lipschitz afirma que no ha sido considerado por Dirichlet, por lo cual será analizado con más cuidado por su parte. Considera los valores $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$, de discontinuidad de la función $\varphi(x)$ y expresa las integrales $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha$ y $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\alpha) \operatorname{sen} n\alpha\, d\alpha$ como suma de integrales de la misma forma cuyos límites de integración están determinados por los a_i. Observando que:

> Puesto que la noción de integral definida reposa sobre el preservar la continuidad de la función en el intervalo de integración y sigue siendo la misma si se encuentra un infinito de máximos y de mínimos en el intervalo de integración. Pero se pueden obtener, de dos maneras enteramente diferentes, un número infinito de máximos y mínimos en un intervalo finito de la variable. [Lip64, p.286].

Lipschitz muestra tres formas de distribución de los infinitos puntos extremos sobre el intervalo (a, b):

- Existe un punto r en (a, b) tal que en $(a, r-\delta)$ y en $(r+\delta, b)$ hay a lo más un número finito de puntos extremos, pero un número infinito en $(r-\delta, r+\delta)$ tomando 2δ tan pequeño como se quiera.
- Cualesquiera que sean r y s en (a, b) hay un número infinito de máximos y mínimos en (r, s).
- (a, b) contiene un número finito de intervalos no nulos donde alguna de las dos hipótesis anteriores se cumple.

Es decir, el conjunto infinito de puntos extremos tiene a lo más un número finito de puntos límite, es denso en algún intervalo $(r, s) \subset (a, b)$ o el intervalo (a, b)es unión finita de intervalos de las dos clases anteriores. De nuevo, Lipschitz está asumiendo que todo

[64] En la sección 1.10 explicaremos con más detalle la confusión histórica con respecto a estos conjuntos de puntos y su relación con la integral.

conjunto diseminado tiene un conjunto finito de puntos límite. Tal confusión será aclarada posteriormente, con los trabajos de Cantor sobre conjuntos derivados.

De acuerdo con (Ferreirós, 1991) esta suposición de Lipschitz prefigura la definición de conjunto derivado de Cantor, ya que es muy probable que Cantor hubiese leído a Lipschitz y junto con la influencia de Weierstrass se vio conducido a interpretar las palabras de Lipschitz en términos del concepto de conjunto derivado. Además cantor introdujo una corrección esencial al contemplar la existencia de conjuntos con infinitos puntos límite, y los cuales a su vez también tienen infinitos puntos límite, y así sucesivamente.

A continuación Lipschitz demuestra un teorema, donde considera todos los casos anteriores, con el cual generaliza el teorema de Dirichlet [65], eliminando la condición de que *f* sea una función monótona a trozos, y estableciendo la famosa *condición de Lipschitz* de orden α, para la existencia de la integral $\int_g^h f(\beta)\frac{\sin k\beta}{\sin \beta}\,d\beta$, y por tanto para la convergencia de la serie de Fourier:

$$|f(\beta+\delta)-f(\beta)|<M\delta^{\alpha}$$

Con este análisis de la distribución de conjuntos infinitos, de discontinuidad o de extremos; así como con la introducción de los intervalos de primera y segunda especie podemos ver en los trabajos de Lipschitz los gérmenes de la teoría de conjuntos infinitos de puntos, desarrollada posteriormente por Hankel y Cantor. El llamar la atención sobre cómo la distribución de puntos singulares afecta la integración, les permitirá a sus sucesores aclarar la diferencia entre las propiedades topológicas y las propiedades relativas a la medida de conjuntos infinitos de puntos.

Dirichlet amplió la clase de funciones integrables a la clase de funciones discontinuas en un conjunto diseminado de puntos. Para Lipschitz las funciones integrables son aquellas funciones continuas excepto en un conjunto de primera especie. Así la consideración más importante que Dirichlet y Lipschitz hacen es que aunque los puntos de discontinuidad formen un conjunto "infinito muy grande" la restricción de que posean un número finito de puntos de acumulación, los hace, a pesar de ser un conjunto infinito, estar lo suficientemente dispersos. No obstante fue hasta los trabajos de Cantor en topología de

[65] Ver pie de página anterior.

conjuntos infinitos y su inclusión en la teoría de integración que se aclararon satisfactoriamente estos conceptos y sus relaciones.

Sin embargo respecto a las contribuciones de Dirichlet y Lipschitz, Hawkins observa que:

> La tendencia, sugerida por la observación de Dirichlet, a considerar "denso en ninguna parte" como sinónimo a lo "insignificante para la teoría de la integración" y la tendencia, evidente en el artículo de Lipschitz, de concebir un conjunto como denso, ya sea en la vecindad de puntos límite separados o en un intervalo completo, continuó hasta principios de 1880. Esta tendencia retrasó la introducción del punto de vista de la teoría de la medida en la teoría de la integración (Hawkins, 1979, pág. 15).

El primer ejemplo de función no integrable Riemann cuyo conjunto de discontinuidades es no denso, fue dado por Henry John Stephenson (1826-1883) en 1875.

DuBois Reymond proporcionó una condición necesaria y suficiente de integrabilidad Riemann, considerando que la oscilación de una función en un punto es mayor que cero si y sólo si se trata de un punto de discontinuidad. En 1881, Vito Volterra, sobre la base de esta condición, construyó una función derivable en todo punto, cuya derivada es acotada y no es Riemann integrable.[66]

Los trabajos sobre funciones discontinuas integrables de Dirichlet, Riemann y Lischiptz, encontrarán continuidad en los trabajos de Hankel. El concepto de oscilación de una función en un intervalo, introducido por Riemann, será refinado con el concepto de oscilación puntual de Hankel, lo que le permitirá diferenciar entre las funciones con infinitos puntos singulares (puntos de discontinuidad, y puntos máximos y mínimos) las integrables y las no integrables.

1.11 Hankel y las funciones integrables y no integrables.

Herman Hankel (1839-1876) en 1870, en su disertación *Untersuchungen über die unendlich und unstetigen Funktionen*, siguiendo las idea de Riemann de relacionar la integrabilidad de la función con su oscilación, busca una condición suficiente y necesaria que permitiera demostrar que la función altamente discontinua definida por Riemann es integrable. Para ello establece el concepto de salto de una función en un punto, similar al concepto de oscilación.

[66] Ver ejemplo 2.3.40 en el segundo capítulo de este trabajo

Para Hankel, una función $f(x)$ tiene un *salto mayor que un entero positivo* σ *en un punto x*:

$$\text{Si } \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{ tal que } |\delta| < \varepsilon \text{ y } |f(x+\delta) - f(x)| > \sigma.$$

El *salto de una función f en un punto x* es la menor cota superior de los σ. Hankel concentra su atención en el conjunto S_σ, mediante el cual determina la diferencia entre las funciones puntualmente discontinuas y las totalmente discontinuas. Conjunto que podemos definir como sigue:

$$S_\sigma = \{x: f(x) tiene\ un\ salto\ mayor\ que\ \sigma > 0\ en\ x\}.$$

Introduce además el concepto de conjunto *diseminado*: un conjunto es diseminado, si entre dos puntos cualesquiera del conjunto existe un intervalo que no contiene puntos del conjunto:

> Si en un segmento se encuentra una multitud [Schaar] de puntos que poseen una cierta propiedad, digo que idchos puntos llenen el segmento, si no puede determinarse ningún intervalo en el segmento, por pequeño que sea, en el cual no haya al menos un punto de aquella multitud; que por el contrario, esa multitud de puntos no llena el segmento, sino que los puntos se encuentran diseminados en él, si entre dos puntos cualesquiera del segmento, por cerca que estén, puede determinarse siempre un intervalo en el cual no hay ningún punto de aquella multitud (Hankel, 1870, pág. 87) [67].

De esta manera, si para todo $\sigma > 0$ los puntos de S_σ se encuentran dispersos en el intervalo de definición de la función, es decir S_σ es diseminado, la función es *puntualmente discontinua*. Si por el contrario, para algún σ los puntos de S_σ llenan un intervalo completo, es decir S_σ es denso en algún intervalo, la función es *totalmente continua.* Fundamentándose en estos conceptos y en la "condensación de singularidades", Hankel establece la siguiente clasificación de funciones:

- La clase de las funciones continuas
- La clase de las funciones continuas excepto en un número finito de puntos en todo intervalo finito.
- La clase de las funciones que tienen un número infinito de discontinuidades, las que a su vez se clasifican en dos clases: las funciones puntualmente discontinuas y las funciones totalmente discontinuas.

Las funciones de las dos primeras clases, como ya es conocido, son funciones Riemann integrables. Las funciones de la tercera clase son las que más interesan a Hankel, por el

[67] Citado por (Ferreirós, 1991, pág. 186)

problema de la existencia de su integral, establece entonces que las funciones de esta tercera clase que son Riemann integrables son las funciones puntualmente discontinuas, es decir una condición suficiente y necesaria para que una función acotada con infinitos puntos de discontinuidad sea Riemann integrable es que para todo $\sigma > 0$, el conjunto S_σ sea diseminado.

Dicha condición, en realidad, es necesaria pero no suficiente: si existe $\sigma > 0$ tal que S_σ es denso en un intervalo I, la oscilación de la función en algún intervalo superpuesto I sería mayor que σ. Entonces la magnitud total de los intervalos (de la partición del intervalo fundamental $[a, b]$) en la cual la oscilación de la función es mayor que σ siempre será mayor o igual a la longitud de I, y la función no sería Riemann integrable. Pero no es suficiente que S_σ sea diseminado para que la función sea integrable, desde nuestra perspectiva eso equivaldría a decir que todo conjunto diseminado tiene medida cero, lo cual es falso.

Hawkins [68] cita los siguientes ejemplos de los conjuntos de puntos que tenía en mente Hankel, para justificar el porqué Hankel ha llegado a estas conclusiones erróneas. El primer ejemplo muestra cómo Hankel generalizó el ejemplo de Dirichlet:

Sea $f(x) = 1$ para todo x en $[0,1]$ excepto para x en los infinitos intervalos que tienen a $\frac{1}{2^n}$ como centro y de longitud ζ^n para un ζ fijo, $0 < \zeta < 1$ y para $n = 1,2, \cdots$. En estos intervalos f se comporta como la función característica de los racionales. "La magnitud total s de los intervalos en los cuales las oscilaciones son iguales a 1, es $s = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \cdots = \frac{\zeta}{1-\zeta}$." (Hankel, 1870, pág. 86). En otras palabras, f es totalmente discontinua.

El siguiente ejemplo es particularmente significativo para entender las bases de las observaciones de Hankel acerca de las funciones puntualmente discontinuas. Define f como sigue $f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ para $n = 1,2, \cdots$, y $f(x) = 1$ para los otros valores de x. En los infinitos puntos $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, f$ hace saltos de magnitud 1. Pero en contraste con el otro ejemplo, no hay un intervalo el cual sea "llenado" con puntos de discontinuidad. En efecto: "si un intervalo que contiene el punto $x = \frac{1}{2^n}$ es requerido para encerrar sólo la discontinuidad

[68] (Hawkins, 1979, pág. 31)

que ocurre en este punto, este puede ser tomado arbitrariamente pequeño. Más aún, la magnitud total s de todos los intervalos de esta clase puede hacerse arbitrariamente pequeña. Pero si la magnitud del intervalo que recubre a $x = \frac{1}{2^n}$ se toma igual a ϵ^n, entonces la suma $s = \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \cdots = \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$, se hace arbitrariamente pequeña con ϵ." (Hankel, 1870, pág. 86).

En términos modernos, Hankel estableció una caracterización topológica de los conjuntos S_σ correspondientes a una función integrable; fundamentándose en el falso resultado de que todo conjunto diseminado puede ser encerrado en un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña, tal como lo habían afirmado Dirichlet y Lipschitz:

> Si un segmento no está lleno de puntos en los que tienen lugar saltos $> \sigma$, entonces la longitud total s de los intervalos en los que las oscilaciones son $> 2\sigma$ puede tomarse arbitrariamente pequeña (Hankel, 1870, pág. 87).

Resultado que Hankel creyó haber demostrado, repitiendo la prueba de Riemann de que su función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$ con infinitos puntos de discontinuidad es integrable:

> En este caso en el cual el número de estos puntos es infinitamente grande…uno puede proceder como sigue: Divide el intervalo considerado en intervalos que rodea uno de estos puntos de la discontinuidad con los saltos mayores que σ, y elije estos intervalos tan grandes que juntos llenen por encima el intervalo entero. Si cada uno de estos intervalos entonces se imagina reducido a la n-ésima parte pero de una manera tal que todavía rodee el punto correspondiente de la discontinuidad, entonces la parte restante del intervalo está libre de los saltos mayores que σ; la suma de estos intervalos en los cuales hay un salto mayor que σ, sin embargo, es la n-ésima parte del intervalo entero y por lo tanto se puede hacer arbitrariamente pequeño aumentando n (Hankel, 1870, págs. 87-88).

Podemos disipar la ambigüedad que rodea esta prueba considerando otra demostración, errónea de Hankel, de que los límites $f(x^+)$ y $f(x^-)$ existen siempre cuando f es puntualmente discontinua: "fíjese un punto $x = a$ en el cual hay un salto mayor que σ; entonces obsérvese el próximo punto $x = a + h$ en el cual ocurre un salto mayor que σ, en el intervalo entre los cuales las oscilaciones son menores que 2σ… (Hankel, 1870, pág. 90). Aquí la comprensión real de Hankel - en comparación con su definición formal – del conjunto "diseminado" se pone de manifiesto: para Hankel, un conjunto "diseminado" no contiene ningún punto límite. En el resto de su prueba, los puntos de S_σ no pueden ser puntos límites de alguno de los conjuntos $S_{\sigma'}$ para los cuales $\sigma' < \sigma$. Esto sugiere que

Hankel tuviera el conjunto $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ en mente y pensó que todos los sistemas densos en ninguna parte serían bastante similares a este, como para compartir esas propiedades que él había asumido en sus argumentos.

De acuerdo con Hawkins, Hankel confundió los conjuntos topológicamente insignificantes(es decir diseminados) con los conjuntos insignificantes desde el punto de vista de la teoría de la medida (medida nula).

La idea de la teoría de la medida, implícita en la segunda condición de la integrabilidad de Riemann, permaneció oscurecida por la prominencia dada a las ideas topológicas que eran aparentemente equivalentes. Sin embargo, por la introducción de la noción de salto de una función en un punto, Hankel focalizó la atención sobre las propiedades de los conjuntos (los S_σ); todavía quedaba por reconocer que las propiedades de la medida de conjuntos son cruciales para la teoría de la integración. La búsqueda de un procedimiento para medir las discontinuidades de una función, condujo a Hankel (1882) a introducir la noción de contenido.

Riemann extendió la definición integral de Cauchy reconociendo que la condición de continuidad no era esencial. Hankel descubrió, sin embargo, que los puntos de continuidad de una función integrable pueden formar un conjunto denso (Hankel, 1870, pág. 90). La prueba se basa en el hecho de que el conjunto S_σ puede ser denso en ninguna parte para cada valor positivo σ. Esto es, para I_o un intervalo dado y σ un número positivo, existe I_1, un subintervalo de I_o el cual esta libre de puntos de S_σ. Similarmente existe I_2, un subintervalo de I_1 el cual está libre de puntos de $S_{\frac{\sigma}{2}}$, y así sucesivamente. De esta manera una sucesión jerarquizada de intervalos I_n es obtenida con la propiedad de que I_n está libre de puntos de $S_{\frac{\sigma}{2^{n-1}}}$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$, se sigue que I_o contiene puntos de continuidad de la función, y el teorema es probado (los intervalos I_n pueden, seguramente, ser cerrados; Hankel se equivocó en este detalle). Una vez más la caracterización topológica de los puntos de continuidad de una función integrable sirvió para oscurecer la propiedades de medida de este conjunto de puntos.

Observemos que en el segundo ejemplo citado, Hankel emplea la frase "magnitud total *s*" en un sentido levemente diferente al que Riemann tenía. Con Riemann este ha sido frecuentemente usado en el contexto de una partición fundamental del intervalo $[a, b]$; se refiere a la suma de los intervalos de la partición en la cual la oscilación de la función es mayor que σ. Hankel usó el término para referirse a intervalos no directamente relacionados a una partición y los cuales pueden ser infinitos en número. En efecto, en el método de Hankel, para mostrar que la magnitud total de los intervalos que contienen los puntos $\frac{1}{2^n}$ se puede hacer arbitrariamente pequeña, está detrás de la prueba la idea que cualquier conjunto contable tiene medida de Lebsgue cero.

Todo esto pudo sugerir una anticipación de Borel y de Lebesgue. Sin embargo, los conjuntos que Hankel recubría eran de una naturaleza muy simple, tan simple que cada punto del conjunto podría ser encerrado en un intervalo que no interceptara los intervalos correspondientes a los otros puntos. Así, los intervalos de recubrimiento correspondieron a una división infinita del intervalo que, a su vez, se podría relacionar directamente con las divisiones finitas y la segunda condición de Riemann. En su ejemplo, Hankel habría podido del mismo modo que encerró S_σ en un número finito de intervalos empleando el intervalo $[0, \epsilon]$ que incluye todos los puntos de S_σ, en número finito, y entonces recubrirá el resto como antes. Mientras los conjuntos que se recubrirán sean los S_σ y el contexto sea la teoría de la integración de Riemann, es, de hecho, más natural continuar utilizando un número finito de intervalos porque pueden ser relacionados más fácilmente con las particiones y así con la segunda condición de Riemann. No es entonces sorprendente que los sucesores de Hankel retornaran al uso de los de los intervalos finitos y eventualmente desarrollaran una teoría de la medida basada en recubrimientos finitos.

1.12 Conjuntos diseminados, de primera especie y de contenido nulo

Hemos visto cómo con los trabajos de Dirichlet y Lipschitz se establecen ciertas características de los conjuntos de puntos lineales, determinados por las singularidades de las funciones en cuestión. Dirichlet afirma que la condición suficiente para que una función sea representable en series de Fourier e integrable, es que los puntos de discontinuidad constituyan un conjunto diseminado. Lipschitz, intentando justificar y complementar el trabajo de Dirichlet, observa que para poder calcular la integral de una función con infinitas singularidades sobre un intervalo dado, es necesario que el intervalo pueda dividirse en un número finito de subintervalos tales que algunos contengan infinitos puntos de singularidad y su longitud sea arbitrariamente pequeña, y los otros subintervalos contengan sólo un número finito de tales singularidades, de esta manera el intervalo de integración se divide en subintervalos sobre los cuales existe la integral de la función, y la integral total se obtiene mediante la suma de las integrales sobre los subintervalos. Pero, al parecer Lipschitz estaba pensando en conjuntos cuyo conjunto de puntos de acumulación es finito.

Estas características permitieron posteriormente clasificar respectivamente los conjuntos de puntos en conjuntos diseminados, conjuntos de medida nula y conjuntos de primera especie. Tales conjuntos no son equivalentes, pero para Lichiptz eran características equivalentes.

A pesar de que Hankel da la definición de conjunto diseminado, el tipo de ejemplos estudiados y el primer criterio de integrabilidad de Riemann lo condujeron a pensar que los conjuntos diseminados podían ser recubiertos por intervalos de longitud arbitrariamente pequeña, es decir los conjuntos diseminados eran para Hankel de medida nula. Esta creencia de que las propiedades topológicas de los conjuntos de puntos de discontinuidad (o en general de singularidades) eran determinantes para la existencia de la integral de una función discontinua, se mantuvo hasta los años 1880. Los trabajos de Hankel influenciaron fuertemente a los matemáticos alemanes, en particular a Cantor quien introdujo los conceptos de punto límite, conjunto derivado y conjuntos de primera y segunda especie.

En 1870 Heine plantea en su artículo *Uber trigonometrische Reihen* la cuestión sobre la unicidad de la representación de una función en series de Fourier, y enuncia su teorema de unicidad para funciones continuas, excepto en un conjunto finito de puntos y cuya serie es uniformemente convergente excepto en un conjunto finito de puntos. Cantor se propone demostrar el teorema de unicidad con hipótesis más fuertes; presenta una primera demostración en 1870, donde supone que la serie trigonométrica converge sobre todo el intervalo de definición:

> Si una función de variable real $f(x)$ está dada por una serie trigonométrica convergente para todo valor de x, entonces no hay otra serie de la misma forma que también converja para todo valor de x, y represente la función $f(x)$.[69]

[69] (Dauben, 1979, pág. 34)

En 1871 publicó una nota aclarando que el teorema seguía verificándose incluso si la representación de la función o la convergencia de la serie no se verificaba en un número finito de puntos. En 1872 logra demostrar que el teorema también se cumple si se admite una cantidad infinita de puntos singulares, siempre y cuando se puedan distribuir de determinada manera.

Es precisamente el método de "condensación de singularidades" de Hankel que le sirve de inspiración a Cantor. Cantor considera la función $F(x)$ de Riemann[70] y demuestra que esta es idéntica sobre dos intervalos separados por una singularidad x_0. Para el caso en que existan infinitas singularidades, el teorema de Bolzano-Weierstras afirma que hay al menos un punto de condensación en cualquier vecindad que contenga un número infinito de puntos singulares x_v. Supongamos que hubiera sólo un punto de acumulación x' en (α, β). Considerando el intervalo (α, *x*'), cualquier subintervalo propio (s, t) puede contener sólo un número finito de puntos singulares x_v, de lo contrario habría otro punto de condensación en (s, t), contrario a la suposición de que x' es el único punto de condensación en todo (α, β). Para todos los intervalos (s, t), y su número estrictamente finito de singularidades x_v, Cantor muestra que $F(x)$ es lineal e idéntica en cada uno de ellos. Como $F(x)$ también es continua, y dado que los puntos extremos *s* y *t* pueden acercarse arbitrariamente a (α, *x*'), se puede concluir que $F(x)$ también es lineal en (α, x'). El mismo argumento es cierto si se admite un número finito de puntos de condensación $x'_0, x'_1, \cdots, x'_n$. Más aún, es posible establecer el teorema de unicidad de Cantor incluso para infinitos puntos de singularidad, siempre y cuando estén distribuidos de esta manera especifica. Si hubiera un número infinito de puntos de condensación x'_v distribuidos en (α, β), de nuevo el teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza que habría al menos un punto de condensación del conjunto infinito de los x'_v. Supongamos que hubiera un solo punto de acumulación,

[70] En su estudio sobre series trigonométricas, Riemann reduce el tratamiento de las series trigonométricas convergentes al de las series cuyos coeficientes a_n y b_n tienden a cero cuando *n* tiende a infinito y para esto considera la función auxiliar $F(x) = C + C'x + A_0 \frac{xx}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \cdots$, la cual obtiene mediante doble integración formal de la serie $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$, con $A_0 = \frac{1}{2}a_0, A_n = a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx$. $F(x)$ es continua y converge uniforme y absolutamente. Entre los teoremas que Riemann enuncia con respecto a esta función el más importante para establecer el teorema de unicidad de la representación de una función en series de Fourier es el siguiente: la expresión $\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$ se hace infinitamente pequeña con α.

denotado por x''. Se sigue, como antes, que sólo un número finito de puntos x'_v podría pertenecer a cualquier subintervalo (s,t) de (α,x''). Sin embargo, $F(x)$ es lineal en los intervalos. Al permitir que los puntos extremos s y t se acerquen a x'' tanto como se quiera, se puede concluir que $F(x)$ debe ser lineal sobre (α,x''). El argumento se extiende fácilmente a cualquier número finito de veces, a los niveles más altos de las condensaciones de los puntos de condensación de singularidades.

De esta manera, la representación en series trigonométricas y la teoría de la integración motivaron a Cantor a desarrollar su teoría de conjuntos de puntos. Para fundamentar la existencia de los distintos niveles de las singularidades condensadas y dar una demostración rigurosa de su teorema de unicidad, Cantor introduce el concepto de *Conjunto Derivado* en 1872, en su memoria *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigomometrischen Reihen*.[71] Retomando de Weierstrass el concepto de punto de acumulación, pero ubicándolo en una perspectiva conjuntista,[72] define inicialmente el concepto de *punto límite*:

> Dado un conjunto de puntos en un intervalo finito, queda determinado en general un segundo conjunto de puntos, con éste en general un tercero, etc., que son esenciales para la comprensión de la naturaleza del primer conjunto.
> Para definir estos conjuntos derivados, tenemos que anteponer la noción de punto límite de un conjunto de puntos.
> Entiendo por "punto límite de un conjunto de puntos *P*" un punto de la recta cuya posición es tal que en todo entorno del mismo se encuentran *infinitos* puntos de *P*, pudiendo suceder que además dicho punto pertenezca al conjunto. Por "entorno de un punto" se entiende aquí cualquier intervalo que tiene al punto en su *interior*. Ahora es fácil demostrar que un conjunto formado por una cantidad infinita de puntos tiene siempre al menos un punto límite.[73]
> Así ser un punto límite o no serlo es una relación bien definida entre cualquier punto de la recta y le conjunto de puntos dado *P*, y por tanto, con el conjunto P viene dado conceptualmente el conjunto de sus puntos límite, que designaré *P'* y llamaré "el primer conjunto derivado de *P*".
> Si el conjunto de puntos *P'* no consta sólo de una cantidad finita de puntos, entonces tiene igualmente un conjunto derivado *P''*, que denomino el segundo conjunto derivado de *P*. Mediante *n* transiciones como ésta se encuentra la noción de *n*-ésimo conjunto derivado $P^{(n)}$ de *P*.[74]

Como se puede ver en la descripción del método de Cantor, de condensación de singularidades, que mostramos antes, los conjuntos de puntos que interesaban a Cantor, en relación con la representación de funciones en series trigonométricas, eran los conjuntos

[71] *Acerca de la extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas.*
[72] Ver (Ferreirós, 1991, págs. 158-164)
[73] Este es el conocido teorema de Bolzano-Weierstrass que Cantor conoció gracias a Weierstrass.
[74] Citado por (Ferreirós, 1991, págs. 159-160)

para los cuales existe un conjunto derivado con un número finito de puntos de acumulación. En 1879 define los conjuntos de primera y segunda especie:

> Si el proceso de obtención de derivados se detiene para un n entero, el conjunto se llama de "*primera especie* y tipo n-ésimo"; si el proceso no se detiene, el conjunto es de segunda especie.[75]

Aunque Cantor se inspiró en el trabajo de Lipschitz sobre series trigonométricas, Cantor va más allá al considerar la posibilidad de que los puntos de acumulación conformen un conjunto infinito, y obviamente al conceptualizar estos conjuntos de puntos.

Cantor observa que, mediante procesos inductivos, algunas propiedades de los conjuntos finitos pueden trasladarse a los conjuntos de primera especie. Así se puede demostrar que los conjuntos de primera especie son diseminados y pueden recubrirse por un número finito de intervalos cuya longitud total puede hacerse arbitrariamente pequeña. Lo que condujo a los matemáticos, dedicados a estudiar las condiciones de integrabilidad de las funciones discontinuas, a reafirmar la creencia de que los conjuntos diseminados tenían medida nula, o que si el conjunto de singularidades de una función era diseminado entonces podían ser "ignorados" al calcular la integral de la función.

En 1875, Smith (1826-1883) publica un artículo *Sobre la integración de funciones discontinuas*, en el que expone dos métodos totalmente diferentes para construir conjuntos diseminados, a partir de uno de ellos construye un conjunto diseminado con contenido exterior positivo y por consiguiente su función característica no es Riemann integrable, lo que refuta las afirmaciones de Hankel acerca de la integrabilidad de las funciones puntualmente discontinuas y que todo conjunto diseminado tiene medida cero. La construcción de dicho conjunto es similar a la de los conjuntos de Cantor, pero haciendo disminuir más rápidamente la longitud de los segmentos eliminados:

> Divídase el intervalo de 0 a 1 en m partes iguales, exceptuando el último segmento de toda división ulterior; [...] divídase cada uno de los [...] restantes m-1 segmentos por m^2, exceptuando el último segmento de cada segmento; [...] divídase de nuevo cada uno de los restantes $(m-1)(m^2-1)$ segmentos por m^3, exceptuando el último segmento de cada segmento, y así continuamente.[76]

Sin embargo los trabajos de Smith no fueron totalmente conocidos en el continente europeo, por lo cual los conjuntos diseminados de contenido no nulo no serán conocidos

---

[75] Citado por (Ferreirós, 1991, pág. 160)
[76] Citado por (Ferreirós, 1991, pág. 195)

hasta 1880. En 1881 Volterra (1860-1840) construye un ejemplo similar al de Smith y a otros construidos por Emil du Bois-Reymond(1818 – 1896) y Axel Harnack (1851-1888),[77] que servía para refutar el falso criterio de integrabilidad de Dirichlet.

Modernamente se conoce el conjunto de Smith-Volterra-Cantor, como ejemplo de un conjunto diseminado de medida no nula. El proceso utilizado para su construcción es similar a la del conjunto de Cantor, consiste en eliminar determinados intervalos del intervalo unidad [0, 1]. En el primer paso, se elimina el intervalo central de longitud $\frac{1}{4}$, es decir, se quita $\frac{1}{8}$ a cada lado del punto central, $\frac{1}{2}$, con lo que el conjunto resultante es $\left[0,\frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8},1\right]$. En cada uno de los siguientes pasos, se elimina de cada uno de los 2^{n-1} intervalos restantes un subintervalo centrado en el de longitud $\frac{1}{2^{2n}}$. Por tanto, en el segundo paso hay que eliminar los intervalos $\left(\frac{5}{32}\frac{7}{32}\right)$ y $\left(\frac{25}{32},\frac{27}{32}\right)$, obteniendo el siguiente conjunto:

$$\left[0,\frac{5}{32}\right] \cup \left[\frac{7}{32},\frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8},\frac{25}{32}\right] \cup \left[\frac{27}{32},1\right].$$

Si el proceso continúa de forma indefinida, el conjunto de Smith-Volterra-Cantor es el conjunto de los puntos que nunca han sido eliminados. La siguiente imagen muestra el conjunto inicial y cinco iteraciones de este proceso:

Figura 1.30 – Conjunto diseminado de medida positiva

Por construcción, el conjunto de Smith-Volterra-Cantor no contiene intervalos, es decir es diseminado. Durante el proceso, se eliminan del intervalo inicial intervalos de longitud

[77] Ferreirós comenta que mientras que du Bois y Harnack estudiaban estos conjuntos de puntos motivados por su interés en la teoría de integración y la teoría de series trigonométricas, Cantor ya estaba preocupado por el estudio de la teoría de conjuntos como tema autónomo.

total $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(1/_{2^{2n+2}} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2}$. Esto muestra que el conjunto de los puntos que quedan tiene medida positiva de 1/2.

En 1878 Ulisse Dini (1845-1918) en sus *Fondamenti per la teoria della funzioni de variabili reali*, también manifiesta la no validez de la demostración y del enunciado de Hankel, aunque no consigue construir un contraejemplo que invalide dichos resultados. Dini, utilizando la clasificación de conjuntos de primera especie dada por Cantor, demuestra, entre otras cuestiones, que toda función acotada en un intervalo cuyo conjunto de discontinuidades es de primera especie, es integrable. Habiendo probado previamente que todo conjunto de primera especie puede recubrirse por un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña, es decir el conjunto tiene contenido nulo. Usando esta propiedad demuestra que si dos funciones coinciden salvo en un conjunto de primera especie y una es integrable entonces la otra también lo es, coincidiendo sus integrales.

Las demostraciones realizadas por Dini siguen siendo válidas sustituyendo los conjuntos de primera especie por conjuntos que pueden ser recubiertos por un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña, aunque Dini no salió del contexto de los conjuntos de primera especie, sin percibir el valor de una teoría del contenido o de conjuntos de contenido cero. Por otra parte, Dini parece cuestionar ya la identificación entre los conjuntos de primera especie y los diseminados, según se desprende de sus dudas, ya comentadas, sobre la validez de la proposición de Hankel.

Por confusión entre los conjuntos de primera especie y los conjuntos diseminados, du Bois-Reymond había llegado a considerar la condición de integrabilidad de Dirichlet como un caso especial de Riemann. Sin embargo, descubrió que un conjunto diseminado puede poseer, lo que él llamó, puntos de condensación de orden infinito.

Dicho conjunto se puede construir de la siguiente manera: Supongamos que p es un número real fijo, y sea $I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$ una sucesión de intervalos disjuntos tales que sus puntos extremos convergen a p. Se define un conjunto de primera especie P_n de tipo n en el intervalo I_n (P_n es de tipo n si su n-ésimo conjunto derivado $P_n^{(n)}$ es finito). Si $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, el punto p es un punto de condensación de orden infinito con respecto a P, en el sentido de que p pertenece a $P^{(n)}$ para $n = 1,2,3,\cdots$. Por lo tanto P no es un conjunto de primera especie y es un conjunto diseminado.[78]

La idea detrás de la construcción de P (en contraste con la construcción de conjuntos de primera especie) es la distribución de intervalos en lugar de puntos:

> Contra esto hay que objetar hoy que también podemos distribuir pantáquicamente *intervalos*. Esto es puedo dividir un intervalo dado $D < 2\pi$ de tal manera que si recubro con sus subsegmentos el intervalo $-\pi \cdots + \pi$ en los lugares apropiados, en todo sector del intervalo $-\pi \cdots + \pi$, por pequeño que sea, aparecen subsegmentos conexos de D. Sea ahora una función $\varphi(x)0$ en éstos, y sea 1 en las partes $-\pi \cdots + \pi$, por pequeño que sea, contiene segmentos en los que es continua, a saber cero.
> A este tipo de distribución de intervalos, del que tengo a mano distintos ejemplos, se ve uno llevado al buscar puntos de condensación de orden ∞, cuya existencia anuncié por carta hace años al señor Cantor de Halle. Pienso tratar en otra ocasión de esta distribución, así como de los puntos de condensación, de orden finito e infinito, de *segmentos* en constante disminución, y finalmente de mi elección de la expresión "pantáquico" en comparación con la adoptada posteriormente por Cantor, denso.[79]

Du Bois-Reymond observó que un conjunto diseminado se puede construir por la distribución de densidad en un número infinito de intervalos disjuntos en un intervalo fijo, tales como $[-\pi, \pi]$; los puntos de $[-\pi, \pi]$ que no están en estos intervalos forman un conjunto diseminado Q. Por otra parte, si los intervalos son determinados de manera tal que la suma de sus longitudes es menor que 2π , Q puede no estar incluido en un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña. Por lo tanto, como du Bois Reymond señaló, la función característica de Q no es Riemann integrable, porque el conjunto de los puntos donde la función es igual a 1 tiene una longitud $2\pi - D$, a pesar de que cumple con la condición de Dirichlet.

De acuerdo con Hawkins, en 1882 la forma de distribuir densamente intervalos disjuntos infinitos du Bois-Reymond la hizo más explícita en *Die allgemeine Funktionenthëorie*[80] y es similar a los métodos de Smith y Volterra, cuyos trabajos todavía no se conocían en Alemania. Definiciones constructivas equivalentes, también fueron publicados en 1882 por W. Veltmann y Axel Harnack.

Du Bois Reymond introdujo el término "conjunto integrable de puntos" para referirse a conjuntos de contenido cero, para distinguirlos de los conjuntos diseminados. Pero fue Axel

---

[78] Citado por (Hawkins, 1979, pág. 58)
[79] Citado por (Ferreirós, 1991, pág. 197)
[80] Teoría General de Funciones.

Harnack quien introdujo la noción de la teoría de la medida de conjuntos de contenido cero a principios de los años 1880.

En su artículo sobre series trigonométricas, Harnack confundió los conjuntos de contenido cero con los conjuntos de primera especie. Sin embargo en 1881, en *Die Element der Differential-und Integralrechnung*,[81] estableció la diferencia e introdujo el concepto de *conjunto discreto* que es equivalente al de conjunto de contenido nulo y *conjunto lineal* que es equivalente al de conjunto de contenido positivo. Posteriormente, en 1882, muestra que todo conjunto discreto es diseminado, y construye un ejemplo de un conjunto diseminado lineal, es decir muestra que existen conjuntos diseminados no discretos. De esta manera se evidenciaron los elementos de la teoría de la medida implícitos en la segunda condición de integrabilidad de Riemann, y el falso teorema de Hankel es rectificado por el enunciado "$f(x)$ es integrable si y sólo si para todo σ, el conjunto S_σ, de puntos donde la oscilación de la función es mayor que σ, es discreto".

Otto Stolz (1842-1905) establece la primera definición de contenido en 1884. En 1881 cuando trabajaba en la definición de la longitud de curva, Stolz observa que el área y el volumen pueden ser definidos en términos de la integral. Stolz interpreta los conjuntos discretos de Harnack en el contexto de la teoría del contenido. Stolz observa que si E es un subconjunto arbitrario de un intervalo $[a, b]$, entonces a E se le puede asignar un número L el cual tiene la siguiente propiedad: para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si P es una partición de $[a, b]$ y $\|P\| < \delta$, entonces $|L(P) - L| < \varepsilon$, donde $L(P)$ denota la suma de las longitudes de los intervalos determinados por P la cual contiene puntos de E. En particular, $L = 0$ si y sólo si E es discreto. Stolz extiende su definición a conjuntos acotados en el plano.

También en 1884, Cantor publica una definición equivalente de contenido pero en un espacio euclidiano n-dimensional. Esta definición se basa en dos supuestos que no habían sido aún demostrados:

Si P esta compuesto de un número finito de regiones acotadas n-dimensionales, entonces la integral múltiple $\int_P (dx_1 dx_2 \cdots dx_n)$ está bien definida; y

[81] *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*.

- Si P es un conjunto arbitrario entonces para algún entero positivo r el conjunto $\Pi(P,r) = \bigcup_{p\in\bar{P}} K(p,r)$ consiste de un número finito de secciones n-dimensionales, donde $\bar{P} = P \cup P'$ y $K(p,r)$ es una n-esfera de centro p y radio r.

El primer supuesto garantiza que la integral $\int_{\Pi(P,r)}(dx_1dx_2\cdots dx_n)$ está definida. Así, Cantor define el *contenido* o *volumen* de P, $I(P)$, como:

$$I(P) = \lim_{r\to 0}\int_{\Pi(P,r)}(dx_1dx_2\cdots dx_n)$$

Cantor aclara que el contenido de un conjunto P, depende de la dimensión del espacio en el que es considerado como subconjunto. Es decir, si P es al que considera como un subconjunto de E^m , el contenido m-dimensional de P generalmente difiere del contenido n-dimensional. Por ejemplo, un cuadrado unidad considerado como un subconjunto del espacio de tres dimensiones tiene un contenido 0, pero considerado como subconjunto del espacio dos dimensiones se ha contenido 1. Cantor manifiesta que: "Esta noción general de volumen o magnitud es indispensable para mí en las investigaciones sobre las dimensiones de los conjuntos continuos...". Cantor no parece estar interesado en el problema de la integración, sólo la usa para estudiar las propiedades de los conjuntos de puntos, que son su interés tal como él mismo lo manifiesta. Sin embargo, es en conexión con la teoría de las integrales múltiples que las nociones de contenido y contenido exterior serán desarrolladas, gracias a Harnack, Stolz y Jordan.

Harnack, en el artículo *Ueber den Inhalt von Punktmengen*[82] publicado en 1885, propuso su definición del contenido de un conjunto. En la definición de un conjunto discreto, Harnack había anotado que el conjunto está cubierto por un número finito de intervalos y, en consecuencia definió el contenido de un subconjunto acotado de los números reales como el límite de la suma de las longitudes de los finitos intervalos que recubren el subconjunto dado.

Después de enunciar su propia definición de contenido, Harnack procedió a demostrar que los teoremas de Cantor conservan su validez con esta nueva definición. La definición de Cantor también resultó de interés para Harnack en relación a lo que ocurre cuando el número de intervalos que cubren el conjunto es infinito: “en cierto sentido, todo conjunto

[82] *Sobre el contenido de los conjuntos de puntos*

de puntos *numerable* tiene la propiedad de que todos sus puntos pueden encerrarse en intervalos cuya suma es arbitrariamente pequeña"[83], puesto que, dado un conjunto numerable $E = \{e_n\}$, para todo $\varepsilon > 0$, cada e_n puede encerrarse en un intervalo I_n de longitud $\frac{\varepsilon}{2^n}$, la longitud total será entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$. De esta manera los conjuntos numerables tienen contenido nulo, lo que resulta paradójico para la época, puesto que aún no independizaban completamente las propiedades topológicas de las propiedades de la medida, si bien admitían que los conjuntos diseminados- "insignificantes topológicamente"- tuvieran contenido positivo; no podían admitir que un conjunto denso, como el de los racionales en $[0,1]$, tuviera contenido nulo.

Estos trabajos de los matemáticos alemanes sobre los conjuntos de puntos y su relación con el análisis, serán conocidos en Francia gracias a Camille Jordan (1838-1922). Jordan, en 1892, es el primero en enunciar la condición de integrabilidad de Riemann en términos del contenido del conjunto sobre el cual está definida la función a integrar. Por su parte Émile Borel (1871-1956) influenciado por los trabajos de Cantor, es quien define la medida de un conjunto en términos de recubrimientos infinitos. Tal como lo reconoce Lebesgue en su tesis doctoral, serán los resultados de Jordan y Borel los que le permitirán construir su teoría de la medida e integración. Analizaremos dichos resultados en la sección 1.12.

Por otra parte, el descubrimiento de los conjuntos diseminados de contenido positivo, también jugó un importante papel en el hallazgo de funciones con derivada acotada que no son Riemann Integrables, lo que evidenciaba que con la definición de integral de Riemann el problema del cálculo de primitivas no estaba completamente resuelto, para una clase de funciones suficientemente general, puesto que derivación e integración no son siempre operaciones inversas. Veamos como los trabajos de Volterra, Dini y Darboux sobre la integral de Riemann, si bien intentan generalizar los resultados de Riemann, ponen en evidencia las limitaciones de la misma.

1.13 La integral de Riemann y el problema de la primitiva de una función

En 1875, Gaston Darboux (1842-1917) en su *Mémorie sur les fonctions discontinues,* fundamentándose en los resultados de Riemann y Hankel, presenta una clasificación de

---

[83] Citado por (Ferreirós, 1991, pág. 200)

funciones discontinuas en integrables y no integrables, en términos del concepto de oscilación. Redefine la integral de Riemann mediante sumas superiores e inferiores, y entre las consecuencias de esta definición, enuncia y demuestra el teorema fundamental del cálculo para funciones acotadas.

Retomando a Riemann, Darboux incorpora a partir de las nociones de límite máximo y límite mínimo el concepto de oscilación.

Definición: La oscilación $\varDelta$ de la función f en el intervalo $[a, b]$ se define como la diferencia entre el límite máximo M y el límite mínimo m de la función f en el intervalo $[a, b]$, es decir $\Delta = M - m$.

Basándose en las nociones de límite máximo, límite mínimo y oscilación, Darboux demuestra la existencia de los límites de las sumas superior e inferior de una función acotada en un intervalo $[a, b]$. Tomando como referencia la igualdad entre dichos límites establece la existencia de la integral definida.

> Yo digo que, para n suficientemente grande, y todos los intervalos δ tiendan a cero, las tres sumas precedentes, cualquiera que se la función considerada, continua o discontinua, tenderán cada una a un límite finito y determinado independiente la naturaleza de la función y de los valores extremos a,b que limitan el intervalo considerado (Darboux, 1875, pág. 65)

Resultado que podemos enunciar en términos modernos como:

Teorema: Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ es una partición de dicho intervalo tal que $a = x_0$ y $b = x_n$, entonces las sumas: $\bar{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, $\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, $\Delta(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, donde $\Delta_i = M_i - m_i$, para $i = 1,2, \cdots, n$, tenderán hacia un límite finito y determinado.

Darboux lo demuestra para las sumas superiores $\bar{S}(f, P)$. Para esto define una sucesión de sumas superiores $\{\bar{S}(f, P^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ en términos de los refinamientos P^n de la partición P, y demuestra que esta sucesión está acotada inferiormente por $m(b - a)$. Luego demuestra que independiente de la partición la suma $\bar{S}(f, P)$ tiende hacia $\mu = inf_{n \to \infty}\{\bar{S}(f, P^n)\}$. El concepto de sumas de Riemann, superiores e inferiores, es introducido por Karl J. Thomae (1840-1921) en 1873; él demuestra que estas sumas convergen a un único límite cuando las norma de la partición tiende a cero, y bajo esta consideración la función es integrable independiente de que sea acotada o no. Estos, y otros resultados son retomados por Darboux en su memoria de 1875.

Para establecer su clasificación de funciones discontinuas, Darboux utiliza el hecho de que $\Delta(f, P)$ tiene límite cuando $\|P\| \to 0$.

> Ahora estamos en condiciones de dar, en sentido estricto, la definición de integral definida de Riemann, pero ahora, podemos dividir en dos grandes clases las funciones discontinuas, Acabamos de mostrar que las tres sumas
> $$M = \delta_1 M_1 + \cdots + \delta_n M_n$$
> $$m = \delta_1 m_1 + \cdots + \delta_n m_n$$
> $$\Delta = \delta_1 D_1 + \cdots + \delta_n D_n$$
> tienden a un límite finito y determinado, cuando todos los intervalos tienden a cero. Podemos llamar a estos límites $M_{ab}, m_{ab}, \Delta_{ab}$. Sea
> $\Delta_{ab} = M_{ab} - m_{ab}$.
> Es claro que la naturaleza íntima de la función depende principalmente del límite Δ_{ab}.
> Para una primera clase de funciones, tendremos
> $\Delta_{ab} = 0, M_{ab} = m_{ab}$;
> Para la segunda clase, Δ_{ab} será en general una función de a y b, diferente de cero (Darboux, 1875, pág. 70).

Es decir, define $\Delta_{ab} = \lim_{\|P\| \to 0} \Delta(f, P)$y distingue entre las funciones discontinuas para las cuales $\Delta_{ab} = 0$ y $\Delta_{ab} \neq 0$. Citando a Riemann, Darboux establece las condiciones para que $\Delta_{ab} = 0$.

Después de presentar la definición de la integral de Riemann, demuestra que la condición suficiente y necesaria para que una función sea Riemann integrable en un intervalo $[a, b]$ es precisamente que $\Delta_{ab} = 0$.

> Por lo que la condición necesaria y suficiente para que la suma $\sum$ tenga un límite, es que la medida total de los intervalos en los cuales la oscilación es mayor que σ tienda a cero cuando todos los intervalos tiendan a cero, σ es fijo, pero tan pequeño como se quiera.
> Si se cumple esta condición, el límite de $\sum$ se llamará la integral de $f(x)$ entre los límites a y b. Tenemos
> $\lim \sum = \int_a^b f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$ (Darboux, 1875, pág. 72)

Puesto que ya se había demostrado la existencia de las sumas superior $\bar{S}(f, P)$, e inferior $\underline{S}(f, P)$, y que $\underline{S}(f, P) \leq \bar{S}(f, P)$. Se tiene que la igualdad $\lim_{\|P\| \to 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{\|P\| \to 0} \overline{S}(f, P)$, que es equivalente a $\lim_{\|P\| \to 0} \Delta(f, P) = 0$, es una condición necesaria y suficiente para que la integral definida de Riemann $\int_a^b f(x)$ exista. Darboux enuncia el primer criterio de integrabilidad de Riemann en términos de la igualdad de los límites de las sumas superiores e inferiores.

El concepto de integral superior e inferior de Riemann será introducido en 1881 por Vito Volterra, como los límites respectivos de las sumas inferiores y superiores:

$$\underline{\int}_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \underline{S}(f,P)\ ,\ \overline{\int}_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \bar{S}(f,P)$$

De esta manera Volterra, transforma el criterio en términos de la igualdad de las integrales superior e inferior de Riemann, es decir *f* es Riemann integrable si y sólo si $\underline{\int}_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx.$

Darboux enuncia y demuestra tres importantes resultados como consecuencias de la definición de integral de Riemann, entre ellos el teorema fundamental del Cálculo:

> En primer lugar *la integral de la función* $f(x)$ *seguirá existiendo y no cambia de valor*, si cambian *los valores de* $f(x)$ *para un número limitado de valores de* x.
> […] En segundo lugar, *la integral* $\int_a^x f(x)dx$ *es siempre continua*.
> […] En tercer lugar, sea $F(x) = \int_a^x f(x)dx$,y supóngase que $f(x)$ para el valor $x = x_0$. Entonces, en el intervalo $(x_0, x_0 + h)$, $f(x)$ estará comprendido entre $f(x_0) + \sigma$ y $f(x_0) - \sigma$, σ tiende a cero con h. Por lo tanto:
>
> $$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx < h[f(x_0) + \sigma]$$
>
> $> h[f(x_0) - \sigma]$,
> $f(x_0) - \sigma < \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} < f(x_0) + \sigma$,
> por lo tanto
> $\lim \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$.
> Así la función $f(x)$ es la derivada de $F(x)$, para todos los valores de *x* para los cuales $f(x)$ es continua.
> Se demuestra de una manera muy similar (ver art.IX), que si una función $f(x)$ susceptible de integración se deriva de otra función $F(x)$, necesariamente
>
> $$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$$
>
> La división de las funciones discontinuas en dos clases, las unas susceptibles de integración, las otras no integrables, tiene una gran importancia […] (Darboux, 1875, págs. 75-76).

Para demostrar este último resultado Darboux utiliza el teorema del valor medio.

Teorema: Sea *f* la derivada de una función *F*. Si *f* es integrable en el intervalo $[a, x]$, entonces se tiene que:

$$\int_a^x f(s)\,ds = F(x) - F(a).$$

Demostración: Puesto que *f* es integrable en $[a, x]$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición *P* de $[a, x]$, con $\|P\| < \delta$, de tiene que:

$$\left|S(f,P,(t_1,t_2,\cdots,t_n)) - \int_a^x f(s)ds\right| < \varepsilon.$$

Sea $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = x\}$ una partición de $[a,x]$ tal que $\|P\| < \delta$. Por el teorema del valor medio, aplicado a F en $[x_{i-1}, x_i]$, existe $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(x) - F(a).$$

Por lo que podemos concluir que

$$\left|(F(x) - F(a)) - \int_a^x f(s)\,ds\right| < \varepsilon.$$

Es decir,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(s)\,ds \blacksquare$$

Después de presentar la anterior demostración, al final de su memoria, Darboux llama la atención sobre el problema del cálculo de primitivas:

> Parece difícil dar una característica general que permita reconocer si una función $f(x)$ es una función primitiva, es decir, si ella es la derivada de otra función.
> Sin embargo, donde $f(x)$ es susceptible de integración, la solución se puede dar (Darboux, 1875, pág. 111)

Justamente una de las cuestiones sobre el cálculo integral que preocupa a Lebesgue, es el problema de la primitiva de una función, tal como lo expresa en la introducción de su tesis doctoral *Integrale, Longueur,Aire:*

> Se sabe que existen funciones derivadas no integrables, cuando se adopta, como ha hecho Mr Jordan, la definición de integral que ha dado Riemann; de suerte que la integración, tal como la ha definido Riemann, no permite en todos los casos resolver el problema fundamental del cálculo integral: Encontrar una función de la cual se conoce su derivada.
> Puede parecer pues natural buscar otra definición del integral, tal y como, en los casos más generales, la integración como la operación inversa de la derivación (Lebesgue, 1902).

Veremos en el siguiente capítulo que Lebesgue resuelve el problema para el caso de las funciones con derivada acotada.

En el apartado VI de su memoria, Darboux presenta un método de construcción de funciones discontinuas integrables, fundamentándose en el ejemplo de Riemann de una función integrable con un conjunto denso de discontinuidades. A partir de esto, Darboux enuncia un teorema que le permite dar cuenta de la integrabilidad de una función dada, y con ello caracterizar de manera significativa las funciones discontinuas integrables:

Teorema: Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función tal que para cada $x_0 \in [a, b]$ los límites laterales, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, existen; entonces f es integrable.

Otro aporte importante de Darboux está relacionado con el descubrimiento del hecho de que la integrabilidad de Riemann no se conserva en el paso al límite. En el apartado V de su memoria sobre funciones discontinuas, Darboux sintetiza los resultados más importantes de la convergencia uniforme, principalmente la relación con el intercambio de los operadores suma-integral, suma-derivada, suma-límite. Inicialmente define convergencia absoluta y convergencia uniforme, aclarando que estos conceptos son los mismos que aparecen en los trabajos, sobre series trigonométricas, de Heine, Thomae y Cantor. Darboux demuestra que la convergencia uniforme es una condición suficiente para conservar la integrabilidad, en el siguiente teorema:

> Si todos los términos de una serie son funciones continuas o discontinuas susceptibles de integración, y si la serie es uniformemente convergente en un intervalo dado (a, b),[84] la función que representa la serie, y que no es necesariamente continua, será susceptible de integración. Su integral será la suma de las integrales de todos sus términos (Darboux, 1875, pág. 82).

Darboux sólo demuestra que $\left(\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(t_i)\, \Delta x_i\right)$ existe, sin demostrar explícitamente el intercambio de las operaciones de suma e integración. Para demostrar la existencia del límite se basa en que dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que para cada $n \geq N$ implica que:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f_k(t_i) \Delta x_i - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{m} f(t_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f_k(t_i)\, \Delta x_i + \varepsilon$$

Darboux resalta el hecho de que si la hipótesis de convergencia uniforme en el teorema anterior no se satisface, la integración término a término no es posible:

> Nota- Si las condiciones indicadas en el enunciado del teorema V no se cumplen, no podemos integrar, sin una revisión previa, todos los términos de la serie. Vamos a dar un ejemplo de una serie siempre convergente que representa una función continua $f(x)$ de x tal que la serie de las integrales, que siempre es convergente, no representa la integral de $f(x)$ (Darboux, 1875, pág. 84)

Darboux utiliza el siguiente contraejemplo para demostrar que el intercambio entre las operaciones de integración y suma no es posible, es decir:

[84] a y b están incluidos.

$$\int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty} -2k^2 x e^{-k^2 x^2} + 2(k+1)^2 x e^{-(k+1)^2 x^2} \right) dx$$
$$\neq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left(-2k^2 x e^{-k^2 x^2} + 2(k+1)^2 x e^{-(k+1)^2 x^2}\right) dx.$$

Puesto que

$$\int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty} -2k^2 x e^{-k^2 x^2} + 2(k+1)^2 x e^{-(k+1)^2 x^2}\right) dx = \int_0^t -2x e^{-x^2} dx = e^{-t^2} - 1.$$

Mientras que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \left(-2k^2 x e^{-k^2 x^2} + 2(k+1)^2 x e^{-(k+1)^2 x^2}\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t^2} - e^{-(k+1)^2 t^2} = e^{-t^2}.$$

Posteriormente, Cesare Arzelà en 1885, y W.F.Osgood en 1897, demuestran que el paso al límite bajo el signo integral se puede efectuar si la sucesión de funciones es uniformemente acotada y la función límite es Riemann integrable. Lebesgue demuestra, en su tesis doctoral,[85] que el paso al límite se puede dar para toda sucesión de funciones Lebesgue integrables siempre que la sucesión sea convergente y uniformemente acotada, y comenta que su teorema es una extensión del teorema, para funciones continuas, de Arzelà y Osgood.

La demostración del teorema fundamental del cálculo, presentada por Darboux, servirá de base al matemático italiano Ulisse Dini (1845 –1918), para establecer un resultado que evidenciará la existencia de funciones que no son Riemann integrables. En los *Fundamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*[86], publicada en 1878, Dini observa que si f es una función tal que para todo intervalo existen puntos t, para los cuales $f'(t) = 0$, es decir que la derivada se anula en un conjunto denso, y si $f'(t)$ es acotada, entonces para todo $x \epsilon [a, b]$ se tendrá que $\int_a^b f'(t)dt = 0$. Ya que en las sumas $S_n = \sum_{i=1}^{n} f'(t_i)(x_i - x_{i-1})$, que definen la integral, se puede tomar siempre los t_i tales que $f'(t_i) = 0$. Por el teorema fundamental y la unicidad del límite de las sumas (si f' es integrable) se tiene entonces que:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = 0.$$

---

[85] Ver teorema 2.3.31 de este documento.

[86] Fundamentos de la teoría de funciones de variable real.

Por lo cual, $f(x) = f(a)$ para todo $x \in [a, b]$, es decir, f es constante en $[a, b]$. Sin embargo, Dini contempla la posibilidad de la existencia de funciones no constantes que cumplan la propiedad anterior, por lo que f' no podría ser integrable.

En 1881 Volterra construye un ejemplo[87] de una función no constante, con una derivada f' acotada y que se anula en un conjunto denso de puntos; verificando así la conjetura de Dini. Este ejemplo confirma que, bajo la definición de Riemann, integral y derivada no son operaciones inversas. Además, Lebesgue se inspirará en este resultado de Volterra para demostrar que la condición necesaria y suficiente para la existencia de una integral de la derivada (acotada o no) de una función diferenciable, es que dicha función sea de variación acotada.[88]

Otro ejemplo importante de este tipo de funciones que no son Riemann integrables, es presentado en 1896 por el matemático sueco T. Broden, el cuál utiliza el método, de Hankel, de condensación de singularidades, el que a su vez, como ya se había comentado, fue inspirado en la construcción de la función de Riemann, discontinua en un conjunto denso de puntos y Riemann integrable.

Sea $g(x) = x^{\frac{1}{3}}, x \in [-1,1]$. En $x = 0$ se tiene que $g'(0) = \infty$, para los demás valores de x la derivada existe y es finita. Considérese un subconjunto denso $\{a_n\}$ de $[-1,1]$, y defínase:

$$g_n(x) = g(x - a_n) = (x - a_n)^{\frac{1}{3}}, \text{ para cada } n.$$

Se tiene que g' existe para cada $x \in [-1,1]$, y $g'(a_n) = \infty$. Consideremos la serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{2^n}.$$

Por lo que,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g'_n(x)}{2^n} \text{ y } f'(a_n) = \infty, \text{para cada } n.$$

Dado que cada $g_n(x)$ es estrictamente creciente, entonces f es estrictamente creciente; y por tanto f tiene función inversa, que denotaremos h, definida sobre $[f(-1), f(1)]$. Puesto que $h'(y) = \frac{1}{f'(x)}, y = f(x)$, entonces $h'(f(a_n)) = 0$ para cada n. Se puede demostrar que

[87] Ver ejemplo 2.3.40 de este trabajo.

[88] Estos resultados de Lebesgue, con respecto a la primitiva de una función, se analizarán con detalle en el siguiente capítulo.

h' es acotada, se anula en un conjunto denso de puntos $\{a_n\}$ y es estrictamente creciente, luego no es constante, con lo cual, no sería Riemann integrable.

Como se puede observar, en el ejemplo anterior, la derivada de este tipo de funciones se obtiene por un proceso de paso al límite, por lo que de nuevo se pone de relieve que el limitante de la integral tipo Riemann, es que no conserva la integrabilidad en el paso al límite.

Un concepto importante relacionado con la validez del teorema fundamental del cálculo para funciones continuas bajo la integral de Riemann, introducido por Dini, es el de las cuatro derivadas $D_{-}f(x)$, $D^{-}f(x), D_{+}f(x)$ y $D^{+}f(x)$.[89] Para ello, Dini considera

$$l_x = inf\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\} \text{ y } L_x = sup\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\},$$

Para $x \in (a,b)$ y con $0 < h < b - x$; l_x y L_x son funciones de x en b.

De acuerdo con Dini:

> Está claro que si se hace decrecer b continuamente haciéndolo acercar indefinidamente a x, La cantidad l_x crecerá o permanecerá invariable, mientras que la cantidad L_x decrecerá o permanecerá invariable.
> Y luego l_x y L_x tenderán a dos limites determinados (finito o infinito) λ_x y Λ_x, que pueden ser considerados como límites superior e inferior de las respectivos cantidades l_x y L_x para diferentes valores de b entre x y b, evidentemente estos números λ_x y Λ_x , independiente de la longitud del intervalo (a,b) y dependiente sólo de la naturaleza de la función $f(x)$ en el entorno derecho de x , gozando de la propiedad que, dado un número positivo ε tan pequeño como se quiera, el cociente de la derecha de f con h tendiendo a cero se mantiene siempre entre $\lambda_x - \varepsilon$ y $\Lambda_x + \varepsilon$ si λ_x y Λ_x son finitos, o varían entre números positivos y negativos arbitrariamente grandes cuando $\lambda_x = -\infty$ y $\Lambda_x = +\infty$ (Dini, 1878, págs. 190-191).

De esta manera,

$$D_{+}f(x) = \text{liminf}_{h\searrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ y } D^{+}f(x) = \text{limsup}_{h\searrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$D_{-}f(x)$ y $D^{-}f(x)$ son definidas de manera similar con respecto a $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$, con $h > 0$.

Dini establece que si $F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$ entonces las cuatro derivadas de F serán acotadas, y por tanto integrables, además $F(b) - F(a) = \int_a^b DF$, donde DF denota cualquiera de las cuatro derivadas. El teorema fundamental conserva el significado para una

[89] Hawkins observa que esta notación para las cuatro derivadas es introducida por Ludwig Scheeffer en 1884.

función integrable en le sentido que $F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$ posee cuatro derivadas las cuales difieren una de otra de *f* por una "función de integral nula". Esto es $DF(x) = f(x) + n(x)$, donde *n* es una función integrable, cuya integral sobre todo intervalo es cero. Entonces una función integrable es una función de integral nula si y sólo si es cero excepto posiblemente en un conjunto de medida cero. EL resultado de Dini es equivalente al enunciado de que $\left(\int_a^x f\,(s)ds\right)' = f(x)$ excepto en un conjunto de medida cero. De acuerdo con Hawkins, la introducción del concepto de función de integral nula refleja la comprensión, por parte de Dini, de que la relación entre *DF* y *f* no está completamente caracterizada por el hecho que $DF(x) = f(x)$ en un conjunto dense.

Dini considera la otra versión del teorema Fundamental y presenta una demostración basado en las cuatro derivadas. La propiedad fundamental de las cuatro derivadas, el hecho de que $\lambda = l$ y $\Lambda = L$, muestra que

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = D_i$$

Donde D_i se encuentra entre el extremo inferior y el extremo superior de *DF* en $[x_{i-1}, x_i]$. Así, si *F* es una función continua y una de sus cuatro derivadas *DF* es integrable entonces $\int_a^b DF = F(b) - F(a)$

De acuerdo con Hawkins,[90] Darboux y du Bois-Reymond en sus demostraciones habían incluido la hipótesis de que la derivada de *F* sea integrable, pero fue Dini el primero en llamar la atención sobre el hecho de que en efecto esta hipótesis es necesaria, incluso cuando las derivadas de *F* son acotadas. Veamos la interpretación que Hawkins hace del razonamiento de Dini:

Supongamos, que él razonó, que si *F* no es constante en $[\alpha, \beta]$ pero todo subintervalo de $[\alpha, \beta]$ contiene puntos en los cuales *F* toma un valor máximo o mínimo relativo, o contiene un intervalo en el cual *F* permanece constante. Supongamos además que las cuatro derivadas son acotadas. Entonces $D_+F(x) \leq 0$ y $D^+F(x) \geq 0$ en un subconjunto denso de $[\alpha, \beta]$ de modo que, correspondiente a una partición $\alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \beta$, existen puntos t_i y t'_i en (x_{i-1}, x_i) tales que

[90] (Hawkins, 1979, pág. 52)

$$\sum_{i=1}^{n} D_{+}F(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} D^{+}F(t'_i)(x_i - x_{i-1}) \geq 0.$$

Por lo tanto si las cuatro derivadas de F son integrables, sería necesario que $\int_{\alpha}^{\beta} DF = 0$; pero el teorema fundamental implica que $F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} DF$. Puesto que F no es constante en $[\alpha, \beta]$, sin embargo, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $F(\beta) - F(\alpha) \neq 0$. Por lo tanto, las derivadas de F no pueden ser integrables.

Dini no pudo exhibir una función F continua y no constante, con la propiedad de que cada intervalo contiene un subintervalo en el que F permanece constante. La existencia de esta función está directamente relacionada con la existencia de conjuntos diseminados de contenido exterior positivo: Supongamos que F es una función continua definida en [0,1] con intervalos densamente distribuidos "intervalos de invariabilidad" $I_1, I_2, \cdots, I_n$. Para simplificar, estos intervalos se toman como intervalos abiertos. Sea *G* el conjunto de puntos en [0,1] que no pertenecen a los I_n. Entonces *G* es un conjunto diseminado, en virtud de la "propagación" de los I_n. Además, los puntos de discontinuidad de, por ejemplo, $D^{+}F$ deben pertenecer a *G* ya que $D^{+}F$ es igual a cero en cada I_n y en consecuencia, continua en dicho intervalo. Por lo tanto, puesto que $D^{+}F$ no es integrable, sus puntos de discontinuidad no pueden ser encerrados en un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña. En otras palabras, *G* debe ser un conjunto diseminado de contenido exterior positivo. Es importante darse cuenta de que esta observación también sugiere la manera de construir un conjunto diseminado de contenido exterior positivo, es decir, mediante la construcción de una sucesión de intervalos densamente distribuidos en, por ejemplo, $[0,1]$, tal que la suma de sus longitudes es menor que 1. Entonces *G*, el conjunto complemento de los intervalos, tiene un contenido exterior positivo.

Dini estaba seguro de que sus funciones hipotéticas realmente existían, y de hecho, conjeturó, además, que existen funciones que poseen una derivada ordinaria, acotada y que asumen valores extremos en cada intervalo. Du Bois-Reymond había conjeturado que, por el contrario, una función que es diferenciable en toda parte no puede tener valores máximos en un conjunto denso.[91] En este punto, Dini estaba en lo cierto y su conjetura llevó al descubrimiento de clases de funciones con derivadas acotadas que no son Riemann

[91] Citado por (Hawkins, 1979, pág. 52)

integrables, lo que permitió el establecimiento del teorema fundamental en el contexto más general de las funciones integrables. Esto motivaría a Lebesgue a buscar una definición de integral más general, y que garantizara la relación inversa entre derivada e integral.

1.14 La integral de Riemann en el contexto de la medida

La dependencia entre la integrabilidad en el sentido de Riemann y la continuidad de las funciones a integrar trae como consecuencia la necesidad de medir conjuntos arbitrarios de puntos de la recta. Se sabía que una función era integrable si sus puntos de discontinuidad podían ser "ignorados" de alguna manera. Esto condujo a buscar la definición de una medida para el conjunto de puntos de discontinuidad de una función, de manera que la condición de integrabilidad pudiera expresarse en términos de tal medida.

El concepto de contenido introducido independientemente por Stolz, Cantor y Harnack, el cual corresponde a lo que hoy conocemos como contenido exterior, se relaciona con la teoría de conjuntos discretos de Harnack y con el segundo criterio de integrabilidad de Riemann. Esta definición de contenido es aplicable a todo subconjunto acotado del plano. En particular, si f es definida y acotada en $[a,\ b]$ y si E representa el conjunto de puntos en el plano limitado por la gráfica de f, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje x, entonces E y los subconjuntos E^+ y E^-(los puntos de E por encima y por debajo del eje x) poseen contenido independiente de que f sea o no sea integrable. La relación conocida entre el concepto de área e integral, es decir la siguiente igualdad, no es válida si el área se identifica con el contenido:

$$\int_a^b f = area(E^+) - area(E^-),\ \int_a^b |f| = area(E).$$

Harnack observa que si f es una función positiva ($E = E^+$), entonces el contenido de E no puede ser expresado por una integral a menos que su frontera, la que efectivamente se deja sin definir, sea un conjunto discreto, es decir, que E sea medible en el sentido de Jordan. Pero nunca se le ocurrió restringir el concepto de contenido a este tipo de conjuntos, al igual que la integración se limita a las funciones integrables. Este concepto de contenido fue, para muchos matemáticos, disociado del concepto de la integral definida; se asumía que la región E, acotada por la gráfica de una función, siempre tiene un contenido sin tener en cuenta si la función es integrable.

Fue principalmente a través de la teoría de las integrales múltiples y, en particular, a través de la obra de Camille Jordan que la importancia de la noción de medida en la teoría de la integración fue reconocida explícitamente por primera vez.

Sin embargo, ya en Giuseppe Peano (1858-1932) se encuentra una actitud diferente hacia la relación entre estos conceptos. En *Sulla integrabilitá delle funzioni*, en 1883, Peano observó que los resultados de la teoría de la integración podían ser simplificados al reconocer que las integrales superior e inferior, $\overline{\int}_a^b$ y $\underline{\int}_a^b f$, pueden ser definidas respectivamente, como el extremo inferior de las sumas superiores de Riemann y el extremo superior de las sumas inferiores. Además, criticó el hecho de que la existencia y definición de la integral definida se fundamentara en el concepto de área, no porque estuviera en contra del enfoque geométrico sino porque el concepto de área aún no tenía una definición precisa y suficientemente general.

Para una región en el plano "de forma simple" Peano dio, la que él consideraba la definición más natural de área: Considere las dos clases de polígonos que contienen y están contenidos dentro de la región en cuestión. El área de los polígonos de primera clase tiene un extremo inferior; y la segunda clase, un extremo superior. Si estos límites coinciden, el valor común es por definición el área de la región. En otro caso, si ellos difieren, "el concepto de área no puede ser aplicado en este caso. Por lo tanto, para hablar del área de una figura, primero es necesario verificar que estos dos límites son iguales, lo cual no es más que la condición de integrabilidad anterior".[92] Peano considera, para cada conjunto acotado E una medida interior. Al parecer, la primera definición formal de área se la debemos a él. Peano retomó, como punto de partida para su definición, la idea de Eudoxo y su método de exhausión. Definió el área interior $a_i(A)$ de A como la mínima cota superior de las áreas de todos los polígonos contenidos en S y el área exterior $a_e(A)$ como la máxima cota inferior de las áreas de todos los polígonos que contienen a A. Es claro que $a_i(A) \leq a_e(A)$, cuando se cumple la igualdad el valor común corresponde al área de A.

En 1887 Peano expuso estas ideas con detalle, en el capítulo V de *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, tiulado *Grandezze Geometriche*. En la primera

[92] Citado por (Hawkins, 1979, pág. 87)

parte de este capítulo se establece, mediante superposición, cuándo dos magnitudes geométricas de la misma categoría son iguales, y cuándo una es mayor que otra; define un *campo de puntos* o *figura* como un conjunto de puntos finito o infinito, y los clasifica en campos rectilíneos y campos planos, según que todos sus puntos estén sobre una recta o sobre un plano.[93]

Las investigaciones de Cantor sobre los conjuntos de puntos parecen haber influenciado a Peano para presentar su concepto de área en el contexto de los conjuntos totalmente arbitrarios. Para ello, define punto interior, punto límite, punto exterior y contorno o campo límite, asociados con regiones acotadas por curvas, en espacios Euclidianos de una, dos o tres dimensiones:[94] un punto p es un punto interior de un campo A, si existe un positivo δ tal que para todo $x \in A$ su distancia a p es menor que δ; p es exterior al campo A si para todo x tal que su distancia a p es menor que δ , x no pertenece a A; y p es un punto límite o frontera, si no es interior ni exterior. Los puntos límites de A, que pueden pertenecer o no pertenecer al campo A, forman un nuevo campo, este campo se llamará el límite o contorno de A.

Peano reconoció que el área exterior de A es igual a la suma del área interior de A mas el área exterior de la frontera de A, y su implicación de que A tiene área si y solo si el contenido exterior de su frontera es nulo.

Peano define los conceptos de función de un campo y función de distribución de un campo, como sigue:

> Una magnitud se dice *función* de un campo, si a cada campo, arbitrario o que cumple ciertas condiciones, corresponde un valor de esa magnitud (Peano, 1887, pág. 166).
> Una magnitud se llama *función de distribución* de un campo, si el valor de esa magnitud correspondiente a un campo es la suma de los valores correspondientes a las partes en que se puede descomponer el campo en cuestión (Peano, 1887, pág. 167).

Obsérvese que Peano, de cierta manera, está intentando caracterizar la función medida. Peano señaló que la función $a(A)$ es un ejemplo de lo que se refiere a una función de distribución, es decir, una función finitamente aditiva.

Su capítulo sobre las magnitudes geométricas es en gran parte dedicada al estudio y la aplicación de las funciones de distribución y, en particular, a una teoría de la

[93] (Peano, 1887, pág. 152)
[94] Ver (Peano, 1887, págs. 153-155)

diferenciación y la integración en el contexto de estas funciones. Al utilizar la función de distribución para definir la integral, Peano se anticipó al enfoque de la integral de Lebesgue; además al igual que Lebessgue, antes de definir la integral definida, define la integral geométrica en relación con el área. Sin embargo, según Hawkins, aparentemente el trabajo de Peano no influyó en la realización de este punto de vista.

En la sección *integral estesi a campi*[95] de *Applicazioni geometriche*, Peano presenta la siguiente definición de integral geométrica:

> Sea x una magnitud, función distributiva de un campo, y que toma sólo valores positivos. A cada punto del campo considerado corresponde un número ρ, el cual puede variar con el punto. Dícese *integral* de ρdx *extendida al campo A* una magnitud tal que:
> 1. Sea siempre mayor del resultado que se obtiene descomponiendo el campo A en partes, en modo cualquiera, multiplicando el valor de x correspondiente a cada una de estas partes por un numero menor de que todos los valores supuestos de ρ en este campo parcial, y sumando este producto; 2. Sea menor que la suma del producto del valor de x correspondiente a la parte de A por el número respectivamente mayor que los asumidos por ρ en las partes mismas; 3. Esta será la única magnitud que goce de esta propiedad. Indicaremos la integral de ρdx extendida al campo A con la escritura $\int_A \rho dx$. Por tanto con $\int_A \rho dx$ nos referimos a una magnitud (homogénea con x), de tal manera que descomponiendo el campo en partes de cualquier manera $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, indicando con $x(A_1), x(A_2), \cdots, x(A_n)$ el valor correspondiente de x, y $\rho_1', \rho'_2, \cdots, \rho'_n$ y $\rho''_1, \rho''_2, \cdots, \rho''_n$ números, los primeros menores y los otros mayores que los valores asumidos por ρ en los campos parciales, sean siempre satisfechas las desigualdades
> $$\int_A \rho dx > \rho_1' x(A_1) + \rho'_2 x(A_2) + \cdots + \rho'_n\, x(A_n)$$
> $$\int_A \rho dx < \rho_1'' x(A_1) + \rho''_2 x(A_2) + \cdots + \rho''_n\, x(A_n)$$

Peano considera las sumas $s' = \rho_1' x(A_1) + \rho'_2 x(A_2) + \cdots + \rho'_n\, x(A_n)$ y $s'' = \rho_1'' x(A_1) + \rho''_2 x(A_2) + \cdots + \rho''_n\, x(A_n)$ y define la integral inferior $\underline{\int_A} \rho dx$ como el límite superior de las sumas inferiores *s'*, y la integral superior $\overline{\int_A} \rho dx$ como el límite inferior de las sumas superiores *s''*. Si estos límites existen y son iguales, su valor corresponde a la integral $\int_A \rho dx$. Peano observa que está integral geométrica presenta grandes analogías con la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ del cálculo integral, y señala la estrecha relación entre los conceptos de medida y de integral: si $f(x)$ es no negativa para $x \in [a, b]$, entonces si E denota la región acotada por el gráfico de f

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = a_e(E) \text{ y } \underline{\int_a^b} f(x) dx = a_i(E)$$

[95] (Peano, 1887, pág. 185)

Si estas dos integrales son iguales, f es integrable y "por lo tanto $\int_a^b f(x)\,dx$ mide el área descrita" (Peano, 1887, pág. 194). Lo que es equivalente a decir que f es integrable si y sólo si E es medible, es decir $a_i(E) = a_e(E)$.

Esta última observación muestra que el criterio de Peano para la existencia del área fue establecido por analogía con el primer criterio de integrabilidad de Riemann, a pesar de que la definición de contenido había sido motivada por el segundo criterio de integrabilidad.

A pesar de que Peano llama la atención sobre la relación entre la integral de la función y el área del campo de integración, será Camille Jordan en 1892 en *Remarques sur les intégrales définies* quien hará explícita dicha relación:

> La influencia de la naturaleza del campo no parece que se haya estudiado con el mismo cuidado. Todas las demostraciones se basan en el postulado de que el campo E tiene un extensión específica, y que si se descompone en partes $E_1, E_2, \cdots$, la suma de las extensiones de estas piezas es igual a la extensión total de E. Estas proposiciones están lejos de ser evidentes si se deja la concepción de campo en toda su generalidad.
> [...]La determinación de una integral propia múltiple se reduce a una sucesión de integrales simple, siempre que el campo sea medible (Jordan C. , 1892, págs. 70-71).

Aquí Jordan expresa que su objetivo es mostrar que a cualquier campo E le corresponden dos números, la extensión interior y la extensión exterior, y que si esos dos números coinciden se dirá que E es medible y que su extensión es ese número común. Para que E sea medible es "necesario y suficiente que la frontera de E tenga extensión nula" (Jordan C. , 1892, pág. 71). Además:

> Una función f, que permanece acotada en el interior de E, admite en esta región una integral por exceso y una integral por defecto. Si esas dos integrales coinciden, ellas representan la integral propiamente dicha de la función f en el campo E (Jordan C. , 1892, pág. 71).

En este artículo se evidencia el reconocimiento de Jordan sobre la importancia de la teoría de conjuntos de puntos de Cantor en el análisis, y es precisamente él quien difunde dicha teoría en Francia. Antes de desarrollar sus ideas sobre los conjuntos medibles y la integral definida, Jordan presenta una sección sobre nociones generales de conjuntos, aclarando que su noción de conjunto como "una colección de puntos" es tomada de Cantor. Allí, Jordan define punto límite, punto interior, punto exterior, punto frontera, derivado de un conjunto, conjunto perfecto, conjunto complemento, interior de un conjunto, frontera de un conjunto y conjunto acotado; y demuestra varios resultados correspondientes estos conceptos.

Para definir, lo que hoy conocemos como el contenido de un conjunto, Jordan aclara que esa extensión será una longitud, un área o un volumen, según sea la dimensión del espacio al que pertenece el conjunto. Primero se refiera al área interior y al área exterior de un conjunto y luego afirma que:

> Las consideraciones precedentes son evidentemente aplicables a conjuntos de un número cualquiera de dimensiones. Podemos determinar para cada uno la extensión interior y la extensión exterior. Si ellas coinciden, el conjunto será medible (Jordan C. , 1892, pág. 79).

En terminología moderna, para definir el contenido interior y el contenido exterior de un conjunto *E*, Jordan considera un intervalo $[a,b]$ tal que $E \subseteq [a,b]$, y una partición de dicho intervalo $P\{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$. Si se designa $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ y $l(I_k) = x_k - x_{k-1}$, se tiene que $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} I_k$. Considera los intervalos I_k contenidos estrictamente en el interior de *E* para definir el contenido interior de *E*, $c_i(E)$, y los intervalos I_k que tienen algún punto en común con *E* para definir el contenido exterior de *E*, $c_e(E)$, como sigue:

$$c_i(E) = sup\left(\sum_{I_k \subset Int\,(E)} l(I_k)\right) \text{ y } c_e(E) = inf\left(\sum_{I_k \cap E \neq \emptyset} l(I_k)\right).$$

El conjunto E es medible según Jordan si $c_i(E) = c_e(E)$, y ese número común corresponde a la medida del conjunto.

Para definir la integral, retoma el concepto de de integral superior e inferior de Darboux y las relaciona con el concepto de contenido de la siguiente manera: dado el intervalo $[a,b]$ y una colección $\{E_k\}$ de conjuntos Jordan medibles tales que $[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, se definen las sumas superiores e inferiores de una función acotada *f* como:

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k c(E) \text{ y } L(U) = \sum_{k=1}^{n} M_k c(E),$$

donde m_k y M_k denotan respectivamente el ínfimo y el supremo de los valores de *f* en E_k, y $c(E)$ el contenido o medida de *E*. Las integrales por exceso y por defecto de Jordan, de manera similar a como las había definido Peano:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = inf\big(L(P)\big) \text{ y } \underline{\int_a^b} f(x)dx = sup\big(L(P)\big)$$

La función *f* será Riemann integrable si se cumple que $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$.

Una vez ha definido la integral de Riemann, enuncia y demuestra su versión del teorema de Fubini para el cálculo de integrales múltiples:

> Si una función $f(x, y, \cdots)$ de n variables es integrable en un dominio E, de extensión medible, el cálculo de la integral múltiple $I = S_E f(x, y, \cdots)$ se reducirá a n integrales simples sucesivas (Jordan C. , 1892, pág. 84).

Estas ideas de Jordan sobre medida e integración y la teoría de conjuntos de puntos influenciarán a matemáticos franceses, como Borel, Lebesgue y Baire.

Émilé Borel (1871-1956), impulsado por las investigaciones realizadas en su tesis doctoral (1894) sobre ciertas cuestiones relacionadas con las funciones analíticas y en particular con el estudio de series de funciones racionales de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(z-a_n)}$, donde A_n, a_n y z son números complejos, sitúa el origen de las nuevas ideas sobre la teoría de la medida en la teoría de las funciones complejas. Las demostraciones de algunos de estos resultados sugirieron a Borel la necesidad de dar una definición de medida que utilizase un número infinito de intervalos para cubrir el conjunto a medir. El punto de partida de Borel consiste en tomar como medida de un subconjunto abierto y acotado G de la recta real, la suma de la serie de las longitudes de los intervalos componentes, en lugar de utilizar cubrimientos finitos de G como era habitual; Borel se basa en un resultado conocido desde Cantor según el cual todo abierto G de $\mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos abiertos y disjuntos.

En su libro *Leçons sur la théorie des fonction*, Borel dedica el capítulo III al estudio de los conjuntos perfectos y los conjuntos medibles. Antes de introducir su teoría de la medida, advierte que su definición de conjunto medible no es tan general como la que presenta Jordan en su *Cours d'Analyse* y que el problema que lo motiva también es muy diferente al de Jordan.

Para Borel el proceso de medir aparece como una generalización de la longitud de un segmento; la medida de un intervalo comprendido entre a y b es $b - a$, es decir la longitud del intervalo; y los extremos no aportan a la medida del intervalo. A partir de aquí empieza a ampliar el universo de los conjuntos medibles:

> todos los conjuntos que nosotros consideramos serán formados por puntos entre 0 y 1. Cuando un conjunto esté formado por todos los puntos de una cantidad infinita numerable de intervalos que no se solapan y que tienen longitud total s, entonces diremos que el conjunto tiene medida s. Cuando dos conjuntos no tienen puntos comunes y sus medidas son s y s', entonces el conjunto obtenido uniéndolos, es decir, su suma, tendrá medida s+s'. Por otra parte, es irrelevante para determinar la media de un conjunto, o de la suma de dos conjuntos, el ignorar, o tener en cuenta como se quiera los extremos de intervalos, en infinito numerable.

> De una manera más general, si tenemos una infinidad numerable de conjuntos tales que dos a dos no tienen puntos comunes, y que tienen respectivamente medidas $s_1, s_2, \cdots, s_n$ entonces su suma (o el conjunto formado por su reunión) tiene por medida $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$.
> Todo esto es una consecuencia de la definición de medida. He aquí algunas nuevas definiciones: Si un conjunto E tiene medida s y contiene todos los puntos de otro conjunto E' de medida s', entonces el conjunto E -E' diremos que tiene medida s-s'... (Borel, 1898, págs. 46-47).

El universo de los conjuntos medibles de Borel queda totalmente determinado a partir de los intervalos, y las operaciones de unión numerable de conjuntos y diferencia de conjuntos. Una vez ha establecido estos conceptos, Borel demuestra que un conjunto de medida cero puede ser no contable y todo conjunto contable tiene medida cero. Además observa que un conjunto puede tener medida nula y tener la potencia del continuo.

Es importante tener en cuenta que Borel es consciente que su definición de medida es una definición axiomática:

> Hemos reconocido que una definición de medida sólo puede ser útil si ésta verifica ciertas propiedades fundamentales, nosotros hemos impuesto estas propiedades a priori y las hemos empleado para definir la clase de los conjuntos que hemos considerado como medibles. Esta forma de proceder presenta grandes analogías con el método introducido por el Sr. Drach en álgebra y en la teoría de las ecuaciones diferenciales […] En cualquier caso, procede de la misma idea fundamental: definir las nuevas propiedades, es decir, establecer qué propiedades son estrictamente indispensables para el razonamiento que se va a seguir […] (Borel, 1898, pág. 48).

Borel publicó en 1895 un libro sobre teoría de números y álgebra superior, en colaboración con Jules Drach, quien inaugura, en Francia, el método de definir un concepto matemático partiendo de axiomas o postulados establecidos a priori, este estilo influenciará a Borel y será retomado por Lebesgue para presentar su definición de medida. Las siguientes son las propiedades fundamentales que, según Borel, debe cumplir una medida:

> La medida de la suma de una infinidad numerable de conjuntos es igual a la suma de sus medidas; la medida de la diferencia de dos conjuntos es igual a la diferencia de sus medidas; la medida jamás es negativa; todo conjunto que no tiene medida nula no es numerable […] a los conjuntos para los cuales se pueda definir una medida que verifique las propiedades anteriores, les denominaremos *medibles* (Borel, 1898, pág. 48)

Además, Borel establece la propiedad de la monotonía de su medida, es decir, si $E_1 \subseteq E$ y $E \subseteq E_2$, entonces la medida de E_1 es *inferior* a la medida de E, y la medida de E_2 es *superior* la medida de E, y aclara "Las palabras superior e inferior no excluyen por otra parte la igualdad". Borel cierra éste capítulo relacionando los conjuntos perfectos y los conjuntos medibles: "Todo conjunto perfecto acotado es medible".

La segunda parte de su libro *Leçons sur la théorie des fonction*, Borel la dedica a resolver el problema que motivó el desarrollo de su teoría de la medida. Estudia el caso análogo del valor absoluto de la serie $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{(z-a_n)}$, para una variable real. Considera $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{|x-a_n|}$, con $A_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{1/2} < \infty$ y $\{a_n\}$ un subconjunto denso de $[0,1]$. Para estudiar los puntos de convergencia de la serie procedió de manera similar a como lo hizo en su tesis. Cada punto a_n está encerrado en un intervalo $I_n = (a_n - u_n, a_n + u_n)$, con $u_n = \frac{1}{2k} A_n^{1/2}$. Si $B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ entonces para $x \notin B_k$ se tiene que $x \notin I_n$ para todo *n*, y por lo tanto $|x - a_n| \geq u_n$ o, de manera equivalente,

$$\frac{A_n}{|x-a_n|} \leq \frac{A_n}{u_n} = 2kA_n^{1/2}, \text{ para todo } n.$$

Por lo tanto, la serie converge uniformemente sobre el conjunto $[0,1] - B_k$. El conjunto B_k está constituido por intervalos de longitud total

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^{1/2}}{k} = \frac{A}{k}, \text{ donde } A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{1/2}.$$

Además, si $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ y *D* es el conjunto de puntos donde la serie no converge, entonces $D \subset B$, de manera que *D* puede recubrirse con intervalos $B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ de longitud total arbitrariamente pequeña, haciendo *k* lo suficientemente grande.

Aquí la teoría del contenido no resulta útil, porque $\{a_n\}$ es denso en $[0,1]$ y $\{a_n\} \subset D$, tanto *D* como su complemento, el conjunto de puntos de convergencia, tienen contenido exterior 1 y contenido interior 0, son indistinguibles en términos de su contenido y no son Jordan medibles; por tanto Borel necesitaba una medida que le permitiera distinguir entre *D* y su complemento. Pero tal como lo expone Hawkins su definición de medida presentaba aún un inconveniente:

> El conjunto *D*, de los puntos donde la serie no converge, es un subconjunto de un conjunto medible de Borel *B*, de medida cero, pero de la clasificación de Borel no se deduce que el mismo conjunto *D* sea medible según Borel. A causa de esta situación tuvo que adoptar el siguiente convenio: Si un conjunto *E* está «encajado» entre dos conjuntos medibles de Borel de medidas respectivas *a* y *b*, con $a \leq b$, entonces convendremos en decir que la medida de *E* es $\geq a$ y $\leq b$, sin preocupamos de si *E* es o no medible según Borel. Como el conjunto en cuestión *D* está «encajado» obviamente entre el conjunto vacío y el conjunto *B*, los cuales tienen medida cero, entonces en virtud de este convenio de Borel también se le atribuye a *D* la medida cero, y así puede concluir Borel al fin que su serie converge en todos los puntos del intervalo $[0,1]$ excepto sobre un conjunto de medida cero (Grattan-Guinness, 1980, pág. 230).

Este “convenio” de Borel, le permitirá a Lebesgue definir sus conjuntos medibles, y tal como veremos en el siguiente capítulo los trabajos de Jordan sobre el contenido y la integral, junto con la teoría de la medida de Borel, alcanzaran su máxima generalidad en la obra de Lebesgue.

Veremos en el siguiente capítulo como Lebesgue generaliza en su tesis doctoral la noción de integral, con el propósito de solucionar los problemas planteados por sus antecesores: el problema de la medida, el cálculo de primitivas y la convergencia de series trigonométricas. Lebesgue se apoya en el concepto de *contenido* de Jordan y en la *medida* de conjuntos de Borel, brindando una salida conceptual al problema de la medida y estableciendo una teoría de integración más general. Para ello, Lebesgue reconoce que la medida de conjuntos es una generalización de la medida de los objetos geométricos. Luego de considerar el esquema geométrico, Lebesgue lo adopta a un sistema analítico, con lo que logra dar una salida al problema de cuadratura de áreas y de la integral a partir de su teoría de la medida, tal como lo expresa el mismo Lebesgue “regresamos a los métodos intuitivos anteriores a Cauchy, pero la definición de medida les da una fundamentación lógica sólida.”

2 ANÁLISIS DE LA TESIS DOCTORAL DE HENRI LEBESGUE

2.1 Introducción

Henri Lebesgue presentó su tesis doctoral *Integral, Longitud, Área* el 10 de febrero de 1902 en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Nancy, la cual fue aprobada por el Decano Gastón Darboux y publicada el mismo año en los *Annali di Matematica Pura et Aplicatta* de Milán.

El objetivo de Lebesgue era establecer las definiciones más generales y precisas posibles de los conceptos de integral definida, longitud de una curva y área de una superficie, y resolver el problema fundamental del cálculo integral: "encontrar una función de la cual se conoce su derivada".

Con la instauración de la teoría de la integración, fundamentada en el concepto de medida, Lebesgue resuelve varios aspectos relacionados con tres problemas planteados por sus antecesores: el problema de la medida, el cálculo de primitivas y la representación de funciones en series trigonométricas; generando el desarrollo de nuevas ramas de las matemáticas como la teoría de la probabilidad, el análisis funcional y el análisis de Fourier, entre otros. Esta teoría de la integración alcanzó altos grados de abstracción y generalización, y es considerada como una de las más fructíferas del siglo XX por sus múltiples aplicaciones.

La tesis doctoral, donde aparecen los resultados fundamentales relacionados con la teoría de la medida y la integración de Lebesgue, por lo que es considerada la piedra angular de su teoría, consta de seis capítulos desarrollados en 129 páginas. El primer capítulo está dedicado al problema de la medida y la definición de conjuntos medibles. En el segundo capítulo se desarrolla la teoría de la integración, donde se demuestran dos resultados fundamentales de la integral de Lebesgue, y que evidencia su superioridad con respecto a la de Riemann: la integrabilidad se preserva con el paso al límite, y toda derivada acotada es integrable. El tercer y cuarto capítulos son dedicados a las definiciones de la longitud de una curva y área de una superficie, respectivamente. En los dos últimos capítulos Lebesgue se propone resolver dos problemas: buscar las superficies correspondientes punto a punto en un plano, de modo que las longitudes se conserven, y dado un contorno cerrado, encontrar una superficie limitada por este contorno con área mínima.

Veamos pues con detalle la manera como Lebesgue expone en su tesis doctoral los desarrollos relacionados con la teoría de la medida y la integración, y con el problema del área de una superficie.

2.2 La medida de conjuntos en la tesis de Lebesgue

Lebesgue retoma la noción de medida de Borel para definir una medida más general, aplicable a espacios de varias dimensiones[96]. El primer capítulo de su tesis doctoral inicia con las definiciones de conjunto acotado, igualdad de conjuntos, unión finita e infinita numerable de conjuntos, subconjunto y diferencia de conjuntos.

Para Lebesgue "dos conjuntos son iguales si, desplazando uno de los dos, se pueden hacer coincidir". Definición que podemos enunciar como sigue.

Definición 2.2.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, se dice que $B = A$ si y sólo si $B = \{x \in \mathbb{R}: x = y + k, y \in A$ y $k \in \mathbb{R}$.

Esta definición de igualdad de conjuntos, similar a la noción común 7 de los *Elementos* "cosas congruentes entre sí, son iguales entre sí",[97] es una clara muestra de que Lebesgue está pensando en conjuntos de puntos y está pensando geométricamente, tal como lo expresa en la introducción de su tesis doctoral:

> En el estudio de las cuestiones relativas a la teoría de las funciones de variable real se reconoce a menudo que sería cómodo asignar, a los conjuntos de puntos, números, lo cuales gozan de propiedades similares a las longitudes de los segmentos o a las áreas de los polígonos. (Lebesgue, 1902, pág. 232)

[96] Los conjuntos B-medibles son los intervalos, y los conjuntos obtenidos a partir de uniones finitas, uniones numerables y sus complementos.
[97] Ver (Euclides, 1970, pág. 705)

Los problemas del análisis pueden ser tratados con más comodidad al relacionarlos con los objetos geométricos. En el desarrollo de su teoría se evidencia que el recuperar las raíces geométricas se convierte en requisito indispensable para, a través de la teoría de la medida, resolver el problema de la integración para una colección más general de funciones. Lebesgue ve en el concepto de medida - como generalización de los conceptos geométricos de longitud, área y volumen - la clave para resolver el problema de la integración.

Al inicio de su teoría de la medida, Lebesgue se plantea *El problema de la medida*, el cual consiste en definir una función que le asigne a cada conjunto acotado un número real no negativo, denominado *medida*, y que cumpla ciertas propiedades. De esta manera en su tesis doctoral[98]enuncia las propiedades que debería cumplir una *función medida*.

Definición 2.2.2. Sea $\mathcal{H} = \{E: E \text{ es un conjunto acotado}\}$ y $m: \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Se dice que *m* es una función medida si:

L_1: Existe E tal que $m(E) \neq 0$.

L_2: Si $E_1 = E_2$, entonces $m(E_1) = m(E_2)$.

L_3: Si $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ y $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall i, \forall j$, entonces $m(E) = \sum_{i=0}^{\infty} m(E_i)$.

En cuanto a la unicidad de la solución, Lebesgue observa que si el problema de la medida admite alguna solución, al multiplicar todas las medidas obtenidas por un mismo número se obtiene otro sistema de medidas equivalente, por lo tanto sin pérdida de generalidad, cualquier conjunto de medida no nula se puede tomar como unidad de medida.

La medida de subconjuntos acotados de$\mathbb{R}$.

Para definir la medida de los conjuntos de puntos lineales, subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$, inicialmente se consideran conjuntos de puntos de un segmento dado y se muestra que la función longitud, definida sobre la colección de segmentos, es una medida Luego se introducen las definiciones de conjunto medible y medida de un conjunto lineal acotado, y se muestra que mediante las operaciones de unión, intersección y complemento de conjuntos medibles, se obtienen conjuntos medibles.

[98] (Lebesgue, 1902, pág. 236)

Proposición 2.2.3. Todo conjunto de puntos unitarios tiene medida nula,

$$m(\{a\}) = 0$$

Demostración: Si $m(\{a\}) > 0$, la medida de un conjunto infinito acotado sería infinita, lo que contradice la definición de medida ■

De la anterior proposición se concluye que la medida de un conjunto de puntos sobre un segmento *MN* es igual si se incluyen o no sus extremos.

Proposición 2.2.4. La medida de un intervalo cerrado es igual a la medida del correspondiente intervalo abierto o semiabierto:

$$m([a,b]) = m\big((a,b)\big) = m((a,b]) = m([a,b)).$$

La siguiente proposición establece la existencia de conjuntos lineales de medida no nula, es decir, se verifica L_1.

Proposición 2.2.5. Para todo segmento *MN*, se cumple que $m(MN) > 0$.

Demostración: Si existe *MN* tal que $m(MN) = 0$, todo conjunto lineal acotado es de medida nula, contradicción■

Definción 2.2.6. Para definir la medida de un conjunto de puntos sobre un segmento *PQ*, se toma un segmento *MN* al cual se le asigna medida 1, se establece la unidad de longitud. De esta manera se puede asignar un número a *PQ*, su longitud, que será la medida del conjunto de puntos de *PQ*. De acuerdo con la teoría euclidiana de las magnitudes, se consideran dos casos posibles:

- Si *PQ* es conmensurable con *MN*, existen α y β tales que α*MN* = β*PQ* por lo que $\frac{PQ}{MN} = \frac{\alpha}{\beta}$, de esta manera se define la longitud de *PQ* como α/β.
- Si *PQ* es inconmensurable con *MN*, existen segmentos conmensurables a *PQ* contenidos en *PQ* y otros que contienen a *PQ*; de esta manera se obtiene la longitud del segmento *PQ* mediante un proceso de aproximación.

Lebesgue no se preocupa por verificar L2, sin embargo hemos visto que define la medida del conjunto de puntos sobre el segmento *PQ* como la longitud del segmento, lo que lo ubica en la tradición geométrica euclidiana la cual, de acuerdo a la noción común 7[99], supone la invariancia de los segmentos bajo traslaciones.

[99] "las cosas congruentes entre sí, son iguales entre sí" (Euclides, 1970, pág. 705)

La condición L_3, de acuerdo con Lebesgue, se obtiene de las propiedades de la longitud, tanto para un número finito de segmentos como para un número infinito. De esta manera Lebesgue demuestra que la longitud del segmento *MN* es una función medida, pues cumple las tres condiciones impuestas.

Conjuntos $\mathcal{B}$- medibles

Para definir la medida de subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$, que no son necesariamente intervalos, Lebesgue se basa en los resultados de Émile Borel y Camille Jordan:

> En el primer capítulo defino, como Mr Borel, la medida de un conjunto por sus propiedades esenciales. Después de haber completado y precisado las indicaciones un poco rápidas que da Mr Borel[100], indico qué relaciones existen, entre la medida así definida y la medida en el sentido de Mr Jordan. (Lebesgue, 1902, pág. 232)

Aunque Lebesgue no presenta en su tesis la teoría de Borel, recordemos brevemente algunos de sus aspectos fundamentales.

En el parágrafo §3, del tercer capítulo de su libro *Lecons Sur la Theorié des Functions* de 1898 Emile Borel incorpora su teoría de la medida[101]. Para Borel, la base fundamental del proceso de medir conjuntos lineales reposa en la generalización de la longitud de segmentos. Para ello, considera conjuntos en el intervalo [0, 1]; establece la medida de un intervalo $[a, b]$ como la diferencia de sus extremos:

$$m([a,b]) = b - a$$

A partir de aquí empieza a ampliar el dominio de los conjuntos medibles. La medida de la unión numerable de conjuntos disjuntos dos a dos y que tienen medidas $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$ respectivamente, es $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$ Después de definir la medida para la intersección y diferencia de conjuntos, demuestra que los conjuntos numerables tienen medida cero.

Para Borel, estos elementos corresponden a las propiedades fundamentales que debe cumplir una teoría de la medida:

> La medida de la suma de una infinidad numerable de conjuntos es igual a la suma de sus medidas; la medida de la diferencia de dos conjuntos es igual a la diferencia de sus medidas; la medida jamás es negativa; todo conjunto que no tiene medida nula no es numerable. Ello es entonces, expresamente

[100] (Borel, 1898)
[101] (Borel, 1898, págs. 46-48)

entendido, lo que nosotros llamamos medida y declara los conjuntos que nosotros llamamos medibles. (Borel, 1898, pág. 48)

Los conjuntos $\mathcal{B}$-medibles quedan entonces determinados a partir de los intervalos y mediante las operaciones de unión finita, uniones numerables y sus complementos.

Borel finaliza esta sección mostrando la existencia de conjuntos que no son $\mathcal{B}$ -medibles, los cuales constituyen una gran limitación en su teoría. Las investigaciones de Lebesgue refinan y amplían los trabajos de Borel, instituyendo una teoría de la medida que extiende el concepto de conjunto medible a un universo más amplio que el de los conjuntos Borelianos.

Conjuntos $\mathcal{L}$-medibles

La medida para cualquier conjunto acotado sobre la recta se define en términos del concepto de medida externa y medida interna. La medida externa aparece como generalización de la noción de contenido exterior de Borel[102], mientras que los conceptos de medible y medida interna son generalizaciones de la extensión interior y el concepto de medida de Jordan (Jordan C. , 1892).

Las definición de medida externa se fundamenta en el concepto de recubrimiento numerable, establecido por Borel en 1898: "dado un conjunto E, se pueden encerrar sus puntos, de múltiples maneras, con un número finito o infinito numerable de intervalos" (Lebesgue, 1902, pág. 237)

Concepto que en términos modernos podemos definir de la siguiente manera.

Definición 2.2.7. Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, se denomina recubrimiento numerable de E a una familia numerable de intervalos F tal que $E \subseteq \bigcup_{I\in F} I$.

Proposición 2.2.8. Si F es un recubrimiento numerable de E se cumple la siguiente desigualdad:

$$m(E) \leq m(\cup_{I\in F} I) \leq \sum_{I\in F} l(I),$$

donde $l(I)$ es la longitud de cada intervalo.

Demostración: Observemos que si $A \subseteq B$ entonces $B = A \cup (B - A)$, entonces por L_3 $m(B) = m(A) + m(B - A)$, de lo cual $m(A) \leq m(B)$. De esto se sigue el resultado

[102] (Borel, 1898)

puesto que $E \subseteq \bigcup_{I \in F} I^{103}$ ■

Definición 2.2.9. Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, consideremos el conjunto $B = \{\sum_{I \in F} l(I): E \subseteq \bigcup_{I \in F} I\}$ se denomina medida exterior de E al límite inferior de B, es decir $m_e(E) = ínf(B)$.

De acuerdo con Lebesgue, el límite[104] inferior del conjunto B es un límite superior de $m(E)$, Resultado que podemos enunciar como sigue.

Proposición 2.2.10. Para todo subconjunto acotado $E \subset \mathbb{R}$, se tiene que $m(E) \leq m_e(E)$.

Demostración: Esto se sigue de la definición de medida exterior y del hecho que $m(E) \leq \sum_{I \in F} l(I)$, para todo recubrimiento numerable F de E ■

Para definir la medida interior, se considera un segmento AB que contiene todos los puntos de E, se considera el complemento[105] E^c de E con respecto a AB y se define medida interior de E en términos de la medida exterior del complemento. Dicha medida es única, puesto que no depende de la escogencia del segmento AB.

Proposición 2.2.11. Para todo subconjunto acotado E de $\mathbb{R}$, se tiene que $m(AB) - m_e(E^C) \leq m(E)$.

Demostración: Por proposición 2.2.10 $m(E^c) \leq m_e(E^c)$, Además $m(AB) - m(E) = m(E^c)$. Por lo que $m(AB) - m_e(E^C) \leq m(AB) - m(E^c) = m(E)$ ■

Definición 2.2.12. Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y consideremos un segmento AB de $\mathbb{R}$ talque $E \subset AB$, entonces definimos la medida interior de E como la diferencia entre la medida del segmento AB y la medida exterior del complemento de E con respecto a AB, es decir: $m_i(E) = m(AB) - m_e(E_{AB}^c)$.

Proposición 2.2.13. Para todo subconjunto acotado $E \subset \mathbb{R}$, se tiene que $m_i(E) \leq m_e(E)$.

Demostración: Se sigue de las proposiciones 2.2.10 y 2.2.11 ■

A pesar de que con los resultados establecidos en 2.2.10 y 2.2.11 se obtiene trivialmente

---

[103] Lebesgue utiliza la propiedad "si $A \subseteq B, m(A) \leq m(B)$". propiedad que no ha mencionado, pero como vimos es muy fácil de verificar.

[104] Lebesgue está utilizando el término "límite" como sinónimo de "cota"

[105] Lebesgue define complemento de un conjunto, tal como lo hacemos actualmente. Lo mismo sucede con las operaciones de unión, intersección y diferencia de conjuntos; aunque la unión la denomina suma de conjuntos.

la proposición 2.2.13, para demostrarla Lebesgue se basa en la siguiente desigualdad, la cual es inmediata de 2.2.10,

$$m_e(E) + m_e(E^c) \geq m(AB)$$

De esta manera se tendría que $m_i(E) = m(AB) - m_e(E^c) \leq m_e(E)$.

Proposición 2.2.14. Dos conjuntos iguales tienen medidas interiores iguales y medidas exteriores iguales. Es decir, si $A=B$ se cumple que $m_i(A) = m_i(B)$ y $m_e(A) = m_e(B)$.[106]

Proposición 2.2.15. Si el problema de la medida es posible, la medida de un conjunto E está comprendida entre sus medidas interior y exterior:

$$m_i(E) \leq m(E) \leq m_e(E).$$

Demostración: Se sigue de las proposiciones 2.2.10 y 2.2.11■

Definición 2.2.16. Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Se dice que el conjunto E es medible si $m_i(E) = m_e(E)$. Este valor común será la medida del conjunto E, $m(E)$.

Definición que Lebesgue considera equivalente al siguiente enunciado:

> Un conjunto E se dice medible si es posible encerrar sus puntos en intervalos α, y los puntos de sus complementos en intervalos β de manera que la suma de longitudes de las partes comunes a los α y a los β sea tan pequeña como se quiera. (Lebesgue, 1902, pág. 238)

Lo que en términos modernos podemos enunciar como sigue.

Proposición 2.2.17. Un subconjunto acotado E de $\mathbb{R}$ contenido en un segmento AB es medible si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe un recubrimiento α $=\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de E y un recubrimiento β$=\{J_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ de E^c_{AB} tales que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_k \cap J_r) < \varepsilon.$$[107]

Demostración: Supongamos que $\forall \varepsilon > 0$ existe un recubrimientos α $=\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de E y un recubrimiento β$=\{J_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ de E^c_{AB} tales que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_k \cap J_r) < \varepsilon$. Se debe probar que $m_i(E) = m_e(E)$ lo que por definición es equivalente a probar que $m(AB) = m_e(E) + m_e(E^c_{AB})$, es decir:

$$m(AB) = inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k): E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\} + inf\{\sum_{r\in\mathbb{N}} l(J_r): E^c \subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{N}} J_r\}.$$

Lo que es equivalente a demostrar la siguiente igualdad:

$$m(AB) = inf(\{\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k): E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\} + \{\sum_{r\in\mathbb{N}} l(J_r): E^c \subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{N}} J_r\}).$$

[106] Es una consecuencia directa de la invariancia bajo traslaciones.
[107] La notación y la demostración de este enunciado son nuestros.

En efecto, $m(AB)$ es cota inferior porque $AB \subseteq (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k) \cup (\bigcup_{r\in\mathbb{N}} J_r)$ para todo par de recubrimientos de E y E_{AB}^c, luego:

$$m(AB) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) + \sum_{r\in\mathbb{N}} l(J_r).$$

Veamos que es la mayor cota inferior.

Sea $T = inf(\{\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k): E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\} + \{\sum_{r\in\mathbb{N}} l(J_r): E^c \subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{N}} J_r\})$, $T \geq 0$. Para probar que $m(AB) \geq T$ razonaremos por reducción al absurdo, supongamos que $m(AB) < T$. Sea $\varepsilon = T - m(AB) > 0$, por hipótesis existen α $=\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ recubrimiento de E y β$=\{J_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ recubrimiento de $E\,_{AB}^{c}$ tales que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_k \cap J_r) < T - m(AB).$$

$$m(AB) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_k \cap J_r) < T.$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) + \sum_{r\in\mathbb{N}} l(J_r) \leq m(AB) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_k \cap J_r) < T.$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) + \sum_{r\in\mathbb{N}} l(J_r) < T (\rightarrow\leftarrow).$$

Por lo tanto $m(AB) = inf(\{\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k): E \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\} + \{\sum_{r\in\mathbb{N}} l(J_r): E^c \subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{N}} J_r\})$, es decir E es medible.

Supongamos ahora que E es un conjunto medible. Por la propiedad de aproximación al ínfimo, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar un recubrimiento α $=\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de E y un recubrimiento β$=\{J_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ de E_{AB}^c tales que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) - m(E) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } \sum_{r\in\mathbb{N}} l(J_r) - m(E_{AB}^c) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte $\left((\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k) \cup (\bigcup_{r\in\mathbb{N}} J_r) - \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ r\in\mathbb{N}}} (I_k \cap J_r)\right)$ es un recubrimiento para el segmento AB, por lo que

$$m(AB) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) + \sum_{r\in\mathbb{N}} l(J_r) - \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_k \cap J_r).$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_k \cap J_r) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) + \sum_{r\in\mathbb{N}} l(J_r) - m(AB).$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_k \cap J_r) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) + \sum_{r\in\mathbb{N}} l(J_r) - \left(m(E) + m(E_{AB}^c)\right).$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_k \cap J_r) \leq (\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k) - m(E)) + \left(\sum_{r\in\mathbb{N}} l(J_r) - m(E_{AB}^c)\right).$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{r\in\mathbb{N}} l(I_k \cap J_r) < \varepsilon \blacksquare$$

Lebesgue utiliza la proposición anterior para demostrar que un conjunto obtenido mediante unión numerable de conjuntos medibles, también es medible.

Proposición 2.2.18. Si $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos medibles y $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, entonces E también es medible.

Demostración: consideremos los conjuntos E_i formados por puntos de un segmento AB con relación al cual tomaremos los respectivos complementos. Sea $\alpha_1 = \{I_{k1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento de E_1, cuyos intervalos son disjuntos, y $\beta_1 = \{J_{r1}\}_{r\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento de su complemento E_1^c, tales que $\sum_{k\in\mathbb{N}.r\in\mathbb{N}} l(I_{k1}\cap J_{r1}) < \varepsilon_1$ para algún ε_1, arbitrariamente escogido. De igual manera, sea α_i un recubrimiento de E_i, y β_i un recubrimiento de su complemento E_i^c, tales que $\sum_{k\in\mathbb{N}.r\in\mathbb{N}} l(I_{ki}\cap J_{ri}) < \varepsilon_i$ para algún ε_i arbitrariamente escogido.

Sean

$$\alpha'_2 = \{I_k \cap J_r\}_{I_k\in\alpha_2, J_r\in\beta_1, k\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}} \text{ y } \beta'_2 = \{J_k \cap J_r\}_{J_k\in\beta_2, J_r\in\beta_1, k\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}}$$

$$\alpha'_3 = \{I_k \cap J_r\}_{I_k\in\alpha_3, J_r\in\beta'_2, k\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}} \text{ y } \beta'_3 = \{J_k \cap J_r\}_{J_k\in\beta_3, J_r\in\beta'_2, k\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}}$$

$$\vdots$$

$$\alpha'_i = \{I_k \cap J_r\}_{I_k\in\alpha_i, J_r\in\beta'_{i-1}, k\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}} \text{ y } \beta'_i = \{J_k \cap J_r\}_{J_k\in\beta_i, J_r\in\beta'_{i-1}, k\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}}$$

Sea $E = \cup E_i$, los intervalos $\alpha_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \cdots$ forman un recubrimiento para E y los intervalos $\{\beta'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ forman un recubrimiento para el complemento E_{AB}^c. Ahora estas dos series de intervalos tienen partes comunes de longitud total a lo sumo igual a:

$$l_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i + m(\alpha'_{i+1}) + m(\alpha'_{i+2}) + \cdots$$

La serie $\sum m(\alpha'_i)$ es convergente, si se eligen los ε_i de tal manera que la serie $\sum \varepsilon_i$ sea convergente y tenga como suma a ε, se podrá tomar i lo suficientemente grande como para que $l_i < 2\varepsilon$

Entonces, por la proposición anterior, E es medible[108] ■

Lebesgue concluye:

> La unión de un número finito o infinito numerable de conjuntos medibles es un conjunto medible, por lo tanto tiene sentido plantear el problema de la medida sólo para conjuntos medibles. (Lebesgue, 1902, pág. 239)

Proposición 2.2.19. Si $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos medibles disjuntos dos a dos y $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, entonces $m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$

Demostración: puesto que los conjuntos $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son disjuntos dos a dos, los puntos de

[108] En la tesis de Lebesgue aparece el término sumable, pero esto parece ser un error de escritura, pues ni él ni sus contemporáneos han definido conjunto sumable.

cada E_i son interiores a los intervalos α'_i de suerte que $m(\alpha'_i) - m(E_i) \leq \varepsilon_i$. Ahora bien,

$$m(E) - (m(\alpha_1) + m(\alpha'_2) + m(\alpha'_3) + \cdots) \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots$$

Entonces se tiene que

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \cdots \blacksquare$$

Así L_3 se cumple.

De esta manera Lebesgue concluye que:

> Se tiene que el problema de la medida es pues posible para los conjuntos medibles; y admite sólo una sola solución, pues los razonamientos que utilizamos para definir los dos números m_e y m_i, aplicados a un conjunto medible, sólo hacen intervenir conjuntos medibles. (Lebesgue, 1902, pág. 231)

Lebesgue advierte que no se ha probado que el problema de la medida sea imposible para aquellos conjuntos (si los hay) cuyas medidas interior y exterior sean diferentes. Sin embargo, se considerarán sólo los conjuntos medibles, es decir aquellos conjuntos para los cuales las medidas exterior e interior son iguales. De esta manera los procedimientos usados para definir un conjunto pueden reducirse siempre a considerar la unión numerable y la intersección numerable de conjuntos previamente definidos. Y estos dos procedimientos aplicados a conjuntos medibles dan conjuntos medibles.

Proposición 2.2.20. La intersección finita o infinita numerable de conjuntos medibles es un conjunto medible.

Demostración: Sean $E_1, E_2, E_3, \ldots$ conjuntos medibles dados, su intersección e_1 puede definirse como el conjunto que tiene como complemento la unión de los complementos de $E_1, E_2, E_3, \ldots$ es decir:

$$e_1^c = (\cap E_i)^c = \cup (E_i^c)$$

Lo que demuestra la proposición$\blacksquare$

Obsérvese que Lebesgue está utilizando implícitamente la propiedad "si un conjunto es medible su complemento también lo es" la cual no ha mencionado pero se puede verificar fácilmente:

Por definición de medida interior se tiene que $m_e(E_{AB}^c) = m(AB) - m_i(E)$ pero como E es medible $m_e(E_{AB}^c) = m(AB) - m_e(E) = m(AB) - m_e((E_{AB}^c)^c) = m_i(E^c)$.

Proposición 2.2.21 Sean E_1 y E_2 conjuntos medibles tales que $E_2 \subset E_1$, entonces $E_1 - E_2$ también es un conjunto medible.

Demostración: Se tiene que $E_1 - E_2 = E_1 \cap E_2^c$[109] e intersección de conjuntos medibles es medible. Además $E_1 = (E_1 - E_2) \cup E_2$ por lo que $m(E_1) = m(E_1 - E_2) + m(E_2)$ y de ahí $m(E_1 - E_2) = m(E_1) - m(E_2)$■

Lebesgue observa que a partir de los conjuntos medibles formados por los puntos de un intervalo, mediante sus complementos y las operaciones de unión e intersección se obtienen todos los conjuntos $\mathcal{B}$-medibles.[110]Los conjuntos $\mathcal{B}$-medibles están definidos por un infinito numerable de operaciones y el conjunto que los contiene tiene la misma potencia del continuo.

Existencia de conjuntos $\mathcal{L}$-medibles que no son $\mathcal{B}$-medibles

Para demostrar la existencia de conjuntos $\mathcal{L}$-medibles que no son $\mathcal{B}$-medibles, Lebesgue utiliza el conjunto de Cantor definido sobre el intervalo [0,1],tal como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.22. Sea $C = \left\{x \in [0,1]: x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots, \text{con } a_i = 0 \text{ ó } 2\right\}$, como C es un conjunto perfecto es Borel-medible. Por otra parte, el complemento de C es el conjunto definido como $C^c = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \ldots\right\}$, luego la medida del complemento de C está dada por $m(C^c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1.$

Por otra parte $C \cup C^c = [0,1]$, por lo tanto $m(C) = 0.$

Cualquier subconjunto del conjunto de cantor es medible por tener medida exterior nula. La potencia del conjunto de cantor es la misma que la del continuo, por lo tanto la potencia del conjunto de todos estos subconjuntos que son $\boldsymbol{\mathcal{L}}$- medibles es la potencia del conjunto de partes del continuo. Dado que la totalidad de los conjuntos $\mathcal{B}$-medibles tienen la potencia del continuo, se puede concluir que existen conjuntos $\mathcal{L}$-medibles que no son $\mathcal{B}$-medibles.

El siguiente teorema relaciona conjuntos $\mathcal{L}$ -medibles y $\mathcal{B}$-medibles.

Teorema 2.2.23 Si E es un conjunto $\mathcal{L}$-medible, existen conjuntos E_1 y E_2, $\mathcal{B}$-medibles, tales que $E_2 \subset E \subset E_1$ y $m(E_2) = m(E) = m(E_1)$.

---

[109] El complemento de E_2 se toma con respecto a E_1.

[110] Que son aquellos conjuntos que Borel denomina medibles en (Borel, 1898).

Demostración: Sean E un conjunto $\mathcal{L}$-medible y $\{\varepsilon_i\}$ una sucesión que decrece a 0. E se puede encerrar en un conjunto infinito numerable de intervalos $\alpha_i = \{I_{ij}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de medida $m(E) + \varepsilon_i$, es decir $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{ij}$, $I_{ij} \in \alpha_i$ y $m(\alpha_i) = m(E) + \varepsilon_i$. [111]

El conjunto $E_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{ij}\right)$ [112], es $\mathcal{B}$-medible por ser intersección de conjuntos medibles y $E \subseteq E_1$[113], luego $m(E) \leq m(E_1)$. Además $m(E_1) = m(\bigcap_{i=1}^{\infty} \alpha_i) \leq m(E) + \varepsilon_i$, $\forall i$ y como la sucesión $\{\varepsilon_i\}$ converge a 0, tenemos que $m(E_1) \leq m(E)$ por lo tanto $m(E_1) = m(E)$.

Por otra parte, el conjunto $(E_1 - E)$ tiene medida nula[114] y puede encerrarse en un conjunto de intervalos β_i tales que $\beta_i \subseteq \alpha_i$ y $m(\beta_i) = \varepsilon_i$. Es decir, $(E_1 - E) \subseteq (\bigcup_{k=1}^{\infty} J_{ik}), J_{ik} \in \beta_i$ y $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{ik}) = \varepsilon_i$. El conjunto $e = \bigcap_{i=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_{ik})$ es $\mathcal{B}$-medible con medida nula puesto que $m(e) = m(\bigcap_{i=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_{ik})) \leq \varepsilon_i, \forall i$ y $\{\varepsilon_i\}$ es una sucesión decreciente que converge a 0. Si tomamos $E_2 = E_1 - e$ [115] se tiene entonces que E_2 es $\mathcal{B}$-medible y $m(E_2) = m(E_1) - m(e) = m(E_1) = m(E)$■.

Los conjuntos que Lebesgue denomina medibles son aquellos que se pueden medir mediante los procedimientos de Borel. Si E_1 es un conjunto medible de medida α_i y $E_1 \subset E$, la medida de E es mayor que α_i, "sin tener que molestarnos por si E es medible o no" (Lebesgue, 1902, pág. 241), y lo mismo ocurre para el caso contrario y la igualdad.

De la proposición anterior se deducen inmediatamente los dos corolarios siguientes.

---

[111] Podemos interpretar $m(\alpha_i)$ como $m\left(\bigcup I_{ij}\right)$

[112] Lebesgue define E_1como el conjunto de puntos que pertenecen al mismo tiempo a los conjuntos α_i, esta es nuestra interpretación.

[113] $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{ij}$, $\forall i$

[114] Una cuestión interesante que se desprende del teorema anterior tiene que ver con la existencia de los conjuntos de medida nula, por cuanto ellos permiten asignarle la medida a un conjunto (en este caso a E) con base en el cálculo de inecuaciones. Esto hace que automáticamente ingresen a la familia de los conjuntos L-medibles conjuntos que no son B-medibles, pues justamente este hecho no era considerado por Borel. Los conjuntos nulos marcan la diferencia entre los B-medibles y los L-medibles, puesto que se puede demostrar que la cardinalidad de los conjuntos nulos es mayor que la de los Borelianos.

[115]Supongamos que $x \in (E_1 - e), x \in E_1\ y\ x \notin e$. Como $(E_1 - E) \subset e$, se tiene que si $x \notin e, x \notin E_1$ o $x \in E$, luego $x \in E$.

Corolario 2.2.24. Sea E un conjunto y $A = \{m(B): E \subset B,\ \text{con } B\ \mathcal{B}\text{-medible}\}$, entonces $m_e(E) = \text{Inf}(A)$. Además existe un conjunto $B, \mathcal{B}$-medible, tal que $E \subset B$ y $m(B) = m_e(E)$.

Corolario 2.2.25. Sea E un conjunto y $G = \{m(B): B \subset E,\ \text{con } B\ \mathcal{B}\text{-medible}\}$, entonces $m_i(E) = \text{Sup}(G)$. Además existe un conjunto $\mathcal{B}$-medible, B, tal que $B \subset E$ y $m(B) = m_i(E)$.

A continuación se relacionan los conjuntos medibles en el sentido de Jordan, $\mathfrak{J}$-medibles, con los $\mathcal{B}$-medibles y los $\mathcal{L}$ -medibles. Para establecer esta relación, Lebesgue retoma las definiciones de punto interior, frontera, extensión interior y extensión exterior dadas por Jordan en su tratado de Análisis.

Conjuntos $\mathfrak{J}$-medibles

Definición 2.2.26. Un punto M es un punto interior de un conjunto E si existe un segmento $AB \subset E$ tal que $M \in AB$.

Definición 2.2.27. Un conjunto F_E es la frontera de E si los puntos de F_E no son puntos interiores de E ni de su complemento. Es decir, un conjunto F_E es la frontera de E si para $x \in F_E$ se tiene que para todo $r > 0$, $(x-r, x+r) \cap E \neq \emptyset$ y $(x-r, x+r) \cap E^C \neq \emptyset$.

Definición 2.2.28. Sea AB un segmento tal que $E \subset AB$ y dividamos AB en intervalos parciales I_k. Sean $\ell = \{\sum_{k=1}^{n} l(I_k): (\bigcup_{k=1}^{n} I_k) \subset int(E)\}$ y $L = \{\sum_{k=1}^{n} l(I_k): (E \cup F_E) \subset (\bigcup_{k=1}^{n} I_k)\}$. La extensión interior de E es el límite de ℓ cuando la longitud máxima de los intervalos parciales tiende a 0, es decir $e_i(E) = sup(\ell)$. De manera similar la extensión exterior de E es el límite de L cuando la longitud máxima de los intervalos parciales tiende a 0, es decir $e_e(E) = inf(L)$.

Definición 2.2.29. Un conjunto E es $\mathfrak{J}$- medible si su extensión exterior es igual a su extensión interior, $e_i(E) = e_e(E)$.

Proposición 2.2.30. Si E es $\mathfrak{J}$- medible entonces es $\mathcal{L}$-medible.

Demostración: Por definición se tiene la siguiente desigualdad:

$$e_i(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq e_e(E)$$

Como E es $\mathfrak{J}$- medible $e_i(E) = e_e(E)$, luego $m_i(E) = m_e(E)$, es decir E es $\mathcal{L}$-medible. Además las medidas, en el sentido de Jordan y en el sentido de Lebesgue, son iguales■

Proposición 2.2.30. Para que un conjunto sea $\mathfrak{J}$-medible es necesario y suficiente que su frontera tenga medida nula

Demostración: la extensión interior de E es la medida del conjunto de sus puntos interiores, el cual es abierto, por lo que su complemento es un conjunto cerrado y por lo tanto es $\mathcal{B}$- medible. La extensión exterior de E es la medida de la unión de E y su frontera, el cual es $\mathcal{B}$- medible por ser cerrado. En consecuencia $m_i(E) = m_e(E)$ si y sólo si $m(F_E) = 0$■

Un conjunto cerrado, que tiene por extensión exterior su medida, si es de medida nula puede afirmarse que es $\mathfrak{J}$-medible. En particular el conjunto perfecto definido en el ejemplo 2.2.22 es $\mathfrak{J}$-medible; lo mismo que todos los conjuntos que pueden formarse con sus puntos, por lo tanto el conjunto de los conjuntos $\mathfrak{J}$-medibles tiene la misma potencia que el conjunto de todos los conjuntos de puntos[116], y existen entonces conjuntos $\mathfrak{J}$-medibles que no son $\mathcal{B}$-medibles.

A continuación Lebesgue muestra la forma como se calcula la medida de un conjunto de puntos sobre la recta, aclarando que tal medida depende de la manera como el conjunto sea dado y evidenciando la dificultad que presenta el cálculo de la medida de Lebesgue.

Cálculo de la medida de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Supongamos que dado un intervalo cualquiera (a, b), se puede determinar si existen puntos del conjunto E, de su frontera F_E y de su complemento E^c, en dicho intervalo. Mediante un número finito de operaciones se puede calcular un número cualquiera de términos de las dos sucesiones (puede suponerse una decreciente y otra creciente) cuyos límites son respectivamente la extensión exterior y la extensión interior de E. Estas extensiones se consideran bien definidas "dada la práctica que tenemos para manejar las series". Se sabe pues calcular la medida de un conjunto $\mathfrak{J}$-medible y la consideración simultánea de dos sucesiones permite obtener un límite superior del error cometido al cortar en un término cualquiera.

[116] Es decir el conjunto de partes del continuo

Es mucho más difícil calcular la medida exterior e interior de un conjunto cualquiera. Estos números en efecto son definidos por la consideración de un infinito no numerable de números; para encontrar una sucesión de números que tienden hacia $m_e(E)$ es necesario considerar divisiones de un segmento *AB*, que contiene al conjunto *E*, en intervalos parciales que dependerían del conjunto *E*.

Si un conjunto $\mathcal{B}$-medible se define mediante las operaciones de unión e intersección, a partir de sucesiones de intervalos, es fácil calcular su medida apoyándonos en la tercera condición del problema de la medida y en la siguiente propiedad[117]:

> El conjunto *E* de puntos comunes a todos los conjuntos medibles $E_1, E_2, \ldots$ tales que cada uno contiene a los que le siguen, es el límite inferior de la sucesión $m(E_1), m(E_2), \ldots$. (Lebesgue, 1902, pág. 243)

Propiedad que enunciamos como sigue.

Proposición 2.2.31. Sea $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles tales que $E_{i+1} \subseteq E_i, \forall i.$ El conjunto $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ tiene como medida el ínfimo de la sucesión $\{m(E_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Demostración: Sea *AB* un segmento que contiene a todos los E_i, el complemento de *E* con respecto a *AB* es la unión de los conjuntos $E_1^c, [E_2^c - E_1^c], [E_3^c - E_2^c], \cdots$ los cuales son disjuntos dos a dos, es decir:

$$E_{AB}^c = (E_1)_{AB}^c \cup \ [(E_2)_{AB}^c - (E_1)_{AB}^c] \cup [(E_3)_{AB}^c - (E_2)_{AB}^c] \cup \ldots$$

Luego,

$$m(E_{AB}^c) = m(E_1^c) + m\ (E_2^c - E_1^c) + m(E_3^c - E_2^c) + \cdots$$ [118]

$$m(E) = m(AB) - [m(E_1^c) + m\ (E_2^c - E_1^c) + m(E_3^c - E_2^c) + \cdots]$$

y $m(E) = m(E_1) + [m(E_2) - m(E_1)] + [m(E_3) - m(E_2)] + \cdots$

---

[117] En el original de la tesis la propiedad aparece enunciada de esta manera (parece ser un error de escritura) la propiedad en realidad no se refiere al conjunto *E* sino a la medida del conjunto *E*. Lebesgue está enunciando la siguiente propiedad ya conocida por Borel :

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} m(E_i)\text{, donde } E_{i+1} \subset E_i$$

[118] Los complementos se toman con respecto al segmento *AB,* lo escribiremos así para simplificar la notación.

La medida de subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^2$

Lebesgue aclara que todos los resultados obtenidos para los puntos sobre la recta se pueden extender sin problemas a un espacio de varias dimensiones, pero en esta sección se limitará al caso del plano. De esta manera le asigna medida de superficie nula a todo conjunto acotado de puntos sobre la recta. Le asigna arbitrariamente medida de superficie 1 al cuadrado *MNPQ*, puesto que el conjunto de puntos sobre un cuadrado no puede tener medida nula,

Tomando como referencia los argumentos de la geometría elemental para encontrar el área de un triángulo, Lebesgue define la medida de un triángulo como sigue.

Definición 2.2.32. La medida del conjunto de puntos de un triángulo es igual a la mitad del producto de los números que miden su lado y su altura. Siendo *MN* la unidad de longitud.

Proposición 2.2.33. La medida de un triangulo, formado por la unión de triángulos disjuntos, estará dada por la suma de las medidas de los triángulos que lo recubren. Es decir, si $\Delta_{ABC} = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i$, entonces $m(\Delta_{ABC}) = \sum_{i=1}^{n} m(\Delta_i)$.

Lebesgue aclara que mediante los argumentos de Hadamard, expuestos en su *Géometrie élémentaire*, la anterior proposición se puede demostrar para el caso finito. Para el caso infinito se puede demostrar utilizando los mismos argumentos que para la recta.

Las definiciones de medida exterior e interior son análogas a las propuestas para los conjuntos de la recta.

Definición 2.2.34. Sea *E* un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$, consideremos el conjunto $B = \{\sum m(\Delta_i) : E \subseteq \cup\, \Delta_i\}$, se denomina medida exterior de *E* al límite inferior de *B*, es decir $m_e(E) = ínf(B)$.

Definición 2.2.35. Sea *ABC* un triángulo que contiene a *E*, la medida interior de *E*, m_i (*E*), se define como la diferencia entre la medida del triángulo *ABC* y la medida exterior del complemento de *E* con respecto al triángulo *ABC*. Es decir:

$$m_i(E) = m(ABC) - m_e(E_{ABC}^c).$$

Definición 2.2.36. Se dice que E es medible si $m_e(E) = m_i(E)$ y el valor común es la medida de E.

Lebesgue observa que al igual que para los conjuntos lineales, se puede demostrar que el problema de la medida es posible y tiene solución única cuando nos limitamos a conjuntos medibles, y que es verdadera la siguiente proposición.

Proposición 2.2.37. La unión numerable y la intersección numerable de conjuntos en $\mathbb{R}^2$ medibles son conjuntos medibles.

Por otra parte, los conjuntos $\mathcal{B}$-medibles en $\mathbb{R}^2$ se obtienen cuando se aplican, un número finito de veces, las operaciones de unión e intersección a conjuntos formados por puntos de un triángulo. Los complementos de estos conjuntos también son $\mathcal{B}$-medibles.

Proposición 2.2.38. Los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^2$ son $\mathcal{B}$-medibles.

Demostración. Sea E un conjunto abierto, puesto que todos sus puntos son interiores, cada punto M puede ser el centro del cuadrado máximo cuyos puntos interiores sean todos interiores a E. De esta manera E se puede expresar como la unión de cuadrados correspondientes a puntos de coordenadas racionales, por lo tanto E es $\mathcal{B}$-medible. ■

Además todo conjunto cerrado es $\mathcal{B}$-medible por ser el complemento de un conjunto abierto.

En cuanto a los conjuntos $\mathfrak{I}$-medibles. Lebesgue define extensión exterior e interior de un conjunto E en $\mathbb{R}^2$, análogamente a como lo hizo para conjuntos en $\mathbb{R}$, pero dividiendo la porción del plano que contiene a E en un número finito de cuadrados.

Definición 2.2.39. Sea ABC una porción del plano tal que $E \subset ABC$ y dividamos ABC en cuadrados parciales I_k. Sean $\ell = \{\sum_{k=1}^{n} l(I_k) : (\bigcup_{k=1}^{n} I_k) \subset E\}$ y $L = \{\sum_{k=1}^{n} l(I_k) : (E \cup F_E) \subset (\bigcup_{k=1}^{n} I_k)\}$. La extensión interior de E es el límite de ℓ cuando la medida máxima de los cuadrados parciales tiende a 0, es decir $e_i(E) = inf(\ell)$. De manera similar la extensión exterior de E es el límite de L cuando la medida máxima de los cuadrados parciales tiende a 0, es decir $e_e(E) = sup(L)$.

Definición 2.2.40. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ se dice $\mathfrak{I}$-medible si $e_e(E) = e_i(E)$.

Lebesgue aclara que para estos conjuntos se cumplen las mismas propiedades de sus análogos en la recta.

El problema del área

Para resolver el problema del área, que tiene que ver con la posibilidad de asignarle un número positivo a cada región acotada del plano, Lebesgue determina las características de dicha región.

Definición 2.2.41. Llamamos *curva plana* al conjunto de puntos determinado por las siguientes dos ecuaciones:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t). \qquad (1)$$

Donde f y φ son funciones continuas sobre el intervalo finito $[a, b]$.[119]

Lebesgue observa que el conjunto de puntos definido por esta curva es un conjunto perfecto, siempre y cuando el intervalo sea finito.

Definición 2.2.42. Sea C una curva plana, se dice que un punto $(x, y) \in C$ es múltiple si corresponde a varios valores de t.

Definición 2.2.43. Se dice que una curva es cerrada sin puntos múltiples, si el único punto múltiple es el punto doble correspondiente a $t = a$ y $t = b$. Es decir, únicamente para los extremos del intervalo $[a, b]$ se cumple que $[f(a), \varphi(a)] = [f(b), \varphi(b)]$.

Proposición 2.2.44. Toda curva cerrada sin puntos múltiples divide al plano en dos regiones, una interior y otra exterior.[120]

Definición 2.2.45. Un dominio es el conjunto de puntos interiores a una curva C cerrada sin puntos múltiples. C se denomina la frontera del dominio.

Proposición 2.2.46. Un dominio es un conjunto abierto.

Definición 2.2.47. Un dominio D es la unión de los dominios $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$, si todo punto de D pertenece a uno y sólo uno de los D_i, o al menos a una de las fronteras de los D_i.

El problema del área consiste entonces en:

> Asignar a cada dominio un número positivo al que llamaremos su área, que satisface las condiciones siguientes:
> Dos dominios iguales tienen la misma área.
> El área de un dominio que es la unión de un número finito o infinito de dominios, es la suma de las áreas de dichos dominios." [121]

---

[119] En el original aparecen los intervalos con la notación de intervalo abierto (a, b)

[120] (Jordan C. , 1882) citado por Lebesgue. Este es el teorema conocido como el teorema de la curva cerrada de Jordan el cual fue demostrado por Oswald Veblen en 1905; Jordan presentó una demostración cuando lo enunció pero contenía errores que el mismo Jordan a pesar de sus esfuerzos no pudo subsanar.

Definición 2.2.48. Sea $\mathfrak{D}$ el conjunto de los dominios en $\mathbb{R}^2$, la función $A: \mathfrak{D} \to \mathbb{R}^+$que cumple las siguientes dos propiedades:

Si D_1=D_2 entonces $A(D_1) = A(D_2)$

Si $\mathbb{D} = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ entonces $A(\mathbb{D}) = \sum_{i=1}^{\infty} A(D_i)$

Se denomina la función Área, y el área de un dominio *D* es el número que le asigna la función Área.

De acuerdo con Lebesgue, si el problema tiene solución existen infinitas soluciones. Por esto es posible asignar arbitrariamente a un cuadrado *MNPQ* el área 1. Lebesgue retoma los argumentos de la geometría elemental para definir el área del rectángulo. [122]

Definición 2.2.49. El área de un rectángulo, es decir la medida superficial de un rectángulo, es igual al producto de las longitudes de sus lados, con *MN* como unidad de longitud.

Proposición 2.2.50. Todo domino *D* se puede expresar como la unión numerable de rectángulos disjuntos y el área de *D* es igual a la suma de las áreas de los rectángulos. Es decir $D = \bigcup_{i}^{\infty} R_i$, donde los R_i son rectángulos tales que $R_i \cap R_j = \emptyset, \forall i, \forall j$ y $A(D) = \sum_{i=1}^{\infty} A(R_i)$. Lo que es igual a la medida superficial del dominio, considerado como un conjunto de puntos.

Demostración: Todo dominio es un conjunto abierto y todo conjunto abierto se puede expresar como la unión numerable de rectángulos disjuntos■

Proposición 2.2.51. Sean D_1 y D_2 dominios disjuntos, teniendo en común un arco de frontera $\alpha\beta$ y sólo uno, entonces la medida superficial del arco $\alpha\beta$ es nula.

Demostración. Sea D un dominio tal que $D = D_1 \cup D_2 \cup \alpha\beta$[123]. Los tres conjuntos son medibles, los dominios D_1 y D_2 por ser conjuntos abiertos y el arco $\alpha\beta$ por ser un conjunto perfecto. Luego $m(D) = m(D_1) + m(D_2) + m(\alpha\beta)$, y para satisfacer la segunda condición del área es necesario que $m(\alpha\beta) = 0$■[124]

---

[121] Lebesgue no está considerando el área nula, sin embargo ha asignado medida superficial nula a todo conjunto acotado sobre la recta.

[122] Establece la unidad de superficie tal como lo hizo Euclides.

[123] αβ denota el conjunto de puntos sobre el arco distintos de los extremos α y β

[124] Teniendo en cuenta la definición de unión de dominios (definición 2.2.47)

De esta forma, Lebesgue concluye que “el problema de áreas no será posible sino se considera que la frontera del dominio tenga medida superficial nula” (Lebesgue, 1902, pág. 246). Estableciendo así la siguiente definición.

Definición 2.2.52. Un dominio se dice cuadrable si su frontera tiene medida superficial nula. Y una curva se dice cuadrable si tiene medida superficial nula.

Proposición 2.2.53. El problema de las áreas es posible para dominios cuadrables y tiene solución única si se fija la unidad de área.

Demostración. Sea D un dominio cuadrable que es la unión de los dominios cuadrables $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ disjuntos dos a dos, $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$. Puesto que ninguno de los D_i tienen medida nula, constituyen a lo más un infinito numerable. Las fronteras de todos los dominios tienen medida superficial nula, por lo tanto pueden ser ignoradas al calcular la medida o el área del dominio y $A(D) = \sum_{i=1}^{\infty} A(D_i)$ ■

Supondremos ahora que la segunda condición del problema del área se modifica: *El área de un dominio que es la unión de otros dos es la suma de las áreas de otros dos.*[125]

La siguiente proposición permite afirmar que el área de un dominio está bien definida

Proposición 2.2.54. El área de un dominio D está entre la extensión interior y la extensión exterior de D, $e_i(D) \leq A(D) \leq e_e(D)$.

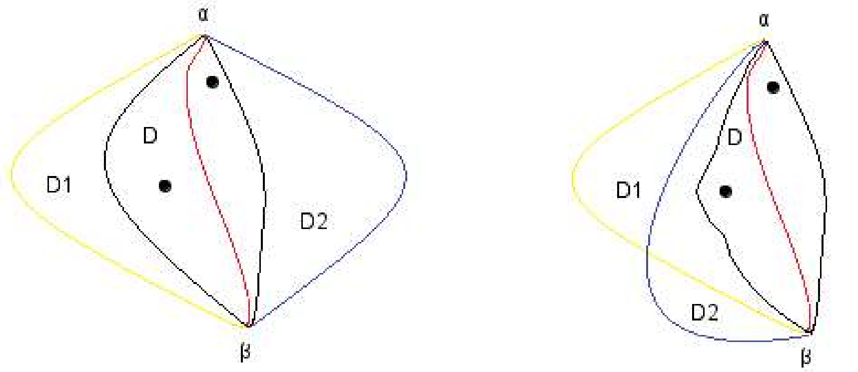
Proposición 2.2.55. El área de un dominio no cuadrable D, limitado por una curva no cuadrable C está entre $m(D)\ y\ m(D) + m(C)$. Es decir $m(D) \leq A(D) \leq m(D) + m(C)$.[126]

Proposición 2.2.56. Dados dos dominios D_1 y D_2 con un arco frontera común $\alpha\beta$, existe un dominio D que contiene el arco $\alpha\beta$ (quizás sin α y β) talque se cumple uno y sólo uno de los casos siguientes:

[125] Aquí Lebesgue aclara que lo está haciendo como lo hace Hadamard para el área de polígonos (*Géometrie Elémentaire,* nota D).

[126] Lebesgue aclara que hay curvas no cuadrables porque existen curvas que pasan por todos los puntos de un cuadrado. Para formar una curva no cuadrable, sin puntos múltiples es suficiente modificar ligeramente el método empleado por Hilbert para definir una curva que pasa por todos los puntos de un cuadrado (*Mathematische Annalen,* Bd. 38 ou Picard, *Traité d'Analyse, 2°* Edition, tome I) citado por Lebesgue.
En la siguiente sección, donde describimos el contenido de (Lebesgue, 1903), mostramos con detalle la construcción que Lebesgue hace de una curva similar a la de Hilbert: “Reemplazaremos cada uno de los cuadrados de Hilbert por un polígono interior a cada cuadrado, de área mas bien grande, escogido de tal manera que las fronteras de dos de dichos polígonos tengan en común sólo el vértice, si existe, por el que la curva pasa del uno al otro.”

- Todo punto de D interior a D_1 también es interior a D_2 y viceversa.
- Todo punto de D dentro de D_1 no pertenece a D_2 y viceversa.



Dominios a lados diferentes de $\alpha\beta$ — Dominios del mismo lado de $\alpha\beta$

Figura 2.1 -Posición de los dominios relativa a un arco

Definición 2.2.57. Sean D_1, D_2 y D dominios, $\alpha\beta$ un arco como en la proposición anterior. Se dice que D_1 y D_2 están del mismo lado de $\alpha\beta$ si todo punto de D interior a D_1 también es interior a D_2 y viceversa; y se dice que D_1 y D_2 están en lados diferentes con respecto a $\alpha\beta$ si todo punto de D dentro de D_1 no pertenece a D_2 y viceversa.

Definición 2.2.58. Sea $\alpha\beta$ un arco de curva no cuadrable y sin puntos múltiples, supongamos que es parte de la frontera de un dominio Δ. Sea D un dominio cualquiera limitado por una curva C. C y $\alpha\beta$ pueden tener arcos en común (ignoramos los puntos comunes, si los hay, que no están en dichos arcos). Sea E el conjunto de los arcos específicos a lo largo de los cuales D y Δ están del mismo lado de $\alpha\beta$, y sea E_1 el conjunto de los arcos para los cuales esto no se cumple. Escojamos arbitrariamente un número θ[127] entre 0 y 1. Asignemos a D el área:

$$A(D) = m(D) + \frac{1}{2}m(C - E - E_1) + \theta m(E) + (1 - \theta)m(E_1)$$

De acuerdo con Lebesgue el fácil mostrar que esta área así definida cumple la segunda condición del problema del área utilizando la siguiente propiedad.

[127] Lebesgue no dice nada acerca de la escogencia de este parámetro pero lo que necesita es garantizar que esta definición de área satisfaga la desigualdad de la proposición 2.2.55, lo que a su vez garantiza que él área esté bien definida.

Proposición 2.2.59. Si un dominio D es la unión de dos dominios D_1 y D_2 estos dos dominios tienen uno y sólo un arco como frontera común, y ningún punto en común fuera de este arco.[128]

Lebesgue no dice aquí nada acerca de la primera propiedad, se supone que esta es la que no se cumple. Sin embargo, en su memoria *Sur le probléme des aires*, la cual analizamos en la siguiente sección, reconoce:

> En el parágrafo 14 de mi tesis, indiqué algunos razonamientos que mostraran que el problema de las áreas es indeterminado para los dominios no cuadrables; pero la exposición que hice de estos razonamientos es inexacta e incompleta. (Lebesgue, 1903, pág. 198).

En resumen hasta aquí el problema del área es posible y bien definido sólo para dominios cuadrables.

Lebesgue concluye esta sección afirmando que:

> Razonamientos análogos a los anteriores pueden hacerse para el caso de los volúmenes de dominios en el espacio ordinario, y de una forma más general de la extensión de un dominio de un espacio a un número cualquiera de dimensiones (Lebesgue, 1902, pág. 248).

El problema del área de dominios no cuadrables (1903)

En la memoria de 1903 *Sur le probléme des aires*, Lebesgue presenta una solución al problema del área de dominios no cuadrable, explicando el error cometido en la tesis doctoral respecto a este problema. Para ello redefine de manera más formal el concepto que permite determinar cuando dos dominios están del mismo lado de un arco frontera común y cuando están a lados opuestos. Define arcos de primera, segunda y tercera especie; y en términos de estas definiciones redefine el área para un dominio no cuadrable, cuya frontera es una curva no cuadrable sin puntos fijos, mostrando que esta nueva definición cumple las 2 propiedades requeridas para que el problema del área tenga solución, y que en efecto esta área depende del número θ que aparece en la definición de 2.2.58. Además construye una curva no cuadrable sin puntos fijos, de la cual ha supuesto ya su existencia, para la definición del área del dominio no cuadrable. También, establece que si dos dominios son semejantes y K es su relación de semejanza, entonces sus áreas estarán en una proporción K^2.

Lebesgue reenuncia el problema del área de la siguiente manera:

[128] (Lebesgue, 1902, pág. 248). Esta propiedad es inmediata de la definición 2.2.47 de unión de dominios

> Asignar a cada dominio plano un número positivo, que se llamará su área, y que satisfaga las siguientes condiciones:
> Dos dominios superponibles tienen la misma área.
> El dominio formado por la unión de dos dominios, sin puntos interiores comunes, teniendo en común un arco de frontera y sólo uno, tiene por área la suma de las áreas de los dominios componentes. (Lebesgue, 1903, pág. 198)

Proposición 2.2.60. Dados dos dominios D_1, D_2, teniendo un arco α de frontera común, existe un dominio Δ interior a D_1 y un dominio Δ' exterior a D_1 tales que se cumple uno y sólo uno de los dos caso siguientes:

- Δ es interior a D_2 y Δ' exterior a D_2
- Δ es exterior a D_2 y Δ' interior a D_2

Demostración: Sean α, α_1, α, α_2 las fronteras de D_1 y de D_2. Sea A un punto de α, diferente a los extremos de α. Haciendo centro en A, se puede describir una circunferencia T lo suficientemente pequeña para que no contenga ningún punto de α_1 ni de α_2; y cualesquiera que sean los arcos α_1 y α_2, que tengan o no puntos comunes, con tal que D_1 y D_2 sean dos dominios. Al interior de T se encuentran arcos de α, sea lm aquél arco que contiene a A. Se toman sobre lm dos puntos a y b, diferentes de l y m, a ambos lados de A. Dentro de T es posible trazar una curva C, contenida en D_1, y adjuntando a y b, y una curva C' adjuntando los mismos puntos y exterior a D_1.[129]

El dominio Δ limitado por C y el arco aAb son interiores a D_1, el dominio Δ' limitado por C' y aAb es exterior a D_1. Ningún punto de los arcos α, α_2 es interior a los dominios Δ y Δ '; pues, o Δ es interior a D_2 y Δ ' exterior a D_2, o Δ es exterior a D_2 y Δ' interior a D_2. Estás son las dos únicas posibles hipótesis, ya que el dominio $\Delta \cup \Delta'$, contiene a A y todos los puntos vecinos de A, los puntos interiores a D_2 y los puntos exteriores a ese dominio.

Definición 2.2.61. Dados los dominios D_1 y D_2, con frontera común α y los dominios Δ y Δ' construidos como en la proposición anterior. Cuando Δ es interior a D_2, diremos que D_1 y D_2 están del mismo lado de α. Cuando Δ es exterior a D_2, diremos que D_1 y D_2 están de lados diferentes de α.

[129] Aquí Lebesgue vuelve a hacer referencia al teorema de la curva de Jordan, y afirma que los argumentos usados por Jordan para su demostración le permiten hacer esta construcción.

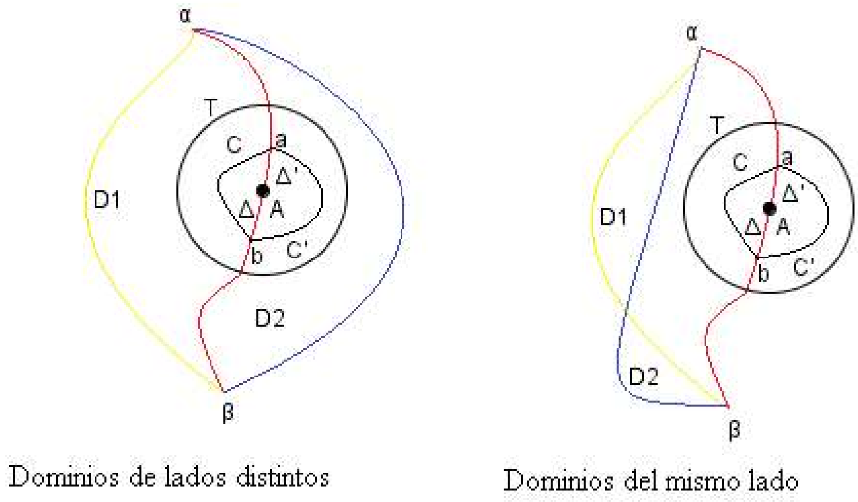


Figura 2.2 – Posiciones relativas de dos dominios

Lebesgue aclara que las definiciones no dependen obviamente de la elección de T, a, b, C, C'. Y explica el por qué las posiciones relativas de D_1 y D_2 con respecto al arco α en un punto, se conservan para todos los puntos de α puesto que se excluyeron los puntos extremos de α para todos los razonamientos.

Definición 2.2.62. Sea $\alpha\beta$ un arco de curva, sin puntos múltiples y no cuadrable que pertenece a la frontera de un dominio Δ. Sea D un dominio limitado por una curva C, esta curva es tal que contiene arcos no cuadrables superponibles a algunos arcos de $\alpha\beta$, entonces:

- Si A es un arco tal que, cuando se efectúa la superposición de una parte no cuadrable cualquiera A' de A con uno cualquiera de los arcos de $\alpha\beta$ que le son iguales, D y Δ están siempre del mismo lado de A', A se llamará un *arco de la primera especie*.
- Si B es un arco no cuadrable de C tal que, cuando se efectúa la superposición de una parte no cuadrable cualquiera B' de B con uno cualquiera de los arcos de $\alpha\beta$ que le son iguales, D y Δ están siempre de lados diferentes de B', se llamará B un *arco de la segunda especie.*
- Los otros arcos de C serán de la *tercera especie.*

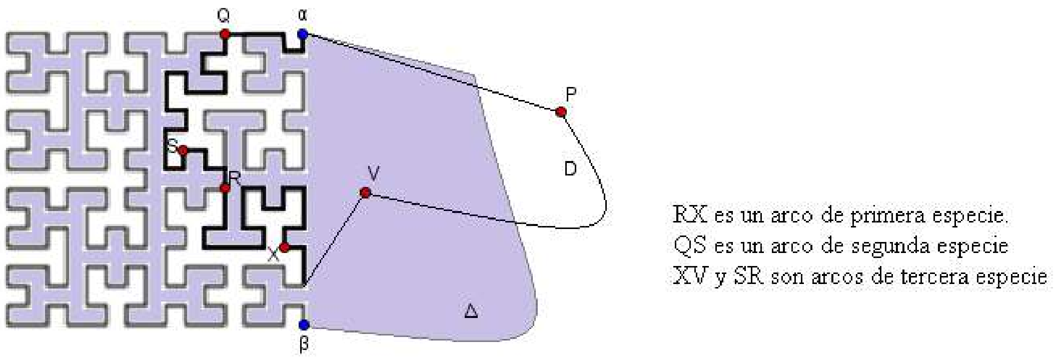


Figura 2.3 – Clasificación de arcos

Definición 2.2.63. Sea *D* un dominio, m la medida de superficie de los puntos interiores de *D*, $m(A)$ la suma de las medidas de superficie de los arcos de primera especia y $m(B)$ la suma de las medidas de superficie de los arcos de segunda especie.[130] Entonces se define el área de este dominio como:

$$A(D) = m + \theta m(A) + (1 - \theta)m(B).$$

Donde θ es un número positivo menor que 1.

Lebesgue afirma que con esta definición se satisfacen las condiciones impuestas para el área; mientras que con la definición de área de un dominio no cuadrable presentada en su tesis doctoral[131] no se cumple la primera propiedad del área debido a que la clasificación de los arcos de C, dejando D y Δ inmóviles, no es correcta ya que a dos dominios superponibles podrían corresponder áreas diferentes. Sin embargo en 1905 escribe una nota aclaratoria, donde afirma que en su definición de 1903 olvidó el factor $\frac{1}{2}m(C - E - E_1)$ el cual es indispensable en la definición del área para que se cumpla la segunda condición.

> … en una Nota de este Boletín (t, XXI pag 197), donde rectificaba un error cometido en mi tesis, dejé pasar de nuevo una inexactitud. En lugar de tomar por área de D el número:
>
> $$m + \theta m(A) + (1 - \theta)m(B)$$
>
> Hay que, en efecto, tomar
>
> $$m + \theta m(A) + (1 - \theta)m(B) + \frac{1}{2}m(E)$$

---

[130] De acurdo con Lebesgue *m* corresponde a la extensión interior de *D* en el sentido de Jordan, y $m(A)$ y $m(B)$ corresponden a las extensiones exteriores de los arcos.

[131] Ver definición 2.2.58.

> $m(E)$[132] designa la medida superficial de los puntos del contorno de D que no forman parte de A, ni de B.
> Por falta de este término ½ m (E), que había escrito correctamente en mi Tesis, pasaría a veces que el dominio formado por la reunión de dos dominios, sin puntos interiores comunes, no tendría como área la suma de las áreas de los dominios componentes. (Lebesgue, 1905, págs. 273-274)

En (Lebesgue, 1903) se construye una curva no cuadrable sin puntos múltiples cuyos arcos son todos de primera especie. Allí Lebesgue afirma que con la clasificación de los arcos en las tres especies y la construcción de dicha curva no cuadrable se muestra que el área depende de θ.

Construcción de una curva no cuadrable.

La curva se define en forma paramétrica mediante dos funciones *f* y φ continuas en el intervalo $[0,1]$:

$$x = f(t), y = \varphi(t)$$

Se trazan las rectas $\Omega AF'$, $\Omega M'R$ y los dos arcos de circunferencia de centro Ω, AM' y $F'R$, ver Figura 2.4. Los puntos A y R tienen respectivamente coordenadas $\big(f(0), \varphi(0)\big)$ y $\big(f(1), \varphi(1)\big)$. Los puntos (x, y) correspondientes a $t \in (0,1)$ están en el dominio $AF'\,RM'$.

[132] De acuerdo con la clasificación de arcos que aparece en (Lebesgue, 1903), *E* designa los arcos de tercera especie.

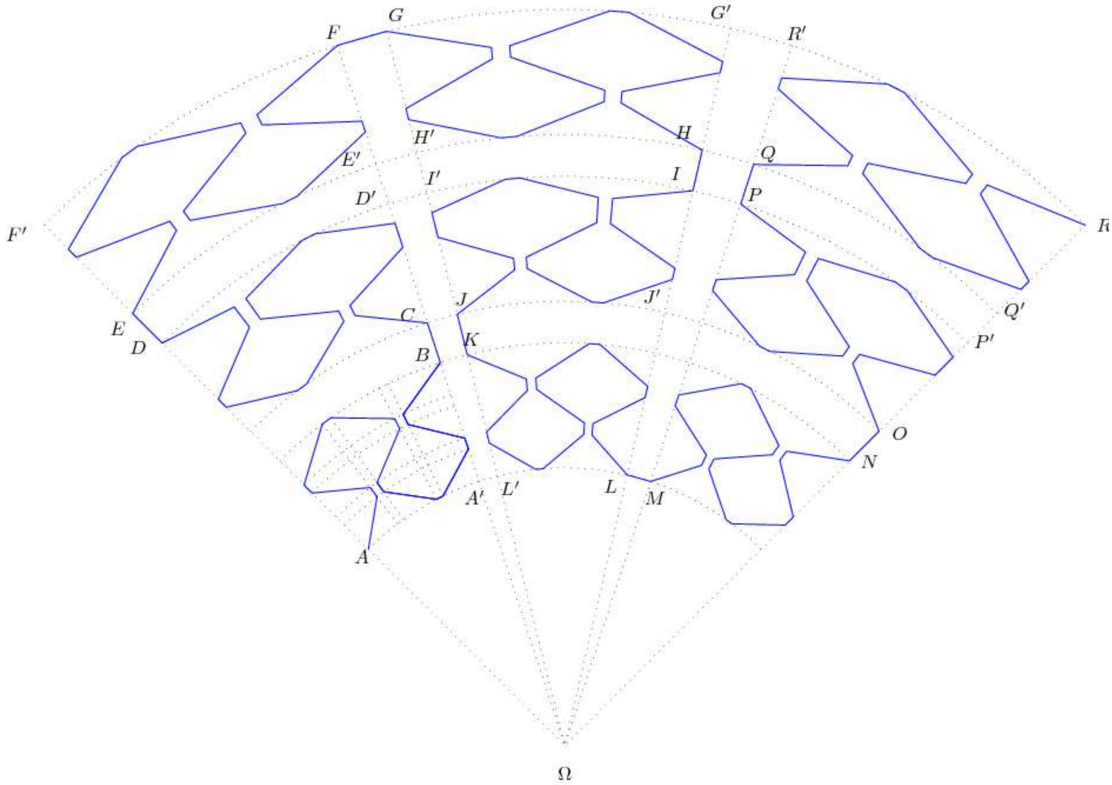


Figura 2.4 – Construcción de la curva no cuadrable de Lebesgue

Considérense en el intervalo $(0{,}1)$ los valores de t de la forma $(p/9) \pm \varepsilon$, dónde p es entero; se trazan los rayos $\Omega F, \Omega G, \Omega G', \Omega R'$ y los arcos $B'\,N, C'O, DP'$ y EQ' tales que:

$$F'\,F\; =\; GG' =\; R'\,R, AB' =\; C'\,D\; =\; EF'\; y\; FG\; =\; G'\,R'\; =\; B'\,C' =\; DE\; = \varepsilon.$$

Para los valores

$$\frac{1}{9} - \varepsilon, \frac{1}{9} + \varepsilon, \frac{2}{9} - \varepsilon, \cdots, \frac{8}{9} + \varepsilon$$

El punto (x, y) ocupa la posiciones $B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q$. Cuando t varía de $\frac{p}{9} - \varepsilon$ a $\frac{p}{9} + \varepsilon$, el punto (x, y) describe la recta de origen Ω, o el arco de circunferencia de centro Ω que une los dos puntos que corresponden a los valores $\frac{p}{9} - \varepsilon$, $\frac{p}{9} + \varepsilon$. Cuando t varía de $\frac{p}{9} + \varepsilon$ a $\frac{p+1}{9} - \varepsilon$, el punto (x, y) se queda dentro de los dominios, como $AA'\,BB'$, cuyos dos extremos opuestos son los puntos que corresponden a $t = \frac{p}{9} + \varepsilon$ y

$t = \frac{p+1}{9} - \varepsilon$. De esta manera, Lebesgue define las funciones f y φ en los intervalos $\left(\frac{p}{9} - \varepsilon\,, \frac{p}{9} + \varepsilon\right)$.

Para definir f y φ en los intervalos $\left(\frac{p}{9} + \varepsilon\,, \frac{p+1}{9} - \varepsilon\right)$, se repite el procedimiento anterior sobre estos intervalos, y sobre cada uno de los dominios análogos a $AA'\,BB'$, así como se hizo sobre $AF'\,RM'$, sustituyendo a ε por una cantidad más pequeña ε_1, tan pequeño como para que las operaciones sean posibles. Tras esta operación, quedarán 9^2 intervalos en los cuales no se definen f y φ; se repite entonces sobre ellos las mismas operaciones sustituyendo a ε por ε_2. Lebesgue afirma que:

> Si los $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ se eligen bastante decrecientes, no se detendrán nunca estas operaciones y se definirán f y φ para un conjunto de valores de t denso en toda parte sobre (0,1); lo que basta para determinarlas completamente puesto que f y φ son continuas. (Lebesgue, 1903, pág. 201)

La curva AR así definida es la que va a desempeñar el papel de $\alpha\beta$. [133] De acuerdo con (Lebesgue, 1903) esta curva es en efecto no cuadrable, si los ε tienden bastante rápidamente hacia cero. La extensión exterior de la curva es el límite hacia el cual tienden la sucesión decreciente $A, A_1, A_2, A_3, \cdots$ Donde A representa el área, en el sentido ordinario de la palabra, de $AF'\,RM'$; A_2 es la suma de las áreas de los 9 dominios similares al dominio $AA'\,BB'$; A_3 es la suma de las áreas de los 9^2 dominios que corresponden a ε_2 y así sucesivamente. Ahora bien se tiene que:

$$A - A_1 < 2(AF' + F'R)\varepsilon$$

$$A_1 - A_2 < 2.3(AF' + F'R)\varepsilon_1$$

$$\vdots$$

$$A_p - A_{p+1} < 2.\,3^p(AF' + F'R)\varepsilon_p$$

Y según Lebesgue, se pueden elegir los ε_i de modo que la serie

$$2(AF' + F'R)\sum \varepsilon_p 3^p$$

tenga una suma tan pequeña como se quiera, es decir, de modo que el límite de los A_i no sea nulo y la curva AR no sea cuadrable.

[133] Este es el arco no cuadrable que se utilizó para definir las tres especies de arcos. Ver definición 2.2.62

El dominio Δ estará limitado por la curva AR, la recta ΩA y una curva ΩR tal que el sector $\Omega AM'$ sea interior a Δ. Entonces se distinguirán los dos lados de AR diciendo que Δ está del lado interior de AR.

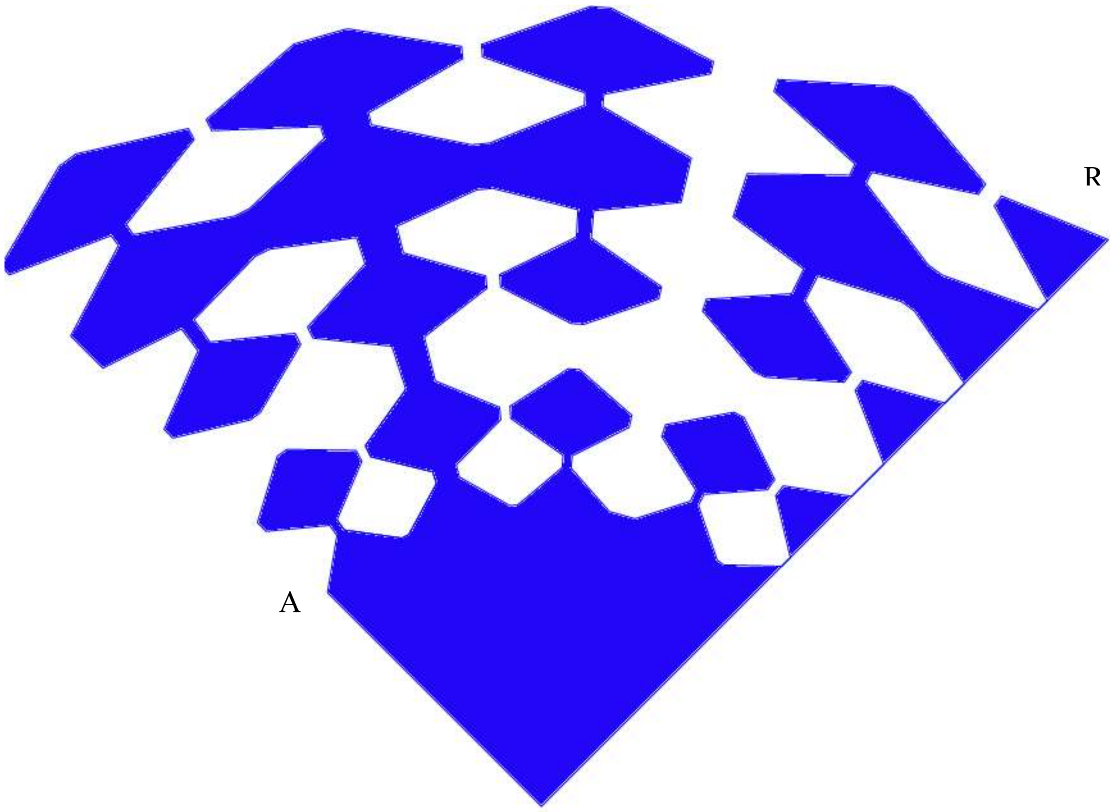


Figura 2.5 – Interior de la curva de Lebesgue

Consideremos un arco γ no cuadrable de la curva obtenida; este arco que no se reduce a una recta contiene arcos de circunferencia. Supongamos por ejemplo que contenga el arco ST, relativo a ε_2, que se obtiene para t variando de $\left(\frac{1}{3}\left(\frac{p}{9}-\varepsilon\right)-\varepsilon_1\right)$ a $\left(\frac{1}{3}\left(\frac{p}{9}-\varepsilon\right)+\varepsilon_1\right)$. AR sólo contiene dos arcos iguales a F_1G_1, los arcos UV, XY, correspondientes a los intervalos

$$\left[2\frac{p}{3}-\varepsilon-\frac{1}{3}\left(\frac{p}{9}-\varepsilon\right)-\varepsilon_1, 2\frac{p}{3}-\varepsilon-\frac{1}{3}\left(\frac{p}{9}-\varepsilon\right)+\varepsilon_1\right]$$

$$\left[2\frac{p}{3}+\varepsilon+\frac{1}{3}\left(\frac{p}{9}-\varepsilon\right)-\varepsilon_1, 2\frac{p}{3}+\varepsilon+\frac{1}{3}\left(\frac{p}{9}-\varepsilon\right)+\varepsilon_1\right]$$

De allí resulta que γ es superponible a lo sumo de cinco maneras diferentes con arcos de AR; en los cinco desplazamientos correspondientes ST tomará las posiciones TS, UV, VU, XY, YX.

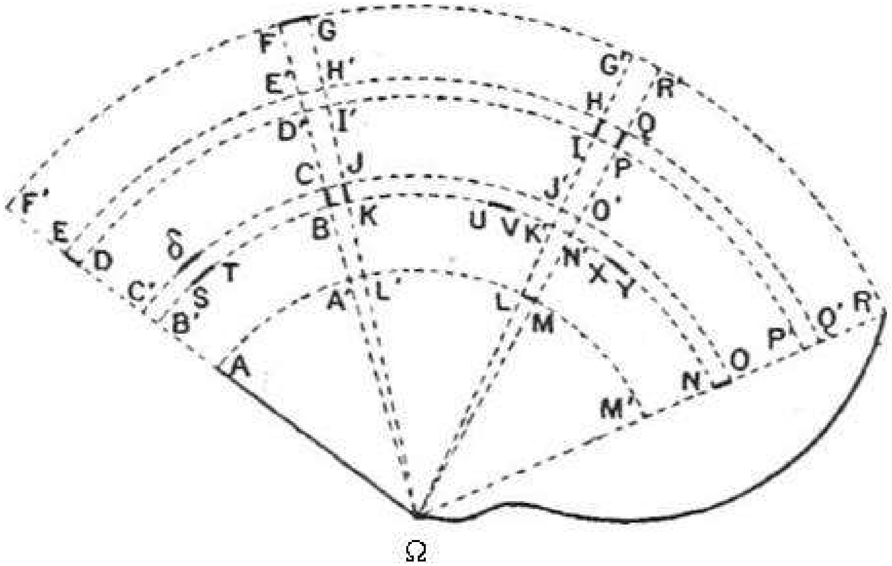


Figura 2.6 - Arco no cuadrable de primera especie

Los cinco desplazamientos en cuestión son pues, o de las rotaciones en torno a Ω, o de las simetrías con relación a rectas de Ω, las cuales son bisectrices de ángulos como $F\Omega G$, $S\Omega T$. Obsérvese que el lado interior de γ viene a coincidir con el lado interior de AR. Eso basta para afirmar que todo arco no cuadrable de AR es de la primera especie.

Lebesgue agrega que este resultado es más evidente aún si se modifica un tanto la construcción de AR. La nueva curva AR' se obtiene sustituyendo cada arco de circunferencia δ que pertenece a la curva original por un arco δ' simétrico con respecto al segmento que une los extremos de δ con relación a la recta que adjunta las extremidades de δ, δ' tendrá concavidad contraria a δ. La curva AR' así construida no tendrá puntos dobles; tendrá incluso la misma extensión exterior que AR, por lo tanto será no cuadrable. Si para esta curva se define como anteriormente, el lado interior, todo arco no cuadrable de AR'

será de la primera especie, ya que todos sus arcos de circunferencia tienen su concavidad hacia el interior. De esta manera, Lebesgue concluye que:

> Que se trate de una u otra de las dos curvas *AR*, se puede observar que todo arco no cuadrable de *AR* será de la primera especie cuando se efectúa la clasificación de los arcos en tres especies teniendo en cuenta, no sólo las superposiciones de arcos de *C* y *αβ*, es decir, de *AR*, que se obtienen por desplazamientos de *C*, sino también de las superposiciones que se obtiene efectuando sobre *C* una transformación por figura similar cualquiera. Con esta nueva manera de clasificar los arcos, y con las curvas *AR* y *AR'* construidas, el número que llamamos área depende efectivamente de θ; satisface bien las dos condiciones del problema del área y de más es tal que, si dos dominios son semejantes, siendo *K* la relación de semejanza, sus áreas están en proporción K^2. Esta última condición no se cumplía con la primera clasificación de los arcos. (Lebesgue, 1903, pág. 203)

El problema del área de una superficie[134]

En el capítulo IV de su Tesis Lebesgue muestra las dificultades existentes para obtener una definición del concepto área que permita calcular el área de cualquier superficie y además conserve la analogía con la longitud de una curva. Para ello describe la evolución histórica del concepto, citando las definiciones dadas por Peano y Hilbert.

De acuerdo con Lebesgue, en geometría se considera el área de una superficie *S* como el límite de las áreas de ciertas superficies poliédricas que tienen a *S* como frontera; por tanto definir el área es decir cuál sucesión de poliedros se considera.

Por analogía con la definición de la longitud de una curva, consideramos en primer lugar los poliedros inscritos. Por lo tanto, de acuerdo con Peano los postulados admitidos por Arquímedes son equivalentes a la siguiente definición:

> El área de una superficie convexa es el valor común del límite superior de las áreas de las superficies poliédricas convexas inscritas y del límite inferior de las circunscritas. (Lebesgue, 1902, pág. 298).

Durante mucho tiempo se supuso que el área de una superficie podía ser definida como el límite de las áreas de las superficies poliédricas inscritas[135], cuando el área máxima de las caras y la longitud máxima de las aristas tienden a cero.

[134] Las superficies que le preocupan a Lebesgue son las *superficies alabeadas* lo que significa *superficie reglada y no desarrollable*. Superficie reglada es aquella superficie generada por una recta o una curva que se desplaza en el espacio de acuerdo a una regla determinada; superficie desarrollable es aquella que se puede extender sobre un plano particionándola en superficies más simples. En adelante usaremos el término *alabeada* (reglada no desarrollable) como traducción de *gauche*

[135] Lebesgue aclara que en los vértices de una superficie poliédrica inscrita podemos hacer corresponder los puntos del plano (*u, r*) a los cuales corresponden los vértices como puntos de la superficie propuesta. A cada cara del poliedro corresponde así un polígono del plano (*u, r*), suponemos aquí y en todo lo que sigue que estos polígonos no se traslapan unos sobre otros

Pero Schwarz en una carta a Genacchi, demostró que las áreas de las superficies poliédricas inscritas en una sección finita de un cilindro de revolución no tienen límite. Lo mismo anotó Peano en sus conferencias en la Universidad de Turín en 1881-1882, antes de la publicación de la carta de Schwarz en el curso impartido por Hermite en la Facultad de Ciencias durante el segundo semestre de 1882.[136]

Por tal motivo, si se quiere definir el área, mediante poliedros inscritos, es necesario someter estos poliedros a condiciones adicionales. De esta manera se consideran sólo poliedros cuyos ángulos de las caras no tienden hacia cero o poliedros cuyos ángulos de las caras con los planos tangentes de la superficie tienden hacia cero. Respecto a estas condiciones Lebesgue comenta:

> La inmensa mayoría de las restricciones que así se consideraron se encontraron insuficientes para que exista un límite; por otra parte son tan particulares que, solamente, la existencia del límite legitimaría su consideración. (Lebesgue, 1902, pág. 299).

Las definiciones de Hermite y Peano tienen la característica común de no basarse en la consideración de los poliedros inscritos y admitir, como una generalización de la división de una curva en arcos parciales, la división de una superficie en secciones de contornos cerrados.

Hermite considera una superficie $z = f\,(x, y)$ con planos tangentes variando de forma continua. Sea d un contorno del plano xy, m un punto interior de este contorno, M el punto sobre la superficie que le corresponde, D' el contorno situado en el plano tangente a la superficie en el punto M que tiene como proyección d, y D el contorno de la superficie que se proyecta de d. Se hace corresponder a D el área de D' (se supone d cuadrable). Esto puesto que dividimos la superficie en secciones. La suma de los números asignados a los contornos empleados es un valor aproximado al área. El área es el límite de estos valores

[136] Para su demostración se divide la superficie lateral del cilindro de revolución en *m* partes iguales, mediante planos con sección recta; en cada circunferencia-sección se inscribe un polígono regular convexo con *n* lados, pasando los semiplanos por el eje y los vértices de uno de estos polígonos girando $\frac{\pi}{n}$, cuando se pasa de una sección recta a la siguiente. Después se considera la superficie poliédrica inscrita formada por triángulos isósceles, cuya base son los lados de los polígonos inscritos en las secciones rectas vecinas. Es evidente que se tiene ahí una superficie tan aproximada al cilindro como se desee, al aumentar *n* indefinidamente; es también claro que el límite del área de esta superficie poliédrica depende del límite de $\frac{n}{m}$. Se puede entonces proceder como si este límite de área no existiera o como si existiera no fuera único. (Lebesgue, 1936, pág. 70)

cuando el número de las secciones aumenta indefinidamente de modo que su diámetro máximo tienda hacia cero.

Lebesgue observa que:

> La existencia del límite supone que el contorno considerado como el que limita la superficie no es cualquiera; lo mismo ocurría en las definiciones precedentes. (Lebesgue, 1902, pág. 299)

La definición de Hermite hace intervenir explícitamente los ejes de coordenadas, además no es la generalización de la definición de la longitud mediante polígonos inscritos.

La definición de Peano no presenta estos inconvenientes. Sea C una curva cerrada alabeada, se demuestra, por lo menos en los casos simples, que existe una curva plana cerrada c tal que sobre todo plano las proyecciones ortogonales de C y c limitan áreas planas[137]; a cada curva C se le asigna el número que representa el área del dominio plano limitado por c. Lo mismo para la definición de la longitud, a cada arco parcial asignamos la longitud del segmento que une sus extremos, es decir la longitud del segmento que sobre toda recta tiene la misma proyección ortogonal que el arco.[138]Se divide la superficie en contornos cerrados; a cada división se hace corresponder la suma de los números asignados a los contornos empleados. Peano llama área al límite superior de la suma de estos números.

De acuerdo con Lebesgue:

> Todas las definiciones anteriores, salvo la debida al Señor Peano, suponen la existencia del límite de una sucesión de números y la existencia de este límite es demostrada sólo para las superficies que tienen planos tangentes variando de modo continuo. Entonces en este caso, no se trata de asignar a cada superficie un número, sino más bien, asignar a cada superficie de los dominios planos en los que la suma de las áreas definidas como limite o limite superior o inferior un número igual a la integral doble $\iint \sqrt{EG - F^2}\, dudv$; toda definición geométrica que no condujera a ese número consagrado para el uso sería en efecto rechazada. Una definición del área que no se aplique más que a aquellas superficies que tienen planos tangentes variando de forma continua, puede hacer conocer una propiedad geométrica interesante, pero no es una verdadera definición del área, siendo el número a definir conocido antes de la definición. (Lebesgue, 1902, pág. 300)

La definición de Peano se aplica a todas las superficies cuya frontera es uno de los contornos C los cuales se pueden hacer coincidir con los contornos c de los planos, como se ha dicho más arriba. Sin embargo, esta definición es verdaderamente interesante sólo si se

[137] Si la proyección de C tiene puntos múltiples; el área limitada por C debe ser considerada como si se expresara con la ayuda de la integral curvilínea $\frac{1}{2}\int xdy - ydx$.

[138] No se trata aquí de la curva proyección sino la distancia de los extremos del arco proyección.

puede trazar sobre la superficie bastantes de estos contornos C para que sea posible dividir la superficie en secciones de diámetros tan pequeños como se quiera y donde las fronteras sean las curvas C, en cuyo caso el área sólo dependerá de la forma de todas las partes de la superficie. Esta condición se cumple, por ejemplo, si la superficie de los planos tangentes varía de forma continua.

Lebesgue llama la atención sobre el caso en el cual las curvas C constituyen un conjunto cuya potencia es la del continuo, entonces el área se define como el límite superior de un conjunto de números cuya potencia es la del continuo. Para calcular esta área hace falta, en este conjunto, aislar un conjunto infinito numerable de números que tienden hacia el límite superior; se puede demostrar que si se considera una sucesión de divisiones de la superficie de contornos C, y se hace tender el diámetro máximo de estos contornos hacia cero, los números correspondiente a estas divisiones tienden hacia el área. Pero no es evidente que se pueda siempre alcanzar el número que define Peano por una cantidad infinita numerable de operaciones, además no se conoce nada más sobre este número que su existencia.[139]

Una vez hechas estas aclaraciones, Lebesgue procede a exponer su teoría.

Definición 2.2.64. Dada una superficie S definida por las ecuaciones

$$x = f(u,v), y = \varphi(u,v), z = \psi(u,v)$$

Donde (u,v) es un punto perteneciente a un dominio plano D. No se consideran diferentes aquellas ecuaciones que se obtienen expresando u, v en función de las coordenadas u_1, v_1, de puntos de un dominio D_1; entre D_1 y D_2 existe una correspondencia biunívoca y continua, se dice entonces que son representaciones paramétricas de las misma superficie S.

Definición 2.2.65. El conjunto de puntos que corresponde a la curva que limita el dominio D se llamará la frontera de la superficie S.

Definición 2.2.66. Dos superficies S_1 y S_2 se dicen iguales si es posible obtener las ecuaciones paramétricas de S_1 por las fórmulas de cambio de coordenadas a partir de las ecuaciones paramétricas de S_2, y visceversa.

[139] El problema del área de una superficie alabeada, en este contexto histórico, es analizado en (Gandon & Perrin, 2009)

Definición 2.2.67. Una superficie S se dice unión de superficies S_i, en número finito o no, si el dominio D del plano (u, v) que corresponde a S es unión de los dominios D_i que corresponden a los S_i y si la parte de S que corresponde a D_i es idéntica a S_i

Definición 2.2.68. Una superficie S definida por las funciones $f, \varphi_, \psi$ se llama la superficie límite de las S_p dadas por las funciones $f_p, \varphi_{p,}\psi_p$, si $f_p, \varphi_{p,}\psi_p$, si estas funcionesson definidas en el mismo dominio que $f, \varphi_, \psi$ y tienden uniformemente a $f, \varphi_, \psi$.

Lebesgue define el problema de la medida de superficies, por analogía con el problema de la medida de curvas de la siguiente manera:

> Asignar a cada superficie un número positivo finito o infinito que se llamará su área y satisface las siguientes condiciones:
> Hay superficies planas con un área finita.
> Dos áreas iguales tienen la misma área.
> Una superficie unión de varias otras tiene como área la suma de las áreas de las superficies componentes.
> El área de una superficie *S* es el límite inferior de las áreas de las superficies poliédricas donde *S* es su límite (Lebesgue, 1902, pág. 302).

Lebesgue aclara que las tres primeras condiciones son suficientes, cuando se consideran sólo dominios planos. Así el problema es posible sólo para los dominios limitados por curvas cuadrables.

Por otra parte, es importante modificar la tercera condición:

3*. Una superficie unión de otras dos superficies tiene por área la suma de las áreas de las dos superficies.

Las condiciones 1, 2, 3 en efecto son suficientes para los dominios cuadrables. Para los dominios no cuadrables, Lebesgue retoma la siguiente definición dada por Jordan.

Definición 2.2.69. Un dominio no cuadrable es límite de dominios cuadrables cuyas áreas tienden hacia la medida de los puntos del dominio, llamaremos a este número el área interior del dominio no cuadrable.

De esta manera, la condición 4 muestra que se debe llamar área al área interior, pero la condición 3* no se cumple. Lebesgue está preocupado por aclarar que el problema no está resuelto en general para los dominios no cuadrables:

> El problema de áreas así planteado es posible sólo para las áreas cuadrables. Desde luego esto no quiere decir que el problema de las áreas es imposible para otra familia de dominios que el de los

dominios cuadrables. Es evidente, por ejemplo, que el problema del área es posible para cualquier familia que conste de un número finito de dominios específicos en tamaño y posición, ya sea que estos dominios sean cuadrables o no. Queremos decir solamente que el problema no es posible para el conjunto de todos los dominios, pero es posible para los dominios cuadrables.
Es fácil demostrar que si uno plantea el problema con las condiciones 1, 2, 3, 4, no existe ninguna familia de dominios formada de los dominios cuadrables y otros dominios, para la cual el problema de las áreas sea posible; al contrario existen tales familias si se plantea el problema con las condiciones 1, 2, 3 bis, 4 y qué considera sólo los dominios planos. Retengamos solamente que el problema de las áreas es posible en el plano sólo para ciertas familias de dominios, en el espacio pues será posible sólo para ciertas familias de superficies. (Lebesgue, 1902, págs. 302-303).

Definición 2.2.70. Sea S una superficie correspondiente a un dominio D del plano (u, v). Se dice que S es cerrada si a cada punto de la frontera de D le corresponde el mismo punto para S.

Definición 2.2.71. Diremos que un arco de curva $\alpha\beta$ es interior a una superficie cerrada S, si es imposible trazar una curva que corte a $\alpha\beta$, que teniendo una rama infinita no corte a S.

Definición 2.2.72. Diremos que un arco $\alpha\beta$ es cuadrable si es posible encontrar una sucesión de superficies poliédricas $S_1, S_2 \cdots$ cerradas que contienen al arco $\alpha\beta$, cuyas áreas, sumas de áreas de las caras, tienden hacia cero; y que tienen por superficie limite una superficie en la cual el conjunto de puntos es idéntico al conjunto de los puntos del arco $\alpha\beta$

Definición 2.2.73. Una curva cerrada se dice que es cuadrable si cada uno de sus arcos son cuadrables**.**

Proposición 2.2.74. Toda curva rectificable es cuadrable.

Demostración. Sea C una curva rectificable de longitud *l*, particionada en arcos de longitud *a*. Sean $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \cdots$ tales arcos. Consideremos los cilindros de revolución tales que sus ejes son las cuerdas $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \cdots$ y sus radios iguales a *a*. Limitemos el cilindro $\alpha\beta$ por dos planos paralelos que pasan por α y por β.

Dos cilindros consecutivos, por ejemplo $\alpha\beta$ **y** $\beta\gamma$ **,** estarán conectados, por uno de los dos ejes, convenientemente escogido, tal que las paralelas limites de estos dos cilindros están separadas de la esfera de radio a y centro β. Cubrimos los extremos de los cilindros por dos semiesferas.

El conjunto de estas superficies es una superficie cerrada que contiene a C**.** La suma de las áreas de estos cilindros y esferas, usando la palabra área como en geometría elemental, es a lo más igual a:

$$\frac{l}{a}4\pi a^2 + 2\pi a \sum long\ \alpha\beta \leq 4\pi al + 2\pi al\ .$$

Reemplazando los cilindros por prismas inscritos y las esferas por poliedros convexos inscritos tenemos una superficie poliédrica cerrada que contiene a C y de área a lo más igual a $6\pi al$; cuando a disminuye estas superficies tienden hacia C, la cual es cuadrable.

Definición 2.2.75. Dada una curva cerrada C **,** llamaremos área mínima de C al límite inferior[140] de las áreas de superficies poliédricas cuyas fronteras tienden hacia C.

Una vez Lebesgue ha definido el área mínima, supone que dada una curva cerrada, existe una superficie poliédrica tal que su frontera está tan cerca de la curva como se quiera y tal que su área difiera tan poco como se quiera del área mínima de la curva. Esta superficie será una especie de superficie aproximante de C. Lebesgue considera tres curvas formadas por los arcos (α, β), (β, γ) y (α, γ) respectivamente, con β cuadrable, muestra que, en estas condiciones, es posible construir una superficie aproximante de la curva (β, γ) que contiene el arco cuadrable β, reunificando las superficies aproximantes mediante superficies poliédricas. De esta manera demuestra la siguiente propiedad de las curvas cuadrables.

Proposición 2.2.76. Toda curva cuadrable en el plano es cuadrable en el espacio.

Demostración. Dadas tres curvas cerradas formadas por los arcos (α, β) para la primera, (β, γ) para la segunda y (α, γ) para la tercera. Supongamos β cuadrable; podemos encerrarla en superficies poliédricas cerradas: $B_1, B_2, \ldots$ cuyas áreas tienden hacia cero y cuyos puntos tienden hacia los de β. Sean A_1, A_2, ..., superficies poliédricas cuyas fronteras tienden hacia (α, β) y cuyas áreas tienden hacia el área mínima de (α, β). Análogamente se consideran las superficies C_1, C_2, ... relativas a (β, γ).

Si se hace *i* suficientemente grande y *j* suficientemente pequeño, A_i y C_i encontraran a B_i siguiendo las curvas

Supongamos que A_i se define mediante las funciones de las variables *u*, *v*, el punto (u, v) está en un dominio D que es independiente de *i*, sea *b* la parte de la frontera de D, que corresponde a β. Los puntos de A_i interiores B_j corresponden a un cierto conjunto de puntos en el plano (u, v), el cual contiene un dominio cuya frontera incluye a *b*.

[140] Ínfimo.

Supongamos un dominio d_{ij} tomado lo más grande posible y sea b_{ij} la parte de su frontera que no forma parte de la de D.

La curva β_{ij} de A_i que corresponde a b_{ij} está sobre B_j; si i y j aumentan simultáneamente β_{ij} tiende a β.[141]

Definamos de la misma manera la curva β'_{ij} relativa a B_j, C_i. Sobre B_j podemos unir los extremos de β_{ij} y β'_{ij} que tienden hacia el extremo m de β por una línea poligonal m_{ij} tal que todos sus puntos tienden hacia m, de igual manera sea n_{ij} una curva de B_j que une los extremos de β_{ij} y β'_{ij} que tienden al extremo n de β.

Sea A'_{ij} la porción de A_i correspondiente a $D - d_{ij}$ y C'_{ij} la porción análoga de C_i. La superficie formada de A'_{ij}, C'_{ij} y de una de las dos superficies limitadas sobre B_j para $\beta_{ij}, \beta'_{ij}, m_{ij}, n_{ij}$ tiene su frontera que tiende a (α, γ) y una de sus curva que tiende a β. Su área tiende hacia una cantidad a lo más igual a la suma mínima de las áreas de (α, β) y (β, γ); por otra parte es evidente que el límite no puede ser inferior a esta suma, por lo que es igual.

Una vez demostrada la anterior proposición afirma que esta propiedad es suficiente para demostrar que una curva no cuadrable en el plano es no cuadrable en el espacio.

Proposición 2.2.77. Toda curva no cuadrable en el plano no es cuadrable en el espacio.

Definición 2.2.78. Sea *S* una superficie, el área interior de *S* es el límite inferior de las áreas de las superficies poliédricas que tiende hacia la superficie dada *S*.

Dada esta definición Lebesgue observa que según la condición 4 del problema de las áreas este número debe ser el área de *S*. Antes de examinar si verifica la condición 3 del problema del área, analiza las superficies cuya área interior es finita, las superficies cuadrables[142].

Demuestra que toda superficie cuadrable puede ser dividida en dos secciones por una curva rectificable. Deduce de allí que tal superficie puede ser dividida en un número finito de secciones limitadas por curvas rectificables de área mínima tan pequeña como se quiera,

[141] Lebesgue comenta que: para no ser provocados a desarrollos demasiado largos, admitimos estas propiedades.

[142] Lebesgue aclara que las superficies cuadrables son las correspondientes a las curvas rectificables, Recordemos que Lebesgue está interesado en establecer la definición del área de una superficie mediante la analogía con la longitud de una curva.

cada una de estas secciones tienen un diámetro tan pequeño como se quiera. Al final de la demostración afirma que:

> Raciocinios largos pero simples, análogos a aquellos a los que acabamos de emplear, permiten mostrar que el teorema precedente se aplica también a las superficies, pues toda superficie cuadrable puede ser descompuesta con la ayuda de curvas rectificables en un número finito de superficies cuyas áreas interiores sean tan pequeñas como queramos. (Lebesgue, 1902, pág. 308)

A continuación Lebesgue presenta un procedimiento para el cálculo de una superficie cuadrable:

Considera una superficie cuadrable S y una sucesión de divisiones $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de S. Cada división comprende un número finito de superficies limitadas por curvas cuadrables, y las secciones de cada división D_i tienen un diámetro inferior a $\frac{1}{i}$. A cada sección de esta división le asocia una superficie poliédrica tal que su frontera está a una distancia menor que $\frac{1}{i}$ del contorno de la sección considerada, además el área de cada superficie poliédrica difiere del área mínima de los contornos de las secciones en una cantidad $\frac{\varepsilon}{n_i}$, n_i designa el número de secciones de la división D_i. Mediante el proceso de reunificación de superficies poliédricas, establecido en la proposición 2.2.74, construye una superficie poliédrica S_i donde el área difiere en menos de $\frac{2}{i}$ de de la suma m_i de las áreas mínimas de los contornos de las secciones de la división D_i. Demuestra entonces que las superficies S_i tiende a S y como consecuencia el límite inferior de sus áreas tienden al área interior de S. El área interior de S es pues igual al límite inferior de los m_i:

> Pues cualquiera que sea la sucesión de divisiones D_i los números m_i correspondientes tienen un límite: el área interior de S.
> De esta definición del área interior resulta que si se divide una superficie S en dos tipos de superficie S_1, S_2 por una curva cuadrable, el área interior de S es la suma de las áreas interiores de S_1 y S_2. Pues si se plantea el problema de las áreas con las condiciones 1, 2, 3*, 4 este es posible y de una sola manera para las superficies limitadas por curvas cuadrables, el área de una superficie que es su área interior (Lebesgue, 1902, pág. 309).

De esta manera Lebesgue ha demostrado que el área de la de la unión de dos superficies es igual a la suma de las áreas de las dos superficies y por lo tanto el problema de la medida de superficies tiene solución única para las superficies cuadrables. Luego muestra cómo mediante un proceso iterativo suponiendo que se cumple la condición 3* del problema del área de una superficie se puede llegar a la condición 3 del mismo problema (Una superficie unión de varias otras tiene como área la suma de las áreas de las superficies componentes).

Lebesgue insiste en la analogía entre la longitud de una curva y el área de una superficie:

> Observemos que esta definición del área interior de una superficie es análoga a la definición de la longitud de una curva como límite de perímetros de polígonos inscritos. Un polígono inscrito define en efecto una división de la curva a la cual hacemos corresponder una división de la superficie con la ayuda de curvas cuadrables. A la longitud de un lado ab de un polígono, es decir el límite inferior de las longitudes de las curvas que unen los puntos de división consecutivos a,b, hacemos corresponder al límite inferior de las áreas de las superficies limitadas por C uno de los contornos cuadrables que interviene en la división de la superficie.
> La analogía todavía va más lejos, porque es posible demostrar que dada una curva cerrada C existe una superficie limitada por C y teniendo como área interior el área mínima de C. Estas superficies corresponden al lado de los polígonos inscritos (Lebesgue, 1902, pág. 310).

Sin embargo Jordan le mostrará años después que tal analogía no es perfecta.

Lebesgue muestra mediante algunos ejemplos que en geometría elemental se puede definir de manera general el área de una superficie S como el límite inferior de las áreas de las superficies que tienden hacia S. Además demuestra que se puede mediante un número infinito numerable de operaciones saber si una superficie es cuadrable y, si lo es, encontrar su área.

Dedica la última parte de este capítulo IV de su tesis a las curvas cuadrables y superficies cuadrables, estableciendo los siguientes resultados: toda curva cuadrable sobre una superficie es cuadrable en el espacio y toda superficie rectificable es cuadrable pero existen superficies cuadrables que no son rectificables.

2.3 La Integral

Integral definida de funciones de una variable

En primer lugar se enuncia el problema de la integración desde el punto de vista geométrico como un problema de áreas, para luego definir la integral:

> Dada una curva C por su ecuación $y = f(x)$ (f es una función continua positiva, los ejes son rectangulares) hallar el área de un dominio limitado por un arco de C, un segmento de $0x$ y dos paralelas al eje y, de abscisas dadas por a y b, ($a < b$).
> Esta área se llama la integral definida de f entre los límites a y b, ella se representa por $\int_a^b f(x)dx$. (Lebesgue, 1902, pág. 248)

Lebesgue observa que Arquímedes resolvió un caso particular de este problema al hallar la cuadratura de un segmento de parábola, y que el método clásico para resolver el problema general consistía esencialmente en evaluar las extensiones exterior e interior del dominio, dividiendo el plano en rectángulos cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados. Las extensiones son así límites de las sumas de las áreas de los rectángulos que tienen su base sobre el eje *X*.

Definición 2.3.1. Sean $\delta_1, \delta_2, \ldots$ las longitudes de las bases de los rectángulos y $m_1, m_2, \ldots, M_1, M_2, \ldots$ los valores mínimos y máximos de f sobre los correspondientes intervalos. [143] Se definen las sumas:

$$s = \sum \delta_i m_i, \quad S = \sum \delta_i M_i.$$

Los limites de estas sumas *s* y *S* serán respectivamente la *integral por defecto* $\left(\underline{\int_a^b f}\right)$ e *integral por exceso* $\left(\overline{\int_a^b f}\right)$. Es decir,

$$\underline{\int_a^b} f = lim \sum \delta_i m_i \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f = lim \sum \delta_i M_i.$$ [144]

Cuando estas dos integrales son iguales, y esto sucede para funciones distintas de las continuas, se dice que la función es integrable y, desde Riemann[145] el límite común de las dos sumas, *s* y *S*, se ha denominado *integral definida de f entre a y b*.

Definición 2.3.2. Sea *f* una función acotada definida en el intervalo $[a, b]$, si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ se dice que *f* es Riemann integrable, y el valor común corresponde a $\int_a^b f$.

Interpretación geométrica de la integral definida

Sea *f* es una función positiva definida en $[a, b]$, se le asigna el siguiente conjunto *E*:

$$E = \{(x, y)/a \leq x \leq b \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Las dos sumas *s* y *S* serán valores que aproximan la extensión interior y exterior de *E*, y en consecuencias las dos sumas tienen límites bien definidos: las dos extensiones. Desde

[143] Lebesgue aclara que estas particiones se toman de tal manera que *s* y *S* se aproximen respectivamente a la extensión interior y exterior

[144] (Darboux, 1875), citado por Lebesgue.

[145] Riemann. *The Representation of Functions through Trigonometric Series*. Citado por Lebesgue.

una perspectiva geométrica, la existencia de las integrales por defecto y por exceso es una consecuencia de la existencia de la extensión interior y exterior de un conjunto acotado. De donde se deduce la siguiente proposición.

Proposición 2.3.3. Sea f una función positiva definida en un intervalo $[a,b]$. Considérese el conjunto $E = \{(x,y): a \leq x \leq b \ \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$. f es Riemann integrable si y sólo si E es $\mathfrak{I}$-medible, y $m(E) = \int_a^b f$.

Observación 2.3.4. Si f es una función de signo cualquiera, se hace entonces corresponder el siguiente conjunto E:

$$E = \{(x,y) \,/\, a \leq x \leq b,\ \ yf(x) \geq 0,\ \ 0 \leq y^2 \leq f(x)^2\}.$$

El conjunto E se puede expresar como unión de dos conjuntos E^+ y E^- tales que,[146]

$$E^+ = \{(x,y) \in E: y \geq 0\}\,,\, E^- = \{(x,y) \in E: y < 0\}$$

Proposición 2.3.5. Sea f una función de signo cualquiera, definida en un intervalo $[a,b]$, y el conjunto $E = \{(x,y): a \leq x \leq b \ \wedge yf(x) \geq 0 \wedge 0 \leq y^2 \leq f(x)^2\}$. Entonces se cumple que:

$\underline{\int_a^b f} = e_i(E^+) - e_e(E^-)$, $\overline{\int_a^b} f = e_e(E^+) - e_i(E^-)$, donde $E = E^+ \cup E^-$

Proposición 2.3.6. Sea f una función de signo cualquiera, definida en un intervalo $[a,b]$, y el conjunto $E = \{(x,y): a \leq x \leq b \ \wedge xf(x) \geq 0 \wedge 0 \leq y^2 \leq f(x)^2\}$. Si E es $\mathfrak{I}$-medible (en cuyo caso E^+ y E^- lo son) la función es Riemann integrable. Además:

$$\int_a^b f = m(E^+) - m(E^-)$$

Teniendo en cuenta los anteriores resultados, Lebesgue define el concepto de *función sumable*. La que será la versión geométrica de la integral de Lebesgue:

> Si el conjunto E es medible, (por lo tanto E^+ y E^- también lo son) llamaremos integral definida de f, entre a y b, a la cantidad $m(E^+) - m(E^-)$. La función correspondiente se denominará sumable. (Lebesgue, 1902, pág. 250)

[146] Lebesgue aclara que no es importante si los puntos del eje X son considerados como parte de E^+ o de E^-

Definición que podemos enunciar como sigue.

Definición 2.3.7. Sea *f* una función acotada definida en $[a, b]$. Si el conjunto $E = E^+ \cup E^-$ acotado por el gráfico de *f* es medible (por tanto E^+ y E^- también son medibles) la integral puede ser definida como:

$$\int_a^b f = m(E^+) - m(E^-).$$

La función *f* se denomina función sumable.

Para las funciones no sumables[147] Lebesgue define la integral inferior y la integral superior de la siguiente manera.

Definición 2.3.8. Si *f* es una función no sumable, el valor $m_i(E^+) - m_e(E^-)$ se denomina la integral inferior de *f*. El valor $m_e(E^+) - m_i(E^-)$ se denomina integral superior de *f*.[148]

$$inf \int_a^b f = m_i(E^+) - m_e(E^-), \;\; sup \int_a^b f = m_e(E^+) - m_i(E^-).$$

Proposición 2.3.9. La integral inferior y la integral superior de *f*, están comprendidas entre la integral por defecto y la integral por exceso de *f*.

$$\underline{\int_a^b f} \leq \; inf \int_a^b f \leq sup \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Proposición 2.3.10. Toda función Riemann integrable es sumable, es decir Lebesgue integrable.

Definición analítica de las funciones sumables

Lebesgue realiza el traslado de la interpretación geométrica hacía el establecimiento de una definición analítica de la integral, utilizando un proceso de generalización que empieza con las funciones continuas siempre crecientes, luego con funciones continuas arbitrarias y de allí a funciones arbitrarias.

---

[147] Con respecto a cuya existencia Lebesgue expresa no estar seguro.

[148] Lebesgue no introduce ninguna notación para estas integrales.

Observación 2.3.11. Por el teorema 2.2.23 se tiene que si E es $\mathcal{L}$-medible, existen E' y E'' conjuntos $\mathcal{B}$-medibles tales $E'' \subset E \subset E'$, y $m(E'') = m(E^{'}) = m(E)$. Además los argumentos utilizados para demostrar dicho teorema permiten suponer que E' y $E^{''}$ están formados por segmentos paralelos al eje Y, cuyos pies están sobre el eje X, es decir correspondientes a dos funciones f_1 y f_2, donde $f_1 \geq f_2$.

Proposición 2.3.12. Sean E, E', E'' como en la observación anterior, y e, e', e'' conjuntos tales que para $n > 0$, dado:

$$e = \{(x, y) \in E / y > n\}$$
$$e' = \{(x, y) \in E' / y > n\}$$
$$e'' = \{(x, y) \in E'' / y > n\}$$

Estos tres conjuntos e, e', e'' son medibles y de igual medida. Sean s, s', s'' las secciones de estos conjuntos sobre la recta $y = n + h$; s' y s'' son conjuntos lineales $\mathcal{B}$-medibles, y tales que $m(s'), m(s'')$ no decrecen cuando h tiende a cero. Sean S' y $S^{''}$ los respectivos límites de s' y s'', entonces $S' = S''$.

Demostración: Razonando por reducción al absurdo supongamos que S' y $S^{''}$ no son iguales, por tanto para h suficientemente pequeño tendríamos siempre que

$$m(s^{'}) \geq m(s'') + \varepsilon.$$

Y podemos encontrar h_1 y h_2, con $h_1 < h_2$, suficientemente pequeños de modo que

$$m[s'(h_1)] \geq m[s'(h_2)] \geq m[s''(h_1)] + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Sean e'_1 y e''_2 los puntos de e' y e'' contenidos entre $y = h_1$ y $y = h_2$, es decir:

$$e'_1 = \{(x, y) \in e^{'} / h_1 < y < h_2\}$$
$$e''_1 = \{(x, y) \in e^{''} / h_1 < y < h_2\}$$

Tenemos entonces que:

$$m(e'_1) \geq (h_2 - h_1). m[s'(h_2)].$$
$$m(e''_1) \geq (h_2 - h_1). m[s''(h_1)].$$

Así pues

$$m(e'_1) \geq m(e''_1) + (h_2 - h_1)\frac{\varepsilon}{2}$$

Lo que es imposible porque e'_1 y e''_2, deben tener la misma medida.

Así s' y s'', tienen la misma medida lineal y s es medible.

Esta proposición es equivalente a la siguiente.

Proposición 2.3.13. Dados una función f y un número $n > 0$ el conjunto $A = \{x: f(x) > n\}$ es un conjunto medible. De igual manera si $n < 0$, el conjunto $B = \{x: f(x) < n\}$ es un conjunto medible.

Proposición 2.3.14. Sean a y b números de signo cualquiera. Si f es una función sumable, el conjunto $A = \{x: b < f(x) < a\}$ es medible.

Demostración: De la proposición 2.3.13 se tiene que si $n > 0$ el conjunto $A = \{x: f(x) \leq n\}$ es medible[149]. De manera similar si $n < 0$ el conjunto $B = \{x: f(x) \geq n\}$ es medible.

Así el siguiente conjunto de puntos también es medible:

$H = \{(x,y)/a \geq (f(x) > b > 0) \vee (0 > c > f(x) \geq d) \vee (e \geq f(x) \geq g), \text{con } eg < 0\}$

Haciendo que b tienda a a, o d a c, o e y g a 0, vemos que el conjunto de los puntos para los que y tiene un valor dado es medible.

El recíproco de esta proposición también es verdadero.

Proposición 2.3.15. Sean f una función acotada y a, b números cualesquiera. Si el conjunto $A = \{x/b < f(x) < a\}$ es medible, entonces la función f es sumable.

Demostración: divídase el intervalo de variación de $f(x)$[150], donde $a_o, a_1, \ldots a_n$ serán los extremos de la partición.

Sea $\{e_i\}_{i=0}^{n}$ una familia de conjuntos tales que cada $e_i = \{x: f(x) = a_i\}$ y $\{e'_i\}_{i=0}^{n-1}$ una familia de conjuntos tales que cada $e'_i = \{x: a_i < f(x) < a_{i+1}\}$.

Sea E el conjunto asignado a $f(x)$, consideremos los conjuntos:

$$E_i = \{(x,y) \in E \ / \ x \in e_i\} \text{ y } E'_i = \{(x,y) \in E \ / \ x \in e'_i\}$$

E_i es un conjunto medible en el plano, y de medida $|a_i|.m_l(e_i)$ donde $m_l(e_i)$ denota la medida lineal de e_i. E'_i contiene un conjunto medible de medida $|a_i|.m_l(e'_i)$, y está contenido en un conjunto medible de medida $|a_{i+1}|.m_l(e'_i)$.

Así, E contiene un conjunto E_2 de medida:

$$m(E_2) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \, m_l(e_i) + \sum_{i=1}^{n} |a_{i-1}| m_l(e'_i),$$

[149] Por ser el complemento de un conjunto medible

[150] Está será una diferencia fundamental con respecto a la integral de Cauchy y de Riemann, quienes para calcular la integral particionaban el intervalo en el que se busca integrar la función. Lebesgue hace la partición sobre el codominio.

Y está contenido en un conjunto E_1 de medida:

$$m(E_1) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|\, m_l(e_i) + \sum_{i=1}^{n} |a_i| m_l\,(e'_i)$$

Se tiene entonces que $m(E_1) - m(E_2) < (a_n - a_0)\alpha$, donde $\alpha = máx\{a_i - a_{i-1}\}_{i=1}^{n}$, la partición se puede hacer tan fina como se quiera, de donde E es medible[151] y por lo tanto f es una función sumable.

Además se sabe cómo calcular la medida de E. Así, si f es positiva podemos definir su integral como sigue.

Definición 2.3.16. Si f es una función positiva, la integral es el límite común de las siguientes sumas cuando $|a_i - a_{i-1}|$ tiende a 0.[152]

$\sigma = \sum_{i=0}^{n} a_i\, m_l(e_i) + \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} m_l\,(e'_i)$

$$\Sigma = \sum_{i=0}^{n} a_i\, m_l(e_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i m_l\,(e'_i)$$

Donde cada e'_i y cada e_i están definidos como en la proposición anterior.

Observación 2.3.17. Para el caso de las funciones que no son siempre positivas, el límite de aquellos términos de σ o Σ que son positivos da la medida del conjunto E^+, y el límite de la suma de los términos negativos da $-m(E^-)$.[153] De esta manera en todos los casos ρ y Σ definen la integral.

Ahora se muestra que los argumentos analíticos también conducen a las funciones sumables y a sus integrales.

Sea $f(x)$ una función continua monótonamente creciente definida en el intervalo (α, β), y tal que $a < f(x) < b$ para todo $x \epsilon (\alpha, \beta)$. Se considera la siguiente partición:

$$x_0 = \alpha < x_1 < x_2 \ldots < x_n = \beta$$

A los que corresponden respectivamente los siguientes valores de $f(x)$:

$$a_0 = a < a_1 < a_2 \ldots < a_n = b.$$

[151] $m(E_2) = m(E) = m(E_1)$

[152] Obsérvese que Lebesgue no utiliza aquí ninguna simbología para la integral ni especifica los límites de integración.

[153] E^+ y E^- se definen como en 2.3.4.

La integral definida, en el sentido ordinario de la palabra, es el límite común a las dos sumas $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})a_{i-1}$ y $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})a_i$, cuando el máximo de $x_i - x_{i-1}$ tiende a cero.

De acuerdo con Lebesgue, x_i está dada si a_i también lo está, y $(x_i - x_{i-1})$ tiende a cero si $(a_i - a_{i-1})$ tiende a cero. Así:

> Para definir la integral de una función monótonamente creciente $f(x)$, podemos tomar a_i (es decir la división del intervalo de variación de $f(x)$), en lugar de x_i (es decir la división del intervalo de variación de x). [Leb02, p.253].

Procediendo de esta manera para funciones continuas que varían en un intervalo con un número finito de máximos y mínimos, y luego para cualquier función continua, se llega a la siguiente propiedad que a su vez da la definición de la integral definida de $f(x)$.

Definición 2.3.18. Sea $f(x)$ una función continua definida en el intervalo (α, β) tal que $a < f(x) < b$ para todo $x \epsilon (\alpha, \beta)$. Escojamos arbitrariamente

$$a_0 = a < a_1 < a_2 \ldots < a_n = b.$$

$f(x) = a_i$ para todos los puntos de un conjunto cerrado e_i, para $i = 0,1,2, \ldots, n$. Sea $a_i < f(x) < a_{i+1}$, para los puntos de un conjunto unión de los intervalos e'_i con $i = 0,1,2, \ldots, n$. Los conjuntos e_i y e'_i son medibles. Las dos sumas

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n} a_i\, m(e_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i m\,(e'_i),$$

$$\Sigma = \sum_{i=0}^{n} a_i\, m_l(e_i) + \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} m_l\,(e'_i).$$

Tienden hacia $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$ cuando n aumenta de tal manera que el $máx\{a_i -$ $ai-1i=1$ $n$tiende a cero.

Lebesgue afirma:

> Una vez se ha obtenido esta propiedad, podemos tomarla como la definición de la integral de $f(x)$. [Leb02, p.253].

Además las sumas σ y Σ también tienen sentido para otras funciones diferentes a las continuas, las funciones sumables. Se demostrará que para las funciones sumables, las sumas σ y Σ tienden a un mismo límite, independiente de la escogencia de los a_i. Este límite será, por definición, la integral de $f\,(x)$ entre α y β.

Cuando se refina la partición del intervalo de variación de $f\ (x)$, σ no decrece y Σ no aumenta, ambas sumas tienen límite y son iguales, puesto que

$$\Sigma - \sigma \leq (\beta - \alpha)\ máx\{a_i - a_{i-1}\}_{i=1,}^{n}\ \ \forall n \in \mathbb{Z}^{+}.$$

Considérese ahora otra partición $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ para el intervalo de variación de $f\ (x)$, y sean σ' y Σ' las correspondientes sumas. La unión de las dos particiones $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ genera una tercera partición cuyas sumas correspondientes se denotan por σ'' y Σ''. Las desigualdades siguientes muestran que las seis sumas σ, σ', σ, Σ, Σ' y Σ'' tienen el mismo límite:

$$\sigma \leq \sigma'' \leq \Sigma'' \leq \Sigma', \qquad \sigma' \leq \sigma'' \leq \Sigma'' \leq \Sigma\,.$$

A continuación Lebesgue muestra que toda función Riemann integrable es una función sumable[154]. Para ello se basa en la propiedad "los puntos de discontinuidad de una función integrable forman un conjunto que tiene medida nula". Lebesgue comenta que Riemann enuncia esta propiedad de la siguiente manera: "para que una función sea integrable, es necesario que la unión total de intervalos para los que las variaciones son mayores que σ puede hacerse infinitamente pequeña"

Proposición 2.3.19. Toda función Riemann integrable es una función sumable.

Demostración: sea *f* (*x*) una función integrable y sea *E* el conjunto de puntos para los cuales $a \leq f(x) \leq b$, con a y b números cualesquiera. Los puntos límites de *E* que no pertenecen a *E* son puntos de discontinuidad de *f*. Dichos puntos forman un conjunto *e* de medida nula. $E \cup e$ es un conjunto cerrado y e es un conjunto medible, por lo tanto *E* también lo es. Podemos entonces concluir que *f* es una función sumable.

Proposición 2.3.20. La integral de una función sumable está contenida entre la integral por defecto y la integral por exceso:

$$\underline{\int_{\alpha}^{\beta}} f \leq \int_{\alpha}^{\beta} f \leq \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f$$

Demostración: Si en un intervalo de longitud *l,* el máximo de *f* es *M* y el mínimo es *m*, la integral de *f*, de acuerdo a la definición de Lebesgue, está contenida entre $l.m$ y $l.M$:

[154] Lebesgue advierte que el método de exposición adoptado para demostrar la existencia de la integral no permite ver que la definición de Riemann no contradice la definición anterior.

$$l.m \leq \int_{\propto}^{\beta} f \leq l.M$$

Además Si $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ es una sucesión creciente de números, se tiene que:

$$\int_{a_1}^{a_2} f + \int_{a_2}^{a_3} f + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f = \int_{a_1}^{a_n} f.$$

Por lo tanto la integral de una función sumable está entre la integral por defecto y la integral por exceso. Se tiene además que las dos definiciones de integral son equivalentes cuando ambas son aplicables.

Propiedades de la integral

Propiedad 2.3.21. $\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^a f(x)\, dx = 0$

La integral inicialmente se definió para el caso en que $a < b$. La identidad anterior permite ampliar la definición y puede generalizarse como sigue.

Propiedad 2.3.22. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \cdots \int_k^l f(x)dx = \int_a^l f(x)dx$. Para todo $a, b, \dots, l$.

Lebesgue define el concepto de integral para una función *f* que ha sido definida sólo para los puntos de un conjunto *E* de la siguiente manera.[155]

Definición 2.3.23. Sean *E* un conjunto y *AB* un segmento tal que $E \subset AB$. Defínase una función φ como:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \forall x \in E \\ 0, & \forall x \in \complement_{AB}(E) \end{cases}$$

La integral de *f* dentro de *E* se define como la integral de φ dentro de *AB*.

Es obvio que la integral así definida no depende de la escogencia del segmento *AB* que contiene a *E*.

Propiedad 2.3.24. Si *E* es la unión de conjuntos medibles $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$., disjuntos dos a dos y si *f* es una función sumable dentro de *E*. Se cumple que:

$$\int_E f(x)dx = \sum \int_{E_i} f(x)dx.$$

[155] Lebesgue aclara que podría haber definido primero funciones sumables dentro de *E*, y luego sus integrales utilizando las mismas definiciones que antes, con tal que extraigamos todos los puntos que no pertenecen a *E*.

Definición 2.3.25. Sea *f* una función y $\{\varphi_i\}$ una colección de funciones sumables tales que $\varphi_i < f, \forall i$. Se define la integral inferior de *f* como el límite superior de las integrales de las φ_i.

$$inf \int f = sup\left\{\int \varphi_i\right\}$$

Además existe una función φ_i tal que $inf \int f = \int \varphi_i$.

Se puede establecer una definición análoga para la integral superior de *f*.

Propiedad 2.3.26. Sean *f* y φ dos funciones sumables, y *m*, *M* números tales que

$m < f < M$ y $m < \varphi < M$.

Entonces $\int(f+\varphi)dx = \int f dx + \int \varphi dx$.

Demostración: considérese el intervalo (m, M) y la partición

$$m_0 = m < m_1 < m_2 < \cdots < m_n = M$$

Sean $e_i = \{x: m_{i-1} < f(x) < m_i\}$ y $e'_i = \{x: m_{i-1} < \varphi(x) < m_i\}$, para $i = 1,2, \dots, n$.

Sea $e_{ij} = e_i \cap e'_j$. Para todo $x \in e_{ij}$ se tiene que

$$m_{i-1} + m_{j-1} < f(x) + \varphi(x) < m_i + m_j.$$

Además, e_i , e'_i y e_{ij} son conjuntos medibles $\forall i = 1,2,\dots,n$ y $\forall j = 1,2,\dots,n$.

Sean *a* y *b* dos números cualesquiera. Sea $E = \{x: x \in \bigcup\{e_{ij}\} \wedge a < x < b\}$. *E* es un conjunto medible[156].

Se refina la partición $\{m_i\}_{i=1}^{n}$ de tal manera que $máx\{m_i - m_{i-1}\}$ tienda a cero. Obtenemos una serie infinita de conjuntos *E* cuya unión, que es medible, es el conjunto $\{x/a < f(x) + \varphi(x) < b\}$. Así $f + \varphi$ es medible.

La integral de *f* es la suma de las integrales sobre los conjuntos e_{ij}, luego

$$\sum m(e_{ij})\, m_{i-1} < \int f(x)dx < \sum m(e_{ij})\, m_i\ .$$

Análogamente,

$$\sum m(e_{ij})\, m_{j-1} < \int \varphi(x)dx < \sum m(e_{ij})\, m_j.$$

Y razonando de la misma manera para la función $f + \varphi$

$$\sum m(e_{ij})(m_{i-1} + m_{j-1}) < \int (f+\varphi)(x)dx < \sum m(e_{ij})\,(m_i + m_j).$$[157]

De donde se sigue que

[156] Por ser subconjunto de la unión de conjuntos medibles e_{ij}.

[157] Lebesgue omite el argumento *x* de la función $f+\varphi$.

$$|\int (f+\varphi)(x)dx - \int f(x) + \int \varphi(x)dx| < \sum m(e_{ij})\left(m_i + m_j - m_{i-1} - m_{j-1}\right).$$

Por consiguiente,

$$\int (f+\varphi)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)dx.$$ [158]

La anterior propiedad se puede generalizar para un número cualquiera de funciones.

Propiedad 2.3.27. La suma de un número cualquiera de funciones sumables es una función sumable y la integral es igual a la suma de las integrales.

De manera análoga, como se demostró la propiedad 2.3.26, se pueden demostrar las siguientes propiedades.

Propiedad 2.3.28. El producto de funciones sumables es una función sumable.

Propiedad 2.3.29. Si *f* es una función sumable que satisface la siguiente desigualdad, su inversa también es sumable.

$$0 < m < |f| < M.$$

Propiedad 2.3.24. Si f es sumable y $\sqrt[n]{f}$ existe, entonces $\sqrt[n]{f}$ es sumable.

Propiedad 2.3.25. Si f y φ son funciones sumables tales que $f(\varphi)$ tiene sentido, la función $f(\varphi)$ es sumable.

La siguiente proposición es una de las más importantes de este capítulo pues le permitirá a Lebesgue definir una clase importante de funciones sumables, las funciones polinómicas.

Proposición 2.3.26. Si f es una función acotada y es el límite de una sucesión de funciones sumables $\{f_i\}$, f es sumable.

Demostración: Sea $e_i = \{x: a < f_i(x) < b\}$. Existe k tal que el conjunto $e = \bigcap_{i=k}^{\infty} e_i = \{x: a < f(x) < b\}$. Luego, como los e_i son conjuntos medibles, e también lo es y así f es sumable.

Proposición 2.3.27 Todo polinomio es sumable.

Demostración: Las funciones $y = h$ y $y = x$ son funciones sumables, por tanto la función kx^n también lo es y así todo polinomio es sumable.

De acuerdo con Lebesgue, desde Weiestrasss se sabe que toda función continua es el límite de una serie de polinomios, y así las funciones continuas son sumables. Además de las funciones continuas, las funciones estudiadas por Baire, que el llamó "funciones de

[158] Lebesgue aclara que si hubiera introducido las nociones de integral inferior y exterior, hubiera podido limitarse a la segunda parte del argumento precedente.

primera clase"[159] también son límites de polinomios, por tanto son sumables. Los límites de funciones de primera clase o de funciones de segunda clase son sumables, etc. Todas las funciones del conjunto que Baire llama E[160].

Los resultados de Baire proporcionaron numerosos ejemplos de funciones sumables discontinuas y que no son Riemann integrables. El siguiente es un ejemplo.

Ejemplo 2.3.28. El razonamiento que se utilizó para demostrar que toda función integrable es sumable prueba que si una función es continua, excepto en un conjunto de medida nula, esta función es sumable. Luego si f y φ son funciones continuas, la función F definida como igual a f excepto en un conjunto E de medida nula para el que $F = f + \varphi$, es sumable. Ahora si φ es distinta de cero en todo su dominio y si E es denso en todo intervalo, todos los puntos son puntos de discontinuidad para F por lo que no es Riemann integrable.

Este procedimiento produce funciones sumables que forman un conjunto cuya potencia es igual a la del conjunto de todas las funciones.

Lebesgue observa que el método geométrico, basado en la medida de un conjunto acotado[161] fue aplicado sólo a funciones acotadas. Mientras que el método analítico es aplicable, prácticamente sin modificaciones, a funciones cuyo valor absoluto no es limitado superiormente.

Definición 2.3.29. Una función f se dice sumable si, para a y b cualesquiera, el conjunto $E = \{x: a < f(x) < b\}$ es medible.

Lebesgue diferencia entre funciones sumables acotadas y funciones sumables no acotadas.

Definición 2.3.30. Sea $f(x)$ una función sumable. Considérese la sucesión

$$\ldots < m_{-2} < m_{-1} < m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$$

Que varía entre $-\infty$ y $+\infty$, tales que $|m_i - m_{i-1}| < M$, para algún $M > 0$. Sean $e_i = \{x: f(x) = m_i\}$ y $e'_i = \{x: m_i < f(x) < m_{i+1}\}$. Considérense las sumas

$$\sigma = \sum m_i . m(e_i) + \sum m_i . m\,(e'_i), \quad \Sigma = \sum m_i . m(e_i) + \sum m_{i+1} . m\,(e'_i).$$

[159] Lebesgue cita el texto *Sur les fonctions des variables réelles,* Annali di Matematica, 1899.
[160] Baire. *Sur les fonctions des variables réelles,* Annali di Matematica, 1899. P. 70.
[161] Lebesgue aclara que no habría ninguna dificultad en plantear el problema de la medida para conjuntos acotados o no acotados.

Estas series pueden ser convergentes o divergentes, si las que figuran en σ son convergentes, es decir si σ tiene sentido, Σ también tiene sentido, e inversamente; y esto es cierto independiente de los m_i seleccionados.

Cuando $máx\{m_i - m_{i-1}\}$ tiende a 0, las sumas σ y Σ tienden al mismo límite, independiente de la escogencia de los m_i. Este límite es la integral de f.

Con esta extensión del sentido de las palabras función sumable e integral, todos los enunciados dados anteriormente quedan exactamente iguales. Sin embargo con respecto a la suma de funciones sumables, Lebesgue hace la aclaración de que $\int(f + \varphi)$ puede tener sentido sin que esto sea cierto para $\int f$ y $\int \varphi$.

Además se debe tener en cuenta que una función sumable no acotada, no tiene necesariamente una integral. En el caso en que la función sea infinita para algunos valores de x, si estos valores conforman un conjunto finito, basta con definir la integral haciendo caso omiso de este conjunto[162], para que los enunciados ordinarios no sean cambiados.

De esta manera, calcular la integral de una función dada presenta las mismas dificultades que el cálculo de la medida de un conjunto dado.

A continuación Lebesgue enuncia uno de los teoremas más importantes de su teoría, el del paso al límite bajo el signo integral. El cual resulta muy útil para el tratamiento de las funciones discontinuas, puesto que se definen utilizando series. Este teorema es una extensión del teorema de Arzelà y Osgood[163].

Teorema 2.3.31. Si una sucesión de funciones sumables $f_1, f_2, f_3, \ldots$, con integrales, tienen un límite f y si $|f - f_n| < M, \forall n$, con $M > 0$, f tiene una integral, que es el límite de las integrales de las funciones f_n,

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demostración: Se tiene que $f = f_n + (f - f_n)$, las dos funciones f_n y $(f - f_n)$[164] tienen integrales, luego f también y $\int f = \int f_n + \int(f - f_n)$. Busquemos un límite superior para esta segunda integral.

---

[162] Es un conjunto de medida nula

[163] Lebesgue comenta que el caso particular más interesante de este teorema, donde las funciones son continuas, ya ha sido obtenido, utilizando razonamientos diferentes, por Osgood, en su *Mémoire sur la convergence non uniforme*. (Americal Journal, 1894)

[164] F_n es integrable por hipótesis y f-f_n es integrable por ser acotada.

Escojamos arbitrariamente un número positivo ε[165]. Sea $e_n = \{x: |f(x) - f_{n+p}(x)| \geq \varepsilon,$ para algún $p \in \mathbb{N}\}$, e_n es medible.

Si E es el conjunto medible dentro del cual se toman las integrales, se tiene

$$\left|\int (f - f_n)dx\right| \leq M.m(e_n) + \varepsilon[m(E) - m(e_n)].$$

Entonces cada conjunto e_n contiene todos los conjuntos cuyos índices son mayores y no existe algún punto común a todos los e_n, a la vez. Así, $m(e_n)$ tiende a cero como $\frac{1}{n}$, y lo mismo es cierto para $|\int(f - f_n)dx|$.

Cuando f es una función acotada la proposición se puede enunciar como sigue.

Proposición 2.3.32. Cuando una sucesión $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de funciones sumables, limitadas superiormente en valor absoluto en su conjunto, tiene un límite f, la integral de f es el límite de las integrales de las funciones f_n.

Lebesgue presenta otra forma del enunciado relativo al caso general:

> Cuando el conjunto de los restos de una serie convergente de funciones, que tienen integrales, tiene un límite superior para su valor absoluto, la serie es integrable término a término (Lebesgue, 1902, pág. 260).

Lebesgue observa que como caso muy especial, se tiene el teorema de la integración de series uniformemente convergentes.

Integrales indefinidas y funciones primitivas de funciones de una variable

En esta sección se mostrará que cualquier función derivada acotada tiene una integral indefinida, que es una de sus funciones primitivas. Para las funciones derivadas no acotadas se demostrará que si son integrables, sus funciones primitivas son iguales a sus integrales indefinidas.

Definición 2.3.33. Sea $f(x)$ una función que tiene integral definida en el intervalo (α, β), se llamará integral indefinida de $f(x)$ a una función $F(x)$ definida en (α, β) y tal que cualesquiera que sean a y b comprendidos entre α y β, se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

[165] En el texto aparece Σ.

Proposición 2.3.34. Cualquier función que tenga una integral definida admite un número infinito de integrales indefinidas que difieren solamente en una constante $F(a)$.

Demostración: De la igualdad $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ se obtiene

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx + F(a)$$

Proposición 2.3.35. La integral indefinida es una función continua.[166]

Demostración: la conclusión es evidente si la función es acotada. Para demostrar el caso más general, selecciónese a arbitrariamente. Se debe demostrar que

$$|F(a+h) - F(a)| = \left|\int_a^{a+h} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Una vez que $|h| < k$, para algún k. Para simplificar se puede suponer que h es positivo.

Existe a lo más un infinito numerable de números m_i[167] tales que los conjuntos e_i correspondientes, tienen una medida no nula. Así podemos suponer que los m_i no están entre estos valores excepcionales, es decir, haremos $m(e_i) = 0$, lo que simplifica las sumas σ y Σ.

Así pues suponemos que $m(e_o) = 0$[168], se puede escribir

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = lím\{\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} m_{i+1}m[e'_i(h)] + \sum_{i=-1}^{-\infty} m_i m[e'_i(h)]\}.$$

Indicando por $e'_i(h)$ la porción de e_i contenida entre a y $a + h$. Consideremos un sistema fijo de números m_i. Las dos series del segundo miembro sólo varían si h varía, y se puede suponer que h es suficientemente pequeño para que el valor absoluto de cualquier número finito de términos del segundo miembro sea tan pequeño como se quiera. Así, se puede suponer que h es suficientemente pequeño para que ambas series del segundo miembro, una de las cuales tiene términos positivos y la otra negativos, tengan un valor absoluto tan pequeño como se quiera.

[166] Lebsgue observa que también podría afirmarse que su variación es acotada; siendo esta variación a lo sumo igual a $\int |f - f_n| dx$. La demostración de esto es la misma que la utilizada por Jordan (*Cours d'Analyse,* parágrafo 81).
[167] Los m_i y los e_i se definen como en la definición 2.3.30
[168] Lebesgue observa que entonces e_0 quizá no tendría medida nula, pero que eso no es importante para lo que sigue.

Pero para pasar al límite, hay que introducir nuevos miembros entre los m_i que fueron escogidos; esta operación hace que las dos series del segundo miembro disminuyan en valor absoluto. Así ha quedado demostrado también que $\int_a^{a+h} f(x)$ puede hacerse tan pequeño como se quiera. La integral indefinida es así una función continua.

Proposición 2.3.37. Si $f(x)$ es continua en $x = a$, entonces $F(x)$ tiene una derivada igual a $f(a)$.

Demostración: Considérese el intervalo $(a, a + h)$ y sean M y m el máximo y el mínimo de $f(x)$ en dicho intervalo, entonces

$$mh < \int_a^{a+h} f(x)dx < Mh$$

Por lo tanto,

$$m < \frac{F(a+h) - F(a)}{h} < M$$

Luego para $x = a$, $F(x)$ tiene una derivada igual a $f(a)$■

Proposición 2.3.38. Si $f(x)$ es continua para todo x, $F(x)$ es una de las funciones primitivas de $f(x)$.

Lebesgue llama la atención sobre el hecho de que para funciones continuas el problema de hallar sus primitivas es equivalente a hallar sus integrales indefinidas. Lo mismo ocurre con una función derivada Riemann integrable[169]. Pero existen funciones derivadas que no son Riemann integrables[170], es decir no se pueden calcular sus funciones primitivas mediante la integral de Riemann.

Proposición 2.3.39. Toda función derivada acotada tiene una integral indefinida que es una de sus funciones primitivas.

Demostración: La derivada de una función $f(x)$, cuando h tiende a cero, es el límite de la expresión:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \varphi(x)$$

[169] Ver (Darboux, 1875)

[170] Lebesgue atribuye a Volterra el primer ejemplo de este tipo de funciones (*Giornale de Battaglini,* vol XIX, 1881), dicho ejemplo se reproduce más adelante.

Puesto que h es fijo, representa una función continua. Así la derivada es límite de funciones continuas, y es sumable.

Supongamos que la derivada *f'* es tal que $|f'| < M$. En virtud del teorema de los incrementos finitos $\varphi(x) = f'(x + \theta h)$, las funciones $f(x)$ están acotadas en su conjunto, y en consecuencia por 2.3.31:

$$\int_a^b f'(x)\, dx = lim \int_a^b \varphi(x) dx = \left[\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f'(x) dx \right]_b^a$$

Es decir:

$$\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a).$$

Este resultado sigue siendo cierto si la función derivada es acotada a derecha o izquierda, o si implica un límite al que tiende $\varphi(x)$ para ciertos valores de h que tienden a cero.

Ejemplo 2.3.40. [171] Sea E un conjunto cerrado, no denso en toda parte de $[0,1]$ y de medida no nula. Sea (a, b) un intervalo contiguo a E[172], y e el punto medio de dicho intervalo. La función

$$\varphi(x - a) = 2(x - a) \sin \frac{1}{x - a} - \cos \frac{1}{x - a}$$

Se anula un número infinito de veces entre a y *c*; sea $a + d$ el punto más próximo a *c*, situado entre a y *c*, para el cuál la función se anula.

La función $f(x)$ en la que estamos interesados se anula en todos los puntos de *E*, y se define para todo intervalo (a, b) contiguo a *E* como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x - a) & a < x < a + d \\ 0 & a + d < x < b - d \\ -\varphi(b - x) & b - d < x < h \end{cases}$$

Esta función es continua en todo intervalo contiguo a *E*, discontinua para todos los puntos de *E* que son puntos de discontinuidad del segundo tipo.

---

[171] Este es un ejemplo construido por Volterra, ver *Giornale de Battaglini,* Vol XIX

[172] Lebesgue atribuye el término intervalo *contiguo* a Baire. Y lo define como un intervalo que no contiene ningún punto de *E* y cuyos puntos extremos son puntos de *E*.

Además, $f(x)$ está siempre contenida entre -3 y 3. Para que $f(x)$ tenga una función primitiva, tiene que ser ante todo una integral definida en el intervalo $[0,1]$. Esta integral, si existe, tiene que ser igual a la integral sobre *E* más la integral sobre $C(E)$, suponiendo que existe. La integral en *E* existe y es cero; la integral en $C(E)$ también existe, puesto que es la suma de integrales en los intervalos contiguos a *E*, que son cero.

Como consecuencia de lo anterior, la función $F(x)$, que es cero para todos los puntos de *E* y está definida en todo intervalo (a,b)contiguo a *E* como sigue:

$$F(x)=\begin{cases}(x-a)^2\sin\dfrac{1}{x-a} & a<x<a+d\\ d^2\sin\dfrac{1}{d} & a+d<x<b-d\\ (b-x)^2\sin\dfrac{1}{b-x} & b-d<x<b\end{cases}$$

Es igual a $\int f(x)\,dx$. Así si $f(x)$ tiene funciones primitivas, $F(x)$ es una de ellas.

Para todos los puntos en que $f(x)$ es continua, es decir para todos los puntos de $C(E)$, obtenemos $F'(x)=f(x)$.

Sea *a* un punto de *E*. Si *a* es un punto extremo de un intervalo contiguo a *E*, situado a la derecha de *a*, $F(x)$ tiene obviamente una derivada a derecha nula. Supongamos que a la derecha de *a* hay un número infinito de puntos de *E* cuyo punto límite es *a*. Si α_i es uno de dichos puntos se cumple que:

$$|r(x)|=\left|\frac{F(x)-F(a)}{x-a}\right|<\frac{(x-\alpha_i)^2}{x-a}<x-a,\forall x>\alpha_i$$

Por lo tanto la razón $r(x)$ tiende a cero cuando *x* tiende a *a*.

En todos los puntos de E, $F(x)$ tiene pues una derivada a derecha nula, y también puede verse que tiene una derivada a izquierda nula; de manera que:

$$F'(x)=f(x),\qquad 0<x<1$$

La función $f(x)$ es así una función derivada, no integrable según Riemann, puesto que el conjunto de puntos de discontinuidad tiene una medida no nula.[173] Una característica

[173] Lebesgue anota que ciertas series uniformemente convergentes, cuyos términos son funciones análogas a la que acabamos de considerar, permiten a Volterra dar ejemplos de funciones derivadas que no son integrables en ningún intervalo. La integración término a término permitirá obtener las funciones primitivas.

importante de la función primitiva del ejemplo anterior es que es una función de variación acotada; esto permitirá a Lebesgue establecer el siguiente teorema.

Proposición 2.3.41. La condición necesaria y suficiente para la existencia de una integral de la derivada (acotada o no) de una función diferenciable es que dicha función sea de variación acotada.[174] Si la tiene, la función es una de las integrales indefinidas de su derivada.

Demostración: Supongamos que $f'(x)$ es una función sumable y tomemos e_i y e'_i como en la definición 2.3.30. Supongamos además que $m(e_i) = 0\ \forall i$[175] y que $m_0 = 0$, lo que es posible si, en lugar de argumentar sobre la función dada $f(x)$, argumentamos sobre la función $f(x) + Kx$, donde K ha sido convenientemente escogida.

A cada punto x_0 de e'_i se le puede hacer corresponder un intervalo (α, β) tal que si se cumple

$$\alpha < a \leq x_0 \leq b < \beta$$

Entonces también se cumple

$$m_i < r(a, b) < m_{i+1}, \text{ donde } r(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

---

[174] Lebesgue retoma la definición de Jordan: Sea $y = f(x)$ una función de una sola variable, acotada en un intervalo *ab* que contiene los valores particulares x_0 y $X > x_0$. Asignemos a *x* una sucesión creciente:$x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, X$, y sean $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}, Y$ los valores correspondientes de *y*. Tendremos $Y - y_0 = \sum y_k - y_{k-1} = p - n$ (1)
Donde *p* designa la suma de términos positivos, *n* la de términos negativos.
Diremos que *p* es la variación positiva de *y* y *n* la variación negativa para el sistema de valores $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, X$.
La suma
$t = \sum |y_k - y_{k-1}| = p + n$ (2)
será la variación total. Cambiando el número y la posición de los valores intermedios $x_1, \cdots, x_{n-1}$, podremos hacer variar estas tres sumas. En particular, si entre x_{k-1} y x_k se intercala un nuevo valor ξ, esas sumas conservaran el valor primitivo, si $y_{k-1} < f(\xi) < y_k$; Si no *p* y *n* serán aumentados ambos de la diferencia entre $f(\xi)$ y las cantidades y_{k-1}, y_k, de los que es las más próxima, y *t* será aumentado por el doble de esta diferencia.
Puesto esto, supongamos que uno de estos tres sistemas de sumas *p*, *n*, *t* admita un máximo. Será de allí de meme de cada uno de dos otros, en virtud de las ecuaciones (1) y (2). Diremos, en este caso, que *y* es una función de variación acotada entre x_0 y *X*. (Jordan C. , Cours D'Analyse, 1882, pág. 54)

[175] Obsérvese que de esta manera se descartan la las funciones escalonadas y constantes, lo que es razonable puesto que las funciones problemáticas eran aquellas que tenían infinitos puntos de discontinuidad o infinitos puntos extremos.

Definamos (α, β) como el mayor intervalo posible tal que su longitud es menor o igual a un número σ dado y que tiene a x_0 como punto medio.

Si $m_i - m_{i-1} < \eta,\ \forall i$, entonces

$$|f'(x_0)(b-a) - (b-a)r(a,b)| \leq \eta(b-a)^{176}$$

Sea $E_i(\sigma)$ el conjunto unión de los intervalos que corresponden a los puntos de e'_i. $E_i(\sigma)$ puede considerarse como unión de intervalos disjuntos.[177]

Si (a, b) es uno de esos intervalos y si tenemos $a < \alpha < \beta < b$, entonces también tenemos:

$$m_i < r(\alpha, \beta) < m_{i+1}$$

Con tal de que exista $x \in e'_i$ tal que $\alpha < x < \beta$.

$e'_i \subseteq E_i(\sigma)$. Hagamos tender σ a 0 y sea x_0 un punto que pertenece a un número infinito de conjuntos $E_i(\sigma)$. $f'(x_0)$ es el límite de los valores de $r(\alpha, \beta)$ relativos a los intervalos de $E_i(\sigma)$ que contienen a x_0. Así $x_0 \in e_i,\ x_0 \in e'_i$ o $x_0 \in e_{i+1}$.

En consecuencia, el conjunto E_i, formado por los puntos comunes de $E_i(\sigma)$ relativos a los valores de σ que tienden a 0, contiene a e'_i y a puntos de $e_i \cup e_{i+1}$, así pues tiene la misma medida que e'_i. Además, puesto que cada $E_i(\sigma)$ contiene los conjuntos relativos a los valores más pequeños que σ, $m(E_i)$ es el límite de $m[E_i(\sigma)]$. Así pues se pueden escoger los números

$$\cdots \sigma_{-2}, \sigma_{-1,} \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \cdots$$

De manera que la siguiente suma *D* sea tan pequeña como se quiera:

$$D = \sum_{-\infty}^{\infty} |m_i| . \left(m[E_i(\sigma_i)] - m(E_i)\right)$$

Notemos que $\int f'dx$ y $\int |f'|\, dx$ existen simultáneamente, de modo que $\int f'dx$ existe si la siguiente serie es convergente:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |m_i|\, m(e'_i) = \sum_{-\infty}^{\infty} |m_i|\, m(E_i)$$

---

[176] $\left|f'^{(x_0)} - r(a,b)\right| = \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$, haciendo $h = b - a$ obtenemos $\left|\frac{f(x_0+b-a)-f(x_0)}{b-a} -\right.$ *fb–fab–a≤2mi–mi–1b–a<2b–aη2*, luego *b–af′x0–b–ara,b≤η*.

[177] Los e'_i son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$, por lo que se pueden expresar como unión de intervalos disjuntos.

Es decir, si

$$V = \sum_{-\infty}^{\infty} |m_i|\, m[E_i(\sigma_i)]$$

De entre los intervalos que constituyen a $E_i(\sigma_i)$ siempre se puede escoger un número finito de ellos tal que las contribuciones de dichos intervalos *A* dentro de *V* sea tan grande como se quiera si esta es divergente, y tan próximo como se quiera al valor de *V* si esta serie es convergente.

Eliminemos un número suficiente de tales intervalos *A* sin cambiar la unión de esos intervalos, de modo que ninguno de los intervalos conservados está en el interior de otros intervalos conservados.

La contribución dentro de *V* de los intervalos eliminados es menor que *D*.

Consideremos los intervalos que se solapan (a_i, b_i), (a_j, b_j) relativos a e'_i y e'_j. Supongamos que

$$a_i < a_j < b_i < b_j$$

Entre a_j y b_i no pueden existir simultáneamente puntos de e'_i y e'_j sin que se cumplan simultáneamente las dos desigualdades siguientes:

$$m_i < r(a_j + \varepsilon, b_i - \varepsilon) < m_{i+1}$$

$$m_j < r(a_j + \varepsilon, b_i - \varepsilon) < m_{j+1}$$

Así, existe *c* tal que $a_j < c < b_i$ y existen $z \in e'_i$ y $w \in e'_j$ tales que:

$$a_i < z < c \text{ y } c < w < b_j$$

Se tiene entonces que:

$$|f(c) - f(a_i)| + |f(b_j) - f(c)| = (c - a_i)|r(a_i, c)| + (b_j - c)|r(c, b_j)|$$

Donde el primer miembro, la variación de $f(x)$ entre a_i y b_j, cuando se considera la división: $a_i\ c\ b_j$, es igual a la contribución a *V* de los dos intervalos (a_i, b_i), (a_j, b_j) al menos en una cantidad menor que

$$(b_i - a_j)|m_j - m_i| + \eta(b_i - a_j)$$

La cantidad $(b_i - a_j)|m_j - m_i|$ es inferior a la contribución del intervalo (a_j, b_i) a *D*.

Siguiendo en la misma línea, nos vemos conducidos a considerar una sucesión finita de valores crecientes $x_o, x_1, x_2, \cdots, x_n$. La suma $\sum|f(x_i) - f(x_{i+1})|$ difiere de la contribución de intervalos A dentro de V, en una cantidad menor que $D + \eta\, m(A)$. Ahora, esta suma es menor que la variación total de $f(x)$. Así el límite de V, es decir $\int |f'(x)|dx$ es menor o igual que la variación total de $f(x)$.

Es decir, si $f(x)$ tiene una variación acotada, $\int |f'(x)|dx$ existe y es inferior a la variación de $f(x)$.

Supongamos ahora que la integral $\int |f'(x)|dx$ existe.

Encerremos los puntos de e_i dentro de un infinito numerable de intervalos A_i tal que $m(A_i)$ sea tan pequeña como se quiera. A cada punto $x_o \in e_i$ le hacemos corresponder el mayor intervalo (α, β) interior a A_i, tal que $\ell(\alpha, \beta) < \sigma'_i$,[178] con x_o como punto medio y tal que si:

$$\alpha < a \leq x_0 \leq b < \beta$$

Entonces

$$m_i - \varepsilon_i < r(a, b) < m_i + \varepsilon_i$$

Sea $e_i(\sigma'_1)$ la unión de esos intervalos. Escogiendo apropiadamente σ'_i y ε_i, la suma D' será tan pequeña como se quiera:

$$D' = \sum_{-\propto}^{\propto} |m_i| \,.\, m[e_i(\sigma'_i)].$$

Cada $E_i(\sigma_i)$ o $e_i(\sigma'_i)$ es unión infinita numerable de intervalos disjuntos. Si $f(x)$ está definido en (a, b), cada punto interior a (a, b) es interior a al menos uno de estos intervalos, y además a y b son los extremos de tales intervalos, así:

> Según un teorema sobre los conjuntos uno puede escoger, dentro de los intervalos que constituyen los $E_i(\sigma_i)$ y los $e_i(\sigma'_i)$ un número infinito de intervalos B tales que todo punto interior a (a, b) sea interior a uno de los B. (Lebesgue, 1902, pág. 268)

Supondremos que se ha hecho esta elección de manera tal que ningún intervalo conservado sea interior a los otros intervalos conservados. La contribución dentro de V de los intervalos de $E_i(\sigma_i)$ no utilizados es a lo mas igual a $D + D_i$, donde D_i es la integral de $|f'|$ en el conjunto de $e_i(\sigma'_i)$.

Razonando sobre los conjuntos B como sobre los conjuntos A, nos conduce a considerar los números:

---

[178] Léase longitud del intervalo (α,β)

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

La suma $\sum|f(x_i) - f(x_{i-1})|$ difiere de la contribución en V de los intervalos conservados que provienen de$E_i(\sigma_i)$, en una cantidad igual a $D + D^{'} + \eta(b-a)$.

Ahora, si dos números x_i consecutivos provienen de un mismo intervalo perteneciente a uno de los $E_i(\sigma_i)$ o los $e_i(\sigma'_i)$, , intervalos que pueden particionarse en intervalos de longitud menor o igual que $2\sigma_i$ o $2\sigma'_i$, la suma de las variaciones correspondientes a una división semejante difiere siempre de V en menos de $2D + D_1 + D^{'} + \eta(b-a)$. Ahora, introduciendo estos nuevos puntos de división al tiempo que hacemos el máximo σ de los σ_i y σ'_i suficientemente pequeño, hacemos la suma $\sum|f(x_i) - f(x_{i-1})|$ tan próxima como se quiera a la variación total de $f(x)$ dentro de (a, b).

De aquí resulta que si $\int f^{'}(x)dx$ existe, la función $f(x)$ es de variación acotada, y la variación es igual al valor de la integral $\int|f'|\,dx$.

Observación 2.3.42. Si centramos nuestra atención sobre los conjuntos $e_i, E'_i, E_i(\sigma), E_i$, etc., con índices positivos, vemos que la variación total positiva de $f(x)$ entre *a* y *x* es igual a la integral de $f^{'}(x)$ extendida sobre el conjunto de puntos sobre los cuales *f'* es positiva, es decir a la integral:

$$p(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (f^{'} + |f'|)dx.$$

Análogamente, para la variación negativa tenemos:

$$-n(x) = \frac{1}{2}\int_a^x (f^{'} - |f'|)dx.$$

Y puesto que:

$$f(x) - f(a) = p(x) - n(x)$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f^{'}(x)dx. \blacksquare$$

De esta manera, afirma Lebesgue:

> para una función dada $f(x)$ sabemos cómo reconocer si es la derivada de una función con variación acotada y, si es así, sabemos cómo encontrar sus funciones primitivas.
> Si $f(x)$ es acotada, sus funciones primitivas, si existen, tienen una variación acotada, y podemos encontrarlas.
> Pero la integración, tal como la definimos, no permite saber si una función dada tiene funciones primitivas con variación no acotada. (Lebesgue, 1902, pág. 269)

Ejemplo 2.3.43. La función $f(x)$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Es continua y de variación no acotada. En efecto:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{k\pi + \frac{\pi}{2}}}\right) = (-1)^k \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

Y así la suma de las variaciones $\sum \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$ es una serie divergente.

Esta función admite una derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, si\ x \neq 0 \\ 0, si\ x = 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ es un ejemplo de función no acotada, sumable y sin integral. Cuando $f'(x)$ está dada, los métodos anteriores no nos permiten encontrar $f(x)$.

Es interesante señalar que la definición clásica de la integral de una función que se hace infinita en el entorno de un punto permite encontrar $f(x)$ si se conoce $f'(x)$, Esto se debe a que, en el caso en que la función a integrar no es acotada, la definición que hemos adoptado no es una generalización de la definición clásica, pero coincide con ella cuando ambas se aplican. Además, sería muy fácil generalizar la noción de integral definida de modo que la definición clásica y la que hemos adoptado se conviertan en casos particulares de una definición más general. Sin embargo, para simplificar los teoremas siguientes conservaremos el sentido previamente adoptado de *integral definida*, pero ampliaremos el significado de la *integral indefinida*.

Toda integral indefinida es continua. Lebesgue entonces considera esta propiedad como parte de la definición de la integral indefinida, y establece la siguiente definición.

Definición 2.3.44. Una función $f(x)$, definida en (α, β), tiene en dicho intervalo una integral indefinida $F(x)$si existe una y sólo una función continua $F(x)$, única salvo una función aditiva, tal que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Para todos los sistemas de números a y b en (α, β) escogidos de tal manera que el segundo miembro tanga sentido.[179]

De lo anterior la integral indefinida de una función derivada es siempre una de sus funciones primitivas, puesto que es una función primitiva es también continua y satisface la igualdad anterior, siempre que el segundo miembro de tal igualdad tenga sentido, es decir cuando $f(x)$ sea de variación acotada.

Lebesgue enfatiza sobre el hecho de que es fácil construir funciones derivadas que no tienen integrales indefinidas.

Ejemplo 2.3.45. Sea $\varphi(x)$ una función diferenciable definida en $[0,1]$ y que se anula en 0 y 1, tal que su derivada es de variación acotada en todo intervalo interior a $[0,1]$ y de variación no acotada en todo intervalo que tenga como extremo a 0 o 1.

Podemos encontrar $\varphi(x)$ cuando $\varphi'(x)$ es conocida, puesto que $\varphi(x)$ es la integral indefinida de $\varphi'(x)$ que se anula cuando $x = 0$.

Consideremos un conjunto cerrado *E*, que no es denso en toda parte de $[0,1]$ y tiene una medida no nula. Por ejemplo, el que obtenemos extrayendo de $[0,1]$ una serie infinita de intervalos cuyos puntos medios son racionales y la suma de cuyas longitudes es menor que 1.

Definamos una función $f(x)$ continua tal que,

$$f(x) = (b-a)^2 \varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

En todo intervalo $[a, b]$ contiguo al conjunto *E*[180]. Así, $f(x)$ es cero en todos los puntos de *E*. Esta función es diferenciable, y su derivada es:

[179] Lebesgue nos invita a comparar esta definición con la dada por Jordan para la integral definida de una función no acotada en su Cours d'Analyse.

[180] Recordemos que este término es acuñado por Baire y se refiere a un intervalo que no contiene ningún punto de *E* y cuyos puntos extremos son puntos de *E*.

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in E \\ (b-a)\varphi'\left(\frac{x-a}{b-a}\right), & x\epsilon[a,b] \; contiguo \; a \; E \end{cases}$$

Esta derivada $f'(x)$ no admite una integral indefinida. De hecho, si lo hiciera, sus integrales indefinidas serían de la forma $f(x) + k$. Pero sea $\psi(x)$ la función que representa la medida de aquellos puntos de E que están en el intervalo $[0, x]$. Sea $\psi(x)$ una función continua, constante en cualquier intervalo contiguo a E, tal que se satisface la siguiente igualdad:

$$[f(x) + \psi(x)]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f^{'}(x)dx$$

Para todos los sistemas α, β para los cuales el segundo miembro tiene sentido.

Las definiciones anteriores son por lo tanto insuficientes para que podamos hablar de integrales indefinidas de $f'(x)$. Lebesgue es enfático en afirmar:

> El problema de la búsqueda de funciones primitivas no está completamente resuelto (Lebesgue, 1902, pág. 272).

Y agrega en un pie de página que:

> Podría decirse que podemos resolver el problema cuando puede considerarse que el intervalo de variación de *x* es la suma de un conjunto denso *E* y el conjunto de intervalos (α, β) contiguos a *E*, donde el conjunto *E* es reducible y la función propuesta tiene una integral indefinida $F(x)$en todo intervalo (α, β).
> Incluso si *E* no es reducible, el problema puede resolverse con tal de que la función sea integrable en *E* y la serie de cantidades $[F(\alpha) - F(\beta)]$ sea absolutamente convergente. Esto es cierto en el ejemplo anterior pero no en general. (Lebesgue, 1902, pág. 272)

3 EL ANÁLISIS HISTÓRICO DE LA INTEGRAL Y LA MEDIDA: REFLEXIONES EPISTEMOLÓGICAS Y PEDAGÓGICAS.

3.1 La Concepción de Lebesgue sobre la relación geometría-análisis matemático

Para Lebesgue la filosofía de las matemáticas debe surgir de las reflexiones propias de los matemáticos. Son los matemáticos quienes deben inicialmente hacer las reflexiones filosóficas relacionadas con sus objetos de estudio; sin embargo, no se desconoce el papel del filósofo, la filosofía hecha por los matemáticos es una "filosofía de segunda zona", es una filosofía utilitaria y humilde, aunque es quizás la única calle de acceso a la verdadera filosofía. Consecuente con esta posición, en muchos de sus trabajos, relacionados con la integral y la medida, Lebesgue incluye sus opiniones sobre lo que es la matemática, cómo se desarrolla la actividad matemática y cómo se debe enseñar.

Lebesgue le confiere a la geometría un papel preponderante tanto en el desarrollo de las matemáticas como en su enseñanza. Esto se evidencia en la manera como conduce su investigación doctoral (Lebesgue, 1902), en la reflexión pedagógica que expone en (Lebesgue, 1936) y en sus notas sobre la teoría de la integración en (Lebesgue, 1922) y (Lebesgue, 1927).

Para Lebesgue el punto de partida de las matemáticas corresponde al mundo fenomenológico, al cual se refiere como lo concreto. Las teorías matemáticas se construyen mediante la interacción de las observaciones que parten de la realidad física y los procesos lógicos. Para estudiar la realidad se requiere de múltiples observaciones, que inicialmente son esquematizadas geométricamente. Tomando como referencia las representaciones geométricas se hacen los primeros razonamientos. El lenguaje inicialmente es geométrico, que es el lenguaje más concreto de la matemática; a medida que se identifica lo que es esencial para cada razonamiento, éstos se hacen más generales y el lenguaje se hace más analítico y abstracto; pero, esta generalización abstracta no debe carecer de contenido, pues la justificación última de las generalizaciones es que ellas permiten visualizar su campo de aplicación.

Las matemáticas, entonces se pueden clasificar en matemáticas puras y aplicadas. El lenguaje y las representaciones geométricas son la base de las matemáticas aplicadas, y la lógica es el lenguaje y fundamento de las matemáticas puras. Las matemáticas puras tienen su origen en las aplicadas y deben ser aplicables a la realidad física[181]. A pesar de que las definiciones y axiomas de la matemática se fundamentan en la lógica, bajo la condición de ser compatibles dentro de la teoría, el no pensar en sus aplicaciones y su relación con la realidad, conduciría a la conformación de unas matemáticas puramente formales, carentes de sentido y estériles de cierta manera. Las matemáticas deben partir de lo concreto y regresar a lo concreto.

La geometría es la encargada de representar las nociones físicas - como longitud, área y volumen – en términos de sus respectivas nociones geométricas. Las definiciones geométricas se obtienen enunciado las técnicas de medición y dotando las operaciones, de esas técnicas, del carácter preciso y absoluto de la geometría[182], la geometría debe proporcionar un número que esté en concordancia con el procedimiento experimental. Mientras que el análisis matemático pertenece a las matemáticas puras y sus definiciones y métodos son netamente lógicos.

La medida de las magnitudes, se constituye en el punto de partida de las matemáticas, puesto que las matemáticas aplicadas preceden a las puras y la medida de las magnitudes es el punto de partida de las aplicaciones matemáticas. A su vez, la medida de longitudes, áreas y volúmenes son el origen de la geometría, y esta medida proporciona el número que es objeto del análisis. Así, la medida de las magnitudes geométricas se constituye en el origen del análisis matemático.

Puesto que la comparación de un segmento con un segmento unidad condujo a las nociones de longitud y de número, existe una estrecha relación entre geometría y análisis.

---

[181] Esto nos recuerda el circuito de la matematización descrito por Fourier, el cual inicia con las observaciones físicas, el análisis matemático es el que permite expresar esas observaciones en términos de ecuaciones, el análisis especial proporciona la solución a las ecuaciones y en su interior se construyen las teorías matemáticas, las cuales alcanzan su total abstracción e independencia del mundo físico; sin embargo unas vez se tienen las teorías generales se debe volver a su verificación experimental y buscar su máximo número de aplicaciones a diversos fenómenos físicos, tal vez más complejos. Lebesgue reclama tanto una verificación experimental como una verificación lógica, pero la primera corresponde a los físicos y la segunda a los matemáticos.

[182] Tal como lo afirma (Giusti, 1999) la geometría es hija de la técnica, los objetos geométricos no son abstracción de la realidad física sino abstracción de operaciones.

De esta forma, para los matemáticos "calcular es razonar, analizar más profundamente los hechos geométricos subyacentes"[183] y no sólo manipular símbolos. Esto implica que la geometría precede y es la base del análisis; así lo reconoce Lebesgue al afirmar que la base para el análisis es el hecho de que el número es independiente de lo que representa y por tanto las operaciones no dependen de la unidad utilizada:

> Se puede entonces tratar de las operaciones con números, sin referirse para ello a una utilización concreta y precisa de esos números (Lebesgue, 1936, pág. 12)

Lo que a su vez está estrechamente relacionado con el hecho geométrico de que la medida o comparación entre magnitudes es independiente de la unidad utilizada:

> Si existe una relación homogénea entre las longitudes respecto a cualquier otra unidad *U*, esta relación subsiste entre las longitudes respecto a cualquier otra unidad (Lebesgue, 1936, pág. 12).

En la parte introductoria de *Sur le développement de la notion d'integrale*, Lebesgue nos explica cómo históricamente la geometría se constituyó en el fundamento del análisis. Descartes, más que reducir la geometría al álgebra, con el empleo de las coordenadas redujo la geometría a la recta, y la recta dotó a las matemáticas de las nociones de continuo y número racional, lo que permitió que el álgebra alcanzara su desarrollo. Sin embargo, para reducir toda la geometría a la recta, era necesario conectar las nociones relativas a diferentes dimensiones, tales como longitud, área y volumen; esta conexión la estableció Cauchy, dotando estas nociones de una definición lógica, al interpretar geométricamente la integral definida le asignó un número a estas nociones. Después bastó la construcción del continuo lineal para que se alcanzara la aritmetización de la ciencia

Sin embargo, a pesar de que todo lo relacionado con la integración pueda traducirse al lenguaje aritmético, reducir todo a la lógica pura, renunciando a una mirada directa, geométrica e intuitiva, impide captar la verdadera dimensión de los conceptos y no permite conocer nuevos conceptos relacionados, ni sus múltiples aplicaciones, pues la lógica sólo permite manejar lo que es exacto, reduce la integral a un número real que cumple ciertas propiedades. La definición analítica de la integral oculta al matemático el nexo geométrico existente entre la línea y la longitud, la superficie y el área, el cuerpo y el volumen, y no

[183] (Lebesgue, 1936, pág. 61)

permite al físico entender por qué se relacionan las longitudes, superficies y volúmenes físicos a determinadas integrales y no a otras.

Acorde con esta posición, en (Lebesgue, 1902) inicialmente se plantea el problema general de la medida de conjuntos acotados, luego se muestra que la longitud de un segmento corresponde a la medida del conjunto de puntos que componen el segmento. A continuación se procede a definir la medida de conjuntos arbitrarios sobre la recta, en términos de las longitudes de los intervalos que recubren el conjunto. Luego se generaliza el concepto de conjunto medible a conjuntos de puntos sobre un plano, y de allí se deduce el concepto de área de un dominio plano, como un caso particular. Obsérvese el movimiento entre lo general y lo particular, y cómo el concepto de medida sigue estando en estrecha relación con lo geométrico. Una vez se considera resuelto el problema de la medida, para los conjuntos medibles, se enuncia el problema de la integración desde el punto de vista geométrico como un problema de áreas, para luego definir la integral:

> Dada una curva C por su ecuación $y = f(x)$ (f es una función continua positiva, los ejes son rectangulares) hallar el área de un dominio limitado por un arco de C, un segmento de $0x$ y dos paralelas al eje y, de abscisas dadas por a y b, ($a < b$).
> Esta área se llama la integral definida de f entre los límites a y b, ella se representa por $\int_a^b f(x)dx$. (Lebesgue, 1902, pág. 248)

El relacionar la integral de una función continua con el área de un dominio plano, que no es más que la medida de un conjunto acotado de puntos sobre el plano, permite relacionar la integral de una función discontinua acotada con la medida de un determinado conjunto de puntos. Basándose en la medida de conjuntos, se establece la integral definida de una función asignándole el conjunto de puntos en el plano acotado por la curva correspondiente a la función. Desde una perspectiva geométrica, la existencia de las integrales por defecto y por exceso de la función, es una consecuencia de la existencia de la medida interior y exterior de un conjunto acotado. De donde se deduce la siguiente proposición: f es Riemann integrable si y sólo si el conjunto E, asociado a la función, es Jordan medible, y $m(E) = \int_a^b f$.

Si f es una función de signo cualquiera, se le hace corresponder el siguiente conjunto E:

$$E = \{(x, y) \,/\, a \leq x \leq b, \qquad yf(x) \geq 0,\ \ 0 \leq y^2 \leq f(x)^2\}.$$

Este conjunto E se puede expresar como unión de dos conjuntos E^+ y E^- tales que,

$$E^+ = \{(x,y) \in E: y \geq 0\}, E^- = \{(x,y) \in E: y < 0\}.$$

Teniendo en cuenta los anteriores resultados, se define el concepto de *función sumable*. Puesto que el conjunto E es un conjunto de puntos "geométrico", esta definición será la versión geométrica de la integral de Lebesgue:

> Si el conjunto E es medible, (por lo tanto E^+ y E^- también lo son) llamaremos integral definida de f, entre a y b, a la cantidad $m(E^+) - m(E^-)$. La función correspondiente se denominará sumable. (Lebesgue, 1902, pág. 250)

Luego se realiza el traslado de la interpretación geométrica hacía el establecimiento de una definición analítica de la integral, utilizando un proceso de generalización que empieza con las funciones continuas siempre crecientes, luego con funciones continuas en general y de allí a funciones sumables, que son todas aquellas que se definen utilizando operaciones aritméticas y el paso al límite. Se establece, además, que una función es integrable si y sólo si el conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida nula y que cualquier función derivada acotada es sumable. Concluyendo que el problema de la integral de una función es equivalente al problema de la medida de un conjunto asociado a ella. De esta manera se llega a un concepto de integral que acoge el amplio conjunto de las funciones derivadas acotadas y resuelve el problema del cálculo de primitivas para todas estas funciones: la integral definida de una derivada acotada, $\int_a^b f'(x)dx$, vista como una función del límite superior de integración, $f(x) = \int_a^x f'(t)dt$ es una primitiva de la derivada dada.

El problema de la medida de conjuntos proporciona un procedimiento de integración aplicable a funciones definidas en una o varias variables, "cuyo principio es claro y tan simple como para el caso de funciones continuas"[184]. Sin embargo Lebesgue nos aclara que la idea de este procedimiento no se le presentó de manera clara y evidente, sino que fue conducido a éste por observaciones simples. Cuando $f(x)$ es una función continua, si se une cada punto de coordenadas $(x, f(x))$ a su proyección $(x, 0)$ por un segmento de recta, estos segmentos cubren dos dominios; uno, P, por encima del eje Ox, otro, N, debajo del

[184] (Lebesgue, 1922, pág. 30)

eje. $M(P)$ y $m(N)$ designan las áreas de estos dominios[185]. La integral está dada entonces por la diferencia entre $M(P)$ y $m(N)$. Si la función es discontinua, P y N son conjuntos y su medida permite definir la integral de manera análoga. Obsérvese la similitud de este procedimiento con el método de los indivisibles de Cavalieri, estos segmentos que cubren los dominios, corresponderían al concepto de “todas las líneas”, los indivisibles, representados por las ordenadas en los puntos $(x, y = f(x))$, ahora son agrupados según su tamaño y según su signo. Por otra parte, el hecho de concebir el dominio plano recubierto por segmentos de rectas, permite pensar en que se puede eliminar un conjunto numerable de rectas sin afectar el valor del área considerada, y de ahí la condición para que la función sea integrable es que el conjunto de discontinuidades sea de medida nula.

Sin embargo, a pesar de que la integral se define en términos de la medida de un conjunto, el orden expositivo no es el mismo al desarrollo del concepto:

> Es verdad que hay identidad entre la medida de un conjunto y la integración de una cierta función que toma sólo los valores cero y uno. Esta identidad, es la que yo he visto cuando, después de serme planteado distintamente el problema de la integración, lo analicé. He pasado por la integración a la medida, particularizando la función considerada. No es la medida lo que me condujo a la integración.
> Añado que, no sólo no he sido conducido a la integración por la medida, sino que era psicológicamente imposible ser conducido a ello por esta vía. Para pasar de la medida a la integración se tendría que, en primer lugar, tener la idea de pasar de enunciados geométricos a su traducción en el lenguaje de las funciones que toma sólo los valores 0 y 1 y reconocer, por ejemplo, en el enunciado A:
> [A] La medida asignada a la suma de una infinidad numerable de funciones que toman sólo los valores 0 y 1 es la suma de las medidas asignadas a las funciones constituyentes cuando la función suma toma sólo los valores 0 y 1
> Un caso particular del caso B:
> [B] Toda serie de términos positivos es integrable término a término.[186]

La función de Dirichlet muestra que se requiere de una definición de integral que preserve la integrabilidad con el paso al límite y el hecho de que la medida tenga la propiedad de aditividad sugiere la relación necesaria entre medida e integración. Lebesgue está en la búsqueda de una definición de integral que permita integrar aquellas funciones que son límites de series de funciones, por lo tanto necesita garantizar que esta nueva integral preserve el paso al límite. Dado que una definición de medida debe cumplir la propiedad de aditividad numerable parece razonable que Lebesgue intuyera que era posible

[185] Eventualmente uno de estos dominios puede ser vacío. Incluso puede existir un tercer conjunto formado por los puntos de un segmento (donde la función sea cero), sin embargo este caso no se considera, porque la medida de este conjunto es cero.
[186] Citado por (Félix, 1974, pág. 205)

definir la integral en términos de la medida. Pero, la aditividad numerable de la medida no lo condujo a pensar en una integral, que preservara el paso al límite, como una generalización de dicha aditividad. No es que la integral heredara las propiedades de la medida, sino que al buscar una definición de integral que satisficiera determinadas propiedades, y conociendo la relación entre el área bajo la curva de una función continua con su integral, Lebesgue se da cuenta que una medida general le servirá de fundamento para la integral; la medida se define para que sirva de fundamento al concepto de integral que se "necesita" para resolver ciertos problemas del análisis.

Así, una de las motivaciones para buscar una definición más general de la integral definida es ampliar el universo de las funciones integrables, y la herramienta para obtener tal generalización se la proporciona la medida. Lebesgue reconoce que encuentra esta herramienta inspirado en los métodos intuitivos anteriores a Cauchy, y es la medida lo que le proporciona el fundamento lógico a su nueva definición de integral.

Para Cauchy la definición aparece por una necesidad lógica. Las sumas de Cauchy son las mismas que utilizaban los antiguos para el cálculo aproximado de áreas, la diferencia radica en el paso al límite. Mientras que para los antiguos este paso era evidente porque partía de la noción intuitiva de área, Cauchy necesita demostrarlo bajo las condiciones de rigor que él se ha impuesto, "una necesidad análoga se impone cada vez que se reemplaza el empleo de una noción experimental por una puramente lógica".[187]

Por otra parte, la definición de integral de Riemann, desde el punto de vista lógico, es una definición natural, sin embargo "prácticamente no sirvió para nada"[188], su aplicación es muy restringida, no permite el paso al límite y no resuelve el problema fundamental del cálculo integral: dada una función derivada encontrar su función primitiva. La diferencia entre Lebesgue y Riemann es que, mientras Lebesgue busca una definición útil que resuelva los problemas que la de Riemann no resolvió, y que se aplique al más amplio campo de funciones; Riemann definió su integral como una generalización de la integral de Cauchy para luego preguntarse ¿En qué casos admite una función integración, y en cuáles no?

[187] (Lebesgue, 1927, pág. 150)
[188] (Lebesgue, 1927)

Esta forma de ver las matemáticas lleva a considerar que lo ideal en la enseñanza de las matemáticas es tratar los temas inicialmente de manera tan simple y concreta como sea posible, sin sacrificar el rigor. Sólo después de esto, el paso a lo abstracto puede ser de utilidad; es decir, cuando en lo abstracto se siga viendo lo concreto y, en general, todas sus aplicaciones.

Antes de enseñar el concepto de integral en su forma analítica, el estudiante debe estar capacitado para razonar sobre los hechos geométricos y físicos relacionados con dicho concepto, para que una vez conozca el concepto de integral el estudiante siga reconociendo en su definición estos hechos. Por otra parte, es necesario aclarar que el requisito de utilidad puede referirse tanto a una utilidad práctica: poder calcular cuántos rollos de papel se requieren para cubrir una pared, como una utilidad dentro la enseñanza: empezar desde la enseñanza media a utilizar el cálculo integral porque los alumnos lo van a necesitar en sus estudios superiores. O a una utilidad más elevada: el estudio de áreas y volúmenes permite que el estudiante comprenda:

> […] cómo para fines prácticos el hombre llegó a construir la Geometría, lo que justifica su esfuerzo; muestra cómo se depuró una noción vulgar, distinguiéndola de nociones vecinas; cómo se ha precisado, poniendo de relieve lo que la caracteriza y cómo se ha llegado a enunciarla en términos lógicos; es decir hacer de ella una noción matemática […] si no se justifica por su utilidad práctica, si no se conserva por simple rutina, sólo es quizás por ese interés cultural que ella se impone. Y se impone porque sin ella no se establecería ninguna liga entre estos dos pivotes de la matemática: el punto y el número. (Lebesgue, 1936, pág. 62)

Este tipo de reflexiones debe hacerlas quien enseña o quienes se están preparando para enseñar y así poder conducir a sus estudiantes a entender lo que se oculta tras de las demostraciones y procesos lógicos, de lo contrario la demostración sólo brindará una certeza “inconsciente”.

En relación con la enseñanza del concepto de área, la definición axiomática debe ser presentada una vez se han verificado geométricamente los axiomas, Lebesgue muestra tres métodos de exposición[189] para hacer que el estudiante “experimente los axiomas” geométricamente; observando que el orden que se sigue en la exposición de estos métodos es el mismo que se sigue cuando se tiene que traducir matemáticamente una noción concreta:

[189] En la siguiente sección se explica uno de estos métodos.

> Se comienza por utilizar todo lo que la experiencia ha enseñado sobre la noción; enseguida, cuando se ha tenido éxito en construir una primera definición matemática, puede proponerse depurarla, fijando exactamente lo que ha sido utilizado razonablemente. La axiomática se realiza al final, cuando se ha tratado ya lo principal; pero entonces ella fija exactamente el valor del resultado obtenido, prepara sus generalizaciones, etc. (Lebesgue, 1936, pág. 36).

Tal como lo hemos observado en su investigación doctoral, basado en su experiencia geométrica, Lebesgue generaliza la medida de las magnitudes a la medida de conjuntos de puntos y una vez define axiomáticamente la medida de subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$, verifica que la longitud y el área y el volumen cumplan los axiomas de la medida.

Se reclama, para la enseñanza, la aproximación de la geometría elemental y el cálculo integral, por esto se recomienda que una forma análoga de exposición a la utilizada para el concepto de área sea ser utilizada para la integral definida:

> ¿No comprenderán los alumnos más fácilmente que al pasar de la Geometría Elemental al Análisis, lo único que cambia es el lenguaje, más geométrico antes y más analítico después? [...] siempre, en Matemáticas, el punto de partida es concreto y el lenguaje también es concreto, geométrico lo más a menudo. Esto es favorable a la imaginación; demasiado favorable aún, pues la realidad es muy rica y demasiadas observaciones requieren la atención. También los primeros razonamientos sólo tienen un alcance limitado, pues se apoyan en muchas de estas observaciones particulares. Poco a poco se aísla cada cuestión de las otras; se discierne de lo que es esencial para cada una y los razonamientos se hacen más generales, al mismo tiempo que el lenguaje se hace más analítico y abstracto. Esta abstracción no carece de contenido; al contrario: el lenguaje sólo se hizo abstracto para ser más inmediatamente aplicable a múltiples realidades (Lebesgue, 1936, págs. 45-46).

Lebesgue nos resume de esta manera su concepción sobre la actividad matemática, describiendo la forma como se procede de lo concreto (la geometría) a lo abstracto (el análisis matemático), de lo particular a lo general. Además su posición ante la generalización, la cual no se hace sólo como un ejercicio lógico sino con el objetivo de ampliar las aplicaciones de los conceptos matemáticos. Hemos visto, en el segundo capítulo de este trabajo, la forma como expone su teoría de la medida y de la integración, partiendo de hechos simples y particulares sobre la medida de las magnitudes conduce al lector a un concepto abstracto de medida y de conjunto medible, utilizando a su vez los conceptos más particulares de medida y conjuntos medibles debidos a Borel y Jordan. De manera similar, planteando el problema de la integral definida como el problema geométrico del área, llega a su definición de funciones sumables (Lebesgue-integrables), mostrando siempre la correspondencia entre la definición geométrica y la definición analítica. Para ampliar la clase de las funciones Riemann-integrables a las funciones Lebesgue-integrables, define inicialmente la integral para funciones continuas y luego la generaliza a funciones con derivadas acotadas, y aclara que:

> Para obtener resultados más generales hay que dar una definición de integral que se aplique a funciones no acotadas. Tal definición puede encontrarse fácilmente, pero la que parecía más simple y más natural para mí no se aplica a todas las funciones derivadas no acotadas (Lebesgue, 1902, pág. 233).

Hay una preocupación por el uso de definiciones simples, naturales y útiles, y esto impide aceptar generalizaciones por el sólo hecho de poseer validez lógica:

> La definición que he adoptado llena bien estas condiciones pero estas condiciones no bastan (...). No pudiendo demostrar que la definición propuesta sería la única que llena las condiciones impuestas, he intentado enseñar que era natural y que al punto de vista geométrico aparecía casi como necesaria. He tratado además de enseñar que era útil (Lebesgue, 1902, pág. 282).
>
> No me he propuesto nunca *como fin de búsqueda,* dar una definición nueva. Las dificultades vencidas para llegar a una definición coherente, dificultades que son grandes de vez en cuando, ha parecido a algunos autores una justificación suficiente de las definiciones que tenían y no utilizaban nunca.
>
> Por mi parte, creo más de buena gana que la única justificación posible de una definición es su uso (Lebesgue, 1922).

La incorporación de una nueva definición se justifica por su utilidad para resolver problemas y por las aplicaciones que pueda tener, pero no por su mera validez lógica.

Las definiciones no son libres, ellas deben estar sujetas a ciertas condiciones, sobre todo aquellas que precisan nociones prácticas, como es el caso de la integral y la medida. Para este tipo de definiciones el requerimiento de no contradicción no es la única condición a cumplir, si se considera que las matemáticas son más que lógica.

Es necesario mostrar que la nueva definición de integral es equivalente a la definición de Riemann para las funciones continuas por que "ningún matemático consentirá llamar integral a un número que no gozara de ciertas propiedades particularmente importantes y simples de la integral de funciones continuas", esta generalización no surge de un mero procedimiento lógico.

En matemáticas podemos distinguir entre definiciones *descriptivas* y definiciones *constructivas*. La definición descriptiva (o axiomática) enuncia todas las propiedades necesarias para describir el objeto, una vez se utiliza esta definición para obtener un procedimiento de cálculo se obtiene la definición constructiva. Este es el método utilizado por Lebesgue para obtener sus definiciones de integral y de medida; método, que según él, fue sugerido por los trabajos de Drach y Borel en teoría de números y álgebra superior, y por los trabajos de Hilbert en los fundamentos de la geometría.

La definición descriptiva de la integral de Lebesgue es la siguiente:

> La integral de una función acotada $f(x)$, definida en un intervalo finito (a,b), es un número finito $\int f(x)dx$, que goza de las siguientes propiedades:
> Dados a,b,h cualquiera, se tiene que : $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x+h)\,dx$.
> Dados a,b,c cualquiera, se tiene que:
> $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$$
> Cualquiera que sean $f(x)$ y $\varphi(x)$, se tiene que:
> $$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx$$
> Si se tiene $f \geq 0$ y $b > a$, entonces:
> $$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$
> $$\int_0^1 1 \times dx = 1$$
> Si $f_n(x)$ crece tendiendo a $f(x)$, la integral de $f_n(x)$ tiende a la de $f(x)$ (Lebesgue, 1922, pág. 31)

La definición de integral en términos de la medida muestra que la nueva noción de integral es natural, pero esta definición descriptiva muestra que la integral es necesaria y no arbitraria.

Con respecto a la medida, tenemos la siguiente definición descriptiva:

> La medida de un conjunto E es un número $m(E)$ positivo o nulo que satisface las siguientes propiedades:
> Dos conjuntos iguales tienen igual medida.
> Un conjunto E formado por la unión de conjuntos $E_1, E_2, \cdots$ sin puntos comunes dos a dos, tiene por medida la suma de las medidas de los conjuntos componentes.
> La medida de conjuntos de puntos $0 < x < 1$ (o $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$, o $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$ y $0 < z < 1$, etc., según el número de dimensiones) es igual a 1. (Lebesgue, Notice sur les travaux scientifiques, 1922, pág. 32)

Esta definición se presenta como "clara y evidente al espíritu" y gracias al lenguaje adoptado en ella se puede afirmar que "la medida es una función de conjuntos que posee la propiedad de aditividad", el considerar un conjunto infinito numerable "obliga a la medida a poseer la propiedad de aditividad completa". Para obtenerla, Lebesgue retoma la definición descriptiva (axiomática) de Borel y deduce de ella una definición constructiva, procediendo como Jordan pero considerando un número infinito numerable de dominios en lugar de un número finito. Una vez tiene la definición constructiva de la medida de un conjunto, como el valor común entre la medida exterior y la medida interior, se demuestra, tal como lo vimos en el segundo capítulo de este trabajo, que este número así definido verifica las condiciones de la definición descriptiva.

Para mostrar el alcance de su definición de medida, Lebesgue observa que los conjuntos de puntos no son los únicos para los cuales se puede plantear el problema de la medida; también se pueden medir conjuntos de rectas y de planos, pero se ha limitado a medir conjuntos análogos a los dominios simples.

Finalmente, observamos en la tesis doctoral de Lebesgue una síntesis de la tensión histórica entre geometría y análisis. El origen del problema de la integral definida lo encontramos en el problema geométrico de la medida de magnitudes, en particular la cuadratura de figuras planas, su solución se buscó al interior de la geometría hasta los trabajos de Cavalieri; posteriormente Wallis aritmetiza los indivisibles de Cavalieri y con la aparición de la geometría analítica el problema de la cuadratura se transforma en el problema del cálculo del área bajo la curva. Con Newton y Leibniz se le da un tratamiento algebraico a este nuevo problema, y con el establecimiento de las tablas de cuadraturas y anticuadraturas, aparece la integral como la operación inversa de la derivada; pero, a pesar del tratamiento algebraico, tanto en Newton como en Leibniz hay una preocupación por cotejar sus resultados con los antiguos resultados geométricos. A principios del siglo XVIII el análisis matemático era un análisis de ecuaciones, y el problema de la integración consistía en hallar una ecuación que representara la solución de una ecuación diferencial. Con la aparición de las series de Fourier, se vuelve a la interpretación geométrica de la integral, los coeficientes de las series son para Fourier el área bajo la curva determinada por la función correspondiente; el nuevo problema es entonces ¿cómo se puede definir la integral como un área cuando la función es arbitraria? Sin embargo, a finales del siglo XVIII y principios del XIX la búsqueda de los fundamentos del análisis conduce a los matemáticos al abandono de la intuición geométrica que había predominado en el cálculo del siglo XVIII, se lleva a cabo una separación de las nociones de la geometría intuitiva ligadas al movimiento físico, requiriendo del establecimiento de los conceptos de función, variable, límite, con un carácter esencialmente aritmético y lógico. Esto condujo a la creación de una nueva rama de las matemáticas: el análisis matemático. Cauchy proporciona la definición analítica de la integral definida de una función continua, y a partir de allí hasta finales del siglo XIX se le da un tratamiento puramente analítico a la integral, intentando encontrar una definición que encerrara el conjunto más amplio de funciones y que resolviera el problema de la representación de funciones en series de Fourier y el cálculo de primitivas. Finalmente, el estudio de los conjuntos de puntos, de singularidades de las funciones a integrar, permitió establecer la relación entre el contenido de un conjunto y la integral.

Sintetizando, la integral aparece en su forma primitiva como solución al problema de la medida de magnitudes geométricas. Luego se presenta la cuestión de cuál es el concepto más general de integral, en el sentido que permite integrar la clase más amplia de funciones. Para definir dicha integral se hace necesario un concepto general y abstracto de medida. Así la integral aparece inicialmente como una operación que resuelve el problema de la medida de magnitudes y posteriormente es necesario generalizar esta medida de magnitudes para fundamentar la integral sobre el concepto de medida.

Lebesgue es consciente de que una generalización del concepto de integral, que permita resolver los problemas planteados por sus antecesores, es imposible en la vía del análisis y desde su interior. Así, tal como su concepción sobre la actividad matemática se lo impone, regresa al origen del problema y a su solución desde la geometría, para luego generalizarla mediante el concepto de medida. Lebesgue fundamenta su concepto de integral sobre el concepto de medida. La exposición de su tesis sigue un proceso similar al proceso histórico que permitió la emergencia del concepto de medida. Para medir conjuntos, presenta el problema general de la media en analogía con el problema de magnitudes geométricas, y muestra cómo las medidas particulares, de longitud de un segmento y área de una superficie, cumplen las propiedades de la medida de Lebesgue. De esta manera, la medida de conjuntos es una generalización de la medida de magnitudes geométricas. Una vez establece su teoría de la medida, define la integral geométrica y luego muestra la equivalencia con la integral analítica, para concluir que el problema de la integral de una función es equivalente al problema de la medida de un conjunto de puntos asociado a la función. En la Figura 3.1 se sintetiza la relación entre medida e integral a lo largo del proceso histórico, mientras que la Figura 3.2 – Geometría – Análisis Matemático muestra la interrelación entre lo geométrico y lo analítico, cómo se va transformando el problema inicial de la medida de magnitudes y las soluciones que se van presentando a lo largo de la historia.

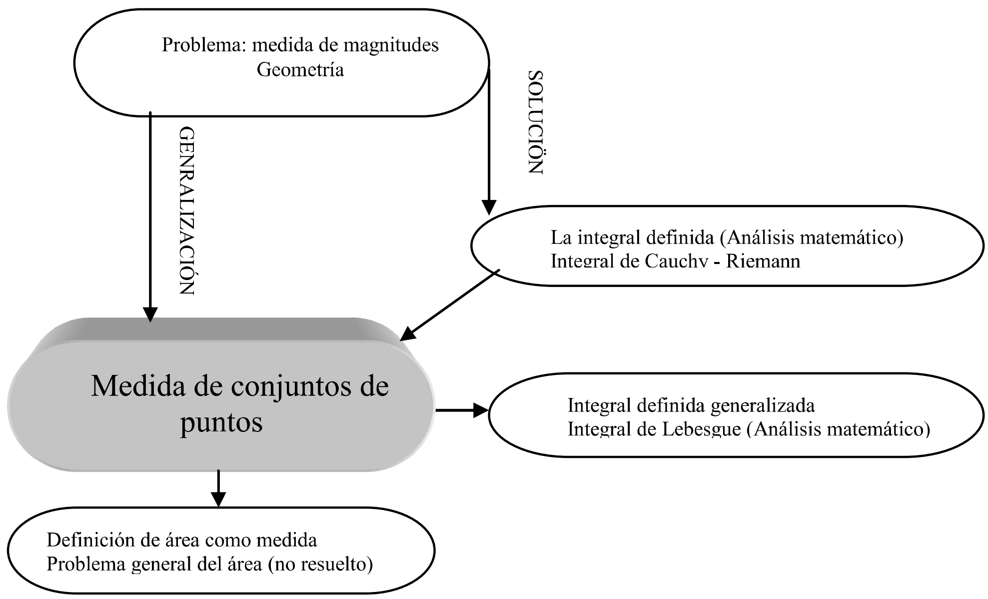


Figura 3.1 – Desarrollo histórico de la relación Medida e Integral

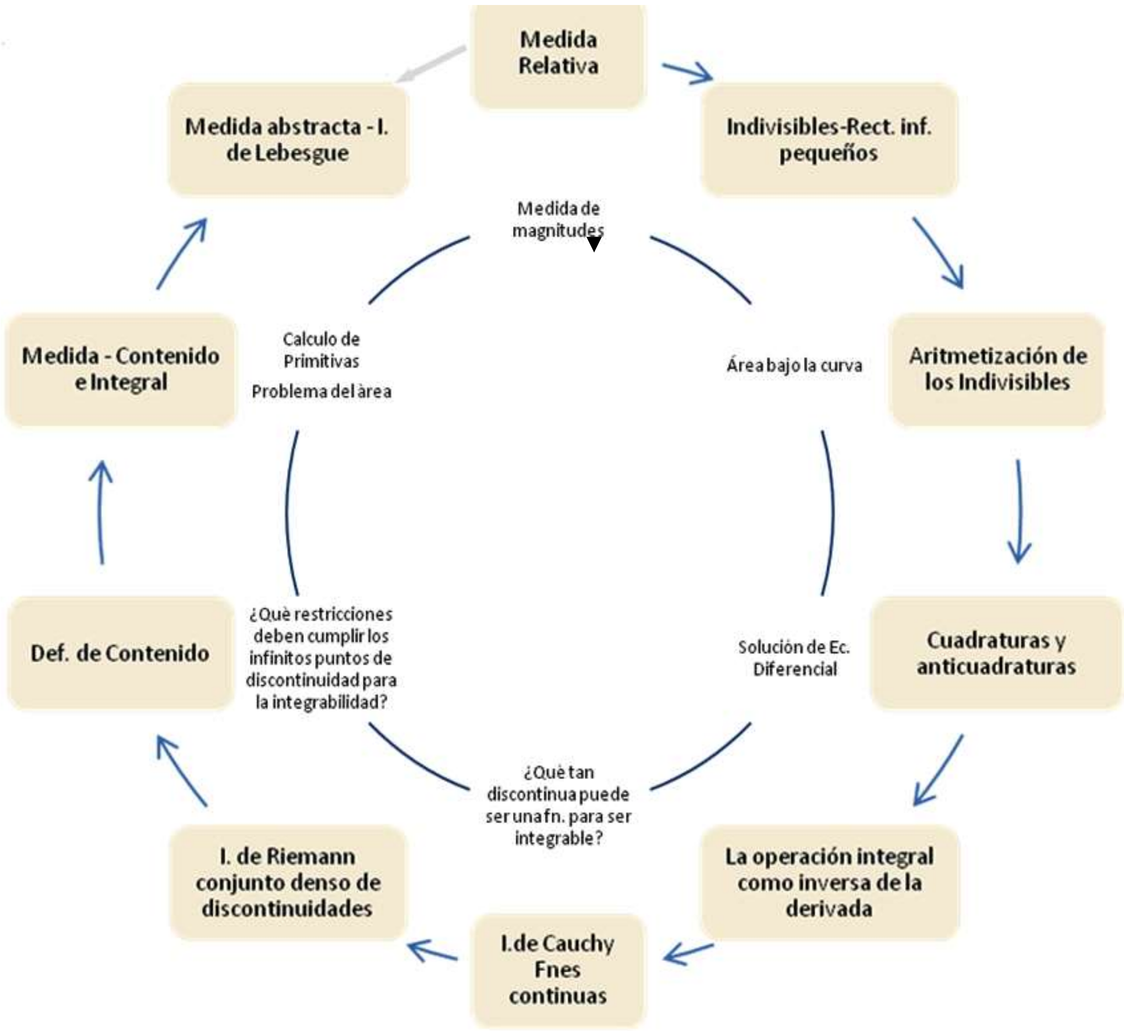


Figura 3.2 – Geometría – Análisis Matemático

Consecuente con su experiencia investigativa, y fundamentandose en el desarrollo histórico, Lebesgue recomienda enseñar la teoría de las magnitudes antes de enseñar la teoría de la integración. Además, fue debido a la integración de las funciones más generales que fue edificada, por muchos investigadores, la teoría de las magnitudes; y esto no es sorprendente si se tiene en cuenta que el cálculo infinitesimal y la teoría de las magnitudes tenían ciertas metas comunes:

> Por otra parte, al ubicarse en el caso más general, esto es, en el que se parte del menor número de premisas, no se puede razonar sino sobre lo que esencial y fundamental en la cuestión y se tiene alguna

> posibilidad de aclarar en ella el punto de partida. Haber proporcionado esta teoría elemental de las magnitudes será, quizás, después de todo, el más sustancial de los resultados de los trabajos sobre la integración de las funciones discontinuas (Lebesgue, 1936, pág. 107).

En su tesis, Lebesgue no olvida la estrecha relación entre la integración y el problema del cálculo del área de una superficie y la longitud de una curva, mostrándonos un ir y venir entro lo geométrico y lo analítico. Con respecto al problema del área, se observa que para su solución se requiere de una definción analítica lo más general posible, la geometría no posee las herramientas para resolverlo, sin embargo no se puede ignorar su origen geométrico, pues allí se puede descubrir métodos de solución y vías de definición. Generalmente los conceptos de longitud de curva y de área son reducidos al calculo de integrales simples, o dobles, en coordenadas rectilineas o polares, y "las cuestiones de definición, todo lo que es geométrico se escamotea tranquilamente" [190], estos conceptos terminan siendo reducidos a un número que no permite entender el concepto, ni su aplicación.

Para los antiguos, las nociones de longitud, área y volumen eran nociones primarias, claras por sí mismas, sin definiciones lógicas; la dificultad apareció cuando se intentó medir el lugar ocupado en el espacio por la línea, la superficie o el cuerpo, cuando se intentó adjudicarle un número, y esta dificultad es causada por los inconmensurables. Cauchy fue el primero en dar una definición lógica de esas nociones al adjudicarles un número a través de la integral.

El procedimiento seguido por Cauchy, para construir la integral definida de las funciones continuas y demostrar las existencia de las primitivas, es análogo al propuesto por Lebsegue para dilucidar las nociones de área de un dominio plano y de volumen de un cuerpo:

> [...] despojándolas de su sentido metafísico, al considerarlas como números y construyendo estos números por la repetición indefinida de las operaciones mismas, consideradas antes como proveedoras aproximadamente de las medidas de las áreas y volúmenes, a causa de axiomas y postulados no enunciados explícitamente y cuya enunciación explícita, o la demostraciòn, proporciona la defínción lógica buscada (Lebesgue, 1936, pág. 68).

Desde el punto de vista lógico la cuestión está bien tratada pero se ha llegado a la forma más abstracta, la más puramente lógica de exposición por el empleo constante de "una

---

[190] (Lebesgue, 1936, pág. 68)

especie de inversión" utilizada por Cauchy; esto no permite ver los vínculos geométricos que unen las líneas, superficies y cuerpos con sus longitudes, áreas y volúmenes.

Resulta interesante, la interpretación de la evolución histórica que hace Lebesgue respecto a este tema:

> Se dice a menudo que Descartes – convendría cuando menos agregar al nombre de Descartes el de Fermat – asimiló la Geometría al Algebra; esto, sin embargo, no es cierto en tanto que había que recurrir a las nociones geométricas: longitudes, áreas y volúmenes. Sólo es después de Cauchy que se efectuó la incorporación de las nociones geométricas a operaciones de cálculo. Cuando la Geometría quedó bien reducida al Álgebra, es decir, puesto que el número en general resultó de la medida de las longitudes (capítulo II), la geometría del plano y la del espacio se asimilaron a la geometría de la recta. Para llegar a lo que se llama la Aritmetización de la Geometría, sólo quedaba por definir el número en general, a partir de los enteros, sin hablar de medidas, de operaciones efectuadas sobre la recta y es esto lo que permite el empleo de una cortadura; esto es, lo que se obtiene utilizando una vez más el procedimiento de Cauchy, que consiste en tomar como definición las operaciones mismas que permiten la evaluación aproximada del número a definir, pues el dato de una cortadura no es otra cosa, esto ya se dijo, que la exposición, en términos abstractos, del resultado de una medida de longitud (Lebesgue, 1936, pág. 69) .

De nuevo se enfatiza el papel preponderante de la geometría en el análisis matemático, y puesto que las características del desarrollo genético de los conceptos deben tenerse en cuenta para organizar su enseñanza, se reclama para la enseñanza de las matemáticas, por abstractas que ellas sean, su relación con los orígenes geométricos.

Si se consideran las matemáticas como una ciencia puramente lógica, nada puede guiar las investigaciones sobre las definiciones, por ejemplo la del área y la longitud, y estas definiciones pueden ser libres. Pero si las matemáticas se consideran una ciencia aplicada, el examen de las técnicas conduce a buenas definiciones, y la concordancia de los cálculos explica la conformidad de esas técnicas y demuestra que hay una única noción física de longitud y una única noción de área. También se puede adoptar la posición intermedia, las matemáticas tienen su origen en la experiencia, pero deben ser puramente lógicas, y el razonamiento lógico se basa sobre las propiedades impuestas a las nociones y no directamente sobre su construcción.

Es importante observar que Lebesgue hace las anteriores reflexiones, con respecto a la matemática y su enseñanza, a la par que establece sus resultados matemáticos. Éste es un estilo de exposición muy característico de la escuela francesa de principios del siglo XX; no se limitan a los aspectos técnicos, sino que marcan el sendero que los llevó a sus resultados, y además, fundamentándose en su experiencia investigativa, establecen lineamientos didácticos para la enseñanza de aquellos campos teóricos que han desarrollado. Tal es el caso de Borel, Baire, Lebesgue y Frechét, entre otros.

Las diferentes formas de ver y hacer matemáticas, no son excluyentes, y están íntimamente ligadas a la forma de enseñar matemáticas. El conocer la manera cómo los matemáticos construyen teorías nos da pautas para tomar decisiones pedagógicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por tal motivo, los aspectos de índole epistemológica constituyen un referente importante para las investigaciones didácticas en educación matemática, en especial con respecto a la diferencia y relación entre el saber sabio y el saber a enseñar, lo cual estudiaremos en el siguiente apartado.

3.2 Didáctica e Historia: Los umbrales de la constitución de la teoría de la medida y la integración

En la teoría desarrollada por Yves Chevallard, sobre la transposición didáctica y la antropología didáctica, encontramos indicadores sobre el tipo de historia y análisis epistemológico que puede servir como herramienta para las investigaciones didácticas. En esta teoría se evidencia el papel central que ocupa la epistemología de las matemáticas en los análisis didácticos, ya que pone de relieve la problemática que genera el *saber* como componente de la terna didáctica: saber-profesor-alumno. En esta pesquisa nos centraremos sobre algunos problemas inherentes al saber. En la metodología del análisis arqueológico, propuesto por Michel Foucault, encontramos un modelo referencial para hacer una historia de las matemáticas que permita clarificar la relación entre el saber sabio y el saber enseñado.

La necesidad de dar cuenta del proceso de constitución del saber sabio, como componente del proceso de transposición didáctica, evidencia la importancia del análisis epistemológico en la didáctica. Se llama la atención sobre la obligación, que tiene el investigador en didáctica, de analizar el complejo proceso que va desde la producción de saber en la comunidad matemática hasta su enseñanza. Eso obliga a extender el alcance de la epistemología. No sólo se debe ocupar de la producción del saber, sino de su aplicación, enseñanza y transposición. El objeto de estudio de la antropología (o epistemología) de las matemáticas no serán “las matemáticas” como saber, sino de manera englobante las *prácticas sociales con matemáticas* (Chevallard, 1991, pág. 174).

A pesar de que se reconoce la necesidad de aclarar lo que se entiende por *saber*, éste aparece como una noción vaga en la teoría de la transposición didáctica. Posteriormente, en la última parte de la segunda edición de la *Transposición Didáctica* (Chevallard, 1991), titulada *Posfacio*, en respuesta a las críticas sobre la expresión "saber sabio", se intenta explicar la noción de saber y conocimiento, ubicando la didáctica en el campo de la antropología didáctica.

Consideramos pertinente reflexionar sobre las características de los estudios históricos-epistemológicos que apunten a clarificar ese proceso, que va desde la producción de saber hasta su enseñanza, permitiendo aclarar la dependencia mutua entre los modelos de construcción de saber matemático y los análisis didácticos.

Este análisis epistemológico se fundamenta en la *Arqueología del Saber* de Michel Foucault. Allí encontramos una amplia conceptualización sobre saber y conocimiento, enmarcados en las prácticas discursivas, lo que consideramos como complemento a las ideas de Chevallard. Además Foucalt nos proporciona una rejilla para un análisis histórico en términos de umbrales arqueológicos, lo que permite dilucidar el entramado de problemas, técnicas y conceptos que condujeron a la constitución de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue.

Chevallard distingue dos tipos de transposición: *stricto sensu* y *sensu lato*, y allí podemos identificar dos interpretaciones para el saber sabio. La transposición *stricto sensu* es la transformación de un contenido de saber preciso en una versión didáctica de ese objeto de saber, el saber a enseñar. La transposición didáctica *sensu lato*, es el análisis científico que se le hace al hecho de la transposición didáctica, es decir al proceso que va desde el objeto de saber, pasando por el objeto a enseñar hasta llegar al objeto enseñado. Cuando se habla de contenido de "saber preciso" o de "saber sabio", en la transposición *stricto sensu* se está pensando en un saber matemático acabado, formal e institucionalizado, este saber preciso está conformado por las teorías matemáticas formalizadas y avaladas por la comunidad matemática. El saber sabio en la transposición *sensu lato* aparece con una connotación más amplia: se hace intervenir aspectos previos a la constitución del objeto de saber matemático preciso. Sin embargo, Chevallard no explicita cuáles son estos aspectos previos. En el apartado siguiente podremos ver cómo en la teoría antropológica de lo didáctico, se presenta un análisis más amplio del concepto de saber y su diferencia con el concepto de conocimiento.

Es alrededor del saber matemático sabio, que se trata en la transposición *sensu lato*, donde se ubicará principalmente nuestro análisis metodológico, pues es allí donde juega un papel fundamental el análisis histórico-epistemológico:

> Cuando se asigna al saber sabio su justo lugar en el proceso de transposición y, sin que el análisis de la transposición didáctica sustituya indebidamente al análisis epistemológico *stricto sensu*, se hace evidente que es el concepto de transposición didáctica lo que permite la articulación del análisis epistemológico con el análisis didáctico, y se convierte entonces en guía del buen uso de la epistemología para la didáctica (Chevallard, 1991, pág. 23).

El saber se considera como una noción primera que designa cierta forma de organización de conocimientos, pero no todo conocimiento pertenece al orden del saber. El conocimiento se hace ver (la relación con un objeto), mientras que el saber siempre es supuesto, se presenta ante nosotros mediante sus emblemas y aparece como una potencialidad o una carencia, cuando queremos aprenderlo.

De esta manera, la existencia de un saber es relativa y pareciera ser más subjetiva que la existencia de conocimiento. La existencia del saber es siempre discutible y genera un espacio de conflicto por lo que "los saberes introducen una dinámica en la sociedad y la cultura" (Chevallard, 1991, pág. 153). Mientras que la existencia del conocimiento está determinada por lo institucional, la existencia del saber está determinada por lo social y lo cultural. Esto justifica que los saberes se ubiquen en el ámbito de lo antropológico.

La diferencia entre conocimiento y saber, se puede entender mejor mediante el ejemplo del idioma, que es un saber del estilo de las matemáticas. La *lengua* que hablamos, denominada el *habla*, es conocida por el hablante nativo como una *práctica social*. La lengua es un *dominio de la realidad*. Por ejemplo, los integrantes de esa *institución* que es la sociedad francesa, poseen una cierta *práctica social* – "hablar" francés – en relación con ese *dominio de la realidad* que es el "francés". Así:

> El saber *de un* dominio de realidad es un saber *sobre* las prácticas sociales relativas a ese dominio de realidad, que posee indudablemente su *pertinencia* para esas prácticas. Pero su *congruencia* respecto de ellas, aquello que lo constituiría en un saber *de* esas prácticas, nunca está asegurada (Chevallard, 1991, pág. 171).

A pesar de que el saber se funda en unas prácticas sociales no se le exige una congruencia con ellas, siempre existirá una distancia entre el saber y la práctica. Lo que valida el saber es su investidura epistemológica y cultural.

Al asociar el adjetivo *cognitivo* con el *conocimiento*, y el adjetivo *epistemológico* con el *saber*, se identifica la antropología del saber con la antropología epistemológica y finalmente con la epistemología:

> ¡La antropología de los saberes no sería otra cosa que la epistemología, esta vieja conocida!
> Confesemos sin ambages que no se trata de un malabarismo sino de un desafío. Porque hacer de epistemología el sinónimo de antropología de los saberes significa polemizar plenamente contra la epistemología actual; significa "antropologizar" la epistemología, tal como hemos "antropologizado" más arriba las didácticas.
> En efecto, la epistemología actual nos proporciona una visión muy restringida de la vida de los saberes en la sociedad (Chevallard, 1991, pág. 153).

La actual epistemología es aquella que se ha dedicado principalmente a la producción de saberes y al estudio de sus productores, dejando de lado su utilización y su enseñanza; estos aspectos deben ser incluidos en el estudio antropológico de los saberes. El objeto de estudio de la antropología (o epistemología) de las matemáticas no serán "las matemáticas" como saber sabio, sino de manera englobante las *prácticas sociales con matemáticas* (Chevallard, 1991, pág. 174).

La antropología didáctica de los saberes (la didáctica), cuyo objeto es la manipulación de los saberes con intención didáctica, se ubica en el cruce de la antropología de los saberes y la antropología didáctica del conocimiento. Contemplado así las cuestiones de enseñanza en estrecha relación con la producción y la utilización del saber:

> ...Una de las lecciones más fuertes que ha proporcionado la didáctica (...), es que la enseñanza de un saber, más ampliamente su manipulación didáctica en general, no pueden comprenderse en muchos de sus aspectos, si se ignoran sus utilizaciones y su producción (Chevallard, 1991, pág. 155).
> ...La esfera de la investigación en un saber sabio es un mirador desde el que se pueden observar y en el que siempre terminan por encontrar algún eco los movimientos que afectan al mundo complejo y naturalmente opaco de las prácticas de ese saber. Todo tiende a remontar hacia allí, porque todo tiende a buscar la investidura epistemológica y cultural del saber sabio que allí se produce (Chevallard, 1991, pág. 181).

Este planteamiento pone en evidencia la necesidad de estudios epistemológicos que den cuenta de la actividad matemática y los procesos de constitución que hay detrás de los objetos y teorías matemáticas que se presentan de manera rigurosa y formal, de tal manera que faciliten la interrelación necesaria entre la antropología del saber (epistemología) y la antropología del conocimiento (didáctica cognitiva).

En relación con la antropología (o epistemología) de las matemáticas, encontramos en la *arqueología del saber* de Foucault un análisis bastante útil para determinar algunas características de los estudios históricos-epistemológicos que apunten a fortalecer la dependencia mutua entre los modelos de construcción de saber matemático y los análisis didácticos.

3.2.1 Conocimiento y saber en Foucault

En la *Arqueología del Saber*, Foucault define el saber en términos de formaciones discursivas; las formaciones discursivas no constituyen, en ningún caso, los simples antecedentes directos de alguna ciencia. Se entiende por formación discursiva las series de enunciados surgidos en distintos ámbitos que, lejos de formar un sistema homogéneo, se articulan en la dispersión –esto es, en la diferencia– mediante una regularidad, y emergen en prácticas sociales que operan como condiciones de posibilidad del conjunto de enunciados constitutivos de esa formación discursiva específica. De esta manera:

> A este conjunto de elementos [objetos, conceptos, enunciaciones, estrategias] formados de manera regular por una práctica discursiva y que son indispensables a la constitución de una ciencia, aunque no estén necesariamente destinados a darle lugar, se le puede llamar saber.[. ..] un saber es también el espacio en el que el sujeto puede tomar posición para hablar de los objetos de que trata en su discurso. [...] un saber es también el campo de coordinación y de subordinación de los enunciados en que los conceptos aparecen, se definen, se aplican y se transforman (Foucault, 1969, pág. 306).

Así, el saber es mucho más amplio que el dominio de una ciencia determinada, el saber da lugar a la ciencia. El saber matemático, por ejemplo, incluye, además de los desarrollos técnicos de los matemáticos, las reflexiones acerca de los objetos de estudio, las concepciones sobre la actividad matemática y su enseñanza, los problemas prácticos que conllevaron a desarrollar determinados conceptos, las disputas sobre cuestiones de prioridad, los aspectos políticos, sociales o religiosos que beneficiaron u obstaculizaron ciertos desarrollos, etc. Existen saberes que son independientes de las ciencias, pero entre el saber y las prácticas discursivas hay una relación de biyección: "no existe saber sin una práctica discursiva definida; y toda práctica discursiva puede definirse por el saber formado" (Foucault, 1969, pág. 307).

En cada formación discursiva se reconoce una particular relación entre ciencia y saber, el discurso científico se inscribe y opera en el campo del saber; es decir, recorta, selecciona y modifica los elementos del saber. El saber es activo, diferente, móvil; mientras que el conocimiento reduce lo diferente a igual, la ciencia define, clasifica y la teoría generaliza y ordena. En este sentido, la ciencia se localiza en el saber, pero de ninguna manera lo agota o lo reemplaza. La ciencia se constituye sobre un fondo de saber, el saber la rodea, pero no todo dominio de saber deviene conocimiento científico:

> El saber no es ese almacén de materiales epistemológicos que desaparecería en la ciencia que lo consumara. La ciencia (o lo que se da por tal) se localiza en un campo de saber y desempeña en él un papel. Papel que varía según las diferentes formaciones discursivas y que se modifica con sus mutaciones (Foucault, 1969, pág. 310).

Otro aspecto importante del saber, es su connotación social. En (De la Fuente, 2003) se llama la atención sobre el hecho de que el saber de una época se halla constituido por el conjunto de los sistemas de enunciados posibles, sistemas que encuentran sus límites en lo visible y lo decible en un tiempo y lugar determinados, y que resultan del inter juego de reglas que hacen emerger algunos enunciados y no otros. En este sentido, el saber es aquel pensamiento implícito en la sociedad, un pensamiento anónimo configurado a partir de ciertas reglas de formación y transformación, y que es lo que posibilita la emergencia de una teoría, una práctica o una ciencia. Es así como el saber constituye aquella experiencia social que, aunque no se inscriba de manera elocuente en algún enunciado concreto, sí puede ser reconstruida a partir de una descripción de las líneas de visibilidad y de enunciación que caracterizan la masa discursiva de un período (reglamentos, poesía, consejos de higiene, filosofía, en fin, documentos provenientes de distintos campos).

3.2.3 ¿Cuál es la historia de las matemáticas que necesita la didáctica?

Empecemos por aclarar que desde nuestra perspectiva, la relación historia-epistemología es estrictamente necesaria, puesto que un hecho histórico de carácter científico es algo que se asume como tal, pero requiere de una explicación epistemológica. El análisis epistemológico se refiere a los aspectos internos y es lo que permite desentrañar el enmarañado cuerpo de conceptos. En palabras de Bachelard:

> El epistemólogo tendrá, pues, que esforzarse en captar los conceptos científicos en efectivas síntesis psicológicas…, estableciendo, respecto de cada noción, una escala de conceptos, mostrando cómo un concepto produce otro, cómo se vincula con otro (Bachelard, 1938, pág. 20)

Por tal motivo cuando hablamos de historia de las matemáticas estamos pensando en análisis históricos-epistemológicos.

Nuestro objetivo es buscar, en la metodología arqueológica, elementos que permitan un acercamiento a un análisis histórico-epistemológico del saber sabio, de manera que facilite su adecuada relación (de distancia) con el saber enseñado, reclamada en la teoría de la transposición didáctica, la cual es el germen de la teoría antropológica de la didáctica. Aunque reconocemos que la didáctica de las matemáticas ofrece otros campos de acción para los estudios histórico-epistemológicos, nos enmarcamos en la teoría antropológica de la didáctica porque ella explicita la necesidad de este tipo de análisis.

Cuando hablemos de saber no nos limitaremos únicamente a las teorías y objetos matemáticos formalizados, sino a un marco conceptual tan amplio como el que nos propone Foucault.

Consideramos que la matemática, como toda actividad humana, está permeada por aspectos filosóficos, sociales, políticos, religiosos y económicos. Al analizar la constitución de teorías matemáticas, es necesario tener en cuenta el saber circundante, y éste se puede encontrar en las reflexiones que los matemáticos hacen sobre los objetos, técnicas y métodos utilizados en el desarrollo de sus teorías, en las reflexiones sobre la enseñanza, o en las disputas de prioridad y correspondencia con sus contemporáneos. Por esto, una historia internalista de las matemáticas, donde sólo se reconstruyen teorías en un orden lineal y continuo, deja por fuera muchos aspectos que han influenciado su desarrollo.

En este sentido, uno de los propósitos que se persigue a través de un análisis histórico-epistemológico con fines didácticos, es desmitificar las matemáticas. Se hace necesario bajar las matemáticas de ese pódium que la tradición racionalista les ha creado, pero evitando caer en la "banalización" de los conceptos. Necesitamos mostrar a nuestros estudiantes que se puede tener acceso a los conceptos y teorías matemáticas, que incluso ellos pueden construir nuevas teorías matemáticas. Tal como lo expresa Lizcano:

> Los conceptos matemáticos acostumbran presentarse, en el momento de su enseñanza, no menos enteros – y ya del todo armados- de como los hizo la también acorazada Atenea, sin nada que anuncie el proceso de su gestación. Tan súbita irrupción suele acarrear no sólo míticos dolores de cabeza que preceden apenas a su alumbramiento en la mente del estudiante, también amontonador de nubes, sino también esa persistente impenetrabilidad que le impide apropiárselos y hacerlos fructíferos.
> Desgajados de su génesis, del proceso de su hacerse, escindidos de aquellos otros saberes y materiales con/contra los que se han ido constituyendo, y aprehendidos como meros productos que brotan de la

> nada, claros y distintos, los conceptos y operaciones matemáticos permanecen estériles, meros objetos a perseguir o contemplar en su absoluta identidad, cerrada e inmutable. Acecharlos por el contrario, en el momento de sus emergencias, en la construcción efectiva de su vitalidad, y acompañarlos en su poliforma genealogía, acaso permita no sólo una comprensión- sin duda no exenta de extrañeza- más cabal y crítica sino también una mayor capacidad heurística, sensible ante nuevas emergencias (Lizcano, 1992, págs. 499-500).

El reto, de quienes reivindicamos los estudios históricos, es mostrar una dimensión más amplia del saber matemático; mostrar que las matemáticas son mucho más que teorías rigurosamente formalizadas, constituidas por cadenas deductivas impecablemente ligadas. Detrás de eso hay una actividad humana permeada por cuestiones sociales, éticas, políticas y religiosas. Recordemos con Bachelard[191] que las teorías científicas, incluidas las matemáticas, fueron construidas en su gran mayoría por seres humanos preocupados no sólo por la producción científica sino por la reflexión sobre su propia actividad y por las cuestiones humanas que movilizaban en sus diferentes épocas y sociedades, por explicarse su posición en el universo y reflexionando siempre sobre su labor como individuo pensante con una gran responsabilidad dentro de una sociedad. Preocupados no sólo por la producción de saber sino también por la comunicación de dichos saberes, gran parte de estas teorías fueron escritas en forma deductiva y formal con una intención pedagógica[192], con el ánimo de contribuir con la formación de otros.

Con respecto, al tipo de análisis sobre el "saber sabio" que reclama la teoría de la transposición didáctica, El siguiente comentario nos muestra la necesidad de un análisis que incluya algunos elementos de la "arqueología":

> Por el objeto mismo de estudio, la investigación en didáctica de las matemáticas presenta un carácter experimental, sin embargo el trabajo de terreno (observaciones, experimentaciones, análisis de producciones de los estudiantes, etc.) es apoyado por un trabajo previo importante relativo "al estudio del saber matemático". Este estudio es una fase fundamental para que el investigador pueda tomar sus distancias con relación a lo que está en juego a niveles didácticos. El sentido de los conceptos, los problemas a los que están vinculados, la posición relativa de un elemento del saber en un saber más amplio que lo engloba, pero también la variabilidad de estos datos en función de los períodos e instituciones, etc. Son cuestiones que ayudan a comprender mejor el funcionamiento de un sistema didáctico. Además, el investigador en didáctica no puede contentarse con un punto de vista interno al sistema de enseñanza, él analiza el proceso complejo que va desde de la producción del conocimiento

[191] (Bachelard, 1938)

[192] Tal es el caso del *Curso de Análisis* de Augustin Louis Cauchy publicado en 1821, el cual fue escrito para la primera parte del curso de análisis matemático que él impartía en la Escuela Real Politécnica. Algo similar ocurre con las lecciones sobre teoría de funciones de Borel, Baire y Lebesgue las cuales fueron escritas con la intención de divulgar sus investigaciones entre los estudiantes de la École Normale Supérieure y el College de France. En particular, Lebesgue en *La medida de las magnitudes* escribe sus reflexiones sobre la enseñanza de algunos conceptos matemáticos como el de área e integral.

> en la comunidad matemática hasta su enseñanza, replanteando el conocimiento que está en juego en el contexto más extenso de la constitución de los saberes (Dorier, 2000, pág. 9).

Entre los elementos que no retomaremos de la arqueología, será la idea de una historia general, no nos interesa una historia general de las matemáticas, empresa por demás monumental, donde sería imposible hacer análisis detallados. Son necesarias las historias de conceptos o teorías matemáticas particulares, enmarcadas en su saber circundante:

> [...] más bien a partir de una dificultad de enseñanza o de aprendizaje situada, tratar de comprender, a la luz de la génesis histórica, el origen y los medios de sobrepasar esta dificultad.
> [...] Además, hay que determinar las condiciones internas de desarrollo, de estabilidad o de bloqueo de una etapa histórica, comprender los problemas que motivaban a los protagonistas de la vida científica de la época, sus restricciones de todo orden. Toda fase del desarrollo histórico debe pues evaluarse en sus relaciones en su época, ya sean científicos, sociales o culturales. No se trata de colocarse solamente en la óptica de una progresión jerarquizada con arreglo al saber final, sino de comprender el carácter funcional y las razones de ser de cada etapa (Dorier, 2000, pág. 22).

Una vez se identifica una dificultad en la enseñanza-aprendizaje de un concepto en particular, se busca en su historia las condiciones de formación de dicho concepto mediante un análisis epistemológico. La reflexión epistemológica se ubica entre el análisis didáctico y el análisis histórico, teniendo en cuenta que el análisis histórico puede llevar a identificar un problema didáctico, pero no proponer su existencia a priori, ni determinar por sí solo su solución. De esta manera el problema didáctico, de acuerdo a sus especificidades, guiará nuestra elección sobre: el concepto o teoría a analizar, las épocas a estudiar, las diferentes escuelas, las obras, etc.

Para el propósito arriba señalado, no tiene sentido esa historia de las ideas en busca de: unidad, continuidad, totalidad, origen[193]. Tampoco nos interesa una historia de mentes privilegiadas; por el contrario, requerimos ver las obras de los matemáticos de tal manera que nos permita focalizarnos en la detección de reglas de formación de los discursos y de sus discontinuidades, posibilitando así, la descripción del espacio de dispersión de los saberes matemáticos. Esto permitiría dar al saber matemático su dimensión dinámica, conocer aquellas formaciones discursivas que no llegaron a la etapa de formalización, evidenciando los callejones sin salida, los fracasos, pero también los desarrollos fecundos y a veces olvidados. Recordemos que:

[193]Con respecto al "origen" Serres nos muestra en (Serres, 1993, pág. 20) como la geometría tiene diferentes orígenes dependiendo del enfoque que le demos a su historia. "la matemática no estuvo en cierto momento, y, desde entonces, nunca jamás, en una situación de origen" (Serres, 1993, pág. 26).

> El saber no entra tan sólo en las demostraciones; puede intervenir igualmente en ficciones, reflexiones, relatos, reglamentos institucionales y decisiones políticas (Foucault, 1969, pág. 309).

Aceptar el desafío de desarrollar una epistemología concentrada no sólo en la producción de los saberes, sino preocupada también por su transposición, enseñanza y aplicación, obliga a recorrer el eje: práctica discursiva-saber "matemático"-ciencia, y no el eje: conciencia-conocimiento-ciencia. De esta manera, ubicando análisis histórico en el saber, y no en el conocimiento (estático, delimitador), podremos darle un sentido más amplio y dinámico a las matemáticas y por tanto a los procesos de enseñanza-aprendizaje, haciendo intervenir la construcción de saber como un elemento importante en dichos procesos.

La pregunta por el saber es una pregunta arqueológica y la tarea del "arqueólogo" consiste en "sacar a la luz este pensamiento anterior al pensamiento [...] ese trasfondo sobre el cual nuestro pensamiento 'libre' emerge y centellea durante un instante"[194].

Existe una clara diferencia entre los dominios de cientificidad y los territorios arqueológicos. En un dominio de cientificidad se ubican las proposiciones que obedecen a ciertas leyes de construcción, que son susceptibles de demostración, jerarquización y sistematización. En el territorio arqueológico se incluyen todas las afirmaciones que tienen el mismo sentido, que digan lo mismo, que sean tan verdaderas como aquellas otras, pero que no nacen de la misma sistematicidad.

> [...]Los territorios arqueológicos pueden atravesar unos textos "literarios", o "filosóficos" tan bien como unos textos científicos (Foucault, 1969, pág. 308).

Con respecto a la relación entre ciencia y saber, la ciencia se localiza en un campo de saber, donde desempeña un papel dependiente de las formaciones discursivas. Papel que se modifica de acuerdo a las mutaciones de tales formaciones discursivas. De esta manera, en toda formación discursiva se encuentra una relación específica entre ciencia y saber. El análisis arqueológico debe mostrar cómo la ciencia se inscribe y funciona en el elemento del saber. Para lograr este objetivo, Foucault[195] identifica 4 momentos del desarrollo histórico en la producción del saber, denominados *umbrales arqueológicos*. Estos

---

[194]Citado por (De la Fuente, 2003)
[195] (Foucault, 1969, pág. 314)

umbrales, que se describen a continación, se caracterizan según la configuración que el saber puede adquirir en un momento determinado.

Umbral de Positividad. Es el momento a partir del cual una práctica discursiva se individualiza o adquiere su autonomía. Momento en el cual se encuentra actuando un único sistema de formación de los enunciados, o también el momento en que ese sistema se transforma. A partir de este momento una formación discursiva se individualiza dando lugar a un sistema específico de formación de enunciados.

- Umbral de Epistemologización. Una formación discursiva franquea este umbral cuando en el juego de una formación discursiva, un conjunto de enunciados se recorta, pretende hacer valer (incluso sin lograrlo) unas normas de verificación y de coherencia y ejerce, con respecto del saber, una función dominante (de modelo, de crítica o de verificación). Se pretende convalidar el conjunto de enunciados a partir de determinadas normas de verificación y de coherencia, y ejercer un rol determinante respecto de otros dominios de saber. Aquí se dibuja una figura epistemológica.
- Umbral de Cientificidad. La figura epistemológica franquea este umbral cuando obedece a criterios formales, cuando sus enunciados no responden solamente a reglas arqueológicas de formación, sino también a leyes de construcción de las proposiciones. Se forma así un discurso científico.
- Umbral de Formalización. El discurso científico franquea este umbral cuando define los axiomas necesarios, los elementos que utiliza, las estructuras proposicionales que son para él legítimas y las transformaciones que acepta, cuando pueda desplegar, a partir de sí mismo, el edificio formal que constituye.

En relación a estos umbrales, Focault diferencia tres tipos de análisis históricos del conocimiento.[196] La *historia de la formalización*, la cual es una historia recurrente donde los momentos y elementos pasados son reabsorbidos y recuperados en el momento actual, los objetos, métodos y conceptos están continuamente redefinidos. Por el contrario, la

[196] (Castro, 1995, págs. 217-218)

historia epistemológica tiene como objetivo establecer cómo determinados elementos acceden al dominio científico a partir de otros, y cuáles son esos otros elementos que se lo permiten; según este punto de vista, los conceptos se liberan de imprecisiones para convertirsen en verdadero conceptos científicos. La *historia arqueológica*, por su parte, prescinde de la ciencia actual como "norma" de trabajo histórico y de la formalización como criterio de investigación. El análisis histórico arqueológico procura establecer cómo se ha formado un saber determinado, cómo se ha constituido un dominio de objetos, cómo se han definido las posiciones subjetivas, cómo ha surgido un conjunto de conceptos y cómo funciona, còmo se relaciona un nuevo dominio de saber con otros, etc.

Dadas las características de la presente indagación, se han tomado los umbrales arqueológicos como *Unidades de Análisis Histórico*, puesto que que permiten llevar a cabo una deconstrucción de teorías formalizadas que dé cuenta de los complejos procesos de génesis, evolución y consolidación de una teoría matemática, sin olvidar que estos procesos de constitución se desarrollan en el marco de un contexto sociocultural, influenciado por concepciones filosóficas y pedagógicas. Desde esta perspectiva, se promueve una actitud diferente frente al saber matemático y a su enseñanza, pues permite verlo como el resultado de una actividad humana. Un análisis de este tipo puede ayudar en los análisis didácticos, en la medida que permite desentrañar la verdadera dimensión de los conceptos y la variada gama de apuestas teóricas que se fueron dando hasta lograr un estado de formalización aceptable, así como las condiciones externas que influenciaron su emergencia.

Vale la pena aclarar que, para Foucault, la matemática es la única ciencia en la cual no se pueden distinguir estos umbrales, ni describir entre ellos un conjunto de desfases, pues la matemática franqueó de un golpe todos los umbrales. Para Foucault, el hecho de que la matemática haya nacido formalizada la ha tornado enigmática, comprimida y poco accesible al análisis. Esta posición es entendible si se considera que la matemática aparece en el momento en que los griegos construyeron un universo de objetos matemáticos con una dinámica propia y sin las ataduras que las necesidades prácticas les imponían cotidianamente. Con los griegos la matemática aparece como un cuerpo teórico cimentado en la necesidad de demostrar. Sin embargo, no es posible hablar del desarrollo de las matemáticas como un todo acabado, que inicia con los griegos. Si bien a partir de la antigüedad griega se establecen los cánones del quehacer matemático, cuando queremos dar cuenta de teorías particulares, verbigracia la teoría de la integral o de la medida, la utilización de los Umbrales como *Unidades de Análisis Histórico* parecen pertinentes. No se trata de establecer una historia general de las matemáticas, sino rehacer esta historia a partir de la articulación de los desarrollos de las diversas teorías que conforman el edificio matemático.

Hemos visto que Lebesgue defiende la idea de que la matemática tiene unos orígenes empíricos, y que a pesar de los altos niveles de abstracción que ella alcanza, siempre es posible volver a ellos para ser utilizados tanto en la investigación de nuevos conceptos, como en la enseñanza. Así que, a pesar de Foucault, utilizamos sus umbrales para demostrar que la teoría de la integración no nació formalizada, que aquello que permitió su formalización fue el regresar a los métodos que se encontraban en un umbral de positividad. Estos umbrales se convierten en una herramienta para mostrar que el enigma de la matemática se puede romper y sólo así podremos ver en las teorías matemáticas unas teorías susceptibles de ser enseñadas y aprendidas.

3.2.4 Los umbrales en la constitución de la teoría de la medida y la integración

Entenderemos por teoría "el establecimiento de cierta armazón de conceptos[197] que permiten poner en orden los hechos" (Cavaillès, 1938, pág. 78). Donde "un concepto matemático viene dado por sus atributos y por las relaciones existentes entre los mismos" (Godino & Batanero, 1994, pág. 328). En este sentido develar la construcción o constitución de una teoría será equivalente a determinar las partes constitutivas de ese "armazón de conceptos" y la manera como se articulan tales partes.

La investigación de una nueva teoría matemática requiere un proceso en el que se combinan múltiples aspectos. El terreno fértil de la invención o construcción en matemáticas lo constituyen exploraciones guiadas por intuiciones, aciertos y desaciertos, difícilmente asimilables a inferencias propiamente lógicas.

Aunque el acto constitutivo puede estar reglado por la inferencia lógica, la lógica no da completa cuenta del proceso de constitución del objeto. Desafortunadamente, en la mayoría

[197]Puesto que en este contexto no estamos interesados en reflexiones de tipo ontológico, usaremos los términos concepto y objeto como sinónimos.

de los casos, tales procesos no son formulados de manera explícita por sus autores, tal vez porque ellos mismos no tienen conciencia de dichos procesos.

Podríamos, entonces buscar en la articulación de los umbrales de positividad, epistemologización, cientificidad y formalización una estructura característica del proceso de constitución de conceptos y teorías matemáticas. En este sentido el historiador no considerará sólo hechos históricos brutos, sino momentos de constitución que se explican en términos de relaciones entre umbrales.

Entre los conceptos de medida e integral existe una estrecha relación bilateral, de tal manera que en su constitución a lo largo de la historia resulta casi imposible independizarlas. Por eso, al intentar ubicar los desarrollos históricos en los diferentes umbrales, en algunos casos se tratarán como un mismo concepto, en el sentido de que tienen los mismos antecedentes históricos, y que en ciertas etapas de su desarrollo son nociones equivalentes. Tal es el caso del umbral de positividad, donde los trabajos de Euclides y Arquímedes se constituyen en antecedentes tanto de la teoría de la medida de Lebesgue como del concepto de integral.

Umbral de positividad

Los trabajamos de Euclides y Arquímedes los ubicamos en un umbral de positividad pues en ellos se encuentra actuando un único sistema de formación de los enunciados relacionados con la medida de magnitudes geométricas. Hay un desarrollo de técnicas para resolver diversos problemas particulares de medida, sin embargo hay poca generalización y no se encuentran intentos de conceptualización. En la geometría griega no hay una teoría general de medida abstracta, ni se persigue la construcción de una teoría de la medida. La medida es una herramienta que les permite hacer matemáticas: geometría y aritmética. A pesar de que en Euclides no existe una noción de medida absoluta, sí establece lo que denominamos una teoría de la medida relativa, mide una magnitud desconocida mediante la equivalencia con una figura referencial.

En los procedimientos de Arquímedes, tal como lo hiciera Euclides, hay implícitos dos axiomas de la medida: si una región es interior a otra, la medida de la interior es menor que la medida de la exterior; y si una región se descompone en una o varias partes, la medida de toda la región es igual a la suma de las medidas de las partes.

En cada uno de los métodos de Arquímedes, podemos identificar dos intuiciones diferentes relacionadas con la medida de una superficie, correspondientes a la dicotomía fundamental de las ciencias en cuanto a la naturaleza del espacio y la materia: naturaleza atómica y naturaleza continua. En los indivisibles puede verse un punto de vista atómico, mientras que el método exhaustivo corresponde a la divisibilidad infinita del espacio.

En relación con esas dos intuiciones, Arquímedes establece dos formas de operar con el infinito. En el método mecánico incorpora los indivisibles y recurre a las leyes de la mecánica para manipularlos; allí aparece la idea de que es posible determinar las relaciones entre objetos a partir de las relaciones existentes entre sus correspondientes elementos constitutivos, sin embargo se enfrenta al problema de formalizar su uso dentro de la matemática. Con el método exhaustivo elude la operatividad con lo infinitamente pequeño, mediante la presunción de la existencia de un "límite". Esta perspectiva de lo infinitamente pequeño será recurrente hasta el siglo XIX.

Lo más importante de estos dos métodos es su riqueza conceptual, por lo cual serán retomados en las investigaciones de los matemáticos del siglo XVII sobre el problema de las cuadraturas.

Umbral de epistemologización

Ubicamos los trabajos del siglo XVII sobre el problema de las cuadraturas, anteriores a los de Newton y Leibniz, en el umbral de epistemologización, ya que es evidente un intento de generalización de técnicas debidamente fundamentadas, lo que constituyen unas normas de verificación y de coherencia que se establecen como modelos generales para el cálculo de un tipo determinado de cuadraturas.

En el caso de Arquímedes, solo era posible calcular el área de figuras limitadas por curvas que representan polinomios de segundo grado. Con Cavalieri se generaliza el cálculo de cuadraturas, a través de un proceso que abandona el método exhaustivo, abriendo nuevas perspectivas en la búsqueda de un método que permita obtener cuadraturas en general. El empleo de los indivisibles, en lugar de lo infinitamente pequeño, permite a Cavalieri evitar el paso al límite, con sus dificultades y sus imposibilidades lógicas, remplazándolo por la intuición geométrica, y al mismo tiempo, conservar todas las ventajas de los métodos infinitesimales cuya fecundidad había sido demostrado; influenciado por la tradición griega, estaba convencido de que sus demostraciones serían rigurosas sólo si dejara por fuera de sus argumentos el uso de los indivisibles en sí mismos. Ello sólo era posible en la medida que no se concibieran de manera aislada, sino de manera “actual”; es decir, como un “todo” el cual se pudiera cuantificar de manera similar a las magnitudes griegas y así poder aplicarles el principio de Eudoxo. Mientras que Gregory St. Vincent y Kepler, siguiendo la perspectiva de lo infinitamente pequeño, emplearon infinitos rectángulos infinitamente pequeños, para calcular áreas de figuras irregulares, basados en la noción de divisibilidad infinita del espacio que sería desarrollada posteriormente por Fermat y Cauchy. Sin embargo, mientras que en Kepler y St. Vincent hay una perspectiva de suma actual de infinitos rectángulos de base infinitesimal, en Cauchy se parte de una suma finita de rectángulos y se conciben sumas progresivas (con un número cada vez mas grande de rectángulos, de base cada vez mas pequeñas), lo que exige la incorporación del concepto de límite.

Como consecuencia de las críticas a los trabajos de Cavalieri, algunos simpatizantes de sus ideas, como Fermat, Roberval, Wallis y Pascal, crearon una alternativa intermedia entre los dos puntos de vista sobre la estructura del espacio matemático. Con sus trabajos se presenta una ruptura, conceptual y metodológica, con el enfoque estrictamente geométrico de Cavalieri, dándose una progresiva aritmetización que condujo al uso implícito del límite. Fermat, Roberval y Wallis relacionaron los indivisibles, las líneas de Cavalieri, como límites de rectángulos inscritos infinitamente divisibles. A pesar de reconocer que el continuo no estaba constituido de indivisibles, ellos resultan ser una efectiva herramienta para obtener la medida de magnitudes geométricas.

Con Descartes y su geometría analítica, se genera un cambio cualitativo en la forma de hacer matemáticas. Descartes establece clasificaciones de curvas e incorpora la representación algebraica de algunas de ellas. Desde entonces lo analítico se convirtió en el método apropiado para reemplazar la intuición geométrica en los procesos de contar y medir, se tiende el puente entre la geometría y el análisis.

La aparición de las nuevas curvas hizo imprescindible el desarrollo de nuevos métodos para calcular tangentes y áreas, se usaban más expresiones algebraicas y menos objetos geométricos. A lo largo del siglo XVII, el uso de las cantidades infinitesimales fue imponiéndose en la solución de problemas de cálculos de tangentes, áreas, volúmenes, etc. La geometría analítica transformó el problema de las cuadraturas en el problema de hallar el área bajo la curva.

Wallis se da cuenta que las sumas necesarias para el cálculo de cuadraturas pueden realizarse aritméticamente mejor que en términos de razones geométricas. Las *Omnes lineae* de Cavalieri, a partir de cero, son tratadas por Wallis como series aritméticas; como sumas de sucesiones que tienden a un límite. Para el cálculo de cuadraturas, busca la razón existente entre la serie correspondiente a las líneas de la figura en cuestión, y la serie correspondiente a las líneas de un paralelogramo circunscrito a la figura.

En los trabajos de Wallis, se identifican cuatro aspectos que jugaran un papel importante en la conceptualización de la integral definida: la determinación del área del cuadrado como el producto de base por altura, la división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños (rectángulos infinitesimales de altura determinada por la ecuación de la curva), la aproximación a la determinación numérica de la suma de esos elementos, y un intento de expresar el equivalente de lo que será el límite de esta suma cuando el número de elementos crece indefinidamente a medida que se hacen infinitamente pequeños.

Umbral de cientificidad

Con Newton y Leibniz la teoría de la integración entra al umbral de la cientificidad, la figura epistemológica, que había sido dibujada por sus antecesores, obedece a criterios formales, ya sus enunciados no responden solamente a reglas arqueológicas de formación, sino también a leyes de construcción de las proposiciones. Al implementar algoritmos generales, en términos algebraicos y no geométricos, que permitan resolver los más diversos problemas; y así reconocer los conceptos y métodos propios del nuevo cálculo infinitesimal, se forma un discurso científico.

Newton y Leibniz sintetizaron y enriquecieron un cúmulo de técnicas y métodos interrelacionados, como la geometría analítica de Descartes, el método de los indivisibles de Cavalieri, el cálculo de tangentes por parte de Descartes, Fermat y Roberval, el método para calcular máximos y mínimos de Fermat y, sobre todo, la instauración de una primera formalización de los procesos infinitos por parte de Wallis, donde se establece el tránsito de los indivisibles a los infinitesimales.

Gracias a la sistematización de los resultados de sus antecesores, y al reconocimiento de la relación inversa entre el cálculo de cuadraturas y el cálculo de tangentes, tanto Newton como Leibniz, lograron establecer un instrumento algorítmico para el cálculo sistemático. De esta manera, para resolver todos los problemas de cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes, centros de gravedad, etc. que habían ocupado a sus predecesores, bastaban las tablas de cuadraturas y anticuadraturas.

Tanto Newton como Leibniz, desarrollaron algoritmos que involucraban procesos infinitos, en los cuales, implícitamente, usaban el paso al límite de manera operativa. Para Newton el problema central consiste en hallar la ecuación de la curva que corresponde a la cuadratura de otra curva.

Por su parte, Leibniz utiliza las series y un método similar al de los indivisibles de Cavalieri. El interpretar la cuadratura como suma de ordenadas, y la pendiente de la tangente como diferencia entre ordenadas sucesivas, le permite a Leibniz descubrir la relación inversa entre los dos problemas.

El otro gran aporte de Leibniz a la constitución del discurso científico de los conceptos de integral y derivada, además de la identificación de su relación inversa, es la incorporación de los símbolos "*d*" y "∫", para representar las operaciones de diferenciación y sumación, respectivamente. Puesto que en matemáticas, se tiene un concepto debidamente formalizado una vez se le asigne un nombre, una definición y un símbolo. Además, se reconoce que históricamente la incorporación de una simbología apropiada permite el descubrimiento de nuevos resultados, los cuales aparecen como consecuencia de la íntima relación entre contenido y forma, tal es el caso de la notación incorporada por Leibniz:

En Newton y Leibniz, no aparece ninguna definición de integral, es más, no vemos en sus escritos ninguna preocupación por definir los conceptos que utilizan, excepto cuando lo necesitan para explicar su operatividad o la forma cómo funcionan dentro de los procesos, tal es el caso de Newton con las fluentes y fluxiones.

Newton, buscaba un método para determinar las cantidades matemáticas; y por cantidades matemáticas se refería a las relacionadas con la medida de líneas, superficies, sólidos, ángulos,…, podríamos decir que el objetivo de Newton era determinar la medida de tales objetos.

Tanto los trabajos de Newton como los de Leibniz, se refieren a procesos o algoritmos para hallar cuadraturas o resolver otro tipo de problemas relacionados con curvas. En sus trabajos es evidente la búsqueda de una herramienta que permita resolver de manera general dichos problemas.

Consideramos que el concepto de integral moderno está íntimamente relacionado con el concepto de función, por lo que en el cálculo infinitesimal aún no podemos ver el concepto de integral. La integral aparecer como algo que soluciona un problema, como una herramienta de solución, como una operación de sumación en Leibniz, y como un proceso en Newton, más no como un concepto. Por esto consideramos que, con ellos, la teoría de la integración no franquea aún el umbral de formalización.

En cuanto al concepto de área, Leibniz no da una definición explícita, pero en todos sus trabajos se entrevé la definición operativa a través de la sumación. Hay una total identificación entre el proceso de sumación y el cálculo del área bajo una curva; en todos sus trabajos se evidencia una preocupación por mostrar la correspondencia entre los resultados de su cálculo operativo y los resultados geométricos ya conocidos. Para Newton el área es una cantidad matemática generada por el movimiento de una ordenada, el área de una región es una variable, por tanto se puede hablar de su fluxión y operar con ella tal como se hace con cualquier variable.

De acuerdo con esto, el concepto de área y la teoría de la medida estarían aun franqueando el umbral de positividad.

Por otra parte, observemos que Newton y Leibniz no sólo trataron con una clase más amplia de curvas, sino que también lograron dar un tratamiento unificado a los problemas que antes habían sido tratados, de forma independiente, mediante diferentes métodos. Ambos lograron un importante trabajo de generalización y sistematización, obteniendo potentes métodos para solucionar muchos de los problemas planteados por sus antecesores. Sin embargo, sus trabajos fueron fuertemente criticados por falta de rigor. Tanto Newton como Leibniz eran conscientes de los problemas de rigor de sus trabajos e intentaron darle una fundamentación rigurosa al cálculo. Así, la figura epistemológica de la integral franquea el umbral de cientificidad pues obedece a criterios formales; sus enunciados ya no responden solamente a reglas arqueológicas de formación, sino también a unas leyes de construcción de algoritmos y proposiciones, formando un discurso científico con un adecuado lenguaje matemático.

Alrededor de 1700 los Bernoulli introducen el nombre de integral, y la definen como la inversa de la diferencial. Es importante reconocer, tal como lo afirma Recalde,[198] que este es un hecho epistemológicamente significativo, pues con la incorporación de un nombre para designar una operación específica, se está identificando una noción que amerita un tratamiento especial. La integral deja de ser sólo una herramienta para resolver el problema general del cálculo de cuadraturas para convertirse paulatinamente en un nuevo concepto con sus propios problemas y métodos. Sin embargo, esto no es suficiente para alcanzar el estatuto de objeto matemático propiamente dicho y en consecuencia franquear el umbral de formalización. Antes de que la integral adquiera dicho estatus, fue necesario el reconocimiento de la noción de función como objeto del análisis matemático.

A principios del siglo XVIII el análisis matemático se trabaja como un análisis de ecuaciones, y el problema de la integración consistía en hallar una ecuación que representara la solución de una ecuación diferencial.

En la época en que aparece la obra de Fourier sobre la transmisión del calor, al considerar una función se pensaba ante todo en una expresión analítica, y de acuerdo con ello se concebía la integración y la diferenciación al estilo 'algebraico', como operaciones sobre fórmulas. El considerar la integral simplemente como una antiderivada, carecía de sentido para funciones discontinuas. Al ampliarse el dominio de las funciones, más allá de las continuas, se hizo necesario reconsiderar la noción de integral; sin embargo, el problema de la integración sería tratado durante muchos años como un problema subsidiario del problema central de la representación de una función en series trigonométricas. La integral definida es considerada como una herramienta de solución necesaria, pero inicialmente no es el concepto principal de estudio.

Fourier observó que para calcular los coeficientes de la serie trigonométrica es suficiente tener un área para la región bajo $\varphi(x)\operatorname{sen} nx$, de esta manera llamó la atención sobre la

[198] (Recalde, 2011)

necesidad de volver a la interpretación geométrica de área e identificar el concepto de integral como un área. El nuevo problema es entonces ¿cómo se puede definir la integral como un área cuando la función es arbitraria? Esta cuestión tiene un significado primordial para el desarrollo de la teoría de la integración puesto que evoca la interpretación de integral como el área bajo la curva. Sin embargo, el movimiento de *aritmetización del análisis* del siglo XIX, impone el abandono de la intuición geométrica que había predominado en el cálculo del siglo XVIII, se lleva a cabo una separación de las nociones de la geometría intuitiva ligadas al movimiento físico, y se hace énfasis en los conceptos de función, variable, límite, con un carácter esencialmente aritmético y lógico. Se trata de aritmetizar el cálculo, hay una necesidad de establecer un corpus teórico con una dialéctica propia, de esta manera, gracias a Cauchy, se da lugar a una nueva rama de la matemática: el *análisis matemático*, y el problema de la integral definida se transforma en un problema del análisis.

Umbral de formalización

Como en todo análisis de desarrollo conceptual, no es fácil esquematizar el proceso en cada uno de los umbrales. En especial en el umbral de formalización de la integral y la medida, en el que se exige el análisis de unos desarrollos bastante densos, que corresponden a una época en donde se contó con el concurso de un considerable número de trabajos de matemáticos de diferentes países. Sin embargo, desde una mirada macro, podemos establecer que el concepto de integral franquea este umbral con los trabajos de Cauchy, y se extiende hasta llegar a la constitución de los conceptos de medida e integral de Lebesgue.

A través de los conceptos de límite, función y convergencia, Cauchy logra proporcionar una definición analítica de la integral definida y dar una respuesta al cuestionamiento de Fourier. Al concebir las funciones de manera abstracta, como correspondencia entre valores numéricos, era preciso abordar también el concepto de integral.

Cauchy fue el primero en dar una definición lógica de las nociones de longitud, área y volumen, al tratarlas como números a través de la integral definida. Cauchy fue el primero en introducir una designación aritmética y funcional de los conceptos de longitud, área y volumen a través de una definición analítica de la integral definida. A pesar de que Cauchy enuncia la definición de la integral independizándola de todo referente geométrico, no desconoce su interpretación geométrica como el área bajo la curva. Cauchy es consciente de que el concepto de integral es un concepto analítico y no geométrico, pero no desconoce las aplicaciones que dicho concepto tiene en la geometría. Aunque Cauchy no está preocupado por obtener una definición de área, al asignarle un número a la superficie bajo la curva, está dando un primer paso hacia la definición de área; tal como lo afirma Lebesgue, esta noción hay que tratarla como número para poder obtener una definición lógica. De forma similar, el área de una superficie curva es considerada por Cauchy como la solución de una ecuación diferencial parcial.

Mientras que el concepto de integral, y su correspondiente teoría, alcanza el umbral de formalización, el concepto de área franquea el umbral de la epistemologización al asignarle un número a la superficie determinada por la curva y los ejes de coordenadas; sin embargo no hay preocupación por definir formalmente el concepto de área, ni ubicarlo dentro de alguna teoría circundante, como la teoría de la medida.

Cauchy era consciente de la necesidad de demostrar la existencia de las integrales o funciones primitivas antes de discutir sus propiedades, lo cual exigía una definición general de integral. Para ello era necesario conceptualizar las nociones de cantidad, función, límite, continuidad y convergencia de series, entre otros.

Observemos que Cauchy separa la integral del cálculo diferencial, no la define como la operación inversa de la derivada, sino como un límite de sumas. Una de las principales ventajas de su método, según el punto de vista de Cauchy, es que él puede "demostrar en forma general la existencia de integrales o funciones primitivas"[199], de las cuales varias propiedades pueden ser estudiadas solamente después de una prueba de existencia.

Después de definir su integral, Cauchy muestra la relación entre la integral y la derivada, mediante el Teorema del Valor Medio para el cálculo integral.

Así, con Cauchy se constituye un edificio formal, donde se definen los conceptos necesarios, los elementos que utiliza, las estructuras proposicionales que son para él legítimas y son demostradas siguiendo los principios lógicos impuestos por la comunidad matemática de la época. Por esto, podemos afirmar que con los desarrollos de Cauchy la integral alcanza el umbral de formalización.

[199] Citado por (Hawkins, 1979, pág. 10)

Esta etapa de formalización de la integral, desde Cauchy a Lebesgue, trae consigo un variado abanico de apuestas teóricas, por lo que es necesario hacer un zoom dentro de este umbral de formalización e identificar otra secuencia de umbrales que permita explicar los finos cambios conceptuales que se dan al interior de esta etapa. Si bien a nivel macro podemos detallar umbrales generales de desarrollo, en ocasiones, algunos de estos umbrales exigen una mirada interna, con el propósito de identificar elementos de ruptura, causalidad y potencialidad que se dan de manera intrincada.

Los umbrales al interior de la etapa de formalización

La definición de integral definida, introducida por Cauchy, permite ver que la existencia de la integral no depende de la existencia de una ecuación que defina la función a integrar. Pero no resuelve completamente el problema general de la integral de las funciones arbitrarias (discontinuas) planteado por Fourier, el cual, geométricamente, se relaciona con la existencia de una medida para figuras geométricas de contorno no continuo. A partir de aquí, los matemáticos se dedicarán a buscar las condiciones que debe cumplir una función para ser integrable.

A pesar de que en Cauchy encontramos una teoría de integración, debidamente formalizada, esta teoría se refiere a una clase de funciones muy restringida, funciones continuas y funciones con un número finito de discontinuidades[200]. En el intento de ampliar la clase de funciones integrables, la teoría de la integración, y simultáneamente la teoría de la medida, entrará en un nuevo umbral de positividad puesto que conceptos necesarios para la teoría de integración moderna, como son conjunto de puntos, medida, conjuntos medibles, conjuntos de medida nula (que a su vez serán parte de la teoría de la medida), aún no son identificados. Este es un momento en que el sistema de formación de los enunciados se transforma y entran en acción nuevas prácticas discursivas, con nuevas nociones.

De acuerdo con Dirichlet, para que la función sea integrable no es necesario que sea continua, ni que el conjunto de puntos de discontinuidad sobre el intervalo de integración sea finito. Según Dirichlet, una función con un número infinito de puntos de

[200] La definición de Cauchy se puede generalizar a funciones con un número infinito numerable de discontinuidades en un intervalo finito a condición que el conjunto de discontinuidades sea discreto.

discontinuidades es integrable si el conjunto de los puntos de discontinuidad es un conjunto diseminado[201] (denso en ninguna parte); concepto que será introducido posteriormente por Hankel. Con los resultados de Dirichlet, con respecto a la integral moderna, fundamentados en la teoría de la medida, la práctica discursiva se transforma, adquiere un nuevo enfoque fundamentado en las condiciones que deben cumplir los puntos de discontinuidad de la función para que sea integrable; por esto se regresa a un umbral de positividad.

Durante un largo período de tiempo, varios matemáticos, entre ellos Lipschitz y Hankel, seguirán convencidos de que la integrabilidad de las funciones discontinuas dependía de la distribución de los puntos de discontinuidad sobre el intervalo de integración. Además pensaban que al estar los puntos de discontinuidad diseminados sobre el intervalo de integración, esto puntos se podían "aislar" fácilmente. En la actualidad se sabe que este tipo de conjuntos son difíciles de tratar.

A partir de los resultados de Dirichlet, las cuestiones sobre representación de funciones en series de Fourier y la integración de funciones discontinuas evolucionarán paralelamente. Los trabajos relativos a la integrabilidad de funciones discontinuas se concentrarán en el análisis sobre la distribución de los puntos de discontinuidad, lo que llevarán a matemáticos como Hankel y Cantor a comenzar un estudio detallado de los conjuntos de puntos, ubicando en un umbral de epistemologización los desarrollos sobre la teoría de conjuntos de puntos lineales, y por tanto, la teoría de la medida y la de la integración. Es así como la cuestión de la representación de funciones discontinuas mediante series de Fourier se convertirá en un elemento movilizador del desarrollo de la teoría de integración y la teoría de conjuntos.

Otro aporte importante de Dirichlet a la teoría de integración, es que da respuesta al interrogante planteado por Fourier respecto a la integrabilidad de funciones arbitrarias, exhibiendo su función característica, como ejemplo de una función arbitraria con infinitos puntos de discontinuidad que no cumple su condición de integrabilidad. Existen funciones arbitrarias que no son Cauchy integrables.

A partir de Dirichlet queda abierta la pregunta en relación con la exigencia que debería cumplir una función arbitraria para que ella fuese integrable ¿Qué tan discontinua puede ser

[201]Modernamente se dice que un conjunto es diseminado o denso en ninguna parte si el interior de su cerradura es vacío, es decir su cerradura no contiene ningún intervalo abierto.

la función para que sea integrable? ¿Qué restricciones deben cumplir los infinitos puntos de discontinuidad para que la función sea integrable? Al intentar dar respuesta a estos interrogantes, los trabajos de Riemann y Lipschitz franquean un umbral de epistemologización de la teoría de la integración en relación con las condiciones de integrabilidad, y en cuanto a la teoría de conjuntos de puntos y la teoría de la medida estos trabajos siguen en un umbral de positividad.

Riemann incorporó una definición de integral que acogía funciones arbitrarias altamente discontinuas, basándose en las concepciones de Cauchy y Dirichlet. La definición de la integral de Riemann incluye funciones que tengan, en un intervalo finito, un conjunto denso de discontinuidades. Riemann se plantea dos interrogantes con respecto a la definición y a las condiciones de posibilidad de la integral definida: ¿Qué hay que entender por $\int_a^b f(x)\,dx$? y ¿En qué casos admite una función integración, y en cuáles no? Para dar respuesta al segundo interrogante presenta dos condiciones equivalentes, en términos de la oscilación de la función, que permite determinar si una función dada es integrable o no sobre un determinado intervalo. La importancia de estos criterios radica en el hecho de que su estudio llevó a caracterizar la integrabilidad de una función en términos del tamaño del conjunto de sus discontinuidades. Pero a pesar de que su segunda condición[202] de integrabilidad dejaba ver incipientemente que la noción de "tamaño" del conjunto de los puntos de discontinuidad de la función tenía que basarse en el concepto básico de "longitud", durante algunos años se siguió intentando caracterizar a las funciones Riemann integrables en términos del "tamaño topológico" del conjunto de sus discontinuidades. Este hecho estuvo influenciado por la confusión que había generado Dirichlet, al considerar que los únicos conjuntos diseminados eran aquellos con un número finito de puntos de acumulación.[203] Cuando se logró distinguir entre los conjuntos diseminados y los de

[202] La función *f* es integrable en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si $\forall\varepsilon > 0, \forall\sigma > 0, \exists d > 0$, tal que para toda partición P, con $\|P\| < d$, se tiene que $S(P,\sigma) < \varepsilon$, donde $S(P,\sigma) = \sum_{i\in T} \Delta x_i$, con $T = \{i: D_i > \sigma\}$. Criterio que en términos de la teoría de la medida podemos enunciar como: *f* es Riemann integrable si y sólo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida cero.

[203] Actualmente sabemos que la relación de inclusión estricta entre los conjuntos de primera especie, los de medida cero y los diseminados es la siguiente:
$\{A: A\ es\ de\ primera\ especie\} \subset \{A: A\ es\ de\ medida\ nula\} \subset \{A: A\ es\ diseminado\}$. Por ejemplo, el conjunto de Cantor es de contenido cero pero no es de primera especie y el conjunto de Smith-Volterra-

primera especie, y se introdujo el concepto de contenido nulo, se logró transformar la segunda condición de Riemann en una caracterización de la integrabilidad de una función usando una noción de "longitud generalizada" o medida.

Con Riemann aparece ya el concepto de función integrable independientemente de cualquier consideración acerca de la continuidad de la función, la existencia de la integral sólo depende de la existencia del límite de las sumas.

Una vez que Riemann ha establecido sus dos condiciones de integrabilidad, exhibe una función Riemann integrable con un conjunto denso de discontinuidades en un intervalo acotado. La idea de “condensación de singularidades”, que Riemann empleó en el ejemplo de esta función, sería luego sistematizada y generalizada por Hankel y Cantor. A partir de Riemann los trabajos relacionados con la integración se dedicarán a buscar las condiciones que debe cumplir la función para que exista su integral.

Con el concepto de integral definida de Riemann, es posible integrar funciones que no son la derivada de otra función e, incluso, funciones que para cualquier intervalo que se considere no tienen primitiva. Es precisamente en este punto donde presenta problema la concepción de integral como primitiva. Parece estar claro que la integral como límite de una suma surge dentro del contexto de la fundamentación y no en el contexto de las aplicaciones. Lo que replantea el problema fundamental del cálculo integral: encontrar una función de la cual se conoce su derivada. En este sentido, con respecto al problema del cálculo de primitivas, la integral de Riemann estaría ubicada en un umbral de epistemologización pues la teoría lo resuelve para una clase muy particular de funciones y aún no se establecen condiciones generales para la existencia de primitivas.

En el intento de caracterizar los conjuntos de puntos de discontinuidad de las funciones Riemann integrables, Lipschitz asume que todo conjunto diseminado tiene un conjunto finito de puntos límite. Tal confusión será aclarada posteriormente, con los trabajos de Cantor sobre conjuntos derivados, al contemplar la existencia de conjuntos con infinitos puntos límite, cuyos conjuntos de puntos límites también pueden tener infinitos puntos límites y así sucesivamente.

Cantor (*fat Cantor set*) tiene medida ½ y no contiene intervalos, es decir tiene medida no nula y es diseminado (ver 1.9 de este trabajo).

Con el análisis de la distribución de conjuntos infinitos, de discontinuidad o de extremos relativos, así como con la introducción de los intervalos de primera y segunda especie, podemos ver en los trabajos de Lipschitz los gérmenes de la teoría moderna de conjuntos infinitos. El llamar la atención sobre cómo la distribución de puntos singulares afecta la integración, les permitirá a sus sucesores aclarar la diferencia entre las propiedades topológicas y las propiedades relativas a la medida de conjuntos infinitos de puntos. Estos aspectos ubican los trabajos de Liptchitz, con respecto a la teoría de la integración moderna, la cual requiere de la teoría de la medida, en un umbral de epistemologización.

Dirichlet amplió la clase de funciones integrables a la clase de funciones discontinuas en un conjunto diseminado de puntos. Para Lipschitz las funciones integrables son aquellas funciones continuas excepto en un conjunto de primera especie. Así la consideración más importante que Dirichlet y Lipschitz hacen es que aunque los puntos de discontinuidad formen un conjunto "infinito muy grande" la restricción de que posean un número finito de puntos de acumulación, los hace, a pesar de ser un conjunto infinito, estar lo suficientemente dispersos. Con los trabajos de Dirichlet y Lipschitz se establecen ciertas características de los conjuntos de puntos lineales, determinados por las singularidades de las funciones en cuestión. Dirichlet afirma que la condición suficiente para que una función sea representable en series de Fourier e integrable, es que los puntos de discontinuidad constituyan un conjunto diseminado. Lipschitz, intentando justificar y complementar el trabajo de Dirichlet, observa que para poder calcular la integral de una función con infinitas singularidades sobre un intervalo dado, es necesario que el intervalo pueda dividirse en un número finito de subintervalos tales que algunos contengan infinitos puntos de singularidad y su longitud sea arbitrariamente pequeña, y los otros subintervalos contengan sólo un número finito de tales singularidades; de esta manera el intervalo de integración se divide en subintervalos sobre los cuales existe la integral de la función, y la integral total se obtiene mediante la suma de las integrales sobre los subintervalos. Pero, al parecer Lipschitz estaba pensando en conjuntos cuyo conjunto de puntos de acumulación es finito.

Estas características permitieron posteriormente clasificar, respectivamente, los conjuntos de puntos en conjuntos diseminados, conjuntos de medida nula y conjuntos de primera especie. Tales conjuntos no son equivalentes, pero para Lipschitz eran características equivalentes.

Con los trabajos de Hankel, y los primeros trabajos de Cantor, la teoría de conjuntos, así como la teoría de la medida, y en consecuencia la teoría de la integración moderna entran en un umbral de epistemologización.

A pesar de que Hankel da la definición de conjunto diseminado, el tipo de ejemplos estudiados y el primer criterio de integrabilidad de Riemann lo condujeron a pensar que los conjuntos diseminados podían ser recubiertos por intervalos de longitud arbitrariamente pequeña, es decir los conjuntos diseminados eran para Hankel de medida nula. Esta creencia de que las propiedades topológicas de los conjuntos de puntos de discontinuidad (o en general de singularidades) eran determinantes para la existencia de la integral de una función discontinua, se mantuvo hasta los años 1880. Los trabajos de Hankel influenciaron fuertemente a los matemáticos alemanes, en particular a Cantor, quien introdujo los conceptos de punto límite, conjunto derivado y conjuntos de primera y segunda especie. Los trabajos sobre funciones discontinuas integrables de Dirichlet, Riemann y Lipschitz, encontrarán continuidad en los trabajos de Hankel. El concepto de oscilación de una función en un intervalo, introducido por Riemann, será refinado con el concepto de oscilación puntual de Hankel, lo que le permitirá diferenciar entre las funciones con infinitos puntos singulares (puntos de discontinuidad, y puntos máximos y mínimos) las integrables y las no integrables.

Hankel, siguiendo las ideas de Riemann de relacionar la integrabilidad de la función con su oscilación, busca una condición suficiente y necesaria que permitiera demostrar que la función altamente discontinua definida por Riemann es integrable. Para ello establece el concepto de salto de una función en un punto, similar al concepto de oscilación.

La idea de la teoría de la medida, implícita en la segunda condición de la integrabilidad de Riemann, permaneció oscurecida por la prominencia dada a las ideas topológicas que eran aparentemente equivalentes. Sin embargo, por la introducción de la noción de salto de una función en un punto, Hankel focalizó la atención sobre las propiedades de los conjuntos de puntos; todavía quedaba por reconocer que las propiedades de la medida de conjuntos son cruciales para la teoría de la integración. La búsqueda de un procedimiento para medir las discontinuidades de una función, condujo a Hankel (1882) a introducir la noción de contenido. Sin embargo la noción de contenido de Hankel consideraba recubrimientos finitos, lo que influenciará a sus sucesores y los conducirá a desarrollar una teoría de la medida basada en recubrimientos finitos.

Es precisamente el método de “condensación de singularidades” de Hankel que le sirve de inspiración a Cantor para fundamentar la existencia de los distintos niveles de las singularidades condensadas y dar una demostración rigurosa de su teorema de unicidad de la representación de funciones en series de Fourier. Cantor introduce el concepto de *Conjunto Derivado* en 1872. Como se puede ver, en la descripción de su método, de condensación de singularidades, los conjuntos de puntos que interesaban a Cantor, en relación con la representación de funciones en series trigonométricas, eran los conjuntos para los cuales existe un conjunto derivado con un número finito de puntos de acumulación. Sin embargo, en 1879 define los conjuntos de primera y segunda especie. Aunque Cantor se inspiró en el trabajo de Lipschitz, sobre series trigonométricas, va más allá al considerar la posibilidad de que los puntos de acumulación conformen un conjunto infinito. Cantor observa que, mediante procesos inductivos, algunas propiedades de los conjuntos finitos pueden trasladarse a los conjuntos de primera especie. De esta forma, se puede demostrar que los conjuntos de primera especie son diseminados y pueden recubrirse por un número finito de intervalos cuya longitud total puede hacerse arbitrariamente pequeña. Lo que condujo a los matemáticos, dedicados a estudiar las condiciones de integrabilidad de las funciones discontinuas, a reafirmar la creencia de que los conjuntos diseminados tenían medida nula, o que si el conjunto de singularidades de una función era diseminado entonces podían ser “ignorados” al calcular la integral de la función.

En 1875, Smith expone dos métodos totalmente diferentes para construir conjuntos diseminados; a partir de uno de ellos construye un conjunto diseminado con contenido exterior positivo y por consiguiente su función característica no es Riemann integrable, lo que refuta las afirmaciones de Hankel acerca de la integrabilidad de las funciones puntualmente discontinuas y que todo conjunto diseminado tiene medida cero.

Dini, utilizando la clasificación de conjuntos de primera especie dada por Cantor, demuestra, entre otras cuestiones, que toda función acotada en un intervalo cuyo conjunto de discontinuidades es de primera especie, es integrable. Esto una vez ha probado que todo conjunto de primera especie puede recubrirse por un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña, es decir el conjunto tiene contenido nulo. Las demostraciones realizadas por Dini siguen siendo válidas sustituyendo los conjuntos de primera especie por conjuntos que pueden ser recubiertos por un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña, aunque Dini no salió del contexto de los conjuntos de primera especie, lo que no le permitió percibir el valor de una teoría del contenido o de conjuntos de contenido cero. Por otra parte, Dini parece cuestionar ya la identificación entre los conjuntos de primera especie y los diseminados, según se desprende de sus dudas sobre la validez de la proposición de Hankel.

En este sentido los trabajos de Smith y Dini, sobre integración relacionados con el problema de la primitiva, deberán ser ubicados en un umbral de positividad, pues hay un interés particular por la construcción de funciones que cumplen ciertas características, sin que exista una clasificación determinada.

Con DuBois Reymond se franquea un umbral de epistemologización, para la teoría de la medida y la teoría de la integración moderna, al introducir el término "conjunto integrable de puntos" para referirse a conjuntos de contenido cero y distinguirlos de los conjuntos diseminados. Pero es Axel Harnack quien ubica dichas teoría en el umbral de cientificidad al introducir la noción de conjuntos de contenido cero a principios de los años1880. Inicialmente, Harnack confundió los conjuntos de contenido cero con los conjuntos de primera especie. Sin embargo en 1881, estableció la diferencia e introdujo el concepto de *conjunto discreto*, que es equivalente al de conjunto de contenido nulo, y el concepto de *conjunto lineal*, que es equivalente al de conjunto de contenido positivo. Posteriormente, en 1882, muestra que todo conjunto discreto es diseminado, y construye un ejemplo de un conjunto diseminado lineal, es decir muestra que existen conjuntos diseminados no discretos. De esta manera se evidenciaron los elementos de la teoría de la medida, implícitos en la segunda condición de integrabilidad de Riemann, y el falso teorema de Hankel es rectificado por el enunciado "$f(x)$ es integrable si y sólo si para todo σ, el conjunto S_σ, de puntos donde la oscilación de la función es mayor que σ, es discreto".

Otto Stolz establece la primera definición de contenido en 1884. En 1881 cuando trabajaba en la definición de la longitud de curva, Stolz observa que el área y el volumen pueden ser definidos en términos de la integral. También en 1884, Cantor publica una definición equivalente de contenido pero en un espacio euclidiano *n*-dimensional. Cantor define el *contenido* o *volumen* de P, $I(P)$, como:

$$I(P) = \lim_{r \to 0} \int_{\Pi(P,r)} (dx_1 dx_2 \cdots dx_n)$$

Sin embargo, Cantor manifiesta que: "Esta noción general de volumen o magnitud es indispensable para mí en las investigaciones sobre las dimensiones de los conjuntos continuos..."[204]. Cantor no parece estar interesado en el problema de la integración, sólo la usa para estudiar las propiedades de los conjuntos de puntos, que son su interés tal como él mismo lo manifiesta.

En 1875, Gaston Darboux redefine la integral de Riemann mediante sumas superiores e inferiores. Entre las consecuencias de esta definición, enuncia y demuestra el teorema fundamental del cálculo para funciones acotadas.

Retomando a Riemann, Darboux incorpora a partir de las nociones de límite máximo y límite mínimo el concepto de oscilación.

Darboux enuncia un teorema que le permite dar cuenta de la integrabilidad de una función dada, y con ello caracterizar de manera significativa las funciones discontinuas integrables. Otro aporte importante de Darboux está relacionado con el descubrimiento del hecho de que la integrabilidad de Riemann no se conserva en el paso al límite. Darboux demuestra que la convergencia uniforme es una condición suficiente para conservar la integrabilidad. Estos resultados de Darboux ubican la teoría moderna de la integración en un umbral de cientificidad, al introducir nuevas definiciones y demostrar teoremas que serán generalizados por Lebesgue en su teoría moderna de la integración.

El concepto de contenido, introducido independientemente por Stolz, Cantor y Harnack, el cual corresponde a lo que hoy conocemos como contenido exterior, se relaciona con la teoría de conjuntos discretos de Harnack y con el segundo criterio de integrabilidad de Riemann; lo que permite que la integral moderna y la teoría de la medida franqueen un umbral de cientificidad

[204]Citado por (Hawkins, 1979, pág. 63)

Sin embargo, ubicamos la teoría de la medida y la teoría moderna de la integración en el umbral de cientificidad principalmente a través de la obra de Camille Jordan, pues allí la importancia de la noción de medida en la teoría de la integración fue reconocida explícitamente por primera vez. Con Peano se encuentra una actitud diferente hacia la relación entre estos conceptos. Peano observó que los resultados de la teoría de la integración podían ser simplificados al reconocer que las integrales superior e inferior, $\overline{\int_a^b f}$ y $\underline{\int_a^b f}$, pueden ser definidas respectivamente, como el extremo inferior de las sumas superiores de Riemann y el extremo superior de las sumas inferiores. Además, criticó el hecho de que la existencia y definición de la integral definida se fundamentara en el concepto de área, no porque estuviera en contra del enfoque geométrico, sino porque el concepto de área aún no tenía una definición precisa y suficientemente general.

Al parecer, la primera definición formal de área se la debemos a Peano, retomó como punto de partida para su definición, la idea de Eudoxo y su método de exhausión. Definió el área interior $a_i(A)$ de A como la mínima cota superior de las áreas de todos los polígonos contenidos en S y el área exterior $a_e(A)$ como la máxima cota inferior de las áreas de todos los polígonos que contienen a A. Es claro que $a_i(A) \leq a_e(A)$, cuando se cumple la igualdad el valor común corresponde al área de A.

Las investigaciones de Cantor sobre los conjuntos de puntos parecen haber influenciado a Peano para presentar su concepto de área en el contexto de los conjuntos totalmente arbitrarios. Peano reconoció que el área exterior de A es igual a la suma del área interior de A más el área exterior de la frontera de A, y su implicación de que A tiene área si y solo si el contenido exterior de su frontera es nulo.

Esta última observación muestra que el criterio de Peano para la existencia del área fue establecido por analogía con el primer criterio de integrabilidad de Riemann, a pesar de que la definición de contenido había sido motivada por el segundo criterio de integrabilidad. Así podemos ubicar los trabajos de Peano, en relación con el concepto de área, con la teoría de la medida y con la teoría de integración moderna, en un umbral de cientificidad.

A pesar de que Peano llama la atención sobre la relación entre la integral de la función y el área del campo de integración, será Camille Jordan en 1892 quien hará explícita dicha relación. El objetivo de Jordan es mostrar que a cualquier campo *E* le corresponden dos números, la extensión interior y la extensión exterior, y que si esos dos números coinciden se dirá que *E* es medible y que su extensión es ese número común. Para que *E* sea medible es "necesario y suficiente que la frontera de *E* tenga extensión nula". Debido a este tipo de conceptualizaciones la obra de Jordan ubica la teoría de la medida y la integración moderna en un umbral de cientificidad, pues hay explicito un discurso científico que conceptualiza las nociones de integral y conjunto medibles, aunque no en un contexto suficientemente general como lo hará posteriormente Lebesgue.

Por otra parte, los trabajos Borel, impulsado por las investigaciones realizadas en su tesis doctoral (1894) sobre ciertas cuestiones relacionadas con las funciones analíticas, sitúa el origen de las nuevas ideas sobre la teoría de la medida en la teoría de las funciones complejas. Las demostraciones de algunos de estos resultados sugirieron a Borel la necesidad de dar una primera definición axiomática de medida y una definición de conjunto medible que utilizase un número infinito de intervalos para cubrir el conjunto a medir. El universo de los conjuntos medibles de Borel queda totalmente determinado a partir de los intervalos, y las operaciones de unión numerable de conjuntos y diferencia de conjuntos. Una vez ha establecido estos conceptos, Borel demuestra que un conjunto de medida cero puede ser no contable y todo conjunto contable tiene medida cero. Además observa que un conjunto puede tener medida nula y tener la potencia del continuo. Así, con Borel aparece la teoría de la medida en un umbral de cientificidad, e independiente de la teoría de la integración.

La teoría de la medida y la teoría de la integración moderna, se ubican simultáneamente en un umbral de formalización con los trabajos de Lebesgue. Con su tesis doctoral se propone generalizar la noción de integral con el objetivo de solucionar los problemas que no pudieron resolver sus antecesores: el problema de la medida, el cálculo de primitivas y la convergencia de series trigonométricas. Lebesgue se apoya en el concepto de *contenido* de Jordan y en la *medida* de conjuntos de Borel, brindando una salida conceptual al problema de la medida y estableciendo una teoría de integración más general. Para ello, Lebesgue reconoce que la medida de conjuntos es una generalización de la medida de los objetos geométricos. Luego de considerar el esquema geométrico, lo adopta a un sistema analítico, con lo que logra dar una salida al problema de cuadratura de áreas y de la integral a partir de su teoría de la medida, regresando “a los métodos intuitivos anteriores a Cauchy, pero la definición de medida les da una fundamentación lógica sólida” (Lebesgue, 1927).

A pesar de que la integral surge como operación del análisis, con el propósito de fundamentar la solución propuesta desde el cálculo al problema milenario de las cuadraturas, Lebesgue nota que los problemas de la integral de Riemann no pueden solucionarse desde el análisis matemático, sino a partir de la teoría de la medida abstracta; sin embargo, la teoría abstracta de la medida hunde sus raíces en la geometría. Lebesgue, resuelve un problema del análisis matemático volviendo a los métodos de la geometría euclidiana. Su siguiente paso es realizar el traslado de la interpretación geométrica hacía el establecimiento de una definición analítica de la integral.

De esta manera, con Lebesgue la integral alcanza su forma más general debidamente fundamentada en la teoría de la medida[205]. Sin embargo, a pesar de que se reconoce que Lebesgue logra darle un primer tratamiento axiomático a la teoría de la integración[206], en sus trabajos aún no podemos hablar de una teoría rigurosamente axiomatizada; será necesaria la teoría axiomática de conjuntos para que la teoría de la medida y en consecuencia la integral de Lebesgue alcance el umbral de formalización, en el sentido de que se presente como un cuerpo teórico rigurosamente axiomatizado, de acuerdo a los cánones de rigor actualmente establecidos.

De esta manera, los cuatro umbrales establecidos por Foucault nos han servido como *Unidades de Análisis Histórico* para el proceso constructivo de la teoría de la medida y la integral de Lebesgue, que es el objetivo de este trabajo. Sin embargo, no podemos ignorar que a partir de la obra de Lebesgue se inicia una nueva etapa de abstracción y generalización de la medida y la integral. Si bien la obra de Lebesgue se constituye en un punto cúspide de la teoría de la medida y de la integración, allí no termina su desarrollo; por el contrario, la obra de Lebesgue se convierte a su vez en un punto de partida para nuevas teorías más generales. Esto en concordancia con una etapa de cambios filosóficos que se dan a principios del siglo XX y que buscan grandes síntesis teóricas. Los orígenes de

[205]En el sentido que bajo la definición de integral de Lebesgue el dominio de las funciones integrables es más amplio.
[206] (Cavaillès, 1938, pág. 79)

esta tendencia se pueden ubicar en la propuesta formalista de Hilbert, alcanzando un alto grado de desarrollo en el estructuralismo bourbakista. El objetivo del grupo Bourbaki era elaborar un compendio que abarcara las múltiples disciplinas matemáticas que aparecían dispersas según el tipo de objetos tratados. Las matemáticas ya nos estarían organizadas en teorías axiomáticas referidas a objetos particulares o conjuntos de elementos, sino en grandes estructuras, donde lo importante son las relaciones en las que intervienen los elementos y no su naturaleza. Bourbaki identifica tres tipos de estructuras, que se conocen como "estructuras madre": estructuras algebraicas, estructuras de orden y estructuras topológicas.

Teniendo en cuenta que el umbral, como unidad de análisis, podemos verlo como un indicador de cambio de estado de los saberes, para incluir los nuevos desarrollos teóricos de la medida y la integración, tenemos que pensar en un nuevo umbral, al que podríamos denominar *umbral de estructuración*. La introducción de este quinto umbral de estructuración permite dimensionar de manera más objetiva el aporte de Lebesgue. A pesar, de que esto requeriría una nueva investigación, nos atrevemos a describir de manera superficial este nuevo umbral, y los desarrollos que ubican a la teoría de la medida en el mismo.

Umbral de estructuración

Una teoría franquea el umbral de estructuración cuando se encuentra inmersa en una estructura madre. Para el caso de la medida corresponde a la búsqueda de una estructura algebraica mediante la cual describir los conjuntos medibles. Veamos cómo la teoría de la medida franquea este umbral.

Lebesgue, en su tesis doctoral resuelve el problema de la medida para subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$, la cual se puede extender para algunos subconjuntos no acotados. Pero queda abierta la pregunta sobre la existencia de conjuntos no Lebesgue medibles; el mismo Lebesgue expresa en su tesis que en caso de que existan, él desconoce su existencia, y en (Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, 1904) vuelve a referirse a la posibilidad de su existencia:

> ... es sólamente para estos conjuntos [L-medibles] que nosotros estudiaremos el problema de la medida. Yo no se si se pueda definir, ni siquiera sé si existen otros conjuntos que los conjuntos

medibles; si existen, sé que lo dicho en el texto no es suficiente para afirmar o no que el problema de la medida es posible, ni que sea imposible para estos conjuntos [...]. En cuanto a la pregunta de la existencia de conjuntos no medibles, ella es apenas un adelanto después de la edición de este libro. Toda vez que esta existencia sea cierta para aquellos que admiten un cierto modo de razonamiento basado sobre lo que se llama el axioma de Zermelo [axioma de elección]. Por este razonamiento, llegamos a la siguiente conclusión: Sí existen los conjuntos no medibles; más esta afirmación no se debe considerar como contradictoria si logramos mostrar que ningún hombre será capaz de encontrar un conjunto no medible.

En 1905 Vitali en *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, construye un conjunto que pone de manifiesto que la medida de Lebesgue no cumple la aditividad completa en $\wp(\mathbb{R})$, y que es imposible extenderla, es decir construir una medida sobre $\wp(\mathbb{R})$ que cumpla esta propiedad y que además sea invariante bajo traslaciones y asigne a cada intervalo su longitud. La existencia de esta clase de conjuntos que no son Lebesgue-medibles es consecuencia del axioma de elección.

Para la construcción de un conjunto de Vitali se considera la siguiente relación de equivalencia sobre$\mathbb{R}$: $x \sim y$ si y sólo si $(x-y)\in$Q. Haciendo uso del axioma de elección se puede definir un conjunto $A \subset (0,1)$, eligiendo un elemento en $(0,1)$ de cada una de las clases de equivalencia. Para cada $x \in (0,1)$, cuya clase es $x + \mathbb{Q}$, hay un representante $a = x + q$ en A. Sea $N = \mathbb{Q} \cap (-1,1)$, como $a, x \in (0,1)$ se tiene que $\pm q \in N$. Por lo tanto se cumple la siguiente inclusión de conjuntos:

$$(0,1) \subset \bigcup_{q\in N} (q + A) \subset (-1,2)$$

Puesto que si $p \neq q, (A + p) \cap (A + q) = \emptyset$, el conjunto del medio es unión numerable de conjuntos disjuntos. Luego, si se supone que A es Lebesgue medible, por la monotonía de la medida se tiene la siguiente desigualdad:

$$m\big((0,1)\big) \leq m\left(\bigcup_{q\in N} (q + A)\right) \leq m\big((-1,2)\big)$$

Por la aditividad numerable y la invariancia bajo traslaciones, se tiene que:

$$1 \leq \sum_{q\in N} m(A) \leq 3$$

Si la medida de A es positiva, se tiene una contradicción porque esta suma infinita no puede ser acotada, y si la medida de A es nula se tiene que $1 \leq 0$. Luego A no es Lebesgue medible.

Si bien no es posible extender la medida de Lebesgue a $\wp(\mathbb{R})$, si es posible construir una medida más general y abstracta sobre una estructura, de tal manera que la medida de Lebesgue sea un caso particular de ella.

Se pretende entonces definir una medida con valores en $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, para ello es necesario encontrar una estructura sobre $\wp(\mathbb{R})$ tipo álgebra de Boole, es decir, que tenga como elementos a $\emptyset$ y a $\mathbb{R}$, y que sea cerrada bajo la diferencia y la unión finita. $\wp(\mathbb{R})$ cumple con estas características, $\wp(\mathbb{R})$ es un álgebra, pero se necesita la mayor estructura que de cuenta de los Lebesgue medibles, por tanto se debe garantizar la propiedad de aditividad numerable de la medida. Se necesita entonces una álgebra $\mathcal{A}$ que cumpla la propiedad adicional de que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de elementos de $\mathcal{A}$ entonces $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}$, a este tipo de álgebras se les denomina σ-álgebra.

Por otra parte, si denotamos por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ al conjuntos de los borel medibles y por $\mathcal{L}$ a los Lebesgue medibles, se tiene la siguiente inclusión de conjuntos $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L} \subset \wp(\mathbb{R})$. Además $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la menor σ-álgebra que contiene a todos los abiertos y $\wp(\mathbb{R})$ es la mayor σ-álgebra que contiene a los abiertos. Si bien, no es posible extender la medida de Lebesgue a $\wp(\mathbb{R})$, manteniendo la invariancia por traslaciones, si se pueden obtener extensiones de la misma.

Considérese la medida exterior de Lebesgue. No es posible demostrar que esta medida es σ-aditiva para cualquier sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$; pero esta propiedad se cumple cuando los elementos de la sucesión pertenecen a una clase especial de subconjuntos medibles. Constantin Carathéodory, utilizando la medida exterior de Lebesgue, caracterizó estos subconjuntos medibles de la siguiente manera:

Sea m_e la medida exterior de Lebesgue. Un subconjunto E de $\mathbb{R}$ es medible si y sólo si dado cualquier otro subconjunto A de $\mathbb{R}$, se cumple que:

$$m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A - E)$$

Si E es medible entonces su medida de Lebesgue es su medida exterior: $m(E) = m_e(E)$.

Los conjuntos medibles en el sentido de Carathéodory forman una σ-álgebra Σ, de partes de $\mathbb{R}$, y la restricción m de m_e a Σ es una medida. Los conjuntos Lebesgue medibles son entonces los conjuntos medibles en el sentido de Carathéodory, respecto a la medida exterior de Lebesgue. Se tiene además que la σ-álgebra de Borel es una σ-álgebra propia de las σ-álgebras de los subconjuntos medibles de Lebesgue.

Por otra parte, el problema de la medida se convierte en una cuestión de la teoría de conjuntos, en el sentido de que la existencia de conjuntos no medibles es consecuencia de la presencia, en la teoría de conjuntos del axioma de escogencia. Es decir, si a los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel se añade este axioma, entonces aparecen subconjuntos en $\mathbb{R}$ que no son Lebesgue-medibles. Pero esto no significa que si se elimina el axioma de elección se pueda demostrar que todo conjunto es medible. De hecho, si se sustituye el axioma por la hipótesis del continuo, también se pueden construir conjuntos no Lebesgue-medibles en$\mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta que, tal como lo advierte Foucault, la cronología de estos umbrales no es regular ni homogénea. Un análisis detallado debe establecer cómo se ubican en el tiempo los diferentes umbrales, su sucesión, su desfase, su eventual coincidencia, la manera en que puede gobernarse o implicarse los unos a los otros, las condiciones en las que sucesivamente se instauran, etc. Además es importante tener en cuenta que estos umbrales son relativos a la época en que se analicen, pues lo que puede ser riguroso y formal en una época dada, puede pasar a ubicarse en el umbral de epistemologización o positividad en una época posterior.

Por otra parte, debemos anotar que, como decía Leibniz, el gran reto del historiador es inscribir el concepto en su red de conceptos significativos. Con frecuencia el tratamiento epistemológico del desarrollo histórico de una cuestión se limita a considerar la regularidad positiva de los conceptos. Este enfoque, en términos de umbrales, nos permite reconocer las principales redes que subyacen a tales regularidades. Los siguientes cuadros ilustran esas redes de problemas, técnicas y conceptos que históricamente conforman el armazón de la teoría de integración y la teoría de la medida de Lebesgue.

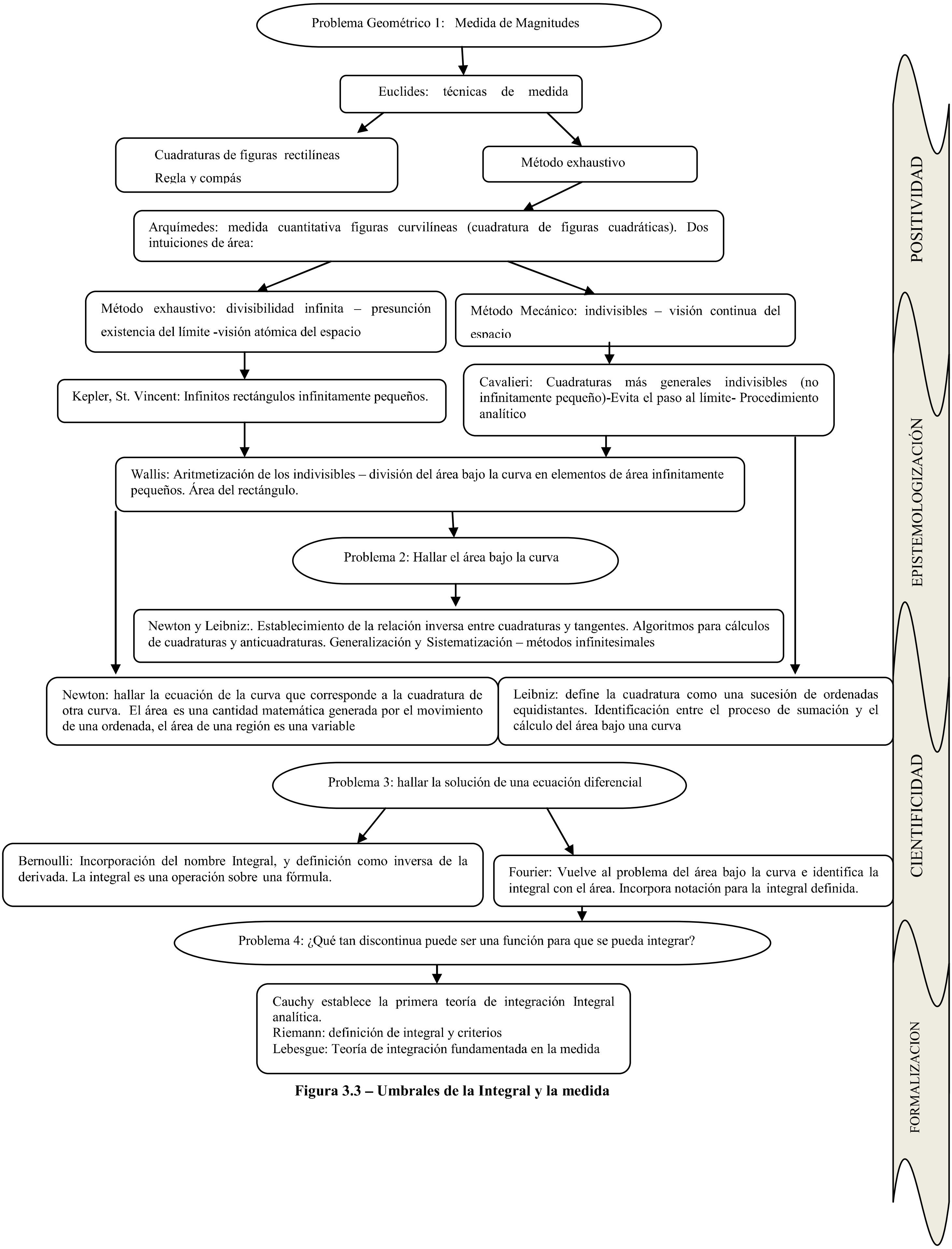


Figura 3.3 – Umbrales de la Integral y la medida

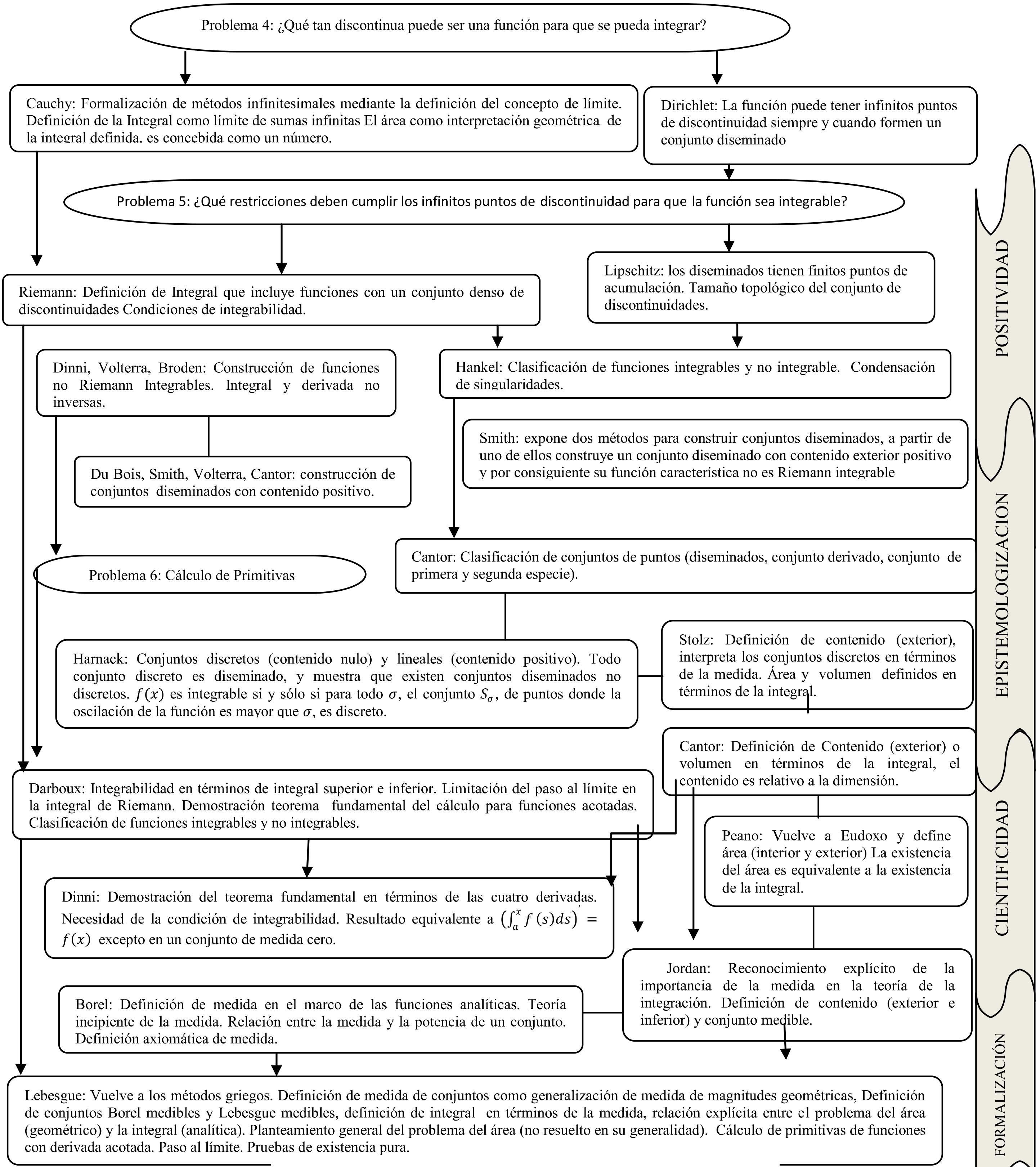


Figura 3.4 – Los umbrales de la etapa de Formalización

Para terminar de caracterizar la historia que consideramos pertinente para las investigaciones didácticas de las matemáticas, resulta interesante citar los criterios que Emmanuel Lizcano propone para una arqueología de las matemáticas:

> Rechazar la búsqueda del origen de los objetos y resultados matemáticos, como si hubiera un `lo mismo' que estuviera `ya dado', dotado de una identidad oculta a la espera de ser des-cubierta. La historia retroproyecta el presente en un pretendido origen, con lo que dota a las emergencias de un destino que - como no podía ser de otro modo - las acabará llevando a ser lo que debían de ser. Toda narración de los orígenes es narración mítica.
> No restablecer continuidades, desarrollos, evoluciones, acumulaciones... sino "mantener lo que pasó - y, añadiríamos, lo que pasa - en la dispersión que le es propia", con todos sus pliegues, fracturas, puntos de inflexión, capas heterogéneas, sustituciones, desplazamientos (Canguilhem) y obstáculos epistemológicos (Bachelard).
> Evitar historizar pretendidas esencias matemáticas que, de hecho, han sido construidas a partir de materiales dispersos y, con frecuencia, extraños al ámbito de objetos, conceptos o prácticas cuyos perfiles nítidos tan sólo existen en el momento de historiarlos. Atender, por el contrario, a la proliferación y mezcla contra la que (gracias a la que) se ha conformado lo que se quiere presentar como claro y distinto'. El matemático, como el científico, tiene más de bricoleur (Lévi-Strauss) que de vigía (Lizcano, 1992, pág. 504).

Lizcano nos propone una historia de las matemáticas alejada de los productos acabados de una ciencia inmaculada, habitando un mundo aparte inaccesible a los mortales. Con respecto a la teoría de la integración, hemos intentado identificar dentro de su génesis histórica los diferentes umbrales que establece Foucault, sin embargo para ubicar esta teoría dentro de un campo de saber más amplio sería necesario tener en cuenta estos criterios que nos propone Lizcano para así lograr una *arqueología de la integral*, lo que constituiría un nuevo proyecto de investigación.

Hemos mostradoComo hemos visto a través del capitulo 1 y 2 la t de la integral com teoría matematica sedesarrolla màs de 25 sglos, su form

3.3 Reflexiones sobre la enseñanza de la integral y la medida

Una de las características principales de los conceptos matemáticos que se consideran de nivel superior es que requieren de conceptos previos para su conceptualización. En matemáticas avanzadas los conceptos se constituyen a través de una progresiva matematización que exige abstraer, definir y formalizar conceptos de niveles previos. Tal es el caso del concepto de integral de Lebesgue que involucra conceptos como área, límite y medida.

En la mayoría de los casos, la presentación lógica formal de los conceptos matemáticos aparece totalmente alejada de las intuiciones de los estudiantes, se afirma incluso que dicha presentación lógica ofrece obstáculos cognitivos[207]. Esto conlleva la necesidad de un proceso de "deconstrucción"[208] que permita al estudiante relacionar sus intuiciones con la definición lógica del concepto, de tal manera que pueda experimentar los procesos de generalización y abstracción, antes de enfrentarse con los conceptos formalizados que, sin una preparación previa, dan la sensación de unas matemáticas sin contenido. En este proceso de deconstrucción juega un papel primordial la historia y epistemología de las matemáticas; en particular el establecimiento de los umbrales de la integral permiten visualizar cómo se presentan y relacionan los diferentes procesos de generalización y abstracción que dieron lugar a la constitución de la integral en sus diferentes etapas de desarrollo histórico.

Las investigaciones didácticas en enseñanza y aprendizaje del análisis matemático hacen parte de los temas que integran lo que se ha llamado "Pensamiento Matemático Avanzado"[209]; en particular el concepto de integral definida se ubica dentro del Pensamiento Matemático Avanzado.

Por otra parte, Dubinsnky[210] identifica el mecanismo de "encapsulación" como un elemento importante en el análisis de la construcción de conceptos matemáticos. Este mecanismo consiste en la conversión de un proceso, que es de carácter dinámico, en un objeto matemático, que es de carácter estático.

---

[207] Ver (Azcarate & Camacho, 2003)

[208] "La deconstrucción consiste en mostrar cómo se ha construido un concepto cualquiera a partir de procesos históricos y acumulaciones metafóricas (de ahí el nombre de deconstrucción), mostrando que lo claro y evidente dista de serlo"…"Deconstruir consiste, en efecto, en deshacer, en desmontar algo que se ha edificado, construido, elaborado pero no con vistas a destruirlo, sino a fin de comprobar cómo está hecho ese algo, cómo se ensamblan y se articulan sus piezas, cuáles son los estratos ocultos que lo constituyen, pero también cuáles son las fuerzas no controladas que ahí obran". Tomado del ***Diccionario de Hemenéutica*** dirigido por A. Ortiz-Osés y P. Lanceros, Universidad de Deusto, Bilbao, 1998. edición digital de Derrida en Castellano. http://pwww.jacquesderrida.com.ar/comentarios/peretti_2.htm

[209] De acuerdo con David Tall el pensamiento matemático avanzado se relaciona con la introducción de definiciones formales y la deducción lógica. Sin embargo, se considera que el pensamiento matemático avanzado trata de algo más que la simple prueba formal. Su estudio también debe considerar la creación de nuevas teorías por parte de los matemáticos. Incluye el ciclo completo de generar y usar matemática formal, incluyendo solución de problemas, técnicas para conjeturar, probar, modificar, y demostrar teoremas para construir nuevas teorías matemáticas.http://www.davidtall.com/

[210] Citado por (Calvo, 2001, pág. 13)

En los cursos de cálculo integral generalmente la integral indefinida se presenta una vez se ha presentado la integral definida como el límite de sumas infinitas de áreas de rectángulos. Pasar de la integral definida a la integral indefinida, es equivalente a pasar de un número a una función; la integral indefinida es una integral definida cuyo extremo superior es una variable, $I(t) = \int_a^t f(x)\, dx$. El proceso cognitivo necesario para acceder al objeto estático de la integral requiere primero convertir el proceso dinámico de calcular el área bajo una curva mediante el paso al límite de una suma infinita de áreas de rectángulos en un objeto estático, un número, par ello debe realizarse un encapsulamiento, lo que representa una seria dificultad para muchos estudiantes. Además, para conocer los valores funcionales del operador integral $I(t) = \int_a^t f\,(x)dx$ no es suficiente conocer algunos valores funcionales, la función actúa como único objeto por lo que requiere ser encapsulada. Por ejemplo si $f(x) = \begin{cases} x, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$ algunos estudiantes cometen el error de considerar que para $t > 1$, $I(t) = \int_0^t xdx$, en lugar de $I(t) = \int_0^1 x^2dx + \int_1^t xdx$, por falta de este encapsulamiento.

La distinción entre procedimientos y conceptos es importante en la construcción de conocimiento matemático. Los símbolos matemáticos se pueden interpretar de dos formas: como representantes de un concepto y como indicadores de un proceso, por ejemplo $\int_a^b f\,(x)dx$ puede representar el proceso de sumación o el número que es su resultado. David Tall utiliza el término “procepto” para representar la amalgama de proceso y concepto con un símbolo que opera dualmente. Estos proceptos representan una ambigüedad que los estudiantes deben aprender a manejar. De acuerdo con Calvo:

> La formalización de la matemática conlleva la elección de definiciones precisas para cada uno de los conceptos, lo cual esconde el uso ambiguo que los matemáticos hacen de los proceptos. Esta práctica dificulta el ingreso de los novatos al Pensamiento Matemático Avanzado, donde la fuerza radica en que bajo una definición que otorga un preciso significado a un símbolo, se ocultan otros que permiten manejarlo con flexibilidad. Con un enfoque estrictamente formal de la materia se puede estar ocultando al estudiante los verdaderos caminos por los que opera la matemática (Calvo, 2001, pág. 23).

El papel del símbolo es fundamental en el momento de encapsular procesos, pues permite sintetizarlo como un objeto que posteriormente hará parte de nuevos procesos. Sin embargo, en la mayoría de casos, la notación simbólica no es significante para el estudiante y no le permite ir más allá de una manipulación mecánica. Para evitar esto, Harel y Kaput[211] recomiendan introducir las notaciones después de que los estudiantes construyan sus correspondientes referentes mentales, así mismo observan que no es conveniente empezar a introducir técnicas algorítmicas que involucren estos símbolos. Por ejemplo, no es conveniente introducir la notación $\int_a^t f(x)\,dx$ sin antes llamar la atención sobre las diferencias entre la integral definida y el concepto de área sobre la curva, para que así los estudiantes puedan entender que la integral indefinida merece un nuevo nombre y una notación diferente porque se trata de un nuevo concepto. Tampoco es conveniente enseñar técnicas de integración antes de que el estudiante posea una estructura cognitiva asociada al concepto de integral que le permita dar significado a las manipulaciones simbólicas,

En esta perspectiva, Adquirir un concepto matemático consiste en construir un esquema conceptual del mismo. Se entiende por *esquema conceptual*:

> La estructura cognitiva de un individuo asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto; se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo y va cambiando según el individuo madura y halla nuevos estímulos.[212]

Por tanto, enunciar la definición de un concepto no garantiza la comprensión de su significado. Comprender quiere decir tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias, sensaciones. Sin embargo, en muchas ocasiones no se tienen en cuenta estos aspectos al momento de enseñar. De allí el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos. Debe tenerse en cuenta que el esquema conceptual se construye a partir de la experiencia del estudiante, es decir a partir de situaciones muy variadas.

Por otra parte, Azcárate y Camacho afirman que el carácter de las definiciones de los conceptos matemáticos marca una diferencia importante en el nivel elemental y el avanzado. En el nivel elemental las definiciones se restringen a describir objetos ya conocidos, mientras que en el nivel avanzado, mediante las definiciones, se construyen

---

[211]Citado por (Calvo, 2001, pág. 24)
[212] Citado por (Azcarate & Camacho, 2003)

formalmente nuevos objetos. En las matemáticas elementales las descripciones se construyen sobre la experiencia (percepción viso-espacial, interacción con proceptos operacionales), mientras que en el más alto nivel de las matemáticas avanzadas (conocimiento formal), las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones. Más precisamente, los objetos no se introducen a través de definiciones esenciales, sino a partir de un sistema axiomático mediante el cual cobran sentido los objetos que, en un primer nivel, se han introducido de forma nominal.

Se evidencia entonces la necesidad de educar progresivamente los hábitos de los estudiantes, sobre todo de los que van a realizar estudios de matemáticas avanzadas, de manera que las definiciones formen parte de su experiencia y, por tanto, de sus esquemas conceptuales. A este respecto es importante tener en cuenta los dos tipos de definición que establece Lebesgue para la integral y la medida. La definición descriptiva, que es equivalente a lo que conocemos como definición axiomática, establece las propiedades que debe cumplir el objeto; mientras que la definición constructiva se obtiene una vez se utiliza la descriptiva para determinar un procedimiento de cálculo. De esta manera las definiciones constructivas de la integral y de la medida proporcionan el procedimiento o algoritmo para obtener ese número real que corresponde a la integral definida de la función o a la medida de un conjunto; además son estas definiciones constructivas la que le permiten a Lebesgue afirmar que el problema de hallar la integral es equivalente al problema de medir. Sería entonces recomendable partir de las definiciones constructivas, las cuales se presentan como más naturales, para luego pasar a las definiciones descriptivas las cuales nos proporcionan la certeza de que tal número es necesario y no arbitrario.

Lebesgue no se limita a establecer una teoría formal de la medida y la integral, sino que se interesa por reflexionar sobre los procesos que lo condujeron a ello. Lo que representa un importante aporte, pues podemos utilizar sus explicaciones para diseñar situaciones didácticas útiles en los proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A través de un análisis histórico que nos remonta a la antigüedad griega, pero que no desconoce a sus contemporáneos, Lebesgue establece definiciones axiomáticas de la medida y de la integral. Definiciones que denomina *descriptivas*. Sin embargo, estas definiciones son limitadas en cuanto no proporcionan métodos para calcular la medida de cualquier conjunto o la integral definida de una función. Entonces se plantea la necesidad de una *definición constructiva*, mediante la cual se puede obtener un algoritmo de cálculo. Una vez establecida la definición constructiva, la cual se delinea teniendo como referencia la descriptiva, hay que verificar que los resultados obtenidos a partir de ella, efectivamente cumplen los requerimientos de la definición descriptiva.

Recordemos el planteamiento de Lebesgue sobre la necesidad de evidenciar los nexos entre los orígenes de los conceptos y las "definiciones abstractas ó lógicas".[213] Dichos nexos permitirán dar significado a las definiciones formales de los conceptos. Si bien aceptamos que hay conceptos matemáticos en los cuales parece imposible establecer dichos nexos, estamos seguros que esto no sucede con el concepto de integral definida:

> ¿No comprenderán los alumnos más fácilmente que al pasar de la Geometría Elemental al Análisis, lo único que cambia es el lenguaje, más geométrico antes y más analítico después? Y quizás sentirían poco a poco el progreso realizado; siempre, en Matemáticas, el punto de partida es concreto y el lenguaje también es concreto, geométrico lo más a menudo. Esto es favorable a la imaginación; demasiado favorable aún, pues la realidad es muy rica y demasiadas observaciones requieren la atención. También los primeros razonamientos sólo tienen un alcance muy limitado, pues se apoyan en muchas de estas observaciones particulares. Poco a poco se aísla cada cuestión de las otras; se discierne de lo que es esencial para cada una y los razonamientos se hacen más generales, al mismo tiempo que el lenguaje se hace más analítico y abstracto. Esta abstracción no carece de contenido; al contrario: el lenguaje sólo se hizo abstracto para ser más inmediatamente aplicable a múltiples realidades (Lebesgue, 1936, págs. 45-46).

El recorrido histórico, presentado en el primer capítulo, muestra que para la instauración del concepto de integral, a través de una definición abstracta y general, se vuelve al problema original, es decir al problema milenario de la cuadratura de figuras planas, encontrando en los métodos geométricos de Euclides y Eudoxo, la solución a un problema del análisis matemático. A pesar de que, años antes, Cauchy presentó los conceptos del análisis bajo una total independencia de la geometría; Lebesgue le muestra a los matemáticos del siglo XIX que la salida al problema general de la integral no se puede dar en la negación de la geometría, presentado un escenario de lo analítico descontaminado de

[213] Se encuentran muchas similitudes entre estos planteamientos de Lebesgue y las posiciones de Frechét sobre la desaxiomatización de la ciencia, en particular la que tiene que ver con la exigencia de evidenciar los nexos entre las definiciones experimentales y las definiciones lógicas; hemos visto, en el apartado 3.1 de este capítulo, que Lebesgue considera que las definiciones geométricas se originan en los procedimientos de la técnica, lo que se relaciona con las definiciones experimentales de las que hablaba Frechét. Ver (Arboleda L. C., 2002)

geometría, sino que es imprescindible volver a la geometría para resolver el problema analítico.

Es muy sugerente el método de investigación utilizado por Lebesgue para obtener la definición de integral definida partiendo de la definición geométrica de área. Además, Lebesgue nos muestra en la *Medida de las Magnitudes* que para introducir el concepto de integral es necesaria una introducción básica a la medida de magnitudes: medida de áreas, volúmenes y magnitudes en general. Con respecto a esto, es interesante lo que plantea en la introducción del mencionado texto:

> En los artículos siguientes se verá que me esforcé en tratar los temas de manera tan simple y concreta, como fue posible, sin sacrificar por ello el rigor lógico. Este ideal podrá parecer un poco arcaico, en esta época donde las consideraciones abstractas y doctas desempeñan un papel capital, hasta en las ciencias experimentales; sin embargo, a quienes se deben esas consideraciones han podido desplazarse en la abstracción y realizar, no obstante, una obra útil, pues poseían un sentido particularmente agudo de la realidad. Es este sentido el que es menester despertar en los jóvenes; después, pero sólo después, el paso a lo abstracto puede ser de utilidad, cuando bajo lo abstracto se siga viendo lo concreto y, en general, todos los casos verdaderamente útiles (Lebesgue, 1936, pág. X).

En el capítulo sobre áreas, Lebesgue inicia planteando un problema práctico donde se requiere embaldosar un piso y observa que:

> Se concibe que esta cuestión práctica – y otras análogas – haya conducido a ciertas nociones matemáticas, así como la comparación de un segmento con un segmento unidad condujo a las nociones de longitud y número (Lebesgue, 1936, pág. 25) .

Luego de este comentario, Lebesgue expone la manera de evaluar las longitudes de los diferentes segmentos, para luego proceder de forma similar al cálculo del área de un cuadrado. Se toma como referencia un cuadrado *C*, y se cubre el plano con una red *R* de cuadrados iguales a *C*, los cuales denominan cuadrados *U.* Se divide cada uno de los cuadrados U en diez partes iguales obteniendo una red R_1 de cuadrados U_1. De manera similar se construye una nueva red R_2 de cuadrados U_2 (ver Figura 3.5) y así sucesivamente se construye una red total *T*, deducida de *C*, formada por la unión de todos los cuadrados anteriores.

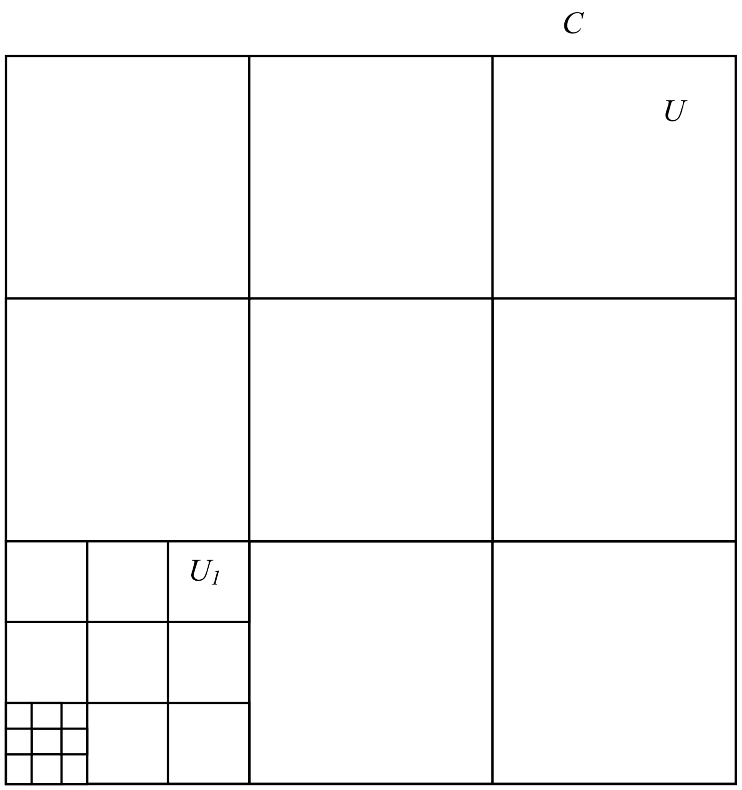


Figura 3.5 – Red de cuadrados

Y por comparación con *T*, Lebesgue define y evalúa el área del dominio *D* en cuestión:

> Contemos cuántos cuadrados U_i hay formados completamente con puntos de *D*; sean ellos n_i. Como un cuadrado U_i contiene 100 cuadrados U_{i+1}, se tendrá entonces
>
> $$n \leq \frac{n_1}{100} \leq \frac{n_2}{100^2} \leq \frac{n_3}{100^3} \cdots$$
>
> *A* todos estos números se les dice cuando más iguales al área de *D*. Contemos cuántos cuadrados U_i hay, algunos de cuyos puntos pertenecen al dominio *D*; sean ellos N_i. Se tiene, evidentemente, $Ni \ \geq ni$, por la misma razón que antes,
>
> $$N \geq \frac{N_1}{100} \geq \frac{N_2}{100^2} \geq \frac{N_3}{100^3} \cdots$$

> Todos estos números, que son a lo menos iguales a los anteriores, se dice que son al menos iguales al área de D (Lebesgue, 1936, pág. 26).

Finalmente el área del dominio D es el número determinado por las dos sucesiones, respecto a la unidad U, cuando $\frac{N_i - n_i}{100^i}$ "tiende a cero cuando i aumenta indefinidamente".

Una vez se ha presentado esta definición de área, que bien podríamos afirmar es una "definición experimental", se procede a generalizarla para cualquier rectángulo:

> De este modo, se ha demostrado que todo rectángulo de lados paralelos a wx y wy posee un área que se ha evaluado y, de la expresión obtenida, resulta que el área es la misma para dos rectángulos deducidos uno del otro por traslación; que el área de un rectángulo con lados paralelos a wx y wy, formado por la unión de dos o tres rectángulos, tiene por área la suma de las áreas de estos otros dos (Lebesgue, 1936, pág. 27).

Después de generalizar estos resultados para cualquier polígono, se llega a la noción general de área, enunciando dos propiedades, de las cuatro, que caracterizan no sólo el área sino toda medida: la medida es invariante bajo translaciones y la medida de la unión de un número finito o numerable de conjuntos disjuntos dos a dos, es la suma de las medias de los conjuntos. De esta manera se parte de una noción experimental para llegar a una definición formal y se va preparando el terreno para luego introducir conceptos más generales y abstractos:

> Las propiedades del área, que acaban de demostrarse, están perfectamente de acuerdo con los modos de utilización del área en la práctica y es precisamente por ello que se puede esperar traducir matemáticamente bien la noción vulgar de área. Empero, si hubiera otras maneras, distintas a las que hemos considerado, de adjudicar a los dominios números que tuvieran también las propiedades que acabamos de demostrar en los parágrafos precedentes para los números que hemos llamado áreas, habría varias traducciones matemáticas posibles de la noción práctica de área y se podría temer no haber escogido la mejor. De manera que aun considerando las matemáticas como una ciencia experimental, es importante demostrar que "las áreas que acabamos de estudiar quedan enteramente determinadas por las condiciones siguientes.
> A cada uno de los dominios de una familia de dominios, de la que forman parte todos los polígonos, se le adjudica un número positivo, al que se le llama su área.
> A un dominio formado por la reunión de otros dos, exteriores uno respecto al otro, se le atribuye como área la suma de las áreas de los otros dos.
> A dos dominios iguales se les atribuyen áreas iguales.
> Adicionalmente, se verá que:
> Estos números áreas están completamente fijos, en forma numérica, cuando se conoce el área atribuida a uno de los dominios (Lebesgue, 1936, pág. 32).

Las tres primeras propiedades constituyen la definición axiomática del área, definición que en nuestro medio generalmente no es enseñada, ni a nivel elemental, ni a nivel superior.

Sin embargo, si se enseñara seguramente los profesores partirían de esta definición bajo la creencia de que la noción matemática de área está claramente establecida, puesto que se considera que los axiomas son el principio de toda teoría, pero hemos visto cómo estos axiomas se pueden presentar como la conclusión de un proceso lógico constructivo.

Vale la pena aclarar que *la medida de las magnitudes* es un texto para formación de maestros y Lebesgue es cuidadoso al afirmar que sólo está proponiendo un experimento. Sin embargo, en los años 90 empezaron a desarrollarse investigaciones didácticas que apuntan a estas formas de exposición constructivas. Al respecto Turégano[214] comenta que actualmente la enseñanza del cálculo no pasa por una fase previa de carácter experimental y que, en consecuencia, los estudiantes deben asimilar al mismo tiempo los fenómenos asociados al infinito, al límite y a los conceptos y teorías formales que los expresan y desarrollan matemáticamente.

Recordemos la forma como Lebesgue ha introducido el concepto de área, allí está involucrando la noción de límite e infinito sin necesidad de formalizarlos. Si antes de introducir el concepto de integral se hiciera experimentar al estudiante esta construcción del concepto de área ya se tendría un camino recorrido y se prepararía al estudiante para pasar paulatinamente del lenguaje geométrico al lenguaje analítico, de lo concreto a lo abstracto. Algo similar puede hacerse con la presentación de la definición de medida, una vez se ha llegado a la definición axiomática del área se puede pasar fácilmente a la definición más general de la medida de conjuntos en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$, para así acceder finalmente a la medida sobre una σ- álgebra.

En (Turégano P. , 1998) se muestran las dificultades que implican para los estudiantes la forma tradicional de enseñar la integral de Riemann, en la cual el área ya no es definida como un objeto geométrico, sino como el resultado de un cálculo según un procedimiento dado. Se propone una reconstrucción curricular y un cambio en el modo de transmisión de los contenidos matemáticos. La hipótesis de trabajo es que los estudiantes pueden aprender (de forma intuitiva) conceptos de cálculo sin el dominio previo o simultáneo de las usuales habilidades algorítmicas, utilizando la visualización a través del computador para dar

[214]Ver (Turégano P. , 1998)

significado al concepto de integral definida y a sus propiedades mediante la idea de área bajo la curva.

Estas investigaciones se fundamentan en el hecho de que los estudios históricos permiten entender a profundidad los conceptos fundamentales de la matemática, en particular el concepto de área y su relación con la integral. Ya hemos visto en nuestro análisis histórico epistemológico cómo se presenta esta relación recíproca y cómo evolucionaron los dos conceptos. "Se pretende extraer de los estudios históricos pistas de reconstrucción del saber como objeto de comunicación en los procesos educativos actuales".[215]

Tal como sucede en nuestro medio, en España hasta 1990 el tratamiento que se le daba a los conceptos de área e integral no permitían establecer una adecuada conexión entre ellos. Esto se atribuye a que no se tenían en cuenta simultáneamente las tres etapas que se consideran clave en el aprendizaje:

> Construir la noción de área como magnitud autónoma.
> Construir una aplicación "medida" entre superficies y números que se puedan extender al máximo de superficies planas.
> Construir el concepto de Integral partiendo del concepto de área (Turégano P. , 1998, pág. 235).

De acuerdo con el resultado de estas investigaciones, se propone que el currículo del cálculo y el enfoque de la integración se diseñen de acuerdo con la génesis histórica. De esta manera se iniciaría con la integración independiente de la derivada y como primera introducción al concepto de límite. Teniendo en cuenta que históricamente el origen del cálculo integral está en el problema del cálculo de áreas planas. Además, el concepto de límite se vislumbra por primera vez en el método de exhaustivo utilizado para resolver dicho problema. Vale la pena aclarar, que no creemos que el problema esté en el orden de los contenidos, y que históricamente no podemos afirmar que la integral anteceda a la derivada. Lo que es cierto, es que la integral como concepto del análisis matemático, si nace independiente del concepto de derivada y Lebesgue continúa en esta línea de desarrollo.

El modelo que se propone, para introducir la integral definida, está basado precisamente en la definición geométrica de integral dada por Lebesgue:

---

[215]Filloy (1981) citado por (Turégano P. , 1998)

> Lo que hemos hecho ha sido traducirlo a un modelo asequible a los estudiantes de bachillerato para que puedan entender que la noción de *integral* va asociada a la idea de medir una región, y les hemos proporcionado los medios para que la puedan medir sin recurrir al cálculo de primitivas. En definitiva, hemos retomado la primera imagen del concepto de integral, con la enorme ventaja que hoy disponemos del ordenador para visualizar y realizar los tediosos pero necesarios cálculos.
> La idea es presentar la integral como una continuación de la noción de *área,* que los estudiantes conocen desde los primeros días de la escuela. Lo que empezó para los estudiantes de educación primaria con la medición de áreas de figuras en general, rectilínea o curvilíneamente limitadas, debe continuar en secundaria con el estudio de clases muy especiales: a saber, aquellas que están limitadas por una curva sólo por arriba o por abajo (Turégano P. , 1998, pág. 236).

Por otra parte, el modelo de enseñanza propuesto por Lebesgue está íntimamente relacionado con su método de investigación, donde es evidente la estrecha relación entre lo geométrico y lo analítico. Esto nos muestra el importante papel que juegan los estudios históricos-epistemológicos en la enseñanza, pues el poder caracterizar el pensamiento implícito en el método de investigación de quien construye tal o cual teoría matemática, nos puede dar luces sobre la forma de enseñarla. Para el caso de la integral definida, el identificar el paso de medir a integrar, cómo lo muestra Lebesgue en su tesis doctoral, nos ayudará a conectar lo experimental con lo formal.

Dado que los procesos de deconstrucción no se establecen de forma inmediata, se requiere de cierto entrenamiento por parte de los docentes. En este sentido no se pretende que sean desarrollos en el aula de clase. Tampoco estamos argumentando que el alumno deba conocer la génesis histórica de los conceptos. Es el profesor quien debe conocer los análisis históricos-epistemológicos, realizados por los especialistas, de tal manera que le permita, por un lado, obtener un conocimiento más allá de la manipulación técnica y por otro, obtener más herramientas, además del texto guía, para diseñar su clase de tal manera que le permita pasar de lo experimental a lo axiomático, conectar lo intuitivo con lo formal:

> No creo que sea mucho exigir que los futuros profesores hayan adquirido una habilidad técnica y que sepan aprovechar manuales; haría falta haberles demandado reflexionar largamente acerca de lo que enseñarán, con un espíritu de crítica lógica y pedagógica (Lebesgue, 1936, pág. 139).

La génesis histórica de los conceptos, permite identificar los nexos entre las nociones experimentales y las definiciones formales. Nexos que podrían utilizarse en el diseño de estrategias didácticas, tal como lo hemos visto para el caso del concepto de área y el de la integral. En (Bronislaw, 2001), por ejemplo, se muestra como las diferentes concepciones o "intuiciones" de área que se han presentado a lo largo de la historia coinciden con las concepciones o "intuiciones" de área que poseen los estudiantes, incluso después de que han recibido alguna instrucción sobre el tema. Por tanto es aconsejable tener conocimiento de esas intuiciones, o concepciones previas, para usarlas en el diseño de las clases; ya sea para partir de ellas y conducirlos a una conceptualización formal o, por el contrario, para cortar con ellas, ya que en determinados momentos pueden convertirse en un obstáculo para acceder a conceptos más generales y abstractos, tal como ha sucedido históricamente.

En relación al curso de análisis real, dirigido a estudiantes de matemáticas, es importante observar la mala lectura que se ha hecho del análisis de Cauchy, que confunde la exposición del análisis matemático con su esencia, lo que conduce a que muchos profesores privilegien un rigor que desecha todo referente geométrico, ignorando que el análisis está fundado sobre la recta geométrica. No reclamamos para el análisis matemático una presentación geométrica, sino utilizar lo geométrico como un primer acercamiento para acercarse a las nociones propias del análisis, e ir acercándose paulatinamente al lenguaje analítico, tal como sucedió históricamente. Esto preparará al estudiante para acceder a conceptos más generales y abstractos, al mismo tiempo que va desligándose de los referentes geométricos, pues estos en determinado momento estos referentes también pueden presentarse como obstáculo para acceder a ciertas abstracciones.

Con respecto a la enseñanza de la teoría de integración para niveles superiores, sería interesante estudiar la posibilidad de organizar la enseñanza de la integral de Lebesgue, tomando como referencia los umbrales que hemos establecido arriba, de tal manera que se pueda justificar el por qué de las definiciones y axiomas. Explicar el por qué la integral de Lebesgue permite resolver los problemas que no resolvía la integral de Riemann y por qué es necesario definir la integral de Lebesgue en términos del concepto de medida. La respuesta a éstos y otros cuestionamientos las podemos encontrar en la historia, lo que proporciona argumentos para determinar la manera más apropiada de introducir los conceptos. Para el caso de la integral de Lebesgue ¿es apropiado empezar con la definición de sigma álgebra? Tal como se hace en los textos modernos de teoría de la integración, ó ¿es más apropiado ir del problema geométrico hacia la definición analítica de integral? tal como lo hizo Lebesgue.

En cuanto a la teoría de la medida, la siguiente es la presentación que se hace en (Restrepo, 1997), que es un texto muy usado en nuestra región: Se presenta el problema del cálculo de área de una figura plana y se muestra la necesidad de una definición de área que satisfaga la propiedad de la aditividad numerable, y que se pueda generalizar a cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Para dar respuesta a este problema se hace necesaria la introducción de una nueva estructura, una sigma álgebra. Se introduce el concepto de conjuntos borelianos en $\mathbb{R}^n$, para luego pasar al concepto de medidas de Radon en $\mathbb{R}^n$. Luego se define la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2 y\ \mathbb{R}^3$, como caso particular de una medida de Radon.

Obsérvese que en esta presentación, a pesar de que inicia llamando la atención sobre la la medida de magnitudes geométricas, inmediatamente se pasa a la definición abstracta de sigma álgebra, esto rompe la conexión inicial del concepto de medida intuitiva con un concepto más general, por lo que la definición de medidas de Radon aparecerá como algo artificial y vacío de todo significado para el estudiante. Mientras que si se presenta inicialmente el área como una medida particular, se muestra geométricamente el significado de la definición axiomática del área, luego se pasa a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2 y\ \mathbb{R}^3$, luego se justifica la necesidad de una medida más general y el por qué esa nueva definición requiere de la introducción de una nueva estructura. Así se pasará de lo geométrico a lo analítico, de lo particular a lo general y de lo concreto a lo abstracto, facilitando el proceso cognitivo del estudiante, que además es muy similar al desarrollo histórico del concepto de medida.

Por último veamos un ejemplo de cómo se presenta actualmente la teoría de integración de Lebesgue, en contraste con su desarrollo histórico:

- Definiciones de álgebra, σ-álgebra, espacio de medida y propiedades
- Definición de función medible, función característica, función simple y propiedades.
- Integral de función simple, y función positiva.
- Teoremas de convergencia (monótona y dominada) y lema técnico.
- Consecuencias de los teoremas de convergencia.

Espacios de medida: se generaliza la definición de espacio de medida y se enuncia el teorema de Carathéodory.

Medidas producto: se generaliza el concepto de integral a varias variables.

Teorema de Fubini: se enuncia y demuestra el teorema de Fubini para la integral de Lebesgue.

Medidas y derivadas: Finalmente se demuestra el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue y el teorema de Radom Nikodym.

Mientras que el orden histórico de constitución de la teoría de Lebesgue es el siguiente:

- 1901: Primera definición de medida, conjunto medible, función medible y función integrable, construcción de la "forma especial" de integrar, ejemplo por el cual se muestra que la integral de Riemann está dentro de la integral de Lebesgue.
- 1902: Desarrollo de las ideas plasmadas en 1901, organización de las mismas. Nuevos teoremas, Teorema de la convergencia dominada y consecuencias, primer intento de demostrar el TFC, primer intento de demostrar el teorema de Fubini, Construcción de las funciones meseta.
- 1906: Aporte de Fatou a la teoría de Lebesgue, se consigue probar el Teorema de la Convergencia Monótona.
- 1908: Aportes de Fubini, demostración del Teorema de Fubini con ayuda de los espacios de medida de R^2 de Lebesgue.
- 1910: Creación de la medida de Lebesgue-Stieltjes, inicio de la Probabilidad actual.
- 1913: Medidas de Radon.
- 1918: Demostración del Teorema Fundamental del Cálculo.

La relación entre este orden de exposición moderno de la teoría y su desarrollo histórico, hace parte de la transposición didáctica y debe ser objeto de investigación, además de las diferencias conceptuales que seguramente existirán. El profesor debería conocer este tipo de estudios histórico–epistemológicos para tener criterios que le permitan cuestionar la teoría tal como aparece en los textos, y poder así ser parte activa de la transposición al interior del sistema educativo.

Bibliografía

Alagia. (2005). *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática.* Argentina: Libros del Zorzal.

Andersen, K. (1985). Cavalieri's Method of Indivisibles. *Archive for History of Exact Sciences , 31* (4), 291-367.

Arboleda, L. C. (2002). El problema didáctico y filosófico de la desaxiomatización de las matemáticas. *Revista colombiana de filosofía de la ciencia , 3* (6-7), 59-84.

Arboleda, L. y. (2003). Educación y Formación del Pensamiento Científico. En *Educación matemática, Pedagogía y Didáctica.* Cali: Universidad del Valle.

Arqímedes. (1970). Medida del Círculo . En F. Vera, *Científicos Griegos* (Vol. II, págs. 94-99). Madrid: Aguilar.

Arquímedes. (1970). De la cuadratura de la parábola. En F. Vera, *Científicos Griegos* (Vol. II, págs. 220-237). Madrid: Aguilar.

Arquímedes. (1970). El método. En F. Vera, *Científicos Griegos* (Vol. II, págs. 266-297). Madrid: Aguilar.

Azcarate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del análisis matemático. *Boletín de la Asociación matemática de Venezuela , X* (2), 135-149.

Bachelard, G. (1938). *La Formation de l'esprit scientifique. Traducción al español: la formación del espíritu científico.* . México 2000: Siglo XXI editores.

Borel, É. (1898). *Leçons sur la Théorie des Fonctions.* París: Gauthier-Villars et Fils.

Bosch, M. y. (2006). 25 años de Transposición Didáctica. En L. Ruiz, & A. y. Estepa, *Soceidad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico.* (págs. 385-406). Universidad de Jaen.

Bronislaw, C. (2001). Conceptions of Area: In Students and in History. *The College Mathematics Journal , 32* (2), 99-109.

Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática , 12* (1), 5-38.

Brunschvicg, L. (1929). *Lés etapes de la philosophie mathématique. Traducción al español: Las etapas de la filosofía matemática.* (C. R. De Sadoski, Trad.) Buenos Aires, 1945, Argentina: Lautaro.

Calvo, C. (2001). *Sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral. Tesis.* Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Cauchy, A. (1994). *Curso de Análisis. Traducción el español: Carlos Alvarez.* México: Servicos Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Cavaillès, J. (1938). *Méthode axiomatique et formalisme. Traducción al español: Método Axiomático y Formalismo.* (C. y. Traducido por Alvarez, Ed.) México D.F: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigne. Traducción al español: La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: AIQUE grupo editor.

D'Amore, B. y. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la Teoría Antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. , 10* (2), 191-218.

Darboux, G. (1875). Mémoire sur les fonctions discontinues. *Annales de L'École Normale* (4), 57-112.

Dauben, J. W. (1979). *George Cantor His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* New Jersey: Princeton University Press.

De la Fuente, L. y. (2003). Bajos fondos del saber. La arqueología como método en Michel Foucault. *Revista Litorales , 2* (2).

Dhombres, J., & Licnérowicz, A. (1978). *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire.* Nantes: CEDIC/Fernand Nathan.

Diaz, M. (1990). Pedagogía, Discurso y Poder. En *Pedagogía, Discurso y Poder* (págs. 39-69). Bogotá: CORPODRIC.

Dini, U. (1878). *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* http://books.google.com.

Dirichlet, L. (1829). Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. *Journal Crelle* , 157-169.

Dorier, J. (2000). Recherche en Histoire et Didactique des Mathématique sur l'Algèbre Linéaire - Perspectives théorique sur leurs interactions. *http://www.leibniz.imag.fr/lesCahiers* .

Duoandikoetxea, J. (2007). 200 años de convergencia de las series de Fourier. *La Gaceta de la RSME , 10* (3), 651-658.

Edwards, C. (1982). *The Historical Development of the Calculues.* New York: Springer Verlag.

Euclides. (1991). *Elementos.* (M. L. Puertas, Trad.) Madrid: Gredos.

Euclides. (1970). Elementos de Geometría. En F. Vera, *Científicos griegos* (Vol. I, págs. 689-959). Madrid: Aguilar.

Euclides. (1991). *Elementos. Versión española de María Luisa Puertas.* Madrid: Gredos.

Félix, L. (1974). *Message d'un mathématicien: Henri Lebesgue.* Paris: Libraire Scientifique et tecnique Albert Blanchard.

Ferreirós, J. (1991). *El Nacimiento de la Teorìa de Conjuntos 1854-1908.* Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

Foucault, M. (1969). *L'archeologie du savoir. Traducción al español: La arqueología del saber.* España: Editores siglo XXI.

Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur.* París, 1989: Jaques Gabay Editions.

Frechet, M. (1958). *Les Mathématiques et le concret. Título en español: Las matemáticas y lo concreto.* (G. Machado, Trad.) Mexico: Universidad Nacional Autónoma de México.

Gandon, S., & Perrin, Y. (2009). Le probléme de la définition de l'aire d'une surface gauche: Peano et Lebesgue. *Archive for history of exact sciences , 63* (6), 665-704.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón del análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques , 13* (3), 295-332.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matmáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques , 18*, 7-34.

Gascón, J. (2000). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* .

Giusti, E. (1999). *Ipotesi sulla natura degli oggeti matematici. Taducción al francés:La naissance des objets mathématiques.* París. 2000: Ellipsese Édition marketing.

Godino, J. (2008). ¿Se puede aplicar el enfoque ontosemiótico en las diversas Ciencias de la Educación? Cali: Doctorado Interinsticuional en Educación. Universidad del Valle.

Godino, J. B. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *http://www.ugr.es/local/jgodino.*

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des mathématiques , 14* (3), 325-355.

Gonzales, P. M. (II - 1995). Las Técnicas del cálculo infinitesimal: Fermat, Wallis y Roberval. *Seminario Orotava de Historia de la Ciencia* (págs. 405-437). Canarias: Gobierno de Canarias . Consejería de Educación http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/fundoro/web_fcohc/005_publicaciones/seminario/infinito.htm.

Grattan-Guinness, I. (1980). *From the Calculus to Set Theory,1630-1910. An Introductory History. Traducción al Eespañol:Del cálculo a la teoría de conjuntos,1630-1910. Una introducción histórica.* (M. Mariano, Trad.) Madrid 1984: Alianza Editorial.

Hankel. (1870). Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. *Mathematische Annalen* , 63-112.

Hawkins, T. (1979). *Lebesgue's theory of integration. Its origins and development.* (Segunda edicón ed.). New York: Chelsea Publishing company.

Jordan, C. (1882). *Cours D'Analyse* (Tercera edición ed., Vol. I). Paris: Èditions Jacques Gabay.

Jordan, C. (1892). Remarques sur les intégrales définies. *J. Math. pures appl. , 4* (8), 69-99.

Jordan, C. (1892). Remarques sur les intégrales définies. *Journal de Mathematsche* , 69-99.

Kitcher, P. (1981). Mathematical Rigor-Who needs it? *Noûs.htpp://www.jstor.org/stable/1312567* , 469-493.

Klein, M. (1972). *El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días* (Vol. I). Madrid, 1994: Alianza Editoria.

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in Mathematics: a historical perspective. *The Mathematics Magazine , 64* (5), 291-314.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología. Alianza, Madrid, 1981.* Madrid: Alianza .

Lakatos, I. (1983). *La metodología de los Programas de Investigación Científica.* Madird: Alianza .

Le Roy, E. (1960). *La pensée mathématique pure.* París: Presse universitaires de France.

Lebesgue, H. (1899). Sur une generalisation de l'aire d'une surface. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences* , 870-873.

Lebesgue, H. (1902). *Integrale, Longeur, aire.* Universidad de Nancy. Milán: Annali di Matematica Pura et Aplicatta .

Lebesgue, H. (1936). *La mesure des grandeurs. Traducción al español: La medida de las magnitudes.* (G. García, Trad.) México: Editorial Limusa, 1995.

Lebesgue, H. (1904). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* París: Gauthier-Villars.

Lebesgue, H. (1922). *Notice sur les travaux scientifiques.* Tolouse: Imprimiere et libraire Edouard Privat.

Lebesgue, H. (1908). Sur la définition de l'aire des surfaces. *L'Enseignement Mathématique* , 212-220.

Lebesgue, H. (avril-juin de 1927). Sur le Développement de la notion d'integrale. *Revue de Métaphysique et de Morale, T. 34, No. 2 (Avril-Juin 1927), pp. 149-167* , 149-167.

Lebesgue, H. (1903). Sur le problème des aires. *Bulletin de la S.M.F* (31), 197-203.

Lebesgue, H. (1905). Sur le problème des aires. *Bulletin de la S.M.F* (33), 273-274.

Lebesgue, H. (1901). Sur une generalisation de l'intégrale définie. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences* ¶ , 1025-1028.

Leibniz/Newton. (1977). *El Cálculo Infinitesimal. Origen y polémica.* (J. Babini, Ed.) Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Levi, B. (2000). *Leyendo a Euclides.* Argentina: Libros del Zorsal.

Lipschitz, R. (1864). recherches sur le développement en séries trigonométriques des fonctions arbitraires d'une variable et principalement de celles qui, dans un intervalle fini, admettent une infinité de maxima et de mínima. *Journal de Crelle , 63*, 282-295.

Lizcano, E. (1992). De Foucault a Serres. Notas para una arquología de las Matemáticas. *Revista de teoría, historia y fundamentos de la ciencia* , 499-507.

Michel, A. (1992). *Constitution de la théorie moderne de lìntégration.* Paris: Libraire Philosophique J. Vrin.

Montesinos, J. (1992). Arquímedes y la medida del círculo. *Ciencia y Cultura en la Grecia Antigua, Clásica y Helenística* , 339-352.

Newton, I. (2003). *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden. Compilación original (1711) de William Jones.* (A. J. Durán, Ed.) Sevilla: Real Sociedad Matemática Española.

Peano, G. (1887). *Applicazione geometriche del calcolo infinitesimale.* Torino: http://www.archive.org/details/applicazionigeo01peangoog.

Pier, J. (1996). *Histoire de l'intégration. Vingt cinq siecles de mathematiques.* París: Masson.

Recalde, L. (2010). *La teoría de funciones de Baire. La constitución de lo discontinuo como objeto matemático.* Cali: Programa Editorial Universidad del Valle.

Recalde, L. (2007). Las raices históricas de la integral de Lebesgue. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria , XV* (2), 103-127.

Recalde, L. (2011). *Lecciones de Historia.* Cali: Universidad del Valle.

Recalde, L. (2010). Los filósofos presocráticos: La naturalez como fuente de experiencia abstracta. *Revista de Ciencias , 14*, 87-99.

Restrepo, G. (1997). *Análisis en R^n.* Cali: Editorial Universidad del Valle.

Riemann. (2000). *Riemanniana Selecta.* (J. M. Ferreirós, Ed.) Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Robles, J. (1993). *Las ideas matemáticas de George Berkeley.* México D. F.: Universidad Nacional Autónoma de México.

Serres, M. (1993). *Les origines de la géométrie. Traducción al español: Los orígenes de la Geometría.* México,1996: Siglo XXI editores.

Stedall, J. (2004). *The arithmetic of infinitesimales. John Wallis 1656.* New York: Springer-Verlag.

Turégano, P. (1994). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal. Tesis doctoral* . Universidad de Valencia.

Turégano, P. (1993). *De la noción de área a su definición: investigación histórica sobre las técnicas métodos y conceptos que condujeron a la teoría de la medida.* Universidad de Castilla - La Mancha.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto Educativo. *Enseñanza de las ciencias , 16* (2), 233-249.

Turégano, P. (1992). Una alternativa a la integral de Riemann. Nº. 6, 1992. Pp 227-235. *revista de la Escuela Universitaria de Magisterio de Albacete* (6), 227-235.

Vasco, C. (1990). Algunas reflexiones sobre la pedagogía y la didáctica. En *Pedagogía, Discurso y Poder* (págs. 107-122). Bogotá: CORPRODIC.

Vega, L. (1999). Hacer ver, hacer saber (el rigor informal de las pruebas matemáticas clásicas). *www.euclides.org/menu/articles/article3006.htm.*

Waldegg, G. (1982). *Historia del Cálculo.* México: CINVESTAV IPN.