CONSTRUCCIÓN DE UNA SECUENCIA DE TAREAS A PARTIR DE UNA FENOMENOLOGÍA DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

JORGE ALBERTO COBA NIÑO.

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN.

PROYECTO CURRICULAR MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ D.C.

2017

CONSTRUCCIÓN DE UNA SECUENCIA DE TAREAS A PARTIR DE UNA FENOMENOLOGÍA DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

AUTOR:

JORGE ALBERTO COBA NIÑO

PROYECTO DE PROFUNDIZACIÓN

DIRECTOR:

JAIME HUMBERTO ROMERO CRUZ

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

PROYECTO CURRICULAR MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BOGOTÁ D.C.

2017

AGRADECIMIENTOS.

A mis padres y familiares por sus grandes esfuerzos, para que día a día mejore como persona en todos los aspectos de mi vida, tanto profesional como personal. Por su motivación, apoyo y su gran amor que me permitió alcanzar uno de mis más grandes logros.

A mis amigos que me brindaron su apoyo en los momentos de mayor pesimismo, que con su compañía y sus palabras, fueron la motivación que me guio a lo largo de la elaboración de este trabajo.

A mi director de tesis, Jaime Romero que me brindo las herramientas y los conocimientos para la elaboración de este trabajo de grado, que con su dedicación y su sabiduría me permitió adquirir innumerables enseñanzas profesionales, pero a su vez, me brindo consejos que me hicieron crecer como persona, convirtiéndose en mi amigo y mi gran maestro que siempre recordare con gratitud y mucho recogimiento.

Finalmente, a los profesores que integran el grupo MESCUD, quienes me brindaron su conocimiento en mi proceso de formación permitiéndome alcanzar este gran logro.

TABLA DE CONTENIDO.

1. RESUMEN.

El concepto de función que se está impartiendo en las instituciones educativas es estático (Posada & Villa 2006), perdiendo características importantes generando vacíos conceptuales respecto al objeto matemático haciendo que el estudiante no logre resaltar la relación que existe entre las matemáticas y su diario vivir. Por lo tanto, se propone una secuencia de tareas con base a la educación matemática realista y la fenomenología didáctica del concepto de función de Freudenthal (1983), rescatando características como la dinamicidad, que le puede ayudar al educando a comprender o dar una solución a diferentes situaciones de la vida cotidiana.

Esta secuencia de tareas se desarrolló en un ambiente de aprendizaje configurado por cuatro dimensiones que permitió la constitución del objeto mental a partir de las instrucciones y planteamientos desarrollados en estas en estudiantes de grado 10°, permitiendo que los grupos pasaran por la ruta de aprendizaje alcanzando los propósitos de la secuencia.

PALABRAS CLAVE:

Experimento de enseñanza, fenomenología didáctica, matematización, dependencia de variables, función.

ABSTRACT.

The concept of function that is being imparted in educational institutions is static (Posada & Villa 2006), losing important characteristics generating conceptual vacuums with respect to the mathematical object, causing the student to fail to highlight the relationship between mathematics and daily life. Therefore, a sequence of tasks based on realistic mathematical education and the didactic phenomenology of Freudenthal's (1983) concept of function is proposed, rescuing characteristics such as dynamicity, which can help the student to understand or give a solution to Different situations of daily life.

This sequence of tasks was developed in a learning environment configured by four dimensions that allowed the constitution of the mental object from the instructions and approaches developed in these in 10th grade students, allowing groups to pass through the learning path reaching the purposes of the sequence.

KEYWORDS:

Teaching experiment, didactic phenomenology, mathematization, dependence of variables, function.

SUMÁRIO.

O conceito de função a ser ensinado nas instituições de ensino é estático (Posada & Villa 2006), perdendo características importantes geradoras de lacunas conceituais sobre o objeto matemático fazendo com que o aluno não destacar a relação entre a matemática ea vida diária. Portanto, uma sequência de tarefas com base na educação realista matemática e da fenomenologia didática do conceito de função Freudenthal (1983) propõe, características resgatando como dinamismo, o que pode ajudar os alunos a compreender ou dar uma solução para diferentes situações da vida diária.

Esta sequência de tarefas foi desenvolvido em um ambiente de aprendizagem moldada por quatro dimensões que permitiram a constituição do objeto mental, a partir das instruções e desenvolveu abordagens para estes no grau estudantes 10°, grupos que permitem percorrer o caminho de aprendizagem alcançar sequência fins

PALAVRAS CHAVE:

Ensino experiência, fenomenologia, matematização, variáveis de dependência, função.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

A partir de mi experiencia y trabajo sobre la enseñanza - aprendizaje del objeto matemático de función, me he percatado que se tiende a presentarlo en el aula como un objeto estático fuertemente vinculado a procesos de tabulación de puntos y procesos de transformación de expresiones algebraicas. Todo esto favorece que se le tematice como un objeto reducible a algoritmos de cálculo, sin reconocer propiedades y relaciones dinámicas capturables desde visiones más sintéticas centradas en la determinación de formas globales de variación que también permiten pasar a relaciones entre los elementos de los conjuntos que se ponen en relación (Duval, 2004; Bonilla, Romero, Narváez, & Bohórquez, 2015). La forma de actuar de los estudiantes, en cuanto al uso del objeto matemático se hace repetitiva y se limita a un uso dentro del aula de clase, sin hacer ni lograr una relación entre las situaciones problema y los objetos matemáticos. Estas observaciones coinciden con las obtenidas en investigaciones como Calvo (2008).

Estas acciones no favorecen la enseñanza, apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, provocando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes de modo que los resultados y procesos en distintas ciencias pueden verse afectados por una inadecuada conceptualización y aplicación del concepto (López & Sosa, 2002).

El profesor está promoviendo un conocimiento estático e inmutable al concepto de función; sólo se habla de una intuición del concepto de función de las tantas que existen en el campo matemático (Posada & Villa 2006). El concepto escolar de función la define como una relación entre un conjunto dado de elementos x y otro conjunto de elementos y de forma que a cada elemento x le corresponde un único elemento y.

Se hace necesario resignificar en las prácticas escolares el proceso de construcción del concepto de función, rescatando características como la cinemática de la variable, la cual originalmente significaba algo que realmente varía, en el campo físico, social o mental, pero también en el mundo matemático (Freudenthal. 1983).Esta idea de variable contrasta con el concepto actual, la cual es usada como un nombre para referenciar un tipo de objetos, lo que Freudenthal (1983) denomina nombres polivalentes.

Las matemáticas pueden ser pensadas como actividad humana, la cual debe ser experimentada por el estudiante y debe ser reinventada a partir de sus procesos e interacción con las matemáticas. Como propone Bressan (2005) rescatando una idea de Freudenthal "Las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma."

Bressan (2005) expresa que para Freudenthal la matemática parte de un contexto real, entonces el aprendizaje matemático debe originarse también dentro de una misma realidad, esto no sólo significa mantener esta disciplina conectada al mundo real sino también a lo realizable o imaginable, para que el mismo estudiante dentro de ese contexto, pueda comenzar a reinventar las matemáticas y pueda generar sus propios conceptos y procesos sobre las matemáticas. Para ello, se propone diseñar una secuencia de tareas, como elemento de un ambiente de aprendizaje, que promueva superar las cuestiones no deseables mencionadas antes; permitiendo al estudiante realizar procesos de matematización, rompiendo esquemas usuales vistos en el aula de clase en relación con los procesos de enseñanza – aprendizaje del concepto de función.

3. OBJETIVOS.

3.1 OBJETIVO GENERAL.

- Diseñar, proponer y ajustar una secuencia de tareas basadas en una fenomenología didáctica que promueva la constitución del concepto de función en estudiantes de grado décimo.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Identificar fenómenos que organizan el objeto mental dependencia entre variables.
- Describir la incidencia de la secuencia de tareas en un grupo de estudiantes de grado décimo, resaltando dificultades y su trámite en el aula.
- Ajustar la secuencia de tareas a partir de los datos obtenidos de su puesta en el aula, verificando la constitución del objeto mental.

4. MARCO METODOLÓGICO.

Esta investigación busca analizar procesos de matematización relacionados con el objeto matemático *función* a partir de una secuencia de tareas basadas en una fenomenología didáctica (Freudenthal, 1983), en alumnos de grado décimo de educación media. Como la investigación está centrada en la práctica del grupo de trabajo COMANDO 17, uno de los ocho grupos conformados en el aula durante la puesta en marcha de la secuencia de tareas, se recurre a la investigación cualitativa. Este tipo de investigación fue escogida ya que permite comprender fenómenos sociales, como lo son los educativos (Yuni & Urbano, 2002).

Sánchez y Revuelta (2005), conciben la investigación cualitativa, como una "*estrategia de investigación fundamentada en una descripción rigurosa de un evento captando la realidad que posibilite un análisis, que dé lugar a la obtención de un conocimiento válido con suficiente potencia explicativ*a." Por lo tanto, se hace indispensable este tipo de investigación para el proyecto, ya que para determinar el alcance de los objetivos se debe hacer un análisis riguroso de los diálogos y acciones que se generan en el grupo de trabajo a analizar determinando la efectividad de la secuencia de tareas implementada.

Uno de los instrumentos de la investigación cualitativa, es la transcripción. Sandoval (2002) afirma su utilidad para el almacenamiento de información. Existen diferentes tipos de transcripción, que para eventos prácticos de la investigación se eligió la transcripción literal que se caracteriza por reproducir todos los sonidos, palabras inacabadas, expresiones como "mmm", palabras mal pronunciadas, etc. La importancia de recoger estas expresiones es que permite a los hablantes dar un sentido tanto a la conversación como a los temas sobre los que tratan (Vygotski, 2000). Al dejar de lado estas expresiones, no se reproduciría adecuadamente las interacciones de los integrantes del grupo de trabajo, careciendo de sentido e interpretación la transcripción (Coba, Laverde & Valenzuela, 2013).

Para realizar este trabajo, hubo necesidad de recurrir a la representación e interpretación de gestos y otros modos de comunicación (Candela, 1999) pues son formas de generación de sentido entre hablantes (Armstrong & Wilcox, 2005). Estas formas de interpretación, aparecen en las transcripciones mediante el uso del corchete [].

Para elaborar la transcripción se acudió a (1) observación del grupo COMANDO 17 (2) Revisión del cuaderno de cada integrante del grupo (3) elaboración de apuntes propios del investigador. Para generar los datos, se tuvo en cuenta la triangulación de tres fuentes de registro de la información: a) grabaciones de audio y video, b) toma de apuntes propios y c) cuaderno del estudiante donde realizaba el trabajo en el grupo (cuaderno del resolutor).

La recolección de la información, se llevó a cabo en un grado décimo en el espacio de formación correspondiente al área de matemáticas una vez por semana durante un bimestre, contando con un total de 10 clases con una duración de noventa minutos cada clase. La captura de video se realizó durante todo el tiempo de desarrollo del espacio de formación y la revisión del cuaderno de cada integrante del grupo y los apuntes del investigador se realizaron al finalizar cada sesión de clase.

Como elemento metodológico, para dar cuenta de los objetivos de investigación, se desarrolló un experimento de enseñanza, ya que este permite realizar un diseño de la secuencia de tareas partiendo de las fases contempladas en el mismo desarrollo. Uno de los requerimientos en un experimento de enseñanza es construir una teoría local de instrucción (Gravemmeijer & Cobb, 2013) a partir de la vivencia de estudiantes en el ambiente de aprendizaje.

La metodología de experimento de enseñanza requiere un grupo investigativo, en este caso, es el grupo MESCUD[1]. El grupo de investigación estuvo presente en cada una de las fases del experimento de enseñanza, además de realizar diferentes actividades entre la que resaltan las del diseño de la secuencia de tareas y participación en los seminarios de formación en investigación y sesiones de investigación. Por una parte, las fases del experimento de enseñanza fueron 1) la preparación para el experimento, 2) la experimentación en el aula, y 3) el análisis retrospectivo (Gravemmeijer & Cobb, 2013). Por otra, los seminarios consistieron en: (1) Aprehensión de aspectos generales sobre la educación matemática realista (Bressan, 2005) y Fenomenología didáctica (Freudenthal, 1983), (2) Discusión de aspectos que conforman el ambiente de aprendizaje. (3) Construcción de la secuencia de tareas. (4) Toma de conciencia del investigador acerca del objeto matemático a trabajar. (5) Retroalimentaciones al proceso de la investigación y

[1] EL grupo MESCUD es reconocido institucionalmente en la Universidad Distrital desde el año 1994. Actualmente participa en la dirección de cursos y dirección de tesis en el Énfasis en Educación matemática de la maestría. El grupo MESCUD está conformado actualmente por los profesores Pedro Javier Rojas, Martha Bonilla, Jaime H. Romero, Deissy Narváez, Oriol Mora, Ángel Bohórquez, Bruno D'Amore Martha Fandiño y Arturo Sanjuan

toma de decisiones frente a la misma investigación; el periodo de los seminarios fue semanal con una duración de dos horas.

4.1 EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA.

El experimento de enseñanza presenta tres fases de realización, que son 1) la preparación para el experimento, 2) la experimentación en el aula, y 3) el análisis retrospectivo (Gravemmeijer & Cobb, 2013).

4.1.1 PREPARACIÓN PARA EL EXPERIMENTO

Para la fase de la preparación del experimento de enseñanza, se tiene que tener claro los puntos finales a los cuales apuntan la secuencia de tareas, los cuales están establecidos de la siguiente manera: (a) Reconocer la función como una dependencia especial entre variables, identificando la variable dependiente e independiente en contextos reales. (b) Reconocer la variable como algo que cambia en el contexto real, imaginativo y cotidiano del estudiante (Freudenthal, 1983).

Otro de los aspectos a tener en cuenta para la primera fase, son los puntos de partida, los cuales se van a establecer dentro de la secuencia de tareas diseñadas, al presentar a los estudiantes con la tarea 1 que permitirá evidenciar los conceptos previos que pone en juego para la solución de dicha situación.

Dentro de esta fase, el experimento propone una ruta de aprendizaje y traza una ruta de aprendizaje. Para esta investigación se vinculan cuatro dimensiones: (1) las estrategias del experimento de enseñanza: problematización, reflexión, comprensión y automatización; (2) niveles de matematización: Situacional, referencial, general y formal; (3) comunidades de práctica y (4) el objeto matemático función, tomado según la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983). A su vez, estas cuatro dimensiones con aquellas que conforman el ambiente de aprendizaje en donde se desarrollará la secuencia de tareas.

Para el diseño de la secuencia de tareas se han realizado las siguientes acciones: (1) Estudio acerca de la educación matemática realista (2) Revisión de la fenomenología didáctica del concepto de función, estableciendo fenómenos que pueden ser organizados por el objeto mental dependencia entre variables, que a su vez, es organizado por el concepto de función. (3) Selección del fenómeno a matematizar, exigiéndole ser básico para la secuencia de tareas. (4) Diseño de la secuencia de las tareas a proponer.

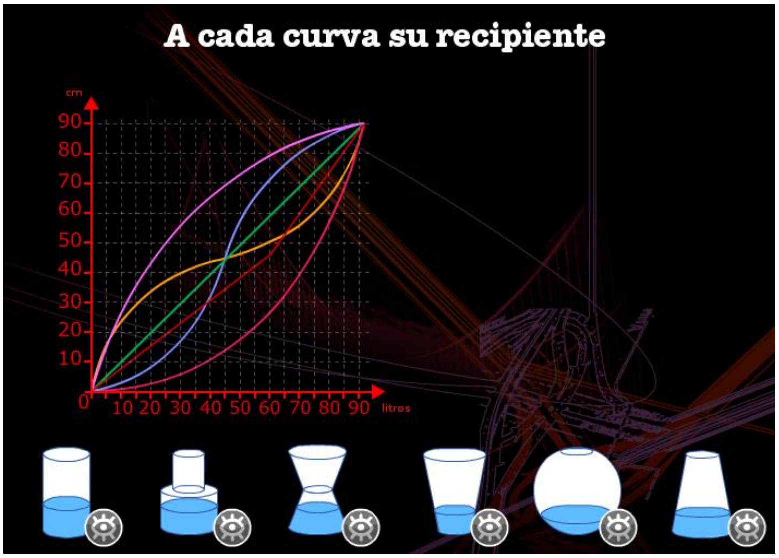
Para el diseño de la secuencia de tareas, se relacionaron las tres primeras dimensiones con la cuarta, teniendo en cuenta que la educación matemática realista pretende involucrar al estudiante dentro de su actividad matemática generando algún objeto mental de un concepto matemático por medio de situaciones problemas reales, dándole así, sentido al trabajo que el mismo estudiante realiza. Por lo tanto, la secuencia de tareas debe partir de una situación que es real para el estudiante, para que el mismo estudiante lo asocie a sus acciones del diario vivir, dándole el sentido que corresponde a la actividad.

La adquisición del concepto de función se logra cuando se produce o se reproduce una dependencia entre variables, a dicha dependencia se le puede dar el nombre de objeto mental (Freudenthal, 1983). Por lo tanto, para lograr el concepto de función en el estudiante, es importante primero considerar la constitución de objeto mental de variable y la dependencia entre variables.

A su vez, los fenómenos que son organizados por el objeto mental son aquellos que presentan cambios o variaciones, por ejemplo, la caída de un cuerpo, presentando la dependencia entre el tiempo y la distancia, los cambios de temperatura con la dependencia entre el tiempo y los grados centígrados, aceleración de un auto presentando dependencia entre velocidad y tiempo.

4.1.1.1 DISEÑO DE LA SECUENCIA DE TAREAS.

Para el diseño de la secuencia de tareas, se realizó una revisión de los fenómenos que son organizados por el objeto mental, encontrando en la página de internet experiencingmaths.org el fenómeno llamado “Curvas y volúmenes” (gráfica 1) que brinda instrumentos para profundizar matemáticamente, para profundizar en la matematización, de la relación entre gráficas cartesianas con el modo en que se llenan unos recipientes dados. Hay que establecer las variables y su dependencia cualitativa, la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente, así como su cuantificación. Además, se tomó las tareas presentadas en la página de internet como base para el diseño de la secuencia que a continuación se presenta:



Gráfica 1. Fuente http://www.experiencingmaths.org/

- **TAREA 1.**

Interactúe con las gráficas representadas en el programa Geogebra y establezca que tipo de situación modelan las gráficas cartesianas presentadas, y qué relación hay con las seis gráficas de los recipientes.

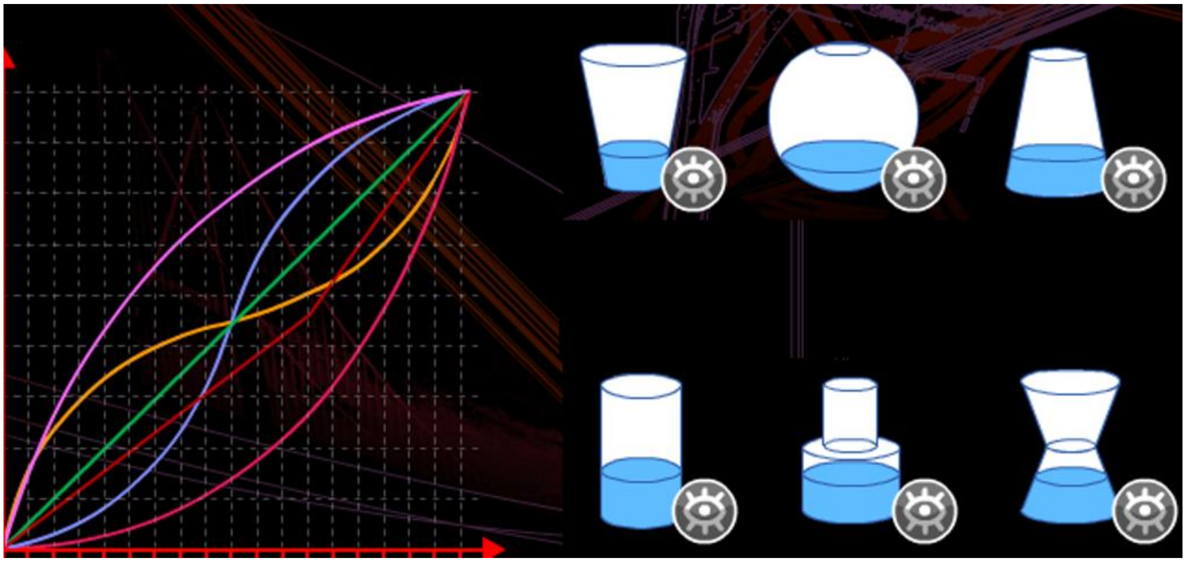
Objetivos.

Identificar la situación problema dentro de la secuencia de tareas, reconociendo características generales de la situación por medio de la percepción e ideas preliminares del mismo.

Descripción.

Se les presentará en grupos de tres o cuatro estudiantes la gráfica en la que están representados los seis recipientes con diferentes formas, y seis gráficas cartesianas que representan la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente (gráfica 2).

A CADA CURVA SU RECIPIENTE.



Gráfica 2. Fuente http://www.experiencingmaths.org/

Los estudiantes observarán las gráficas cartesianas, intentando inferir que tipo de situación podría modelar dichas gráficas. A partir de una lluvia de ideas respecto a la posible situación, el profesor les mencionará las preguntas orientadoras para que comiencen a trabajar y tener un primer acercamiento al problema reconociendo características generales de la situación.

Una de las ideas para esta tarea, es poder identificar por medio de la lluvia de ideas las ideas preliminares y los pre saberes que surgen con el primer contacto a la situación.

Otra de las ideas de esta tarea es establecer qué tipo de situación modelan las gráficas cartesianas, haciendo una relación entre las gráficas de los recipientes, indagando y reconociendo las propiedades de cada uno de los recipientes de acuerdo a las variables en juego, encontrando una primera dependencia entre ellas.

Preguntas orientadoras.

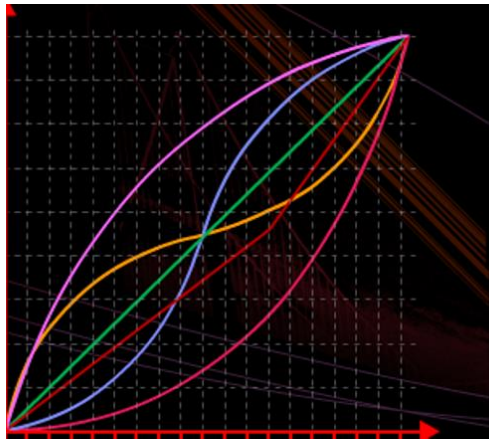
¿Cuál de los recipientes presenta una mayor altura?

¿Cuál de los recipientes presenta un mayor volumen?

¿Cuáles son las dimensiones que presenta cada uno de los recipientes de acuerdo a la altura y volumen?

Herramientas.

Programa Geo-gebra mediante el que se representada la situación por medio de la gráfica a trabajar (gráfica 3).



Gráfica 3. Fuente http://www.experiencingmaths.org/

Imagen en la cual están las gráficas que representan la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros y los 6 recipientes que modelan la situación problema.

- **TAREA 2.**

Establezca cuál de las seis gráficas cartesianas representa la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros suministrados de cada uno de los recipientes presentados en la situación problema.

Objetivos.

Reconocer las cantidades expuestas dentro de la situación, expresándolas de acuerdo la numerosidad, unidad de medida y el atributo medible (Schwartz, 1988)

Identificar la dependencia entre la altura del líquido suministrado en un recipiente con la cantidad de litros vertidos en dicho recipiente.

Descripción.

Una vez reconocidas las características de la situación y formulada la problemática, se les pedirá a los estudiantes que reconozcan las variables que intervienen, identificando la triada mencionada por Schwartz (1988) (numerosidad, unidad y atributo medible). Por medio del plano cartesiano reconocerán dicha triada, relacionándola con la misma gráfica cartesiana.

Una vez reconocidas las cantidades y variables de la situación, se comenzará a plantear las preguntas orientadoras con el fin que comiencen a identificar la relación que existe entre dichas variables, generando la dependencia entre ellas, para posibilitar la constitución del objeto mental (dependencia entre variables) de una manera más formal en el estudiante, para ello, es indispensable reconocer cual es la variable dependiente e independiente y poder generar dicha dependencia.

Preguntas orientadoras.

¿Cuáles son las variables que se presentan en la situación que son modeladas por las seis gráficas cartesianas?

¿Cuál es la relación que existe entre cada una de las variables de la situación?

¿Cuál es la curva que representa la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros suministrado en cada uno de los recipientes?

Herramientas.

Programa Geo-gebra mediante el que se representa la situación por medio de la gráfica a trabajar (gráfica 3).

Las seis gráficas cartesianas impresas en una hoja, representadas cada una en un plano cartesiano diferente (anexo 1).

Los seis recipientes del problema impresos en una hoja (anexo 2).

- **TAREA 3.**

Realice un análisis y una relación de las varas, suministradas gráficamente por el profesor, con la situación del problema; realice una correspondencia entre las varas y los recipientes, identificando de igual manera la relación con las gráficas cartesianas.

Identifique la dependencia que se presenta en las variables del problema, descubriendo el factor que modela dicha dependencia utilizando como instrumento las varas de la tarea (anexo 3).

Objetivos.

Identificar la dependencia que se presenta entre las variables de la situación propuesta a trabajar dentro de la secuencia de tareas.

Descripción.

Los estudiantes tienen a mano las hojas donde están representadas las gráficas cartesianas por individual y las varas donde se representa las marcas de la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente suministrados.

Se les pedirá a los estudiantes analizar la información representada a través de las varas para deducir la información que arrojan, para que puedan realizar la relación entre las varas y los recipientes. Los estudiantes tendrán que mencionar que las varas representan la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente, por lo tanto, analizar a que se debe esos cambios observando los recipientes permitiendo hacer la relación. Además de ello, deben asociar las varas, las gráficas cartesianas y los recipientes.

Preguntas orientadoras.

¿En cuál de los recipientes se presenta mayor cambio de altura respecto a los litros y en cual se presenta un menor cambio de altura respecto a los litros?

¿Qué información se puede tomar de las varas y qué relación tiene con la situación problema?

¿Cuál de las varas le corresponde su respectivo recipiente?

Herramientas.

La gráfica de los seis recipientes trabajados dentro de la situación.

Seis gráficas de sendas varas en las que se muestran tanto las alturas como los cambios de altura al ir suministrando cada diez litros de un líquido en cada uno de los recipientes.

- **TAREA 4.**

Construir la gráfica de la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente dado por sus compañeros de clase.

Objetivos.

Realizar un proceso de comprensión del desarrollo de la situación, al poner en juego los conceptos y procesos adquiridos durante la secuencia de tareas.

Reconocer las propiedades y características en las gráficas cartesianas y que permiten asociarlas a sus respectivos recipientes, comprendiendo que la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente se determina de acuerdo a la forma que lleve dicho recipiente.

Descripción.

Cada grupo de trabajo dibujará un recipiente que presente una altura de 100 cm y un volumen máximo de 100 litros. Dicho dibujo estará elaborado en la mitad de una hoja milimetrada ya que en la segunda mitad de la hoja, se realizará la segunda parte de la tarea.

Una vez terminada la elaboración de la gráfica del recipiente por grupos, se entregará al profesor, quien después distribuirá a cada grupo un recipiente aleatoriamente. Cada grupo debe realizar la gráfica cartesiana del recipiente de acuerdo a la altura del líquido en centímetros según la cantidad de líquido en litros de cada recipiente.

Preguntas orientadoras.

¿Cuál es el tamaño que debe tener cada uno de los ejes del plano cartesiano?

¿La gráfica que construyó sólo representa la forma de llenado de ese recipiente?

¿Qué características o qué formas deben tener los recipientes para que la forma de llenado sea la misma de acuerdo a la gráfica construida?

Herramientas.

Hoja milimetrada

- **TAREA 5.**

Construir el recipiente a partir de su gráfica.

Objetivos.

Realizar un proceso de automatización de los conceptos y procesos construidos a lo largo de la secuencia de tareas, evidenciando las variables que juegan en la situación generando la dependencia existente.

Descripción.

A partir de una serie de gráficas cartesianas que evidencian la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente, realizar la construcción del o los recipientes modelados en la gráfica.

Construido el recipiente, se indagará a los estudiantes acerca de qué propiedades deben tener los recipientes asociables a la gráfica establecida en la tarea.

Preguntas orientadoras.

¿A qué se debe que se pueda asociar varios recipientes a una misma gráfica cartesiana?

¿Cuáles son las características que debe cumplir un recipiente para asociarlo a las gráficas dadas por el profesor?

Herramientas.

Hoja milimetrada.

4.1.2 EXPERIMENTACIÓN EN EL AULA

La fase de la experimentación en el aula del experimento de enseñanza, consiste en llevar a cabo la implementación del diseño. Cuando todo el trabajo de preparación se ha hecho, los criterios de valoración, los puntos de partida, los puntos finales y la ruta de aprendizaje se han establecido, el diseño puede ser aplicado y ejecutado.

Para la documentación de la actividad del grupo se toman tres fuentes de información:(1) videos de las interacciones de los grupos de trabajo (2) los registros diarios del profesor investigador y

(3) el cuaderno resolutor delos estudiantes. Estas fuentes de información serán llevadas al grupo MESCUD y de esta manera, comenzar a realizar una toma de decisiones respecto a lo realizado, evidenciado y analizado en el desarrollo de la secuencia de tareas con los grupos de estudiantes.

En esta fase, se hace la respectiva prueba al diseño de la instrucción local para mejorarla al contrastarla entre las intenciones del diseño de la secuencia de tareas y lo que sucedió realmente en la respectiva aplicación (Gravemmeijer & Cobb, 2013), cumpliendo a su vez con uno de los objetivos de la investigación, que es ajustar la secuencia de tareas para que los propósitos matemáticos se puedan cumplir con un mayor grado de certeza.

El experimento de enseñanza en esta fase, establece un proceso cíclico de diseño y rediseño de las actividades o tareas implementadas, tomando decisiones acerca de lo que sucede en el aula. Por lo tanto, es válido hacer cambios en el diseño a medida que se va implementando, la metodología experimento de enseñanza así lo establece, haciendo cumplir con el tercer objetivo específico de la investigación.

Con esta idea de un ciclo de la enseñanza matemática, un profesor de matemáticas debe tratar de anticipar actividades de los estudiantes en relación con las tareas propuestas en el aula y verificar hasta qué punto los procesos de matematización actuales de los estudiantes corresponden con las hipótesis de enseñanza y de aprendizaje establecidas (Gravemmeijer & Cobb, 2013).

Estos ciclos requieren que el equipo de investigación se dedique a un análisis continuo de actividad y de los procesos sociales en el aula de los estudiantes para informar los cambios al diseño o las actividades de instrucción. En el caso de la investigación, es importante observar las comunidades de práctica ya que es allí, donde se desarrollan todas las normas sociales como el compromiso mutuo, y además, las normas socio matemáticas como la empresa negociada que promueve la negociación de significados. (Wenger, 2001). Las normas matemáticas, están más dirigidas a los niveles de matematización, ya que en la matematización vertical, es donde se puede establecer la formalidad en la cual la comunidad de práctica ha construido a lo largo de su proceso.

Es importante tener en cuenta los aspectos mencionados anteriormente, y de esta forma hacer cambios al diseño siempre en relación con los objetivos de la investigación y propósitos de aprendizaje de la secuencia de tareas.

4.1.3 ANÁLISIS RETROSPECTIVO

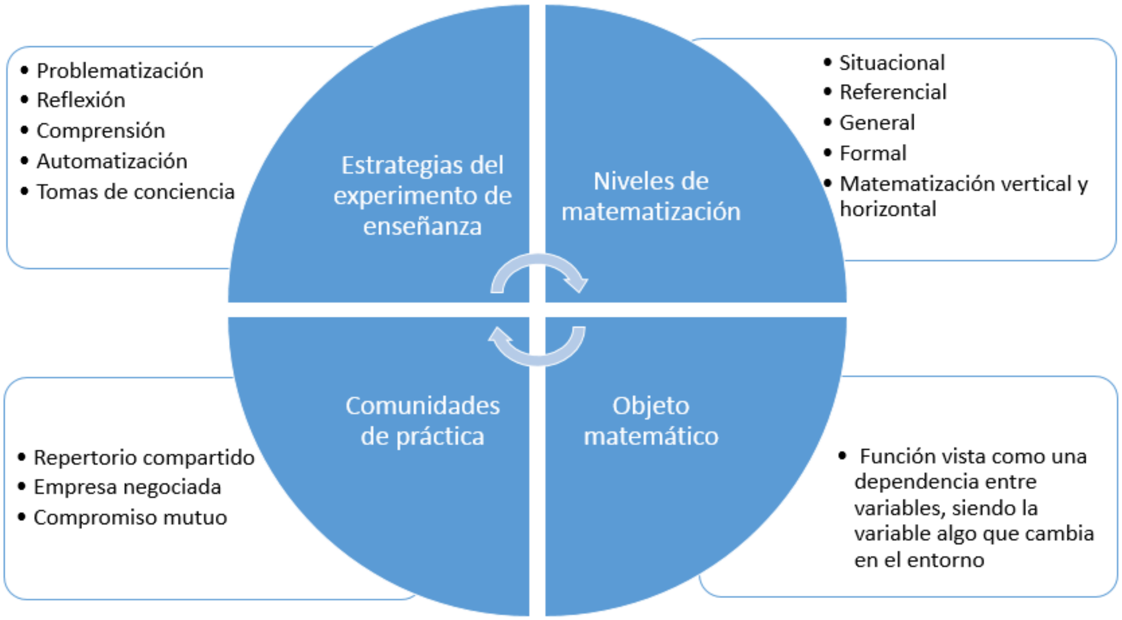
Para la fase del análisis retrospectivo, hay que tener en cuenta los objetivos de la investigación para enfocarse en los aspectos y la información recolectada en la fase dos. Como la investigación quiere realizar una secuencia de tareas que permita la constitución del objeto mental dependencia entre variables, es importante enfocarse en el proceso de matematización de los estudiantes influenciado por el ambiente de aprendizaje diseñado.

Para el análisis del proceso de matematización se realizó una descripción en tres niveles (Coba, et al, 2013): el primer nivel muestra la transcripción natural, allí se resalta lo sucedido tratando de no hacer inferencias y usando un lenguaje sencillo y sin proponer hechos teóricos; el segundo nivel, incluye hechos teóricos que requieren de un lenguaje técnico con el fin de hacer una descripción con los elementos del primer nivel; el tercer nivel utiliza la teoría, con inferencias sometidas a contrastación con los dos niveles anteriores.

4.2 CONSTRUCCIÓN DEL AMBIENTE DE APRENDIZAJE.

Uno de los propósitos del ambiente de aprendizaje es la constitución del objeto mental dependencia entre variables, que se articula a través de cuatro dimensiones (gráfico 4): (1) Estrategias del experimento de enseñanza (Rojas y Romero, 2006) (2) Niveles de matematización (Bressan, 2005) (3) Comunidades de práctica (Wenger, 2001) y (4) Objeto matemático *función* a través de la fenomenología didáctica presentada por Freudenthal (1983).

AMBIENTE DE APRENDIZAJE.

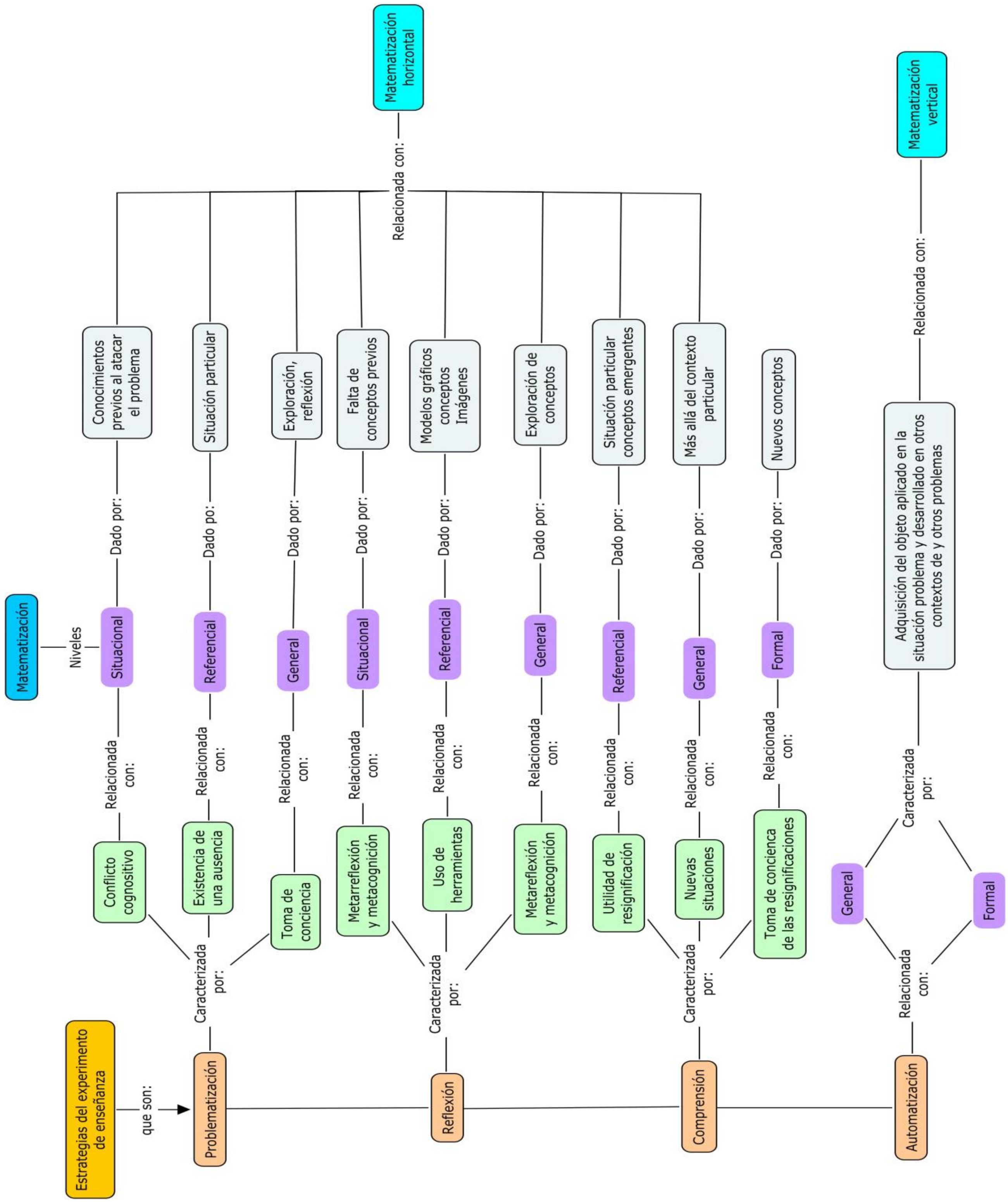


Gráfica 4. Fuente propia.

Los niveles de matematización, las estrategias del experimento de enseñanza, las comunidades de práctica se relacionan para que la construcción matemática se pueda realizar a partir de la fenomenología didáctica. Las interacciones que se presentan entre las dimensiones conforman el ambiente de aprendizaje; sin embargo, para efectos de análisis se define y tematiza las siguientes tres dualidades (1) estrategias del experimento de enseñanza – niveles de matematización, (2) comunidades de práctica - estrategias del experimento de enseñanza, (3) Niveles de matematización – comunidades de práctica. La estructura del objeto matemático es transversal a las dualidades, con la certeza de que éstas se relacionan de forma recursiva; entendiendo esta recursividad como la producción de nuevos elementos cada vez que se vuelve sobre uno, con una mirada distinta, realizando procesos de negociabilidad e identificación (Coba, et al, 2013).

Se eligió organizar mediante dualidades las dimensiones que conforman el ambiente de aprendizaje, ya que estas permiten identificar con mayor precisión las relaciones entre las dimensiones, de igual forma, para realizar un análisis posterior a la implementación de la secuencia de tareas, este será más detallado y se verá reflejado con mayor precisión la incidencia de las dualidades.

4.2.1 ESTRATEGIAS DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA – NIVELES DE MATEMATIZACIÓN.



Gráfica 5. Fuente propia.

Para el análisis de esta dualidad, se tomó como referentes teóricos el experimento de enseñanza (Rojas & Romero, 2006) y los niveles de la matematización mencionados por Bressan (2005).

Teniendo en cuenta las cuatro estrategias del experimento de enseñanza y las características de cada una de ellas, se relacionaron los niveles de la matematización de acuerdo al desarrollo en cada uno de las estrategias.

La estrategia de problematización se caracteriza por el conflicto cognoscitivo, la existencia de una ausencia y la toma de conciencia de esa ausencia. Teniendo estas características, se relacionó cada una de ellas con un nivel de la matematización: (a) Conflicto cognoscitivo -Nivel situacional, a partir de los conocimientos previos se ataca el problema generando una solución errada al problema, generando una revisión por parte del estudiante evidenciando que objetos se tiene y qué otros hacen falta para resolver el problema, presentándose conflictos conceptuales al evidenciar que faltan instrumentos para solucionar la situación. (b) Existencia de una ausencia – Nivel referencial, se comienza a atacar la situación presentada limitándose sólo al contexto del problema, evidenciando que hay vacíos conceptuales para la solución de la situación. (c) Toma de conciencia -Nivel general, estos dos aspectos se relacionan ante la reflexión que se realiza con los objetos que se cuentan para solucionar el problema y cuales hacen falta a partir de otros contextos.

La estrategia de reflexión tiene como principal característica los procesos de metareflexión, metacognición y el uso de instrumentos, las cuales se relacionan con los niveles situacional, referencial y el general de la siguiente manera: (a) Proceso de metacognición y metareflexión – Nivel situacional, esta relación se da por la pregunta ¿Qué aspectos están involucrados en las conjeturas y cómo se pueden usar para resolver la situación?, haciendo una reflexión de lo que se tiene y la forma de usarlo para darle una solución a la situación. (b) Uso de instrumentos – Nivel referencial, a partir de las diferentes herramientas que les permita avanzar en la solución del problema (Cuaderno del estudiante, gráficas, entre otros) se generan nuevos modelos, nuevas gráficas, nuevos procedimientos y nuevos conceptos que le permite desarrollar una posible solución al problema. (c) Proceso de metareflexión y metacognición – Nivel general, el estudiante genera una toma de conciencia en relación a los instrumentos utilizados y cómo estos permiten la re significación de los objetos matemáticos trabajados.

La estrategia de comprensión se caracteriza por la utilidad de las re-significaciones, el actuar sobre nuevas situaciones y la toma de conciencia de los efectos de la re significación; se relaciona con los niveles referencial, general y formal la siguiente manera: (a) Utilidad de resignificación – Nivel referencial, se relacionan en cuanto se toma de conciencia de los objetos matemáticos que se han consolidado durante el proceso de matematización, haciendo al mismo tiempo una comprensión de éstos, enfocado en la situación en particular. (b) Nuevas situaciones – Nivel general, el actuar sobre nuevas situaciones. Su relación denota que las re-significaciones realizadas permiten establecer relaciones entre distintos objetos matemáticos y en diferentes contextos en los cuales el objeto matemático sea la solución a dichas situaciones (c) Toma de conciencia de las resignificaciones – Nivel formal. Se relacionan en cuanto se reconoce que las re-significaciones conllevan a construir redes de objetos matemáticos que permiten resolver situaciones en otros contextos; consolidando nuevos procesos, conceptos e ideas matemáticas.

La relación expresada entre la automatización y el nivel formal, está dada por el hecho de expresar en lenguaje técnico los instrumentos y objetos matemáticos involucrados en el proceso de resolución de una situación. Lo más importante dentro de esta relación, es poder usar los nuevos conceptos y procesos generados en el desarrollo de la situación de forma automática pero teniendo una toma de conciencia de la forma de proceder y el por qué se efectúa de la manera en la que se utiliza.

4.2.2 COMUNIDADES DE PRÁCTICA – NIVELES DE MATEMATIZACIÓN.

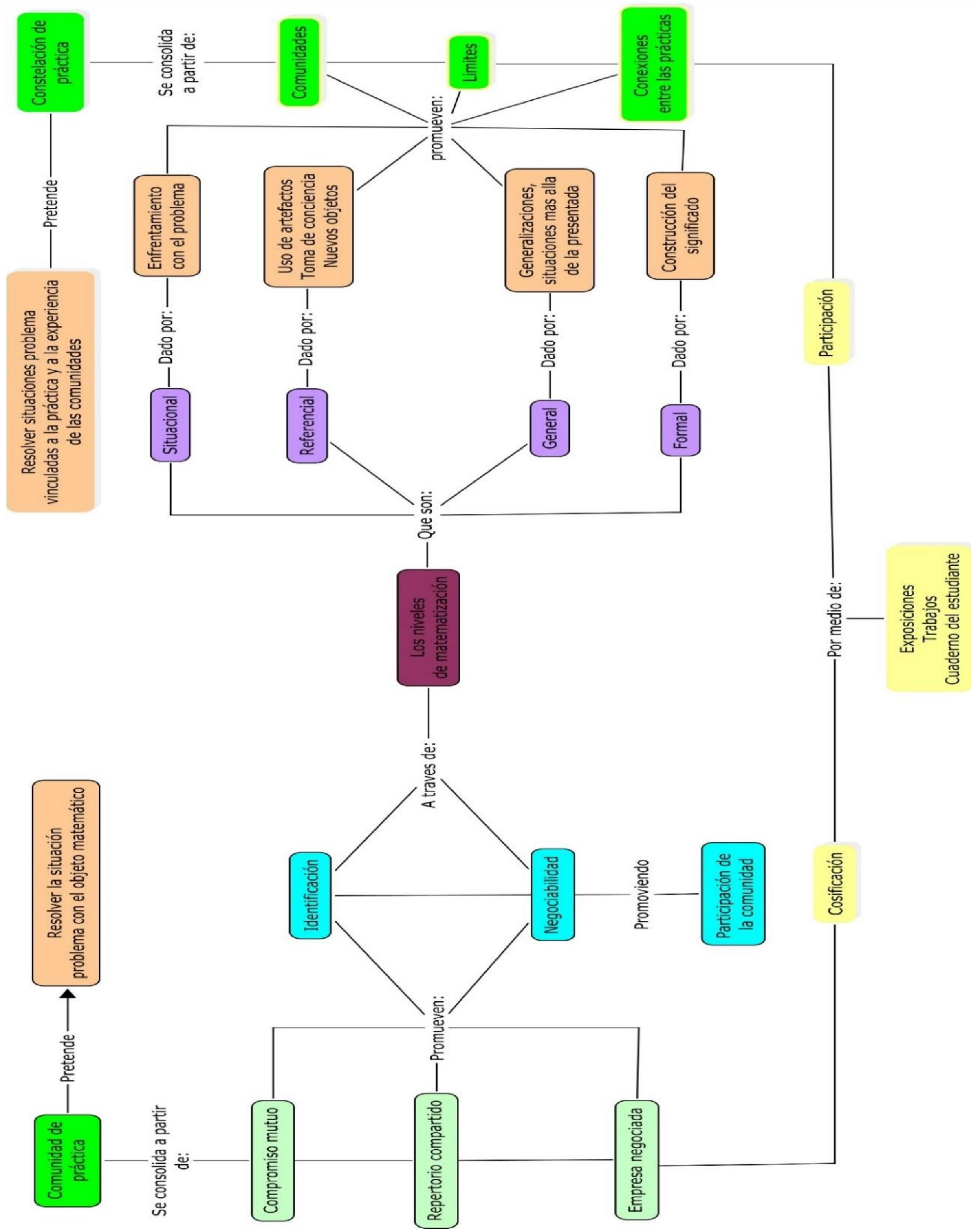


Gráfico 6. Fuente propia.

Esta dualidad se despliega a partir de los dos niveles de práctica expuestos por Wenger (2001) que son la comunidad de práctica y la constelación de práctica, tomando sus características y relacionándolas con los niveles de matematización que promueven a su vez, procesos de identificación y negociabilidad.

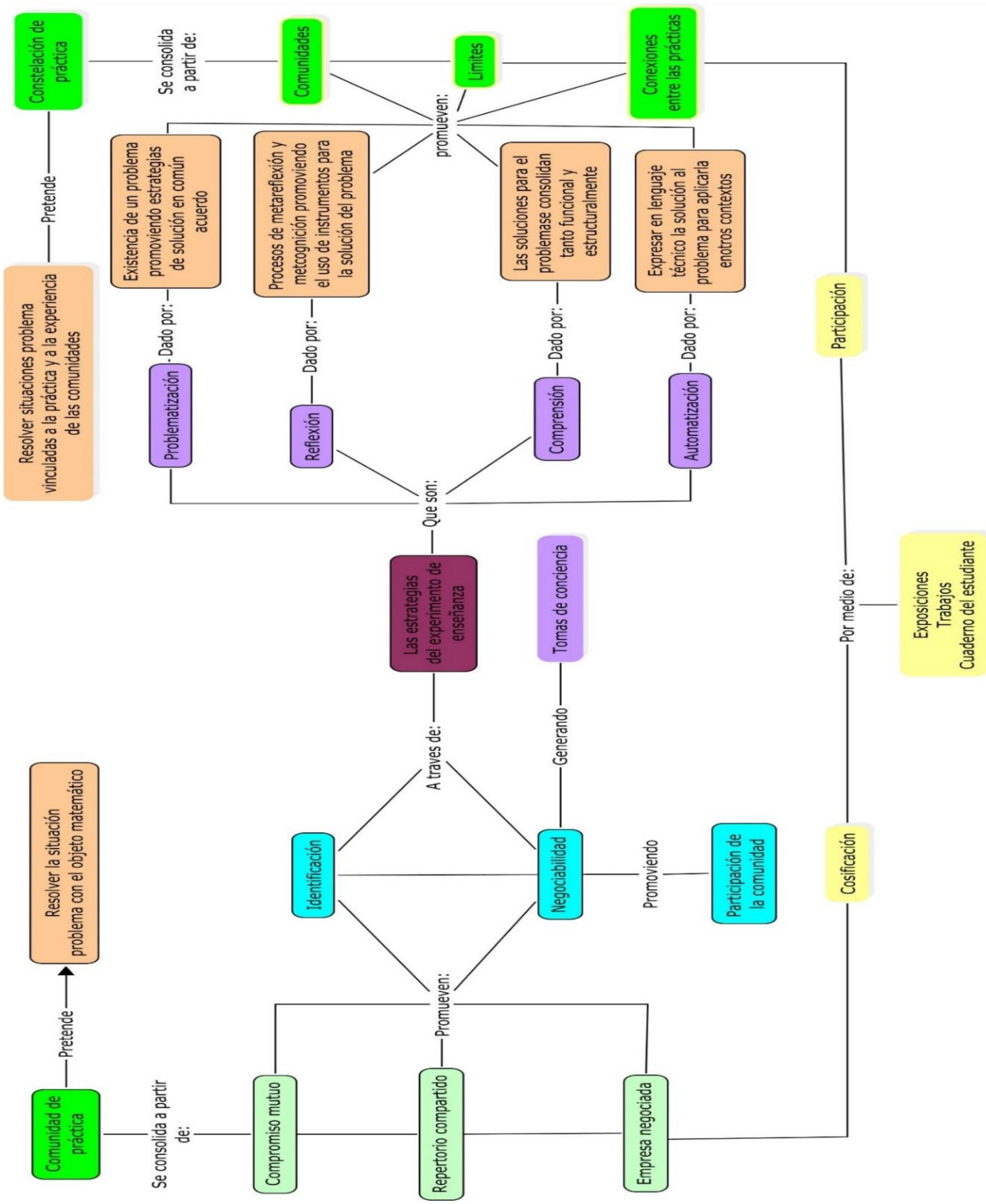
Los procesos de cosificación se realizan en las comunidades de práctica por medio del cuaderno del estudiante y los procesos de participación en las constelaciones de práctica por medio de las exposiciones y socializaciones del trabajo realizado en la secuencia de tareas. Todo lo anterior, permite que tanto la comunidad y la constelación de práctica ejerzan actividades de identificación y negociabilidad.

Coba y otros (2013) mencionan que la metareflexión es un proceso constante y continuo de pensar, analizar el ejercicio de la práctica cotidiana, del quehacer del sujeto y la metacognición macroproceso caracterizado por un alto nivel de conciencia y de control voluntario en donde se pretende gestionar otros procesos cognitivos simples y elementales aparecen con la construcción de la identidad en cada uno de los niveles de práctica y su relación con los niveles de la matematización que son situacional, referencial, general y formal.

Según Bressan (2005) en el nivel situacional, el conocimiento de la situación y las estrategias son utilizadas en el contexto de la situación misma apoyándose en conocimientos informales, el sentido común y la experiencia. En el nivel referencial aparecen los modelos gráficos, materiales y las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular. El nivel general se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias, que supera la referencia al contexto. En el nivel formal se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales. Cabe resaltar que los procesos de metareflexión y metacognición aparece en cada uno de los niveles de la matematización, pero la intensidad y la forma en la que aparecen varían de acuerdo a la situación y la comunidad de práctica.

Los procesos que se generan en cada uno de los niveles de matematización permiten hacer procesos de negociabilidad promoviendo la identidad en los integrantes de la comunidad, concibiendo la solución del problema como la empresa negociada de la comunidad de práctica, de tal forma la metacognición y metareflexión son los entes encargados de hacer que el proceso de solución pase por cada uno de los niveles mencionados, mediante el cual se evalúa el producto que se está entregando, que en este caso es el proceso de solución al problema (matematización); teniendo en cuenta que la solución está a cargo de una comunidad de práctica, promoviendo procesos de identificación y negociabilidad.

4.2.3 COMUNIDADES DE PRÁCTICA – ESTRATEGIAS DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA.



Gráfica 7. Fuente propia.

La dualidad comunidad de práctica (Wenger, 2001) y las estrategias del experimento de enseñanza (Rojas & Romero, 2006), comienza a relacionarse por medio de los diferentes niveles de práctica, comunidades de práctica y constelaciones de práctica, los cuales presentan diferentes descriptores que son para el primer nivel de práctica: (a) compromiso mutuo (b) empresa negociada y (c) repertorio compartido. Para el segundo nivel de práctica se tienen los siguientes descriptores: (a) Límites entre las comunidades, (b) conexiones entre las comunidades y (c) las mismas comunidades. Estos descriptores en cada uno de los niveles de práctica promueven la construcción de la identidad y a su vez las estrategias del experimento de enseñanza fomentan la participación y la cosificación que se relacionan directamente con los procesos de negociabilidad (Coba & otros, 2013).

Dentro de esta relación, la toma de conciencia como proceso constante y recursivo dentro de los niveles de práctica, permite plasmar la relación entre las estrategias del experimento de enseñanza con la negociabilidad e identificación y por lo tanto, con las comunidades de práctica.

La problematización se caracteriza por la toma de conciencia de la existencia de una ausencia o anomalía y la apropiación de esta toma de conciencia. Estas dos características conllevan a dos posibles caminos; la crisis cognoscitiva, teniendo como consecuencia el abandono de la el cual presenta una crisis de su identidad (Rojas & Romero, 2006); se genera mediante un ambiente amable y facilitador de elementos que lleven al sujeto a superar la anomalía o llenar la ausencia de este conflicto. El diseño posibilita este ambiente y prevé que se trabaje en comunidades vinculando las estrategias del experimento de enseñanza.

La reflexión se potencia a partir del uso de instrumentos que promueve procesos de toma de conciencia, cuestionamiento de modelos cognitivos, y herramientas para identificar elementos del concepto matemático (función), permitiendo la construcción de la identidad y la negociación de significados acerca de estos elementos a lo largo del proceso de reflexión.

La comprensión se potencia a través de la utilidad de las re-significaciones y como se comienza a actuar sobre nuevas situaciones a partir de sus nuevos objetos generados en las re-significaciones fabricadas en la estrategia de problematización y reflexión.

La automatización se potencia al utilizar la solución en distintos contextos haciéndola generalizable a otras situaciones, pero dicha solución se expresa mediante un lenguaje técnico, promoviendo conexiones entre los niveles de práctica.

5. MARCO TEÓRICO.

Bishop (2005) plantea que la actividad matemática busca, con énfasis, incluir al estudiante con las matemáticas, dejando de lado los contenidos enseñados por el profesor de forma directa sin incluir al estudiante dentro del proceso de aprendizaje. Bressan (2008) menciona que Freudenthal pretendía cambiar los métodos de enseñanza tradicional de la matemática, denominando su trabajo como la educación matemática realista, la cual pretende involucrar al estudiante dentro de su actividad matemática generando algún objeto mental de un concepto matemático por medio de situaciones problemas reales, dándole así, sentido al trabajo que el mismo estudiante realiza.

La secuencia de tareas parte de una situación que es real para el estudiante, para que vincule sus acciones del diario vivir, dándole el sentido que corresponde a la actividad. Pero el término real no implica colocar situaciones problema que se encuentren en el contexto cotidiano, en cambio, es poder desarrollar problemas que para los estudiantes sean significativos y puedan apropiarse de las situaciones para que el reto principal que puedan desarrollar los estudiantes sea encontrar o construir una solución a las situaciones presentadas.

Para Freudenthal (1991) el aprendizaje de las matemáticas siempre debe ser significativo para el estudiante y sistematizando el sentido común para la construcción de ideas, procesos o algoritmos aprendiendo matemáticas desde su misma actividad matemática.

Para llevar a cabo la educación matemática realista, Treffers (1987) ha propuesto cinco fases para la aplicación de esta teoría: (1) Exploración fenomenológica (2) Uso de modelos y símbolos para la matematización progresiva (3) El uso de propias construcciones y producciones de los alumnos (4) Interactividad y (5) Entrelazamiento.

Además de los anteriores principios, Gravemeijer (1994) menciona que la educación matemática realista ofrece otros principios pero más orientados al diseño del proceso de enseñanza de las matemáticas.

(1) Reinvención guiada: La matemática es una actividad humana, por lo tanto, cuando los estudiantes matematizan su propia actividad matemática se logra reinventar las matemáticas. A los estudiantes se les brinda la oportunidad guiada por el maestro de reinventar la matemática reinventan modelos, conceptos, operaciones y estrategias

matemáticas con un proceso similar a los que usan los matemáticos al inventarlas). Aquí el docente posee un papel bien definido en tanto sujeto que media entre los alumnos y las situaciones problemáticas en juego (Bressan, 2005).

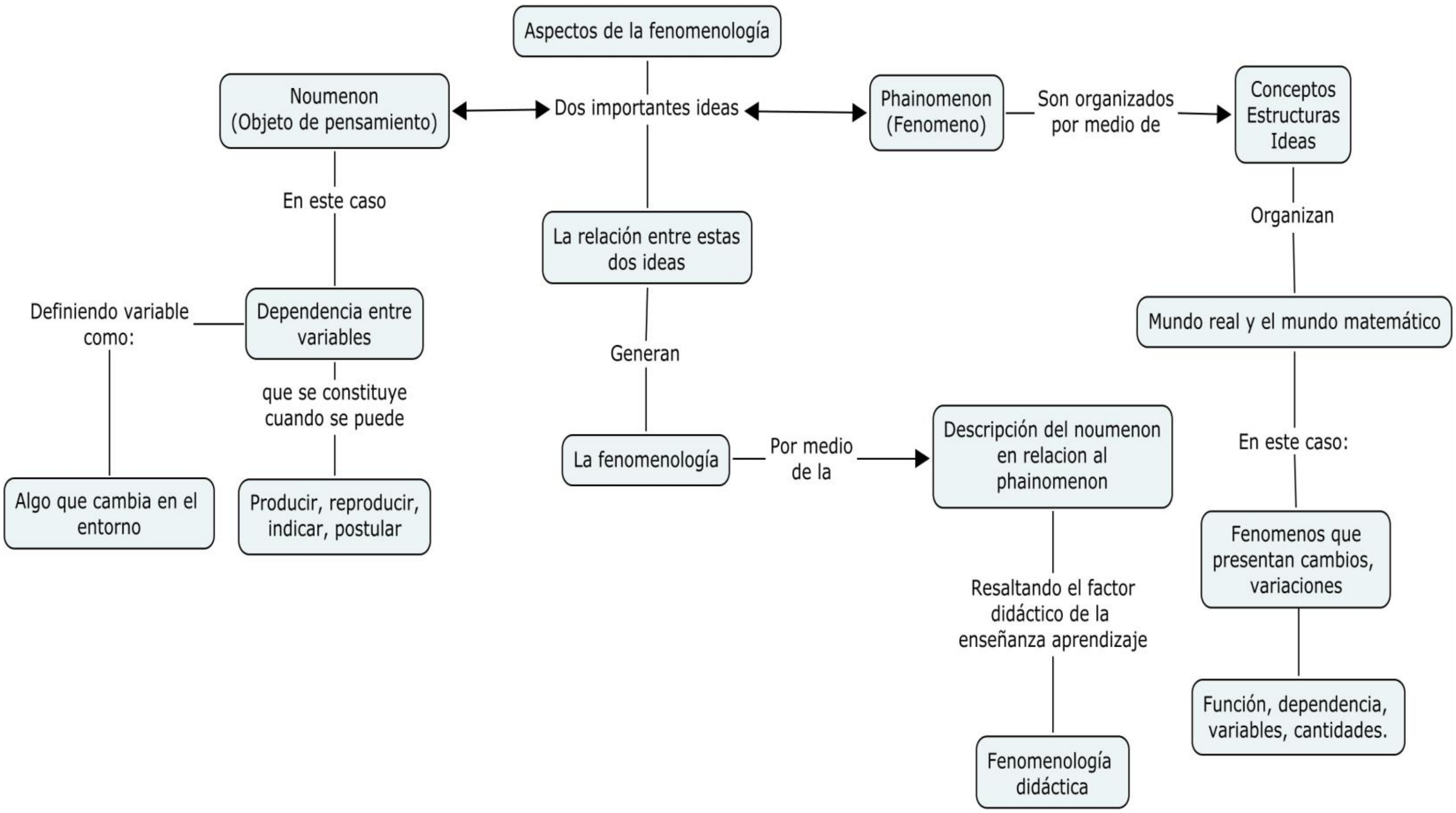
(2) Fenomenología didáctica: Es un análisis de un noumenon (objeto mental) en relación a los fenómenos que organiza, pero dicha relación es por medio de un interés didáctico. El principal objetivo es buscar fenómenos que requieran ser organizados mediante el objeto.

Respecto al objeto matemático a trabajar, Quintero y Cadavid (2009) mencionan que el objeto *función* es fundamental dentro de las mismas matemáticas y a su vez en distintas ciencias, pero presentan varias dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje dada la complejidad del concepto de función. Según García, Serrano y Espitia (1997), la enseñanza fraccionada de la función genera dificultades de conceptualización en los estudiantes. Así mismo, es de importancia tener en cuenta un contexto histórico y epistemológico que el profesor debe construir del concepto de función, ya que le permite tener dominio del concepto de función, permitiendo que en el proceso de enseñanza se pueda evidenciar un dominio del tema. Además permite que el profesor reconozca que el concepto de función se maneja en el diario vivir, resaltando la dinamicidad y cinemática en fenómenos cotidianos.

Freudenthal (1983) presenta una fenomenología didáctica sobre el concepto de función que permite tener una base para diseñar secuencias didácticas e ir encaminando la ruta de aprendizaje de los estudiantes, prever las acciones de los estudiantes y de esta manera generar estrategias para que el estudiante siga encaminado por esa ruta de aprendizaje en relación al concepto función.

Teniendo en cuenta que el objeto matemático es transversal a las dualidades descritas en el marco metodológico (Ver pág. 13) y contestando a los objetivos del proyecto, es importante retomar aspectos de la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983) los cuales se relacionan a continuación (gráfica 8).

FENOMENOLOGÍA DIDÁCTICA.



Gráfica 8. Fuente propia.

La adquisición del concepto de función se logra cuando se produce o se reproduce una dependencia entre variables, a dicha dependencia se le puede dar el nombre de objeto mental. Por lo tanto, para lograr el concepto de función en el estudiante, es importante primero considerar la constitución de objeto mental de variable y la dependencia funcional.

A su vez, los fenómenos que son organizados por el objeto mental dependencia entre variables son aquellos que presentan cambios o variaciones, por ejemplo, la dirección del viento, cambios de temperatura, los cambios de tiempo, entre otros. Las variables permitan capturar el dinamismo del fenómeno y determinar de qué forma se establece la dependencia entre las variables.

Dentro de esta fenomenología propuesta por Freudenthal (1983), la parte histórica permite diseñar e intuir algunas acciones de los estudiantes cuando se enfrenten a las situaciones problemas o fenómenos que son organizados por el objeto mental. El estudio histórico arroja que la función a lo largo del tiempo se ha visto de la siguiente manera:

Las funciones hicieron su aparición como relaciones entre magnitudes variables cuya variabilidad se comparaba en términos infinitesimales.

• La libertad de cambiar las variables de dependiente a independiente y entre independientes condujo a un nuevo tipo de operación con funciones: la composición y la inversión. Es esta nueva riqueza operatoria la que ha causado el éxito del concepto de función.

• La necesidad de distinguir entre las variables dependientes e independientes condujo a poner en primer plano las funciones en vez de las relaciones. A pesar de lo que sugieren las expresiones algebraicas y analíticas, el desarrollo tendió hacia las funciones univalentes.

• Un cambio de perspectiva condujo de la descripción de datos visuales mediante funciones expresadas analíticamente a la visualización de funciones mediante gráficas.

• La función arbitraria hace su aparición con el cálculo variacional y la resolución de ecuaciones diferenciales. Esta "arbitrariedad" no sólo atañe al carácter de la dependencia funcional, sino a la naturaleza de las variables, que pueden ser números, puntos, curvas, funciones, elementos de conjuntos arbitrarios.

• Las funciones del análisis, las transformaciones geométricas, las permutaciones de los conjuntos finitos, las aplicaciones entre conjuntos arbitrarios confluyen para generar el concepto general de función.

• Ese concepto se usa a su vez para organizar una gran variedad de objetos: desde las operaciones algebraicas a los predicados lógicos.

A partir de los anteriores hechos históricos, Freudenthal (1983) menciona que hay ciertas acciones que permiten evidenciar si la dependencia entre variables como objeto mental se está constituyendo.

La primera es detectar las variables del fenómeno que se están relacionando. Una petición que intenta un ambiente de aprendizaje generador de conciencia acerca de las variables en tanto representación de cantidades ligadas a fenómenos, consiste en expresar las cantidades como lo menciona Schwartz (1988). Específicamente, dicha toma de conciencia puede dirigirse hacia la existencia de tipos de cantidades extensivas según el proceso de cuantificación de aspectos físicos de los fenómenos en los que intervien, discretas (D) si provienen de conteo o continuas (C) si provienen de medición; pero también hacia las unidades con referencia y referente, que dan estructura a las llamadas cantidades adjetivadas, a saber, la triada: numerosidad, unidad de medida y atributo medible.

Es importante que los estudiantes refieran las variables de acuerdo a la estructura de la triada mencionada por Schwartz (1988) ya que los induce a reconocer propiedades y características de las mismas. Permite tomar consciencia de qué se está cuantificando mediante esas variables y controlar la semántica de las relaciones de dependencia ligadas a la situación. Estas cuestiones son de suma importancia para los procesos de matematización.

La segunda es determinar el patrón directo que existe entre la variable dependiente e independiente por medio de las tablas de funciones y/o las gráficas de las funciones que están en juego. Al reconocer el patrón se puede realizar una conexión formal a la dependencia que presentan las variables. Dentro de la secuencia de tareas, el reconocimiento de las variaciones entre las variables en juego, se realizarán mediante la utilización del programa Geo-gebra, recursos gráficos (recipientes, plano cartesiano, gráficas cartesianas), varas de los cambios de la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente, entre otros.

6. RESULTADOS.

Con el fin de dar cumplimiento a los objetivos de la investigación, se busca describir la incidencia de la secuencia de tareas en un grupo de estudiantes y como permitió la constitución del objeto mental dependencia entre variables en los estudiantes y sus conocimientos sobre el concepto de función. Para esto, se resaltan los procesos de matematización que los estudiantes realizaron durante la secuencia de tareas, teniendo en cuenta las dimensiones que configuran el ambiente de aprendizaje relacionadas por las dualidades y el objeto matemático, demostrando la forma en que los estudiantes van constituyendo el objeto mental.

A continuación se presenta la hipótesis con la que se va a describir el proceso de los estudiantes que conforman el grupo COMANDO17. Esta hipótesis surge de una mirada global del proceso de matematización evidenciado en los datos construidos y se va modificando de acuerdo al análisis mismo, que admite afirmarla mediante los tres niveles de descripción (Ver pág. 20). Para construir la hipótesis, se tuvo en cuenta los objetivos mencionados anteriormente:

"El grupo COMANDO 17 inmerso en el ambiente de aprendizaje diseñado para el desarrollo de la secuencia de tareas constituye el objeto mental encontrando la relación existente en la situación planteada y determinando los tipos de variable con su respectiva relación de dependencia."

El presente análisis abarca el proceso desarrollado para dar solución a la situación planteada en el espacio de formación de trigonometría en grado décimo, por un grupo de dos estudiantes (T, R, M, L, X); dicho proceso se llevó a cabo entre el 22 de mayo y el 1 de octubre de 2015. En el análisis es importante tener en cuenta las convenciones del trabajo (p.) página, (D.) diálogo y (L.) línea del diálogo ya de esta manera se sustenta lo realizado por el grupo y se contrasta con la teoría del trabajo.

A partir del diseño de clase planteado por el profesor, los estudiantes conformaron grupos de trabajo de acuerdo a una petición establecida desde el contrato didáctico (Brousseau, 1998) entre el profesor y la clase. Los grupos que se conformaron fueron: SPLASH, LOS POLLITOS PIO, AQUÍ TOY, THE FAMILY, PEACE, CDC, JESSICA Y SU HABLADO, Y COMANDO 17, constituyéndose como la base sobre la cual se conformó la constelación de práctica; COMANDO 17 es el grupo de trabajo integrado por los estudiantes T, R, M, L, X, del que se realizó la observación y se construyó los datos que se muestran.

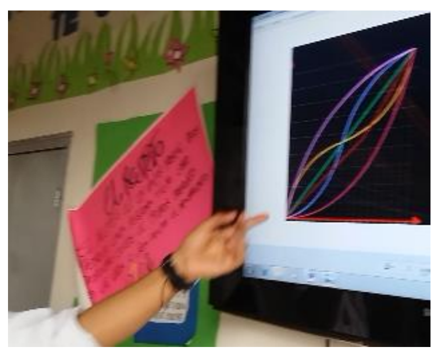
6.1 TAREA 1.

Al comenzar la sesión de clase se les pide a los estudiantes conformar grupos de trabajo y darles nombre. La intención de conformar los grupos de trabajo, es que lleguen a ser comunidades de práctica (Wenger, 2001) según lo propuesto en el diseño del ambiente de aprendizaje. Su existencia es verificable a partir de tres descriptores: (1) Repertorio compartido, (2) Empresa negociada y (3) compromiso mutuo; este último, presentándose de tres maneras: la primera entre los integrantes de COMANDO 17, la segunda entre COMANDO 17 y el problema, y la tercera entre COMANDO 17 y el profesor. Todo esto dado desde la configuración del ambiente de aprendizaje diseñado para el desarrollo de la secuencia de tareas.

El profesor presentó la situación a trabajar respecto al concepto de función, como se evidencia en el siguiente fragmento de transcripción del día 22 de mayo de 2015:

DIÁLOGO 1.

(1) [...] P: Les voy a explicar más o menos en qué consiste la actividad. Estos de acá *[Señala al televisor. Gráfica 9]* son unos recipientes, ¿Sí o no? ¿Cuántos recipientes hay?



Gráfica 9. Fuente propia. Gráfica 10. Fuente propia.

(2) C: Seis *[Contestan en una sola voz los estudiantes]*.

(3) P: Seis ¿Listo? Estas gráficas que están acá *[Señala las gráficas cartesianas en el televisor. Gráfica 10]* representan algo en relación a los recipientes. ¿Qué es lo que toca hacer? Les voy a dar unas preguntas que a medida que vayan a contestar ustedes miran acá *[señala el televisor]* y van contestando las preguntas ¿Vale? **[...]**

El profesor dicta las preguntas a trabajar en la sesión de clase que corresponde a la primera tarea de la secuencia diseñada por los investigadores. Las preguntas son: (1) ¿Qué tipo de problema se puede formular a partir de las gráficas? (2) ¿para el grupo, que representa las gráficas cartesianas? (3) ¿Qué relación tiene las gráficas cartesianas con los recipientes?

Una vez los estudiantes tuvieron las preguntas para guiarse en el proceso, comenzaron a trabajar en la primera tarea. Los integrantes de COMANDO 17 opinan respecto a las preguntas del profesor. Fragmento de la transcripción del día 22 de mayo de 2015:

DIÁLOGO 2.

(1) [...] R: Respecto a la primera pregunta…

(2) X: Yo creo que es la cantidad de líquido que hay en cada recipiente.

(3) T, R, X: Cuánto líquido contiene cada recipiente.

(4) R: Puede ser. También puede ser que tan rápido se llenan, porque… *[Se mantiene un silencio en el grupo]*

(5) X: No, no… *[Es interrumpido]*

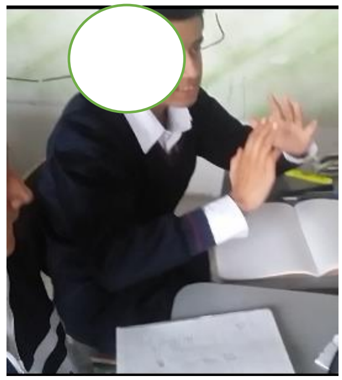
(6) T: Yo diría como cuánto cabe…

(7) X: Cuánto líquido le cabe a cada…

(8) R: Podría poner la misma cantidad de líquido y uno se va a ver más lleno que otro.

(9) X: Porque todos son diferentes.

(10) R: Porque son diferentes. Porque por ejemplo, el que está más alto… *[Con las manos intenta referenciar al recipiente del cono truncado con base mayor. Gráfica 11]* le podría caber más, mientras que el que está circular…

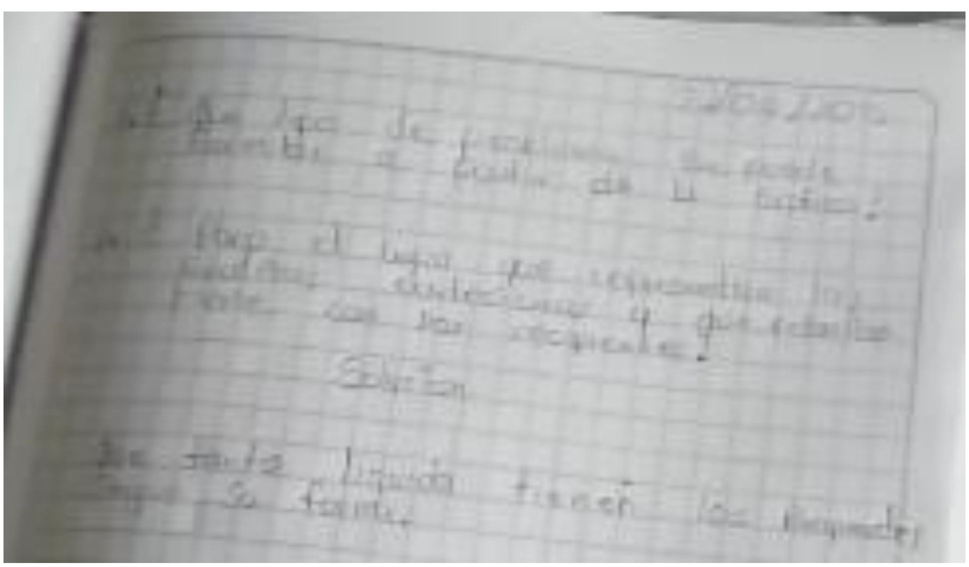


Gráfica 11. Fuente propia.

(11) X: Para eso está la gráfica… **[...]**

En la anterior conversación, se evidencia el principio de realidad de la educación matemática realista (Bressan, 2005), ya que abordar la situación los hace suponer acciones y eventos posibles de acuerdo a elementos perceptuales integrados en la situación.

Después de este diálogo, los estudiantes se enfocan en las preguntas, mencionando que lo primero que deben hacer es formular el problema; dan ideas como: ¿Qué tan lleno está el recipiente? Pero quedándose con la idea de ¿Qué tanto líquido tienen los recipientes según su forma? Y la escriben en su cuaderno (gráfica 12) presentando un proceso de cosificación (Wenger, 2001)



Gráfica 12. Fuente propia.

Luego de escribir esa primera respuesta, comienzan a trabajar en la segunda pregunta, como se puede evidenciar en el siguiente fragmento de transcripción del día 22 de mayo de 2015:

DIÁLOGO 3.

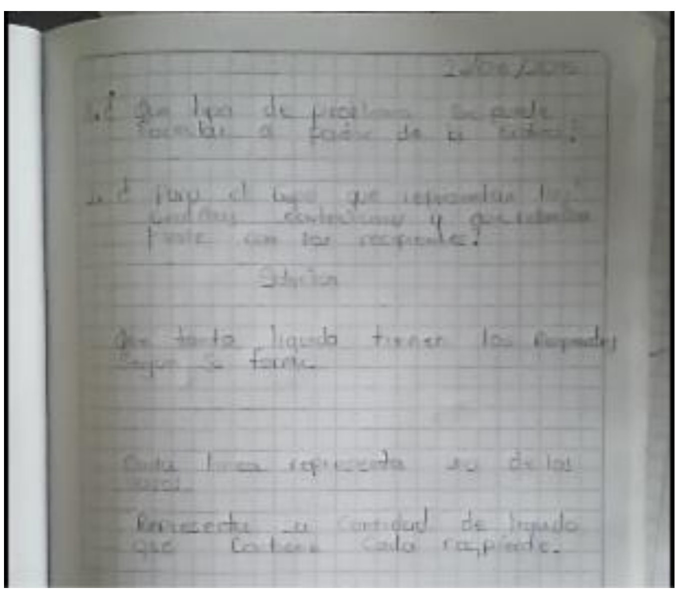
> **(1) [...] R:** ¿Para el grupo, qué representa las gráficas cartesianas? Y ¿Qué relación tiene las gráficas cartesianas con los recipientes?... Qué tanta influencia de líquido… pero no… debe ser iguales.
>
> **(2) X:** ¿Qué relación tiene? Cada cuánto le cabe al recipiente, esa es la relación que tiene ¿No?
>
> **(3) T:** Cada cuánto le cabe al recipiente.
>
> **(4) R:** No, porque ninguno está lleno.
>
> **(5) X:** ¿Qué relación tiene? Qué es lo que tiene el recipiente, o sea, lo que tiene en ese momento el recipiente. ¿Si me entiende? *[Dirigiéndose a R]*. La gráfica representa lo que tiene el recipiente.
>
> **(6) R:** *[El estudiante hace algunos gestos con la cara demostrando que la idea es confusa o no está muy de acuerdo con ella]*.
>
> **(7) L:** Pero ahí está mostrando como que frecuencia.
>
> **(8) R:** Puede ser, porque la línea fucsia la puedo relacionar con el primer vaso porque va como así *[Con la mano izquierda hace un movimiento ascendente] [En el grupo se genera un silencio mientras que cada uno comienza a mirar hacia el televisor, Gráfica 13]* ***[...]***

Gráfica 13. Fuente propia.

Después de mirar detenidamente las gráficas, R afirma que cada gráfica cartesiana representa cada uno de los recipientes, mencionando que esa sería la relación que se está estableciendo, la cual es escrita en el cuaderno. La discusión comienza a centrarse en la relación entre las gráficas cartesianas y las gráficas de los recipientes, expresando que a cada uno de los recipientes les cabe diferente cantidad de líquido, dando ejemplos como que el recipiente cilíndrico le cabe menos líquido que el recipiente esférico. Estas ideas las obtienen desde la percepción, el contexto de la clase de matemáticas y su experiencia previa con los distintos recipientes. Por lo tanto, la relación que se evidencia es que cada línea de las gráficas cartesianas representa la cantidad de líquido que le cabe a cada uno de los recipientes. Las anteriores ideas, son escritas en el cuaderno de cada uno de los estudiantes *(gráfica 14).*

En el proceso descrito hasta el momento, resalta el principio de interacción de la educación matemática realista, ya que todas las acciones de aprendizaje surgidas en el grupo se han hecho desde una interacción social (Bressan, 2005), en este caso, desde la potencial comunidad de práctica.

El proceso de matematización del grupo se encuentra en el nivel situacional, que según Bressan (2005) se caracteriza porque el conocimiento de la situación y las estrategias son utilizadas en el contexto de la situación misma apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia, como se puede evidenciar en el D.3.



Gráfica 14. Fuente propia.

Una vez contestadas las preguntas de la tarea a desarrollar, los estudiantes llaman al profesor para exponer sus ideas y contrastarlas con él, pero mientras llega el profesor, los estudiantes dicen que las gráficas cartesianas y los recipientes tienen que tener una relación respecto a la cantidad de líquido.

El diálogo entre el profesor y el grupo de trabajo se puede evidenciar en el siguiente fragmento de transcripción del día 22 de mayo de 2015:

DIÁLOGO 4.

(1) **[...] P:** ¿Respecto a la primera pregunta a qué llegaron?

(2) **X:** Bueno, *[Mira su cuaderno y lo lee]* que tanto líquido tienen los recipientes según su forma, o sea…

(3) **P:** El problema que estamos hablando es qué tanta agua, qué tanto líquido.

(4) **R:** Qué tanto líquido, porque no sabemos que es…

(5) **P:** Qué tanto líquido puede tener cada recipiente. ¿Qué otra tienen?

(6) **T:** Esa es la más concreta.

(7) **X:** Qué forma puede tener el agua según el recipiente.

(8) **P:** Qué forma puede tener el agua según el recipiente.

(9) **X:** Si señor. Pues digamos, como unos son más grandes que otros, el agua no es la misma.

(10) **P:** ¿Hay unos recipientes más grandes que otros?

(11) **T:** Según su capacidad. *[Señala al televisor]*

(12) **R:** Es que hay unos más grandes que otros, por ejemplo, el más grande es el círculo. *[Con las manos intenta hacer la forma del recipiente, gráfica 15]*.

Gráfica 15. Fuente propia.

(13) **P:** ¿Es un círculo?

(14) **X:** La esfera.

(15) **P:** La esfera, es la que tiene mayor capacidad según ustedes. ¿Y el que tiene menos?

(16) **T:** El primero ¿No? [*Cono truncado con base mayor]*.

(17) **R:** El quinto *[El recipiente compuesto por dos cilindros]*.

(18) **P:** ¿Cuál es el quinto?

(19) **X:** El segundo de la mitad. Aunque también podría ser el sexto *[Recipiente compuesto por dos conos truncados]*.

(20) **P:** Ok, frente a la segunda pregunta, ¿qué tienen?

(21) **R:** Cada línea representa uno de los vasos.

(22) **P:** Cada línea representa uno de los vasos.

(23) **R:** Sí, representando la cantidad de líquido de cada recipiente.

(24) **P:** O sea, cada gráfica que hay ahí, es la cantidad de líquido que le cabe a cada recipiente, según ustedes.

(25) **R:** Lo curioso es porque las líneas están onduladas.

(26) **T:** Sí.

(27) **P:** O sea, ustedes miran que eso *[Refiriéndose a las gráficas cartesianas]* está ondulado. ¿Cuáles están onduladas?

(28) **X:** Por ejemplo la moradita, la amarilla, la naranja.

(29) **T:** La verde y la roja son las que están así *[Con el movimiento de la mano muestra una línea recta]*.

(30) **P:** ¿Por qué les da curiosidad que estén onduladas? No entiendo…

(31) **X:** Es que… pues… siempre las hacen en línea recta con los numeritos abajo *[Refiriéndose al eje x]* representando….

(32) **R:** Cantidades.

(33) **X:** Las cantidades.

(34) **R:** Representando datos numéricos.

(35) **P:** ¿Y ahí no tienen las cantidades?

(36) **X:** Pues no, pues no representadas.

(37) **R:** Al menos que uno vea los números ahí *[Señala las gráficas]* no los veo.

(38) **X:** Los asume.

(39) **R:** Los cuadritos uno los nota, pero la relación [*Con un movimiento de cabeza indica duda]*…Varía, puede ser volumen, puede ser capacidad.

(40) **P:** Las cantidades podrían ser volumen, capacidad ¿Y?

(41) **R:** Capacidad.

(42) **P:** Usted dijo tres ahorita.

(43) **R:** Capacidad, volumen y…

(44) **X:** Cantidad.

(45) **R:** Si, capacidad, cantidad y volumen.

(46) **P:** Capacidad, cantidad y volumen, ¿Qué diferencia hay entre las tres?

(47) **GRUPO:** …. *[Hay silencio en el grupo]*.

(48) **P:** Bien.

(49) **X:** Es que varía según la forma del vaso.

(50) **P:** Las gráficas también varían según las formas de los vasos.

(51) **X:** Pues claro, es que digamos… *[Corta la idea]*.

(52) **R:** Es que digamos que… heee… mmm….

(53) **P:** ¿Cuántas gráficas hay?

(54) **X:** Seis.

(55) **T:** Seis.

(56) **P:** Y ¿Cuántos recipientes?

(57) **X:** Seis.

(58) **P:** O sea, ustedes dicen que cada una *[Refiriéndose a los vasos]* Le corresponde una *[Refiriéndose a las gráficas cartesianas]*.

(59) **X:** Sí, a cada línea le corresponde un recipiente.

(60) **P:** Y ustedes puede deducir cual le corresponde a cada uno.

(61) **X:** Pues, la cantidad, pues… También depende, es que las líneas… o sea, es que digamos, como hay líneas ondulas es difícil determinar la cantidad de cada uno, saber cuál es cuál.

(62) **R:** Es que se nota, que tienen la misma cantidad de agua, pero diferentes cantidades.

(63) **X:** Mismas cantidades, diferentes tamaños. Cambiando el recipiente también cambia la cantidad de líquido que le quepa **[...]**

El profesor les menciona que las ideas expuestas serán socializadas en el curso intentando promover la participación en las diferentes comunidades de práctica y en la misma constelación, pero los estudiantes aportan más ideas relacionadas con las gráficas cartesianas, mencionando que la forma está relacionada con las diferentes gráficas dando el ejemplo de que la gráfica de color verde se podría relacionar con el recipiente de forma cilíndrica.

Acá podría resaltarse algunas cuestiones que aparecen en el proceso del grupo: (1) las líneas onduladas corresponden cada una a un recipiente pero no logran interpretarlas para determinar su relación con cada recipiente. (2) hay mismas cantidades pero diferentes tamaños, y (3) el cambio de recipiente conlleva cambio en la cantidad de líquido que cabe.

Estas cuestiones describen el estado de comprensión que pueden verbalizar en relación con las variables y sus relaciones, siendo parte del proceso de matematización de las variables y de la situación.

Se puede resaltar que la estrategia de problematización está teniendo efecto sobre el grupo; este se está problematizando, está pasando por un conflicto cognoscitivo (Rojas & Romero, 2006) presentando ausencia de ideas para sustentar sus respuestas y se dejan llevar de la percepción para basar sus soluciones las cuales son erradas (D.4, L 47). En este momento se relaciona con el nivel de matematización situacional (Bressan, 2005): a partir de los conocimientos previos el grupo ataca el problema generando una solución errada al problema, ya que los estudiantes presentan ideas equivocadas como lo son: la situación se refiere a qué forma puede tener el líquido según la forma del recipiente (D.4, L. 7) Determinan mediante la triangulación de percepción, conocimientos previos y el contexto donde se desarrolla la clase, que algunos recipientes como el esférico tienen mayor capacidad (D. 4, L. 9-19). Por conocimientos previos, los estudiantes al no poder interpretar adecuadamente las cantidades representadas en el plano cartesiano, basan sus ideas a partir de lo visual por lo cual son equivocadas respecto a los tamaños de los recipientes. Además de la tripla mencionada, es interesante que los estudiantes ya relacionan más orgánicamente los recipientes con las líneas, con la forma de los recipientes, pero también empiezan a organizar algunos aspectos dinámicos de la situación, cuando usan palabras como “cambia la cantidad de líquido” refiriéndose que cambiando el recipiente también cambia la cantidad de líquido que le quepa (D.4, L.63) aceptando que la cantidad del líquido presenta cambios en la situación, así mismo, la forma de los recipientes determinan el llenado de los mismos con la cantidad del líquido, dejando de lado la variable de la altura del líquido en el recipiente.

También esta estrategia y este nivel de matematización se caracteriza porque se genera una revisión por parte del estudiante evidenciando qué objetos se tiene y qué otros hacen falta para resolver el problema, presentándose conflictos conceptuales al evidenciar que faltan instrumentos para solucionar la situación. El grupo evidencia que para seguir avanzando en el problema les falta saber las cantidades que están dentro de la situación y en el plano cartesiano, ya que a partir de conocimientos previos, los ejes del plano cartesiano siempre se presentaban las cantidades respectivas (D. 4, L. 31- 39). Les hace falta determinar las cantidades de los recipientes para establecer características del problema y de esta forma, caracterizar la posible situación problema en la que se va basará la secuencia de tareas.

Luego de ello, el profesor les da 15 minutos más para que terminen de contestar las preguntas, para dar inicio a la socialización de los diferentes grupos y hacerla en la constelación de práctica, las ideas que surgen son (Video del 22 de mayo de 2015):

1. Las gráficas cartesianas representan un cambio respecto a los recipientes, pero sin relacionar ni reconocer que variables.
2. Según la forma del recipiente y la cantidad de líquido cambia la gráfica cartesiana.
3. Las gráficas representan que tan lleno están los recipientes según la forma y la capacidad.
4. Para entender más la situación, falta determinar las medidas en el plano cartesiano, en cada eje.
5. Cada gráfica cartesiana se relaciona con un recipiente.

Estas ideas expuestas entre las comunidades permiten hacer conexiones entre ellas consolidando la constelación misma por medio de la participación y la negociabilidad de las ideas expuestas en la socialización (Wenger, 2001).

Además, los estudiantes realizan una toma de conciencia ante la reflexión que se realiza con los objetos que cuentan para solucionar el problema (Idea 1- 2- 3- 5) y cuales hacen falta (Idea 4) relacionada a la estrategia de problematización con el nivel general de la matematización, como se evidencia en las ideas expuestas en el grupo.

6.2 TAREA 2.

La tarea dos comienza mostrando a los estudiantes el simulador de la actividad, pero ahora en el plano cartesiano se pueden evidenciar las cantidades presentes en el eje x y en el eje y. Por lo tanto, ahora las preguntas orientadoras van dirigidas a resaltar esas cantidades y relacionarlas con los recipientes. Las preguntas son: (1) ¿Cuál de los recipientes es el más alto? (2) ¿Cuál recipiente tiene mayor capacidad? (3) ¿Qué medidas presenta cada uno de los recipientes? (4) ¿Cuáles son los datos que se arrojan en el problema? (5) Intente asociar cada recipiente con una gráfica cartesiana.

El profesor realizó la última pregunta teniendo en cuenta algunas conclusiones que se presentaron en la tarea número uno, ya que algunos estudiantes asociaron la gráfica lineal (color verde) con el recipiente cilíndrico aun sin poder establecer porque se presenta dicha relación.

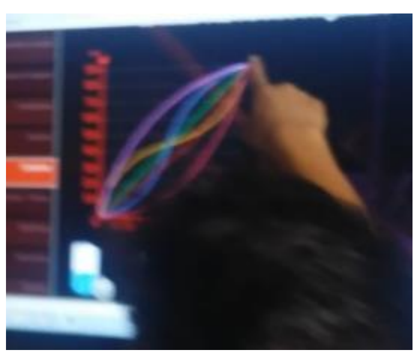
Teniendo en cuenta las instrucciones de la tarea, algunos estudiantes se levantaron del puesto para ir hacia el televisor donde está reflejado el simulador para indagar los aspectos de la tarea, como se puede evidenciar en el fragmento de transcripción del día 22 de mayo de 2015.

DIÁLOGO 5.

(1) **[...] Q:** Todos tienen la misma altura.

(2) **P:** ¿Por qué todos tienen la misma altura?

(3) **Q:** Porque todos llegan acá [*Señala el punto de unión de todas las gráficas cartesianas dentro del simulador, gráfica 16]*.



Gráfica 16. Fuente propia.

(4) **L:** Todos llegan a 90 centímetros.

(5) **P:** Todos llegan acá *[Señala con una hoja el mismo lugar donde señalo el estudiante Q, gráfica 16]*.

(6) **L:** Y a todos les caben 90 litros que es el máximo. **[...]**

Los estudiantes dedujeron que a partir de las gráficas cartesianas se establecen las medidas de los recipientes, mencionando que todos tienen la misma medida de altura y capacidad máxima, 90 centímetros y 90 litros respectivamente. En esta conversación, se puede evidenciar un primer aspecto acerca de la constitución del objeto mental, ya que, como lo menciona Freudenthal (1983), lo primero que se debe realizar es detectar la variable, por lo tanto, los estudiantes reconocen volumen y altura como las variables a trabajar (D.5, L. 4 - 6).

Con la ayuda de las gráficas, los estudiantes están en la estrategia de reflexión y en la etapa referencial de matematización, ya que una de las características es el uso de instrumentos que le permite al estudiante avanzar con el problema, descubriendo características de los recipientes y el plano cartesiano (D.5, L.5).

El problema que se presentó en los estudiantes se centró en que no concluían a que hacía referencia dichas medidas ya que las discusiones empezaron a dirigirse hacia los recipientes y otros hacia el líquido en los recipientes, debido a unas preguntas que el profesor realizó a los estudiantes:

DIÁLOGO 6.

(1) **[...] P:** Es que ustedes empezaron a decir que esto *[señalando el eje x de la gráfica]* son litros del recipiente.

(2) **Grupo:** ¡No! Del agua.

(3)**Q:** Es la misma vaina.

(4) Grupo: ¡No!

(5)**Q:** La misma vaina, porque cuando se llena tiene 90 litros pero de agua.

(6) **Grupo:** jajajajaja.

(7) **L:** Por eso profe, entonces todos los tarros tienen 90 centímetros con diferente forma, y todos tienen 90 litros.

(8) **P:** Pero ¿de qué?

(9) **G:** De líquido.

(10) **L:** De agua.

(11) **Otros:** De tarros.

(12) **P:** Espere aclaramos algo, vamos primero con los tarros.

(13) **L:** 90 centímetros miden todos los tarros.

(14) **P:** Ok, el tamaño son 90 centímetros todos los tarros.

(15) **L:** A tope, le caben 90 litros.

(16) **P:** A tope significa a capacidad máxima.

(17) **L:** Entonces 90 y 90, 90 centímetros y 90 litros, a pesar que todos tienen diferentes formas a todos les cabe 90 litros y miden los mismos 90 centímetros.

(18) **P:** Eso. Entonces ahora les pregunto, *esto [señalando a las gráficas cartesianas de colores]* hacen referencia al tarro o al agua.

(19) **G y L:** Al tarro.

(20) **Curso:** ¡No!

(21) **L:** A las dos.

(22) **Curso:** No.

(23) **L:** Una relación una con la otra.

(24) **Curso:** … **[...]**

Cabe resaltar que durante esta discusión con los estudiantes frente al simulador el grupo COMANDO 17 estuvo pendiente de las ideas expuestas en algunos momentos, tomando algunas ideas del mismo (Ver video 22-mayo-2015) para poder avanzar y contrastarlas en el grupo.

Acabada la discusión con los estudiantes, COMANDO 17 llama al profesor para exponer algunas ideas que se fueron generando como respuesta a las preguntas y contrastarlas al profesor, fragmento de transcripción del día 22 de mayo de 2015:

DIÁLOGO 7.

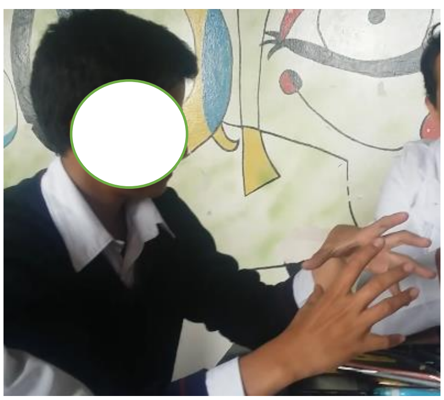
(1) **R:** Bueno, frente al primer punto… *[Es interrumpido por el profesor]*.

(1) **P:** ¿Cuál es el primer punto?

(2) **R:** De acuerdo a las gráficas, ¿Cuál de los recipientes es el más alto?

(3) **P:** Listo, ¿Cuál de los recipientes es el más alto ahí? *[Señala con una regla hacia el simulador]*.

(4) **R:** Se puede considerar el más alto el esférico *[con las manos hace referencia al recipiente esférico, Gráfica, 17]*.



Gráfica 17. Fuente propia. Gráfica 18. Fuente propia.

(5) **P:** ¿Pero sí están viendo las gráficas?

(6) **R:** Es que viendo los gráficos es como si todos fueran al mismo punto *[Señala al simulador, gráfica 18]*, parece que todos son iguales, sólo que las mismas curvas parecen onduladas y… *[Es interrumpido por su compañero x]*

(7) **X:** O profe, ¿Podemos poner las dos teorías? La de… tanto del gráfico *[Refiriéndose a las gráficas cartesianas]*, todas son iguales… heee…. *[Se queda en silencio]*.

(8) **P:** Por eso la pregunta, de acuerdo a las ¡gráficas! *[Entonando la palabra gráficas con mayor fuerza]* y no a lo visual.

(9) **X:** Entonces todos serían iguales.

(10) **P:** ¿Para todos serían iguales?

(11) **T:**Arrancan en el mismo punto y terminan en el mismo punto

(12) **P:** Ok, entonces para todos son iguales. R dice que todos llegan al mismo punto.

(13) **R:** *[R mueve la cabeza en afirmación a la idea]* **[...]**

Respecto al desarrollo de esta primera idea, los estudiantes pudieron avanzar al contrastar dos maneras de visualizar al fijarse más en la visualización de los gráficos cartesianos dada la autorización implícita en la entonación fuerte de la palabra *gráficas* emitida por el profesor (D. 9, L 8).

Se sigue la conversación pero enfocada ahora a las cantidades expuestas en el problema y más específico, en las gráficas cartesianas.

DIÁLOGO 8.

(1) **[...] P:** Bueno, miremos, ¿en qué se está midiendo el eje x?

(2) **R:** Litros.

(3) **P:** ¿Estamos todos hablando de lo mismo?

(4) Grupo: Litros.

(5) **P:** Ok, litros. Ahora el eje y

(6) Grupo: Centímetros.

(7) **P:** Listo, ahora miremos los recipientes. ¿Qué forma tiene el primero?

(8) **X:** Mmm… Pues cilíndrico *[Con las manos hace referencia al recipiente cilíndrico, gráfica 19]*

Gráfica 19. Fuente propia.

(9) **P:** Suponiendo las gráficas *[Gráficas cartesianas]* ¿cuáles son las dimensiones de ese cilindro?

(10) **Grupo:** …. *[Se genera un silencio y miran al simulador]*

(11) **X:** 90 litros.

(12) **P:** ¿Si?

(13) **X:** Sí.

(14) Grupo: Sí.

(15) **P:** Ok, ¿Por qué todos están diciendo que todos tienen 90 litros?

(16) **L:** Pues porque todos están llegando a lo mismo.

(17) **P:** Según lo que dicen, todos llegan al mismo punto.

(18) **X:** Pues según la gráfica. Porque hay onduladas que pueden pasar.*[La ondulación hace referencia a la forma de la gráfica cartesiana]*

(19) **P:** O sea, lo que usted quiere es estirar las gráficas.

(20) **X:** No, pues… jajajaja

(21) **Grupo:** jajajajaja

(22) **X:** Es que según las gráfica.

(23) **P:** Sí, según la gráfica como está ahí. Pero usted la puede intentar modificar y estirarlo es válido, pero la pregunta es: ¿Por qué la quiere estirar?

(24) **X:** Pues… para… saber…mmm… para saber cual tiene más capacidad.

(25) **R:** No es capacidad… si no… mmm…

(26) **X:** Es que es complicado estirarlas porque… es que igual la tabla sólo llega hasta noventa.

(27) **R:** Si se refiere a altura todos llegan a 90 centímetros.

(28) **P:** Pero a qué se refiere con los 90 centímetros ¿Qué es?

(29) **R:** La altura.

(30) **P:** ¿De qué?

(31) **X:** De los recipientes.

(32) **P:** Ok, entonces la primera pregunta es: ¿Cuál de los recipientes es el más alto? Entonces R dice que todos tienen la misma altura.

(33) **R:** *[Mueve la cabeza afirmando la idea]*.

(34) **P:** ¿Todos estamos de acuerdo con eso?

(35) **R:** Es que es de lógica, todos van a 90 centímetros.

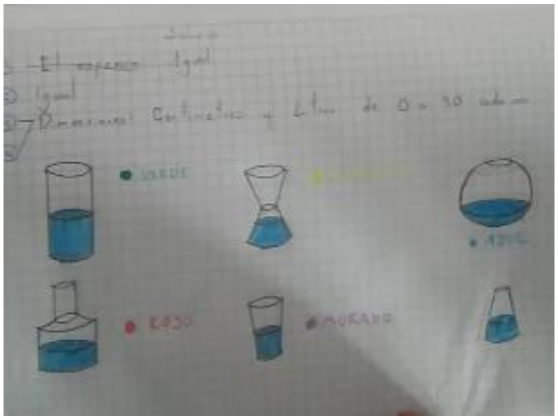
(36) **P:** Ok, y con la otra pregunta ¿Cuál de los recipientes presenta mayor capacidad?

(37) **X:** Todos llegan a 90, entonces es 90 en todo.

(38) **P:** Ok, es todo 90 **[...]**

Acabada la conversación, el profesor les pide a los estudiantes que comiencen a realizar la petición de asociar cada gráfica cartesiana con un recipiente, que buscaran la forma de relacionarlas de acuerdo a las ideas preliminares y trabajadas hasta el momento. Por lo tanto, los estudiantes comenzaron a dibujar en sus cuadernos la forma de los recipientes y la forma en que asociaron las gráficas cartesianas fue mediante los colores (gráfica20).

Las ideas que el grupo tuvo en cuenta para hacer la relación fue la forma de los recipientes, mencionando que el recipiente cilíndrico le corresponde la gráfica cartesiana de color verde, ya que la forma del recipiente es recta, por lo tanto, cada asociación lo intentaron realizar mediante la forma del recipiente.



Gráfica 20. Fuente propia.

Al finalizar la clase, se realizó una socialización respecto a lo trabajado en la tarea 2, obteniendo las siguientes ideas (Ver video 22 de mayo de 2015 - II):

1. Todos los recipientes tienen la misma altura, todos son iguales, ya que todas las gráficas cartesianas llegan al mismo punto, obteniendo que todos los recipientes tienen 90 centímetros de altura.
2. Todos los recipientes tienen la misma capacidad, todos son iguales, ya que todas las gráficas cartesianas llegan al mismo punto, obteniendo que todos los recipientes tienen 90 litros de capacidad.
3. Las dimensiones que juegan en el problema son centímetros y litros, haciendo referencia a la altura del recipiente y la capacidad del mismo.

Luego de socializar las anteriores ideas, se les mostró a los estudiantes el simulador para que pudieran contrastar sus respuestas a la petición de asociar un recipiente a una gráfica cartesiana de acuerdo con lo evidenciado en el simulador, pidiéndoles a los estudiantes que resaltaran cuáles tenían correctamente asociadas y cuáles no. Dentro de esta socialización la idea más fuerte es que hay recipientes opuestos, por lo tanto las gráficas también podrían llegar a ser contrarias, como se muestra en el siguiente fragmento de transcripción del día 22 de mayo de 2015:

DIÁLOGO 9.

(1) **[...]P:** Vamos mirando y al final las preguntas.

(2) **L:** La gráfica 4 y la 6 son la misma pero al revés.

(3) **P:** ¿Es igual pero al revés?

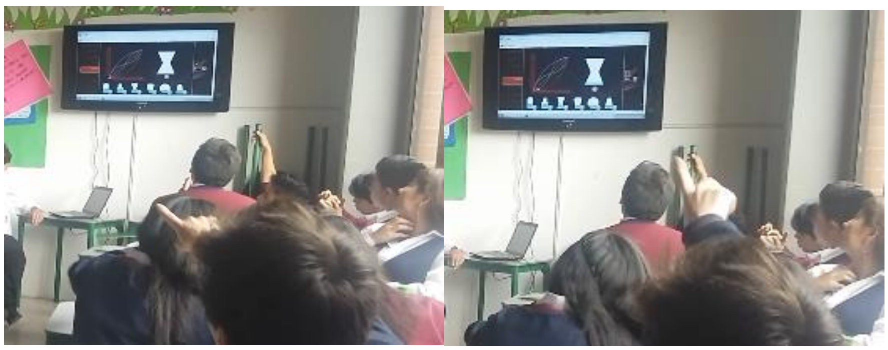
(4) **L:** Si.

(5) **P:** ¿Ahí hay gráficas que sean iguales pero al revés?

(6) **L:** La amarilla y la azul

(7) **P:** ¿Y hay más?

(8) **K:** La que están así y así *[Con la mano hace una curva ascendente y una descendente, refiriéndose a las gráficas rosada y lila, gráfica 21]* **[...]**



Gráfica 21. Fuente propia.

Al realizar la simulación muchos estudiantes no comprendían porque el simulador asociaba la gráfica cartesiana con su respectivo recipiente, por lo tanto los estudiantes resaltan una existencia de una ausencia ubicándose en la estrategia de problematización relacionado con el nivel referencial de la matematización, ya que comenzaron a atacar la situación presentada limitándose sólo al contexto del problema, evidenciando que hay vacíos conceptuales para la solución de la situación ya que sólo asociaron la forma del recipiente con las gráficas cartesianas y al resaltar ellos mismos que las relaciones que habían construido estaban erradas, no pudieron encontrar la razón de su error.

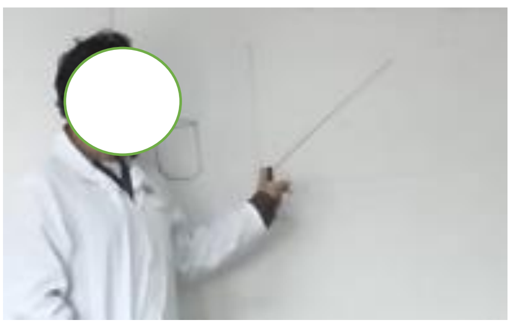
Para acabar la tarea, se les pidió a los estudiantes interactuar con el simulador, para ello, se les brindó la dirección de la página de internet donde podían encontrar el simulador y de esta manera explorar la relación gráfica cartesiana - recipiente.

6.3 TAREA 3.

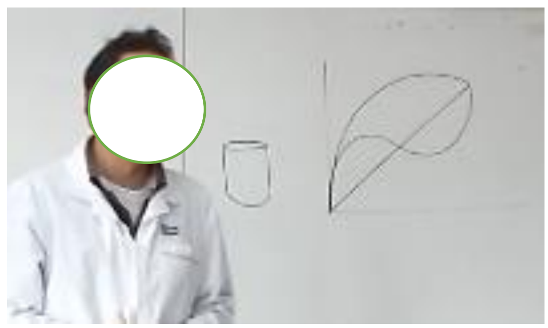
Teniendo en cuenta que la secuencia de tareas se retomó después de las vacaciones de los estudiantes, se realizó una socialización para recordar aspectos trabajados en las anteriores sesiones de clase.

El profesor comienza la socialización mencionando los resultados obtenidos en la tarea número uno la cual consistía en plantear alguna situación problema en relación a la gráfica dada por el profesor. Los resultados que arrojaron los estudiantes fueron: (1) Cada gráfica cartesiana se relaciona con un recipiente. (2) La forma del recipiente y la cantidad de líquido cambia la gráfica cartesiana. (3) Las gráficas cartesianas representan la velocidad en la que se llena el recipiente. (4) Las gráficas representan que tan lleno están los recipientes según la forma y la capacidad (Ver video 23 de julio de 2015).

Luego de retomar estas ideas, se le recordó a la constelación de práctica que la última petición fue asociar cada gráfica cartesiana a un recipiente, tomando como ejemplo la gráfica lineal (verde) y el recipiente de forma cilíndrica (gráfica 22).



Gráfica 22. Fuente propia.



Gráfica 23. Fuente propia.

El profesor toma el recipiente cilíndrico ya que muchas comunidades de práctica asociaron correctamente dicho recipiente con la gráfica lineal (verde) y que no pudieron asociar tan fácilmente los recipientes respectivos a las otras gráficas cartesianas. Luego dibuja en el tablero algunas de las gráficas cartesianas (gráfica 23).

Al tener esa idea, el profesor recalca que la idea más fuerte que se mencionaba en la situación, era que las gráficas cartesianas representaban la forma de los recipientes y recuerda algunos aspectos del simulador. Al terminar de recordar esos aspectos vuelve a mencionar la pregunta ¿Qué me representan las gráficas cartesianas en relación a la situación? Obteniendo algunas respuestas como se muestra en la transcripción del día 23 de Julio de 2015:

DIÁLOGO 10.

(1) **[...] W**: Como se llena el vaso.

(2) **P:** ¿Cómo se llena el vaso? ¿Esto *[Señala las gráficas dibujadas en el tablero]* me representan como se llena el vaso?

(3) **B:** La forma del recipiente y…. *[Corta la idea y se queda en silencio]*

(4) **P:** ¿Es la forma del recipiente?

(5) **L:** No, representa la *cantidad [Hablan muchos estudiantes al tiempo, entre ellas se escucha que representa la cantidad, la forma del recipiente]*

(6) **P:** Levantan la manito, gracias.

(7) **L:** Representa según la medida que va el vaso y como aumenta la cantidad y la altura del líquido, por eso en el eje de abajo están los litros y en el otro están los centímetros.

(8) **P:** Ok, entonces ya P está señalando… *[El curso se ríe]*

(9) **L:** L

(10) **P:** Perdón, L está señalando unas cantidades. ¿Acá *[Señala el eje y]* que cantidad hay?

(11) **W:** Litros.

(12) **P:** ¿Acá que cantidad había? Por eso les digo si hicieron la tarea de revisar el simulador.

(13) Curso: Los centímetros.

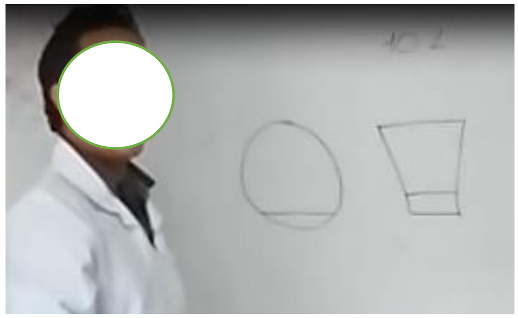
(14) **P:** Ok, acá *[Eje y, coloca la unidad cm]* y a ¿Acá? *[Señala el eje x]*.

(15) Curso: Litros.

(16) **P:** Ok, litros *[Escribe en el eje x Litros]* **[...]**

El profesor les recuerda que todas las gráficas cartesianas llegaban a un mismo punto, por lo tanto, el curso recuerda que la capacidad de los recipientes es 90 litros y 90 cm de altura. El profesor vuelve a retomar la pregunta ¿Qué representan las gráficas cartesianas en la situación? El estudiante L vuelve a mencionar la idea que cada vez que se aplica un líquido a un recipiente cambia la capacidad y la altura al mismo tiempo. El estudiante R menciona que dentro de la situación también jugaría la velocidad en la que se llenan los recipientes, pero el profesor empieza a enfocar la pregunta en un contexto real imaginable para el estudiante, expresando que el tiempo que gaste para llenar un recipiente es indefinido, bien se podría tardar un minuto como se podría gastar 3 meses, pero en ninguna de ellas la forma en la que se llena un recipiente cambiaría.

Luego de aclarar que la variable de tiempo no juega dentro de la situación, se vuelve a trabajar en la pregunta ¿Qué representan las gráficas cartesianas en la situación? Se mencionan algunas ideas que la forma del recipiente hace cambiar la forma en la que se llena el recipiente. El profesor toma el ejemplo del recipiente cilíndrico y el cono truncado con base mayor (gráfica 24) y expresa que los gráficos cartesianos deben corresponder a algo de los litros y los centímetros.



Gráfica 24. Fuente propia.

Un estudiante K menciona que la relación que existe es que a cada litro que se le suministre al recipiente también va a cambiar su altura de centímetros, como se evidencia en el siguiente fragmento de transcripción del día 23 de julio de 2015:

DIÁLOGO 11.

(1) **[...] K:** Los centímetros cambian de acuerdo a los litros, si meto un litro cambia los centímetros.
(2) **J:** No entiendo.
(3) **P:** ¿Por qué no?
(4) **G**: Es lo mismo que dijo L al principio.
(5) **P:** Espere organizamos *[Una estudiante levanta la mano]*.
(6) **T:** Los litros dependen de los centímetros.
(7) **P:** ¿los litros dependen de los centímetros?
(8) **Curso:** *[Se genera una discusión, unos a favor y otros en contra]*.
(9) **P:** Por favor, todos van a participar pero de a uno.
(10) **L:** Yo que me acuerde, me enseñaron que el eje y depende del eje x, por lo tanto, los centímetros dependen de los litros. **[...]**

El profesor explica lo que L habló en su intervención (D.10,L.10), sin usar un lenguaje matemático, pero el estudiante en medio de la explicación del profesor expresa que la variable independiente es la que está en el eje x y la variable dependiente está en el eje y.

El profesor explica la idea de dependencia e independencia, expresando que la variable dependiente varía de acuerdo a los cambios presentes en la variable independiente. Los conceptos de dependencia e independencia el curso los asocia con la situación problema, mencionando que los centímetros dependen de los litros, es decir, los litros es la variable independiente.

Se puede evidenciar otro ítem que expresa Freudenthal (1983) para establecer la constitución del objeto mental dependencia de variables, reconociendo cuál es la variable dependiente (altura del líquido) e independiente (volumen del líquido) y estableciendo un patrón de cambio de las variables, como se evidencia que por cada litro suministrado de líquido, la altura del líquido cambia en el recipiente (D.11, L. 1).

Una vez acaba la explicación, el profesor les hace las preguntas a los estudiantes para que comiencen a trabajar en las comunidades de prácticas: ¿Cuáles son las variables que juegan en la situación? y ¿Qué representan las gráficas cartesianas en la situación?

La anterior socialización, se hizo para que los grupos de trabajo realicen un proceso de metacognición y metareflexión, procesos correspondientes a la estrategia de reflexión relacionado con el nivel situacional, dada por la pregunta ¿Qué aspectos están involucrados en las conjeturas y cómo se pueden usar para resolver la situación?, haciendo una reflexión de lo que se tiene y la forma de usarlo para darle una solución a la situación. Según la socialización se tiene las medidas de los recipientes (P. 56, D.10, L. 2), las variables que juegan en la situación (D. 10 L. 10 - 15), una idea preliminar de la relación entre las variables (D. 10 L. 1) y una posible relación entre las gráficas cartesianas y los recipientes (D. 10 L.7).

Se les pide a los grupos que armen los grupos de trabajo, para que sigan avanzando en la secuencia de tareas. Al armar el grupo COMANDO 17 sólo está compuesto por cuatro integrantes, T, X, M y R.

La conversación comienza mencionando que la altura depende de los litros, resaltando que las variables que juegan en la situación son litros, centímetros, pero vuelven a caer en que la variable tiempo está en juego dentro de la situación, ya que para ellos hay algunos recipientes que se llenan más rápido que otros, en ese momento el profesor es llamado al grupo para darle a conocer esta idea de tiempo, como se evidencia en el siguiente fragmento de transcripción del día 23 de julio de 2015:

DIÁLOGO 12.

(1) **[...] R:** Es que con el tiempo, la gráfica daría como hasta por *acá [Alarga una de las gráficas cartesianas fuera del recuadro]*.

(2) **P:** Si yo tengo dos *recipientes [Toma dos esferos*] Este *[Señala el de la mano derecha]* se demora cinco segundos en llegar acá *[Señala la gráfica cartesiana, en el punto de mayor capacidad y altura]* y si este *[Señala el esfero de la mano izquierda]* se demora tres días ¿La gráfica cambia?

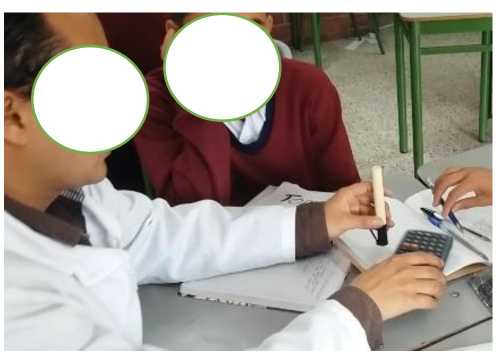
(3) **X:** Es que… si… es que deben llegar al mismo punto. Entonces mire, en cinco segundos llegará acá *[Señala la gráfica cartesiana, en el punto de mayor capacidad y altura]* pero aun así si se demora dos días también va a llegar acá *[Señala la gráfica cartesiana, en el punto de mayor capacidad y altura]*.

(4) **P:** Es claro lo que está diciendo del tiempo *[Señala a x]* **[...]**

Después de esa intervención por parte del profesor, la discusión ahora se centra en que algunos recipientes se llenan más rápido que otros, ya que vuelven a analizar la situación desde lo visual y expresan que unos recipientes se llenan más rápido que otros. Para ello, el profesor les coloca un ejemplo, transcripción del día 23 de julio de 2015:

DIÁLOGO 13.

(1) **[...] P:** Pensemos que tengo estos recipientes *[Toma un marcador y una calculadora, gráfica 25]* y a ambos los lleno con la misma cantidad de líquido. Este *[Se refiere al marcador]* aumenta hasta acá (gráfica 26) y *este [Se refiere a la calculadora]* ¿también va a llegar hasta aquí?

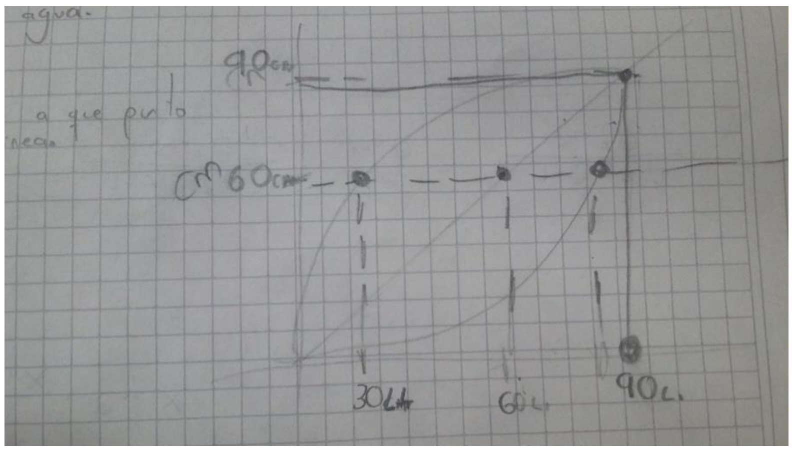


Gráfica 25. Fuente propia.

Gráfica 26. Fuente propia.

(2) **T:** No, por la forma **[...]**

El profesor les pide que analicen muy bien la situación y se retira del grupo. La comunidad de práctica comienza a indagar cuáles serían las alturas de algunos recipientes de acuerdo a la cantidad de líquido que se le suministre al recipiente, evidenciando que algunos recipientes al aplicar la misma cantidad de líquido la altura de acuerdo al recipiente varían, haciendo que algunos cambios de alturas sean mayores y otras sean menores. Todo lo hacen desde una gráfica donde dibujan tres gráficas cartesianas (Lineal, exponencial y logarítmica) y colocan algunas medidas obteniendo información de la gráfica (gráfica 27).



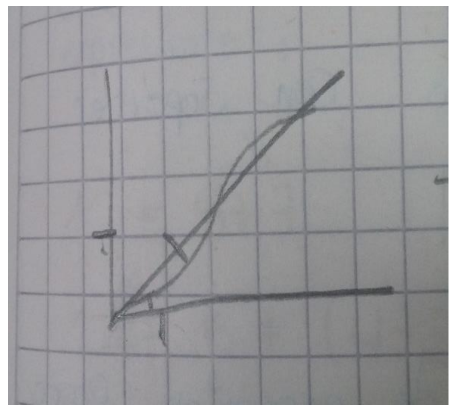
Gráfica 27. Fuente propia.

El fenómeno de variación ocurre espacio temporalmente pero la dinámica de la situación se captura a través de identificar que una unidad de cambio en la variable independiente produce distintos cambios en la variable independiente según dos aspectos: (1) el recipiente y (2) la cantidad presente en la variable independiente. De estas cuestiones mencionadas los estudiantes están aproximándose a la dinámica de la situación según el aspecto 1.

La discusión indica el costo de quitar de la dinamicidad de la situación la variable tiempo, se trata de volver la situación meramente relacional y atemporal. Hay un choque entre la idea de variable como hecho dinámico y la idea de variable como nombre.

Luego de ello, los estudiantes vuelven a retomar la idea del profesor, que a misma cantidad de líquido en diferentes recipientes los cambios de altura del líquido son diferentes, volviendo a tomar como instrumentos para su idea un lápiz y una calculadora (gráfica 28) y hacen la simulación que si ambos recipientes se llenan con 10 litros la altura en el lápiz sería mayor que en la calculadora

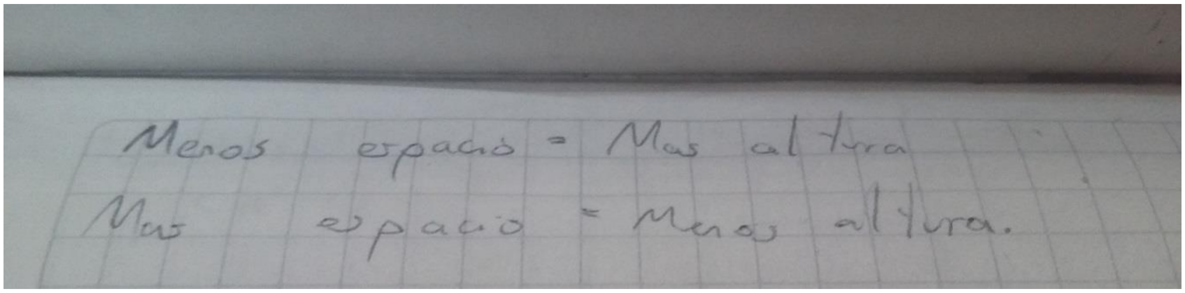
(Ver video del 23 de julio de 2015) ya que la calculadora presenta medidas mayores al ser más ancho. Luego realizan la idea contraria, llenar ambos recipientes hasta que el líquido alcance una altura de 10 centímetros en los recipientes, y se preguntan ¿En cuál recipiente hay mayor cantidad de agua? Y el grupo llega a la idea que la calculadora tendría mayor cantidad de agua ya que para llegar a esa altura se debe aplicar gran cantidad de líquido. Los estudiantes hacen uso de un instrumento más próximo a la experiencia cotidiana contrastado con el uso de instrumentos más abstractos: calculadora, lápiz, simulador y plano cartesiano.



Gráfica 28. Fuente propia. Gráfica 29. Fuente propia.

Se puede resaltar que la estrategia de reflexión está teniendo efecto sobre el grupo; utilizando diferentes instrumentos para avanzar en la solución del problema generando nuevos conceptos que le permite desarrollar una idea que posiblemente pueda dar solución al problema o al menos les permite avanzar en la solución. En este momento se relaciona con el nivel de matematización referencial, al hacer uso de instrumentos (Calculadora y lápiz), ya que les permite ir generando procesos y conceptos que brindaban solución o avances a la situación (gráfica 28).

Los estudiantes vuelven a la situación original y toman como ejemplo el recipiente cilíndrico y el recipiente esférico, pensando en la misma simulación de verter una misma cantidad de líquido y establecer en cuál de los recipientes se presenta mayor altura. Obteniendo la conclusión de que a menos espacio en los recipientes el líquido toma más altura, pero a mayor espacio en el recipiente menos altura toma el líquido (gráfica 29). Otra de las conjeturas hechas por el grupo de trabajo fue que los centímetros dependen de los litros del líquido suministrado (gráfica 30), definiendo litros como la cantidad de agua pero la altura está siendo asociada al recipiente.



Gráfica 30. Fuente propia.

Por lo tanto, con la última idea en el grupo, se establece que realizaron un proceso de metareflexión y metacognición y relacionado con el nivel general, el estudiante genera una toma de conciencia respecto a los instrumentos utilizados y cómo estos permiten la re significación de los objetos matemáticos trabajados obteniendo la idea que entre más espacio en el recipiente menos altura toma el líquido en el recipiente y entre menos espacio en el recipiente más altura toma el líquido.

6.4 TAREA 4.

Se les presentó a los estudiantes unas varas en las cuales está representada la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente. Para ello se les mencionó a los estudiantes las siguientes preguntas orientadoras: (1) ¿Qué representan las varas dentro del problema?

La discusión de la comunidad de práctica comienza a desarrollarse, transcripción del 31 de julio de 2015:

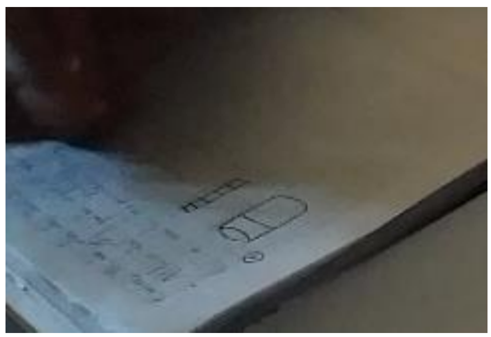
DIÁLOGO 14.

(1) **[...] X:** Yo creo que las varas… representan… están divididas en nueve líneas, ¿No? En nueve pedazos… Yo digo que esas nueve líneas representan…
(2) **R:** Nueve líneas, ¿cierto?
(3) **X:** Representan la altura del líquido según el volumen de los litros ¿No?
(4) **R:** Tiene relación.
(5) **M:** A mí se me hace que esas nueve líneas están de acuerdo con las gráficas, si por ejemplo, aquí está de 10 a noventa, está representando los centímetros.

(6) **T:** Huy si manzanita, yo pienso lo mismo que manzana *[Refiriéndose a un compañero del grupo X]*.

(7) **R:** Pues también tiene sentido lo que dice M, no sólo habla de altura, si no de volumen también, porque en ese caso, todos tendrían la misma línea, porque sería lo mismo que medir cada uno de los recipientes.

La comunidad de práctica comienza a trabajar en la posible relación que se puede establecer entre las varas y los recipientes realizando una socialización entre ellos. Comienzan con el recipiente de forma cilíndrica relacionándolo con la vara cuyas variaciones de altura de acuerdo a la cantidad de litros son las mismas (gráfica31).



Gráfica 31. Fuente propia.

Pero un integrante del grupo, menciona que no se puede realizar esa relación de recipiente – vara, ya que los recipientes no tienen marcaciones en relación a las medidas, por lo tanto, la relación que se podría establecer seria varas- gráficas cartesianas, mencionando que al haber seis varas y seis gráficas cartesianas, cada uno estaría relacionada. La discusión se centra en la relación que se debe realizar, ya que unos integrantes mencionan que la relación es recipiente – vara y otros apoyan la relación varas- gráficas cartesianas.

Dentro de esta misma discusión se refuerza la idea que la primera vara se puede relacionar con el recipiente de forma cilíndrica ya que los cambios de altura son los mismos a medida que se les aplica una cantidad de líquido, estableciendo que si las varas se relacionan con las gráficas cartesianas y si estas últimas tienen una relación con los recipientes, entonces las varas también se relacionan con los recipientes.

A continuación se refleja la discusión sobre la información que arroja las varas dentro de la situación:

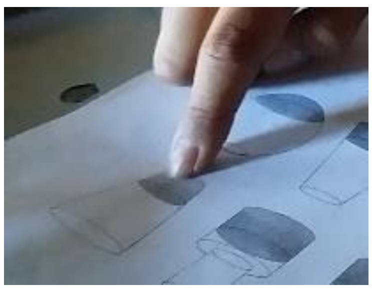
DIÁLOGO 15.

(1) **[...] X:** Yo digo que el tiempo no tiene nada que ver ahí *[haciendo referencia al problema]*.

(2) **R:** Yo digo que más que todo tiene que ver con… *[Es interrumpido]*

(3) **X:** Pues obvio tiene que ver con los recipientes y las gráficas.

(4) **R:** Yo digo que a ciertos centímetros hay cierto volumen. Tomemos estos dos, el mas poco volumen *[Señala la gráfica del recipiente de cono truncado con base menor] que es esta parte [Gráfica 32]* y más que este *[Señala la gráfica del recipiente de cono truncado con base mayor]* tiene más volumen en la parte de arriba, entonces vamos de abajo hacia arriba. **[...]**



Gráfica 32. Fuente propia. Gráfica 33. Fuente propia.

Como se puede evidenciar, los estudiantes presentan confusiones por la altura, expresando que entre más ancho el recipiente, más altura alcanza el líquido en ese recipiente y de forma contraria, entre más angosto el recipiente la altura del líquido presenta menores cambios.

Después de estas discusiones, los estudiantes concluyen que las varas expresan altura y volumen del líquido en un recipiente especifico, aclarando que las rayas marcadas en las varas representan la altura que alcanza el líquido en unos tramos y los espacios representan la cantidad de líquido suministrado en el recipiente, expresando que cada espacio entre líneas va llenando un porcentaje del recipiente, pero R cae en cuenta que al hablar de porcentaje se está hablando de manera errónea, se debería hablar sobre litros ya que están hablando de cantidad de líquido.

Luego de esto, simulan aplicar diez litros de líquido en el recipiente y de esta manera intentar observar la altura que alcanza el líquido en cada uno de los recipientes y asociarla a una de las varas del problema.

Los estudiantes llaman al profesor para exponer las ideas que se construyeron en el proceso, el profesor comienza la charla recordando ideas construidas en anteriores sesiones de clase, como se evidencia en el siguiente fragmento de transcripción del día 31 de julio de 2015:

DIÁLOGO 16.

(1) **[...] P:** Esto de acá *[haciendo referencia a las gráficas cartesianas]* ¿qué me representa?
(2) **T:** La altura del líquido según el volumen de los litros del líquido que se suministran en cierto recipiente *[Lo lee del cuaderno]*.
(3) **P:** Listo, esto *[Señala las gráficas cartesianas]* si representa lo que usted leyó, y esto *[Señala el eje x del plano cartesiano]*.
(4) **Grupo:** Los litros.
(5) **P:** Los litros, ¿de qué?
(6) **Grupo:** Los litros del líquido que se suministra.
(7) **P:** Se suministra ¿En qué?
(8) **Grupo:** En el recipiente.
(9) **P:** Y esto *[Señala el eje y del plano cartesiano]*
(10) **X:** La altura del volumen de los litros.

Se evidencia que el grupo comienza a reconocer las características del problema según las gráficas cartesianas, identificando las variables que juegan en la situación y la relación que existen entre ellas.

Se puede resaltar que la estrategia de comprensión está teniendo efecto sobre el grupo; en relación a la utilidad de la resignificación (D. 16, L 2) permitiendo expresar la dependencia de las variables en la situación. Esta estrategia del experimento de enseñanza está relacionada al nivel referencial, ya que los estudiantes toman conciencia de las variables que se han consolidado durante el proceso de matematización, haciendo al mismo tiempo una comprensión de éstos, entendiendo que las variables que juegan en el problema son litros y centímetros del líquido en los recipientes (D.16, L 4 -10), pero a su vez, existe una relación entre ellas, generando una relación de dependencia entre los centímetros del líquido en los recipientes de acuerdo la cantidad de litros suministrados en los recipientes (D.16, L 2).

Luego, se pasa a la discusión de las varas y la interpretación que el grupo le da a dichos objetos. El grupo expone que cada vara está divida en nueve espacios, y los cuenta en la primera vara *[Gráfica34]*. Por lo tanto, cada vara está asociada al volumen del líquido según su altura, pero se retoma esta última idea, recordando las últimas ideas que se expusieron en la última clase, la cual era la dependencia que existía entre las variables.

El grupo recuerda que la altura del líquido depende de los litros del líquido que se suministra en un recipiente cualquiera, ya que entre más líquido se suministre en un recipiente la altura iba a cambiar, pero se recuerda en la unidad de medida ya que el volumen de un líquido se puede tomar en cm^3 o mm^3.

Gráfica 34. Fuente propia.

Teniendo en cuenta las unidades, se retoma la conversación mencionando que cada espacio en las varas que representaba, con lo cual el grupo responde que cada espacio son diez litros de líquido que se va aplicando al recipiente. El grupo comienza a asociar cada vara con un recipiente de acuerdo a las características que se presentan en la vara y la forma en la que la se presentan los cambios de altura cada vez que se suministran diez litros.

Como es habitual en el grupo, se relaciona la primera vara la cual presenta cambios constantes de altura del líquido con el recipiente de forma cilíndrica ya que el recipiente se llena de una manera “constante” tanto la altura del líquido como el volumen del mismo.

En el siguiente fragmento de transcripción se evidencia una breve explicación en la cual el profesor quiere que el grupo tome conciencia de los aspectos de las varas y la relación con el problema:

DIÁLOGO 17.

(1) **[...] P:** Entonces, en esta vara *[Señala la primera vara, la que presenta cambios de altura constante a la cantidad de litros suministrados]* si suministro diez litros, ¿Cuál es la altura?

(2) **R:** Diez.
(3) **M:** Mas o menos 7 punto algo.
(4) **P:** Miren en las hojas, en la gráfica.
(5) **T:** Diez.
(6) **P:** Si le suministro veinte.
(7) **M:** Veinte.
(8) **R:** Va aumentando.
(9) **P:** Si le boto treinta.
(10) **R:** mmm…
(11) **P:** Si boto cuarenta.
(12) **T:** Tienen la misma distancia.
(13) **R:** Cuanta altura toma dependiendo cuando se llene **[...]**

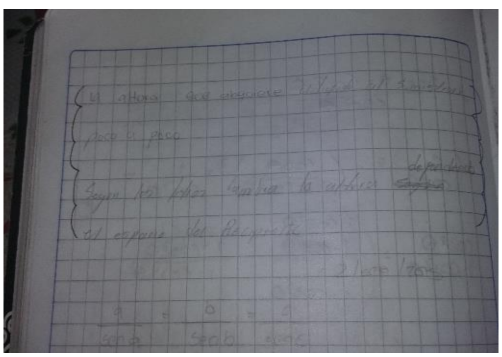
La discusión se centra en evidenciar los cambios de altura de acuerdo a la cantidad de litros que se suministra en los recipientes, pues al aplicar diez litros de líquido la altura del líquido cambia de acuerdo al recipiente al cual se suministra el líquido, tomando como ejemplo dos recipientes los cuales al suministrar diez litros de líquido su altura es igual al suministrar cuarenta litros de líquido en el otro recipiente, pero el grupo comienza a dar varios puntos de vista respecto al desarrollo de su proceso, por lo tanto, el profesor pide que esas ideas sean expuestas en el grupo mirando la veracidad de dichas conjeturas individuales.

El día 11 de agosto el grupo COMANDO 17 retoma las preguntas realizadas en la clase anterior, a partir de la primera pregunta ¿Qué interpretación le puede dar usted a las varas? El estudiante T expresa que esa pregunta ya había sido respondida pero los estudiantes M y R les recalca que están dando muchas ideas y deben obtener una sola idea entre todos los integrantes del grupo, para que todos hablen de lo mismo.

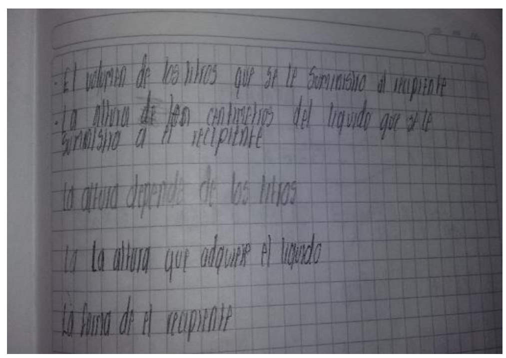
El grupo comienza a resaltar algunos aspectos del plano cartesiano, diciendo que el eje x es el volumen del líquido en litros y los asocia con los espacios de las varas, evidenciando que cada espacio es la cantidad de líquido que se ha suministrado en el recipiente. Luego, empiezan a analizar los cambios de altura expresando que hay “poco” y “mucho cambio” analizando las varas por secciones y de acuerdo a ese análisis, empiezan a asociar los recipientes con las varas. Al mencionar la palabra “cambio” el grupo está evidenciando la dinamicidad de las variables en la situación problema, resaltando propiedades de las variables, como lo menciona Freudenthal (1983).

A medida que la discusión avanza, empiezan a asociar las varas al líquido y a la forma del recipiente, ya que el recipiente es quien determina la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente. En esta discusión empieza a surgir la palabra cambio para hacer referencia a la altura del líquido. Esta palabra surge en el momento que el grupo analiza el recipiente con doble cilindro y expresa que en una parte del recipiente hay un cambio de la altura que toma el líquido al momento de llenarse, ya que la altura del líquido viene tomando ciertos cambios pero en un momento hay un cambio brusco (Ver video del 11 de agosto de 2015) en la altura del líquido.

El grupo intenta asociar las varas con cada uno de los recipientes, pero el integrante X expresa que no se deberían preocupar en hacer esa relación, ya que la pregunta es otra, dando como respuesta que las varas representan el volumen y la altura del líquido de acuerdo a la forma del recipiente, y lo escriben en el cuaderno como idea construida en el grupo (gráfica 35 y 36).



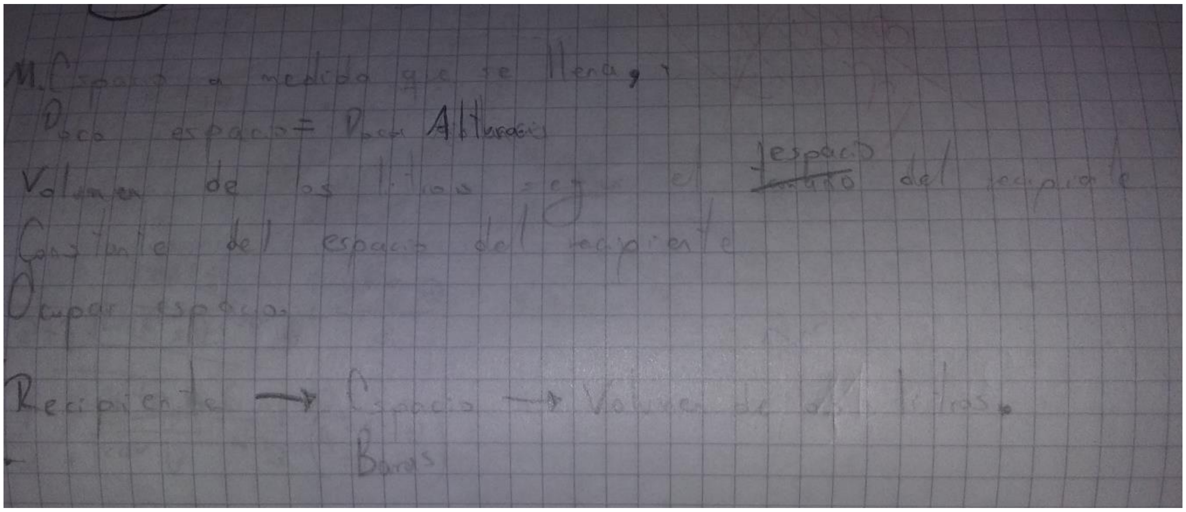
Gráfica 35. Fuente propia.



Gráfica 36. Fuente propia.

Después de eso, el estudiante T expresa otra idea (gráfica 35 y 36) que las varas representan la altura del líquido de acuerdo al volumen del recipiente suministrado en el recipiente, los estudiantes de manera individual empiezan a ver la veracidad de la idea de M y X, pero a medida que pasa el tiempo el grupo analiza las respuestas sin encontrar una forma de sustentarla.

El estudiante x expresa que ya se tiene esas dos ideas para sustentar y que se podrían manejar, pero el estudiante R menciona que la altura de los recipientes en 90 centímetros, por lo tanto, quitando la altura del líquido, las dos respuestas serian la misma, dejando como respuesta que las varas se relacionan con el volumen del líquido en los litros. Toman la decisión de llamar al profesor para contrastar las respuestas que se obtuvo a lo largo de la discusión (gráfica 37) con la opinión del profesor. Mientras el profesor llega el grupo intenta asociar en una sola idea todas las hipótesis que surgieron en el grupo contrastando que las cuatro ideas hablan del espacio que el líquido ocupa en el recipiente.



Gráfica 37. Fuente propia.

A continuación se resalta la conversación entre el grupo de trabajo con el profesor del día 11 de agosto de 2015:

DIÁLOGO 18.

(1) **P:** Bueno, ¿qué se adelantaron?
(2) **X:** Bueno, cada uno saco una hipótesis.
(3) **P:** ¿Cada uno saco una hipótesis?
(4) **R:** Si, y sacamos una conclusión. Bueno, una posible conclusión, y es que nos dimos cuenta que para contestar la segunda pregunta debemos tener clara la primera.
(5) **P:** Bueno, entonces ¿qué representa la vara?
(6) **X:** Podemos dar cada uno la hipótesis.
(7) **P:** Si claro, se supone cada uno saco una y después sacaron una general
(8) **X:** Sí.
(9) **P:** Bueno, entonces cada uno diga una y luego la general

(10) **X:** La mía, el volumen de las varas son el volumen de los litros según el tamaño del recipiente.

(11) **P:** ¿las varas son el volumen de los litros según el tamaño del recipiente?

(12) **X:** O espacio… o el espacio… o el espacio *[Mueve la cabeza de forma afirmativa de arriba hacia abajo]*.

(13) **P:** Ok.

(14) **M:** Mi hipótesis es que… es la constante del espacio del recipiente…es la constante de los litros en el espacio del recipiente… por ejemplo, acá puede haber… hemm *[Señala una de las divisiones de las varas, ver gráfica 38*] un litro, pero *acá [Señala otra sección de otra vara, ver gráfica 39]* también puede haber un litro, ¿Si me entiende? Entonces lo que hace es medir la constante según cada recipiente. Cada varita mide la forma en que se llena cada líquido, que se va suministrando.

Gráfica 38. Fuente propia.

Gráfica 39. Fuente propia.

(15) **R:** Para mí, uniendo cada cosa, lo que se está hablando es de ocupar espacio, prácticamente lo mismo que están hablando ellos dos *[Refiriéndose a sus compañeros anteriores]* porque habla más que todo del espacio que ocupa, por ejemplo, a los diez litros, con un cambio significativo, en este de acá *[Señala el recipiente de forma cilíndrica]*.

(16) **P:** ¿Qué quiere decir cambio?

(17) **R:** El espacio, como el volumen de los litros, por ejemplo, diez litros, luego otros diez litros.

(18) **P:** Pero ese cambio, ¿a qué hace referencia?

(19) **R:** Al espacio **[...]**

COMANDO 17 comienza a dar diferentes ideas que puedan dar solución a la pregunta, pero se presenta confusiones respecto a las respuestas que da el grupo, por ejemplo, para alcanzar diez litros se necesita más espacio, sin darse cuenta que están hablando es de la altura del recipiente. El profesor comienza a indagar esta confusión para despejarla, mencionando que si un punto representa diez litros, lo cual el estudiante x contesta que son diez litros y diez centímetros dependiendo lo que se vaya suministrando.

Para hacer más clara esta idea, toman las gráficas cartesianas y las colocan al lado de los recipientes (Ver gráfica 40) expresan que cada volumen le corresponde una altura en centímetros.

Gráfica 40. Fuente propia.

El profesor le pide al último estudiante que exprese la idea que tenía a la pregunta, como se puede evidenciar en el siguiente fragmento de transcripción del día 11 de agosto de 2015:

DIÁLOGO 19.

(1) **[...] P:** Bueno, y la suya *[Señala al estudiante T]*

(2) **T:**El volumen de los litros que se suministran en un cierto recipiente, si se le suministra un líquido a un recipiente uno se va a ver más lleno que otro

(3) **P:** Ok, ¿Cuál es la general?

(4) **R:** Concluimos que habla del espacio de las varas.

(5) **P:** Esto *[Señala las varas]* habla del espacio de las varas.

(6) **R:** *[Hace un gesto de equivocación]* del espacio, del espacio del recipiente.

(7) **P:** Ok, ¿Díganme que es espacio para ustedes?

(8) **M**: Es más que todo como al recipiente.

(9) **R:** Hace referencia del líquido **[...]**

El profesor les pide que recuerden lo trabajado en sesiones anteriores, ya que eso les permite ir avanzando en el problema. Se comienza por recordar lo que representa cada uno de los ejes de las gráficas cartesianas, mencionando que son el volumen de los litros suministrados en el recipiente cilíndrico, ya que este fue el tomado como ejemplo, así mismo, representan la altura del líquido que se suministra en el recipiente. Pero al momento de expresar estas ideas, se presentan confusiones a la forma de referenciar a lo cual el profesor les expresa que para avanzar se debe comprender lo realizado en sesiones anteriores y de esta forma seguir avanzando pero usando las palabras adecuadas para referirse al problema (Ver video del 11 de agosto de 2105).

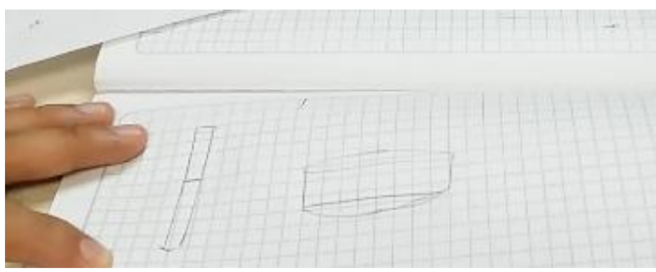
Una vez que los estudiantes empezaron a expresar adecuadamente lo que significa el eje x y el eje y, y la relación que hay entre estos dos, el profesor vuelve a retomar la discusión de las varas. Para hablar de las varas se toma la primera y el recipiente de forma cilíndrica, para expresar porque se realizó esa relación.

El estudiante x menciona que la vara representa el volumen del líquido en litros y la altura del líquido en centímetros, por lo cual, el profesor les pide que donde se puede ver cada uno de los aspectos mencionados anteriormente. El estudiante x señala que el volumen del líquido se muestra en los espacios que hay en las varas de acuerdo a cada división, las cuales el profesor encierra en óvalos (gráfica 41).

Gráfica 41. Fuente propia.

Ahora el profesor les pregunta qué representan las divisiones de las varas, ya que si estamos hablando de volumen que son los espacios de las varas donde se podría encontrar la altura del líquido en las varas. Una vez mencionadas, el profesor las resalta en las varas del grupo pero también resalta las unidades de medida de cada referencia. Teniendo en cuenta lo socializado, cada espacio son diez litros del líquido y arroja una altura diferente de acuerdo al recipiente. El profesor les pide que empiecen a analizar las varas a partir de los construido anteriormente, que a cierta cantidad de litros suministrados en el recipiente, cuál sería la altura que alcanza el líquido. Centrada la discusión en este punto, comienzan a analizar que entre más espacio del recipiente, más altura toma el líquido y entre menos espacio menos altura toma el líquido.

El profesor para aclarar la idea sobre la altura que toma el líquido de acuerdo la forma del recipiente, dibuja en un cuaderno dos recipientes, de la misma forma pero con diferente grosor (gráfica 42) para que los estudiantes imaginen si al suministrar diez litros de un líquido, en cual se va a evidenciar un mayor cambio de altura, a lo cual el grupo contesta que en el recipiente de menos grosor.



Gráfica 42. Fuente propia.

A medida de ese ejemplo, el grupo concluye que a mayor espacio del recipiente menos altura toma el líquido y a menor espacio del recipiente mayor altura toma el recipiente. Una vez construida esa idea, el profesor lleva esa idea a las varas de la situación original, expresando que a mayor altura del líquido significa que el recipiente es angosto en ese momento. El profesor les pide que a partir de esa idea, ya tienen una forma de relacionar las varas con los recipientes.

Cuando el profesor se retira, el grupo expresa que estaban tomando las ideas de forma inversa, es decir, estaban haciendo las cosas al revés. Empiezan a escribir las ideas que surgieron con el profesor en el cuaderno de cada uno (Ver video del 11 de agosto de 2015).

La siguiente sesión de clase empieza con la intervención del profesor directamente al grupo ya que son los integrantes del grupo quien le pide al profesor la socialización de los avances hasta este día, como se puede evidenciar en el siguiente fragmento de transcripción del día 20 de agosto de 2015:

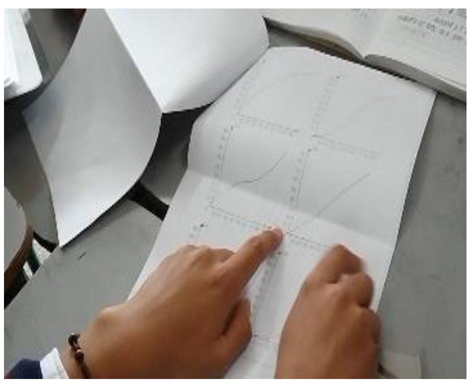
DIÁLOGO 20.

(1) **[...] P:** ¿Qué representan las varas?

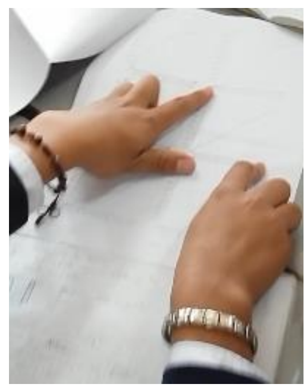
(2) **X:** La altura del líquido de acuerdo al volumen del líquido suministrado en el recipiente.

(3) **P:** ¿Cómo llegaron a esa conclusión?

(4) **R:** Con la gráfica, definimos que representa este de acá *[Señala el eje x de las gráficas cartesianas. Gráfica 43]* y este de acá *[Señala el eje y de las gráficas cartesianas. Gráfica 44]*.



Gráfica 43. Fuente propia.



Gráfica 44. Fuente propia.

(5) **P:** Ok, que representa esto *[Señala el eje x del plano cartesiano]*.

(6) **R:** Son el volumen de los litros.

(7) **P:** ¿De qué?

(8) **R:** Del recipiente… del agua.

(9) **X:** Que se suministró al recipiente.

(10) **P:** Ok, entonces es el volumen en litros del líquido suministrados en el recipiente, ¿y esta? *[Señala el eje y del plano cartesiano]*.

(11) **X:** La altura del líquido en centímetros que se suministró en el recipiente.

(12) **P:** La altura del líquido en centímetros que se suministró en el recipiente.

(13) **P:** Y esto de acá *[Señala a la gráfica cartesiana]* ¿Qué es?

(14) **R:** La altura del líquido de acuerdo a los litros que se suministran en el recipiente.

(15) **P:** Entonces las varias, ¿Qué son?

(16) **R:** Tuvimos dos ideas, una es el volumen de los litros que se suministró al recipiente y la otra es la altura de los centímetros del líquido que se le suministró al recipiente.

(17) **P:** ¿Las varitas?

(18) **X:** Si.

(19) **R:** Otra cosa es que a menos espacio significa que hay más altura.

(20) **P:** ¿Entre menos espacio más altura?

(21) **M:** No.

(22) **R:** En cuestión de las varitas.

(23) **M:** Si.

(24) **R:** Que la altura se afecta más. **[...]**

En ese instante se interrumpe la discusión porque al profesor lo llamaron desde la puerta para dar una información respecto al curso. Se retoma la conversación expresando por parte del profesor que sea lo que sea que se vaya a hablar se debe hablar claro y bien de las cosas, para tener un claro dominio del tema.

Se retoma la conversación expresando que para el grupo las varas representan el volumen del líquido en litros según la altura en centímetros del líquido, lo cual es evidente que están generando la dependencia de forma contraria. El profesor les arroja la siguiente pregunta ¿Los litros según la altura? El grupo se mantiene en silencio analizando la respuesta que se puede obtener.

El profesor toma como ejemplo el recipiente de forma cilíndrica y les pregunta ¿Qué al aplicar cierta altura de líquido en el recipiente, es posible calcular rápidamente el volumen del líquido en litros? Los estudiantes analizan esa información y el estudiante R menciona que la relación es al contrario, que de acuerdo a los litros que se suministre en el recipiente se puede calcular la altura de mejor manera, y lo justifica a partir de las gráficas cartesianas, mencionando que el eje y depende del eje x, por ejemplo, al aplicar diez litros la altura cambia mientras que los litros se mantiene independiente.

A partir de esta idea, el profesor empieza a generar una nueva discusión en relación a la dependencia de las variables como se muestra en el siguiente fragmento de transcripción del día 20 de agosto de 2015:

DIÁLOGO 21.

(1) **[...] P:** ¿Qué significa independiente?
(2) **R:** Que no cambia.
(3) **X:** Que no depende de nada.
(4) **P:** Que no depende de nada.
(5) **X:** U otro.
(6) **P:** O de otro. ¿Qué significa ser dependiente?
(7) **T:** Que depende.
(8) **R:** Que depende de alguien.
(9) **P:** Entonces, estamos hablado aquí de litros y altura. ¿Quién depende de quién?
(10) **R:** La altura depende de los litros.
(11) **P:** Entonces, ¿Qué fue lo que usted me dijo?
(12) **R:** Lo dije al revés.
(13) **M:** Lo dijo al revés.
(14) **P:** Listo, hay que tenerlo presente. **[...]**

Ahora la discusión se centra en que a mayor cantidad de litros suministrados del líquido su altura cambia más que al suministrar poco líquido, expresando que a menor cantidad su altura cambia menos pero no significa que no cambie.

Luego de eso, se vuelve a retomar la pregunta original, ¿Qué representan las varitas? El estudiante R expresa que los espacios de las varas representa el volumen en litros del líquido, y la relaciona con el eje x del plano cartesiano, para luego expresar que a diez litros suministrados, la altura que alcanza el líquido son diez centímetros.

El profesor expresa que esa relación tiene mucha coherencia, pero les hace falta una palabra clave para definir bien las ideas, dando como ejemplo que a medida que se suministra cierta cantidad de litros de un líquido algo pasa con la altura del líquido en centímetros dentro del recipiente. El grupo COMANDO 17 expresa palabras como aumentar y llenado, como se evidencia en el siguiente fragmento de transcripción del día 20 de agosto de 2015:

DIÁLOGO 22.

(1) **[...] R:** El espacio como tal, representa el volumen y la línea representa la altura.

(2) **P:** Entonces, ¿Qué significa la vara en conjunto, sin hacer esas especificaciones?

(3) **R:** La altura en centímetros según el volumen de los litros, o sea, que se le suministró al recipiente.

(4) **P:** ¿Qué significa la vara en conjunto? Les falta decir algo.

(5) **R:** mmm *[el grupo piensa en las opciones]*.

(6) **P:** Cuando usted le aplica líquido a un recipiente, ¿Que hace el líquido? *[El docente sube la mano izquierda desde la mesa]*.

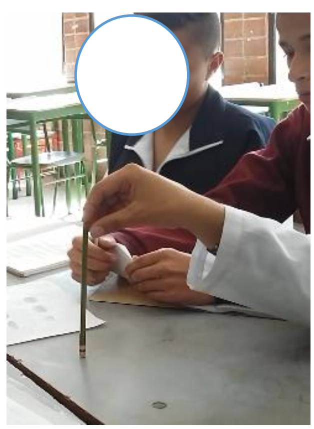
(7) **R:** Aumenta.

(8) **M:** Llena, aumenta los litros, el volumen.

(9) **P:** Entonces si el volumen aumenta, ¿Qué pasa de más?

(10) **R:** La altura aumenta. **[...]**

El profesor escuchó a COMANDO 17 mencionar que los espacios de la vara son la cantidad de litros suministrados del recipiente y las divisiones son la altura que toma el líquido en el recipiente, pero toda la vara en conjunto se representaría y toma un lápiz para hacer referencia a la vara en físico (gráfica 45). COMANDO 17 menciona que sería el espacio del recipiente, cómo se llena el recipiente. El profesor les pide que coloquen la respuesta en términos de las variables del problema y coloca el lápiz que hace el papel de vara en la mitad de la mesa. El estudiante X empieza a dar respuestas, que la vara representa la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente.



Gráfica 45. Fuente propia.

Una vez clara la anterior discusión, se pasa a relacionar cada vara con un recipiente para justificarlo, como se evidencia a continuación en el fragmento de transcripción del día 20 de agosto de 2015:

DIÁLOGO 23.

(1) **[...] P:** Este de acá *[Señala la primera vara]* a cuál se asocia
(2) **R:** Al cilíndrico.
(3) **P:** ¿Por qué?
(4) **X:** Se llena de forma constante.
(5) **P:** ¿Qué es constante?
(6) **X:** Que el llenado es constante *[Haciendo referencia a que al suministrar el líquido en el recipiente no se detiene y tampoco cambia su cantidad]*
(7) **P:** O sea, que yo llego y aplico lo mismo.
(8) **R:** O sea, que su espacio se mantiene.
(9) **P:** O sea que yo quito y pongo líquido eso no es constante.
(10) **R:** No en ese sentido de tiempo, es la forma del recipiente, se mantiene la forma.
(11) **P:** Pero hay que tener algo claro, ¿De qué variables estamos hablando?
(12) **T:** La altura y el volumen.
(13) **P:** Ok, la altura y el volumen, entonces debemos colocar todo en esos términos.
(14) **Grupo***: [Mueven la cabeza en forma afirmativa de arriba abajo]*.
(15) **P:** Entonces les hago la pregunta ¿Por qué esta vara con este recipiente *[Recipiente cilíndrico]*? De acuerdo a altura y volumen.
(16) **R:** Porque al aplicar de diez litros en diez litros, su altura va a… mmm…. A ir de igual manera, de diez en diez porque su espacio es el mismo, entonces si lo llenamos con diez litros va a adquirir diez centímetros **[...]**

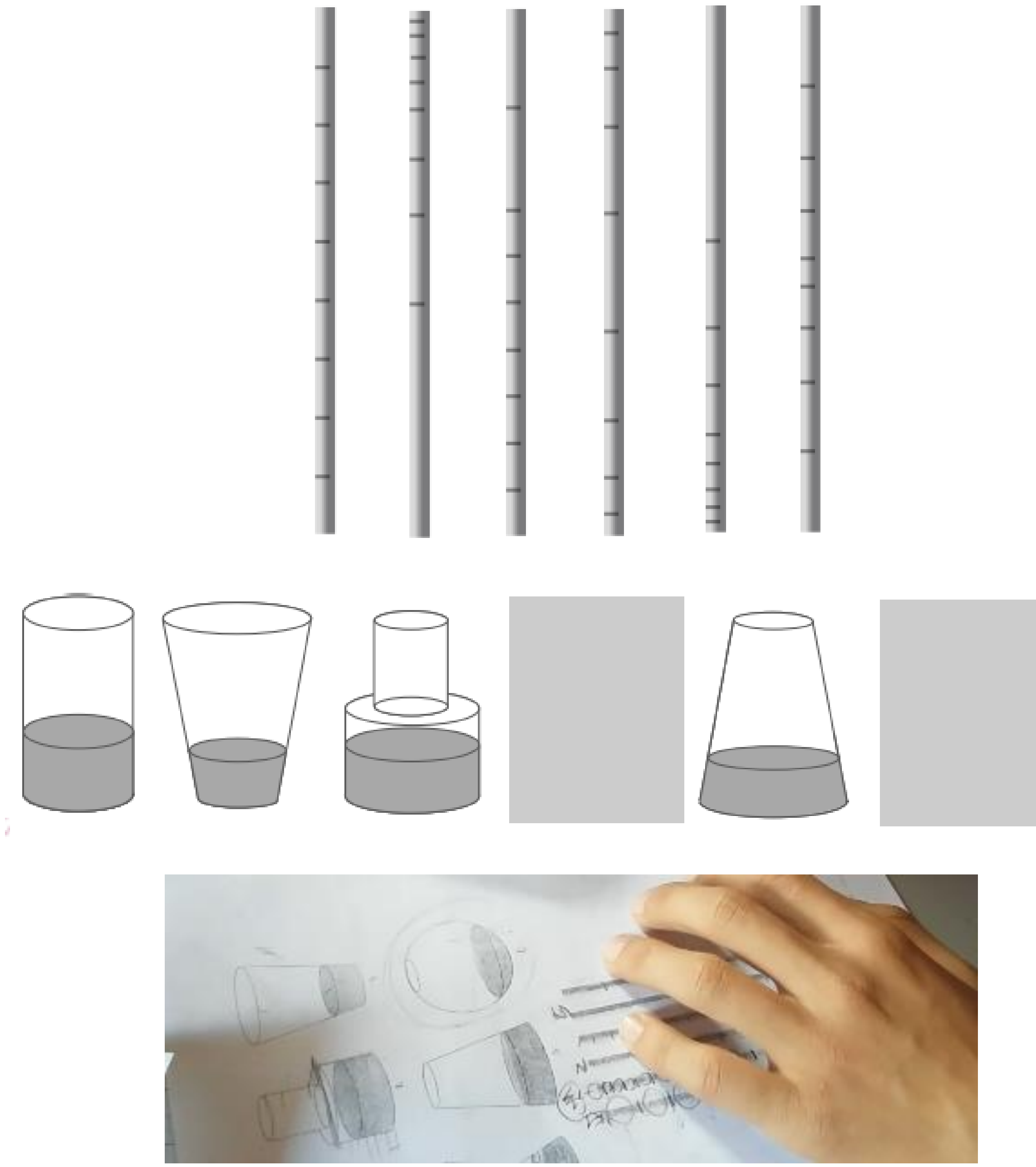
COMANDO 17 comienza a mencionar que la altura es la misma respecto a los litros suministrados en el recipiente, pero el profesor con ejemplos les hace entender que son los mismos cambios de altura, que se mantienen. Luego el profesor toma como ejemplo la segunda vara que el grupo COMANDO 17 la asocia al recipiente compuesto por dos cilindros justificando esta relación ya que en un espacio la altura del líquido es la misma pero en un punto al ser más angosto el recipiente los cambios de altura son mayores. Esta idea la justifican mediante un ejemplo dado por el profesor la sesión anterior de dos recipientes de diferente radio (gráfica 42).

De acuerdo a lo trabajado en esta sesión, el profesor les pide que justifiquen la relación de las varas con los recipientes y a su vez cada vara representa una gráfica cartesiana, que justifiquen esa relación en términos de altura y volumen del líquido.

El día 28 de agosto de 2015 COMANDO 17 comienza recalcando que entre más ancho el recipiente la altura del líquido será menor, mientras que entre más angosto el recipiente la altura que toma el líquido es mayor.

Entre los criterios que los estudiantes utilizan, mencionan que las cantidades que hay entre cada espacio de las varas es la misma, es decir, cada medición de altura contiene diez litros de líquido suministrado en el recipiente a analizar. También validan la idea que entre más ancho el recipiente, los cambios de altura son de menor medida, mientras que entre más angosto el recipiente más altura toma el líquido. Esta idea la condensan en la siguiente frase: “Mas es menos” y “menos es más” haciendo referencia en primera instancia al ancho del recipiente y el segundo a los cambios de altura (Ver video del 28 de agosto de 2015).

A partir de este criterio COMANDO 17 comienza a relacionar las varas con los recipientes (gráfica 46). El siguiente esquema evidencia la información de la gráfica 46:



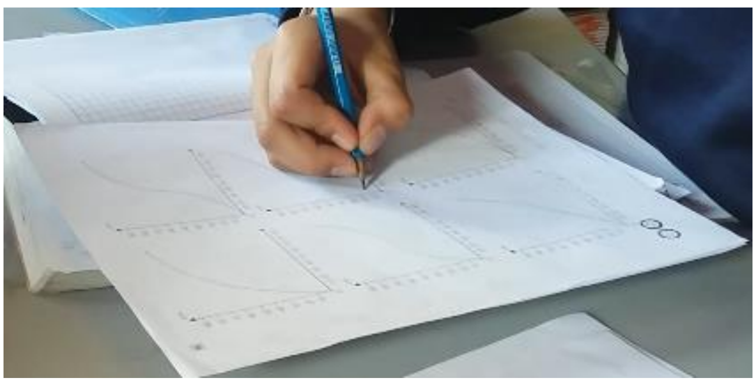
Gráfica 46. Fuente propia.

Una de las ideas que surge en la discusión, es que la vara dos y la vara cinco tienen la misma forma de llenado siempre y cuando se diera un giro de 180 grados a una de las dos, es decir, COMANDO 17 menciona: “son la misma pero al revés”, resaltando que los dos recipientes que cumplen esta característica son los conos truncados con base menor y con base mayor (gráfica 47 y 48).

Gráfica 47. Fuente propia. Gráfica 48. Fuente propia.

Al realizar esta relación entre las varas y los recipientes, los estudiantes toman las gráficas cartesianas para empezar a obtener la numerosidad sobre la altura del líquido en los diferentes recipientes tomando como primer ejemplo el recipiente de forma cilíndrica, mencionando que a diez litros, la altura que alcanzó el líquido fue de diez centímetros (gráfica 49).



Gráfica 49. Fuente propia.

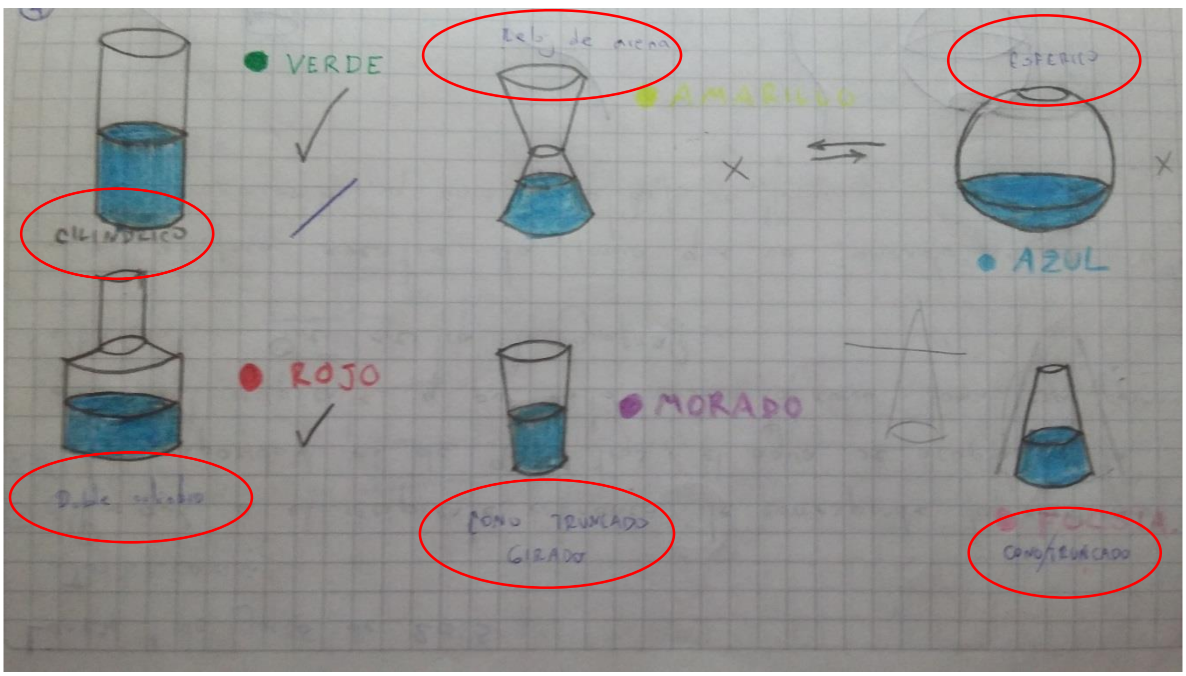
COMANDO 17 después de observar algunas características numéricas de la altura del líquido en cada recipiente, vuelve a retomar la relación entre las varas y los recipientes, para ser más específico, empiezan a relacionar la sexta vara con el recipiente esférico, dibujando una vara con el lápiz dentro del recipiente e intentar observar la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente (gráfica, 50).

Gráfica 50. Fuente propia.

Esta misma estrategia de dibujar la vara dentro de los recipientes la usan para otros recipientes, para que esta sea manera de validar las relaciones que plasmaron anteriormente. Esta estrategia la usan en una nueva hoja donde están solamente los recipientes. Pero antes de usarla, establecen que la cuarta vara se relaciona con el recipiente reloj de área y la sexta vara con el recipiente esférico, por lo tanto, vuelven a mencionar como quedo cada relación entre las varas y recipientes como se muestra a continuación (gráfica 51). El siguiente esquema evidencia la información de la gráfica 51:

Gráfica 51. Fuente propia.

COMANDO 17 cae en cuenta que para hacer una mejor relación y no estar enumerando los objetos, es adecuado mencionarlos por sus nombres y tener claridad respecto a lo que se está haciendo referencia y para ello, empiezan a buscar en los apuntes que tienen en el cuaderno encontrando que al principio de su proceso les dieron nombres a cada uno de los recipientes (gráfica52) (Cilindro, reloj de arena, esférico, doble cilindro, cono truncado girado, cono truncado).



Gráfica 52. Fuente propia.

COMANDO 17 comienza a dibujar dentro de cada recipiente las varas para utilizar la estrategia mencionada anteriormente, mientras que dos integrantes del grupo están haciendo esta tarea, los otros dos están intentando relacionar las gráficas cartesianas con los recipientes pero por falta de tiempo ya que la clase acabó no se realiza con cabalidad estas acciones por parte del grupo.

Dentro de las últimas ideas relacionas con las gráficas cartesianas y los recipientes, se alcanza a observar que COMANDO 17 aun no lee adecuadamente las gráficas, ya que asocian los conos truncados equivocadamente (gráficas cúbicas).

Al regresar del descanso, COMANDO 17 llama al profesor para realizar una socialización de su proceso realizado hasta el momento, como se evidencia en la siguiente transcripción del día 15 de septiembre de 2015:

DIÁLOGO 24.

(1) **[...] P:** Bueno, y que fue lo que hicieron… meter las varas en los recipientes… (Gráfica 53)

(2) **M:** SI, pero no las hemos separado bien.

(3) **R:** Sirve para relacionar…

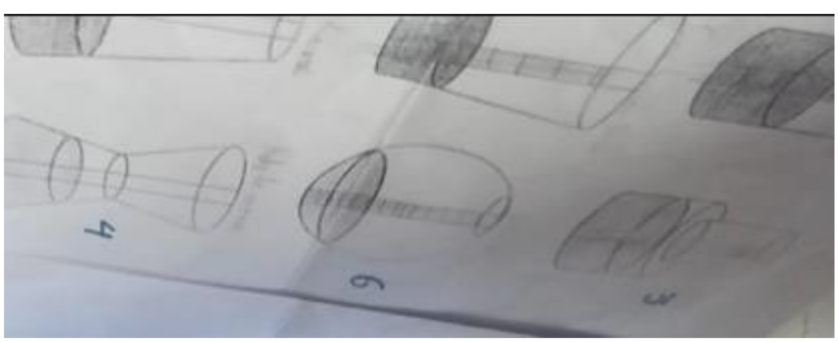
(4) **P:** Para que metieron las varitas ahí *[en los recipientes]*.

(5) **M:** Para relacionar esto *[Señala las varas]*.

(6) **X:** para saber la relación que tienen esos dos… *[Recipientes y varas]*

(7) **P:** Bueno, ¿Entonces?

(8) **R:** Es que nos toca retomar esto *[Los estudiantes revisan los apuntes recordando toda la construcción de su proceso y tomando un punto de partida para la discusión con el profesor]*.



Gráfica 53. Fuente propia.

(9) **T:** Lo que habíamos copiado era esto… según los litros…

(10) **P:** ¿Según qué?

(11) **T:** Según los litros cambia la altura dependiendo el espacio del recipiente *[El grupo sigue buscando apuntes en sus cuadernos]*.

(12) **R:** Definir que era esto *[Señala las gráficas cartesianas]*.

(13) **P:** Recuerden que ya habíamos llegado a algo frente a esto *[Señala las gráficas cartesianas]*.

(14) **R:** la altura en centímetros del líquido suministrado de acuerdo a la cantidad de litros suministrados del líquido en el recipiente.

(15) **P:** ¿Para todos es claro?

(16) Grupo: Si.

(17) **X:** Ahora es concluirlo ¿No?

(18) **P:** ¿Qué fue lo último que les pedí?

(19) **M:** Relacionar las varillas.

(20) **P:** ¿Con qué?

(21) **M:** Con los recipientes.

(22) **R:** Y con las gráficas.

(23) **M:** Pero con las gráficas no las hemos relacionado.

(24) **P:** Yo les pedí varillas con recipientes y ustedes metieron las gráficas.

(25) **M:** Sí.

(26) **P:** ¿Para qué metieron las gráficas?

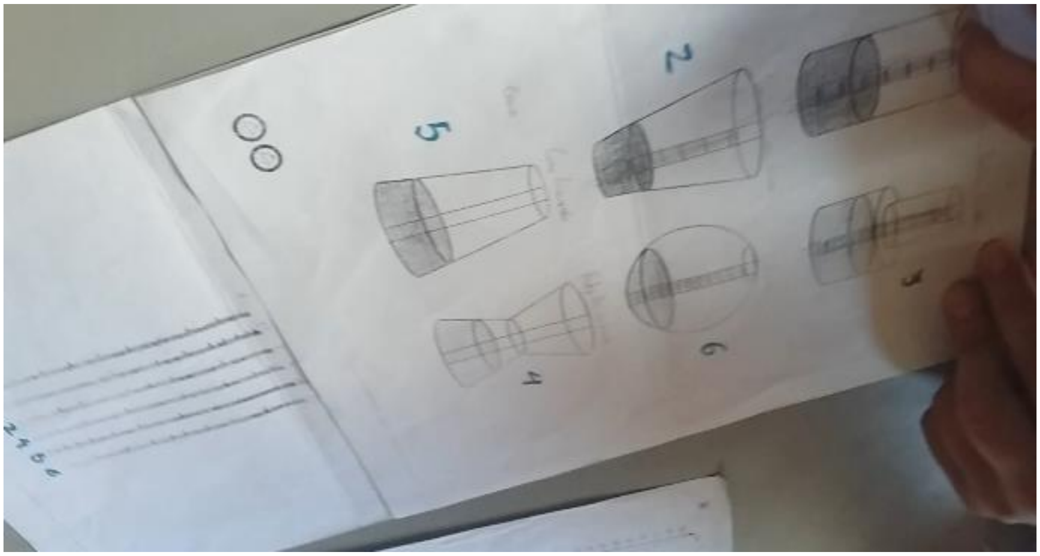
(27) **M:** Para construir.

(28) **P:** O sea, ustedes hicieron una relación recipientes, varilla y gráfica

(29) **R:** Exacto. Además eso nos ayudó a que… definir si hay veinte litros *[Empieza a murmurar y a buscar hojas]*.

(30) **P:** Explique… esto es uno, dos, tres, cuatro, cinco, y seis *[Enumera los recipientes]* dígame ¿cuál le toca a este *[Señala el recipiente cilíndrico]* a cuál vara?

(31) **M:** Cojamos esta que está bien organizada *[Coge unas hojas donde están sin rayones y trabajadas, Gráfica 54*] **[...]**



Gráfica 54. Fuente propia.

COMANDO 17 comienza a mencionarle al profesor cual fue la relación que establecieron entre varas – recipientes – gráficas cartesianas, estableciendo correctamente el cilindro, pero al momento de preguntarle el recipiente con forma de cono truncado con base menor, la relación con la gráfica cartesiana estuvo errada ya que asociaron la gráfica cartesiana con la cúbica.

El grupo COMANDO 17 establecía que a medida que se suministraba el líquido en litros la altura en centímetros se iban volviendo cada vez menores por el espacio del recipiente. El profesor les pide que imaginen como inicia la altura del recipiente al suministrar cierta cantidad y ver cómo iba cambiando, lo cual COMANDO 17 contestó que los cambios eran mayores pero que a medida que se le suministraba el líquido sus cambios eran menores, por lo tanto, se relacionaba con la gráfica de forma curva, pero esta, se había relacionado con el recipiente esférico.

El profesor les pide que expliquen el cambio de altura en el recipiente esférico, mencionando que los cambios son pocos, pero a medida que suben son mayores esos cambios, pero el profesor les pide que reflexionen bien sobre esa idea, siendo el estudiante X que expone al principio los cambios son mayores y bajan a medida que se suministra más litros del líquido. El grupo COMANDO 17 cae en cuenta, que la relación del recipiente y las gráficas cartesianas entre estos dos recipientes estaban cruzadas.

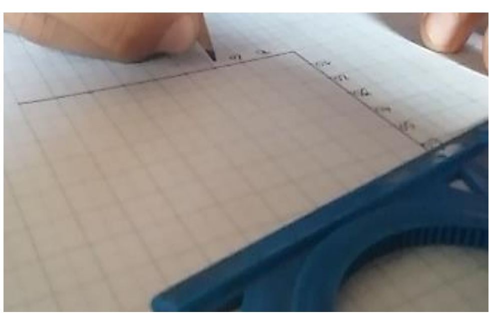
La justificación que dieron los estudiantes, es que al ver las gráficas cartesianas contrarias, asociaron los recipientes de cono truncado los asociaron de acuerdo a las gráficas que eran contrarias. El profesor los deja mencionando dos nuevas tareas: (1) Relacionar correctamente las gráficas cartesianas y (2) Dibujar una gráfica cartesiana. Para esta última tarea, el profesor les pide que hay ciertas condiciones para esas gráficas y que las tengan en cuenta.

COMANDO 17 comienza con la primera tarea analizando el comportamiento del recipiente reloj de arena y relacionándolo correctamente con su gráfica cartesiana, por lo tanto, como el recipiente esférico es el inverso al reloj de arena, entonces lo asocian con su gráfica cartesiana inversa.

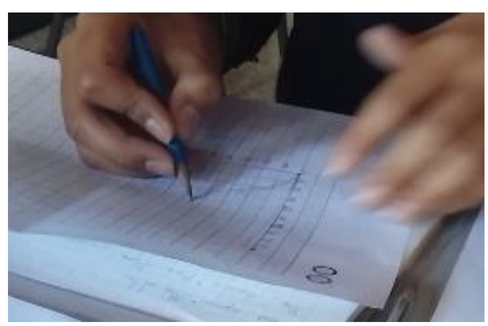
Una vez realizada la relación entre varas – recipientes- gráficas cartesianas el grupo COMANDO 17 discute la forma en cómo construir la gráfica de un recipiente, mencionando que la mejor forma es hacer el recipiente para después hacer la gráfica cartesiana correspondiente, ya que no pueden hacer una gráfica cartesiana de algo que no conocen.

Entre las estrategias para crear el recipiente toman como base los seis recipientes de la situación, combinando formas de los recipientes, tomando mitad de un recipiente y unirlo con la mitad de otro recipiente. Mientras definían estos aspectos, uno de los integrantes dejaba en las hojas de trabajo la relación establecida entre los tres aspectos a trabajar varas – recipientes- gráficas cartesianas.

Los estudiantes comienzan a tomar las hojas milimetradas y dibujan el plano cartesiano con las características de los recipientes de la situación, es decir, una capacidad de 90 litros y una altura de 90 centímetros (gráfica 55 y 56) y en uno de ellos, comienzan a hacer un boceto a partir de las gráficas de la situación original.



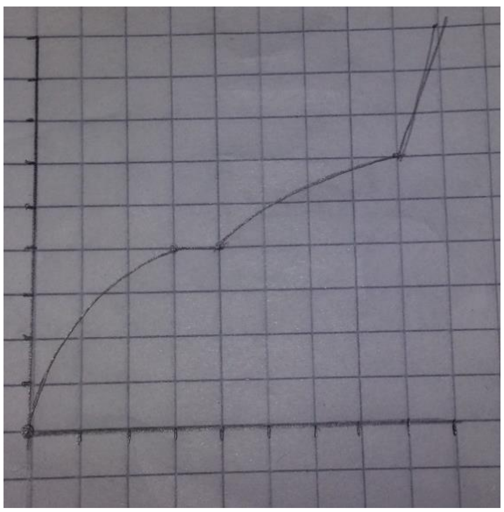
Gráfica 55. Fuente propia.



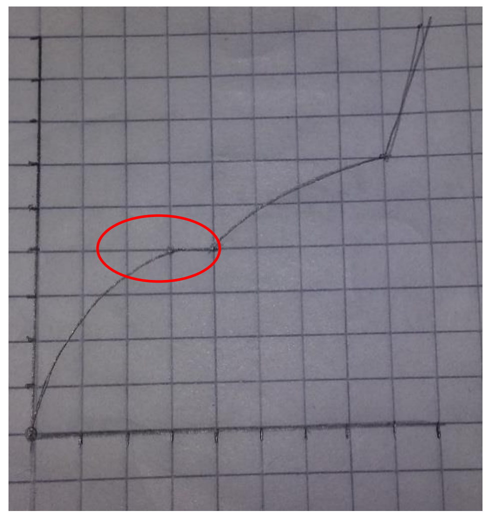
Gráfica 56. Fuente propia.

La sesión del día 22 de septiembre de 2015el profesor comenzó la clase pidiendo por grupo la hoja de la gráfica cartesiana que se debía inventar. Una vez recogida, les pide a cada uno de los grupos que realicen el recipiente que tiene la forma en la que la altura en centímetros cambia de acuerdo a la cantidad de litros suministrados, una vez encontrado el recipiente se debe justificar la respuesta. El profesor pasa por los grupos entregando las diferentes gráficas cartesianas.

Cuando el grupo COMANDO 17 se le entrega la gráfica cartesiana (gráfica 52) encuentran un error (gráfica 53) la cual, en ese punto no se presenta un cambio de altura, lo cual es imposible, ya que al suministrar una cantidad de litros del líquido, debe presentar un cambio en la altura y no se puede mantener constante.

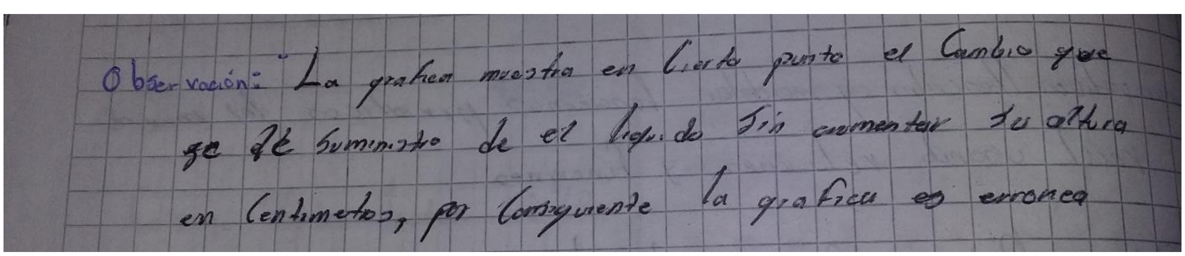


Gráfica 57. Fuente propia.



Gráfica 58. Fuente propia.

El grupo COMANDO 17 comienza a escribir esta observación en el cuaderno, siendo muy cuidadosos con la forma de escribir las cantidades propuesto por Schwartz (1988) por medio de la triada (gráfica 54). El estudiante M, les dicta lo escrito en su cuaderno a los demás compañeros de COMANDO 17.



Gráfica 59. Fuente propia.

En este instante se puede establecer que los estudiantes están en la estrategia de compresión, al estar en una nueva situación y se relaciona con el nivel general de matematización, ya que actúan sobre nuevas situaciones que en este caso, es poder generar el recipiente que modela la gráfica cartesiana. Además, las re-significaciones realizadas permiten establecer relaciones entre distintos objetos matemáticos y en diferentes contextos en los cuales el objeto matemático sea la solución a dichas situaciones. Las resignificaciones que los estudiantes han realizado son la dependencia de las variables, la cual es que a cierta cantidad de litros del líquido en un recipiente, la altura en centímetros del líquido aumenta, pero dichos cambios dependen de las dimensiones de los recipientes, entre más angosto, los cambios de altura del líquido son mayores, mientras que entre más ancho el recipientes menores son los cambios de altura del líquido.

Además de ello, se dan cuenta que la dependencia entre las variables es directa, al aumentar la cantidad de litros del líquido en un recipiente, aumenta también la altura en centímetros del líquido, por lo tanto, si aumenta la numerosidad de una variable también aumenta la otra (gráfica 59).

El grupo COMANDO 17 comienza a observar cómo se podría arreglar la gráfica, mencionando que la gráfica debe siempre mantener una forma ascendente, ya que si se aumenta la cantidad de litros del líquido debe aumentar la altura del líquido en el recipiente. Como se puede evidenciar en el siguiente fragmento de transcripción del día 22 de septiembre de 2015:

DIÁLOGO 25.

(1) **[...] M:** Ya hicimos la observación de la gráfica.
(2) **P:** Pero no había que tacharla *ahí [Se refiere a la gráfica ya que donde había el error el grupo le colocó encima una X]*.
(3) **M:** Lo hicimos en lápiz, entonces ya espere lo borramos y lo hacemos.
(4) **P:** Arréglela, o sea, borre esa x y arréglela para que sirva la gráfica, manteniendo lo que sirve y cambiando lo que no sirve. ¿Qué se haría para que sirva?
(5) **M:** Tendría que mantenerlo *[Con el lápiz hace un movimiento ascendente] y* se parecería a mucho a esta *[Señala la gráfica cartesiana de la situación original]*.
(6) **P:** ¿Ustedes las asociaron? *[Refiriéndose a la gráfica que se les otorgó y la gráfica anteriormente mencionada]*.
(7) **M:** No, nosotros lo asociamos porque si se aumente por lógica el líquido tiene que aumentar en la altura, entonces *[Señala el punto erróneo de la gráfica (gráfica 52)]* como se

mantiene en un punto y aumenta la cantidad de líquido, tiene que subir en la altura, y como no lo hace queda mal.

(8) **P:** Ok, entonces, ¿Cuál sería la característica que debe tener las gráficas para poderlas dibujar?

(9) **M:** Tiene que siempre aumentar.

(10) **P:** ¿Qué?

(11) **M:** La altura en centímetros.

(12) **P:** ¿Con qué?

(13) **M:** La altura en centímetros dependiendo del líquido suministrado.

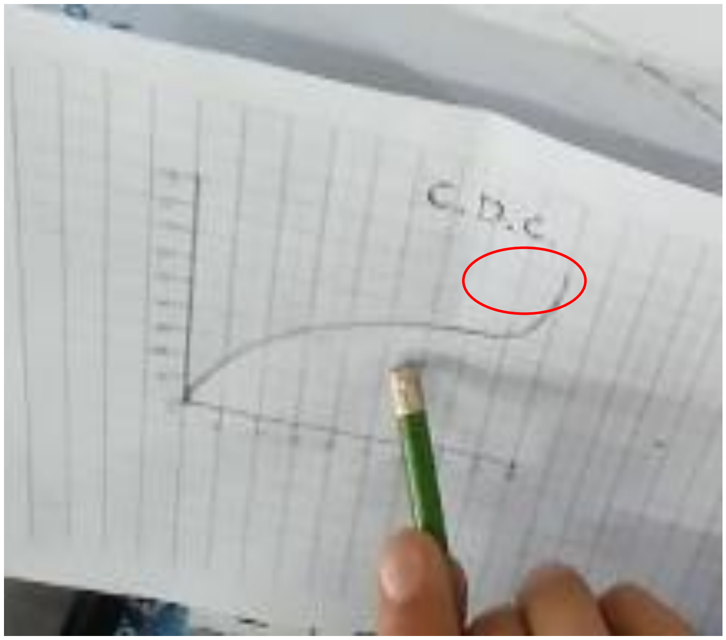
(14) **P:** Ok, entonces escriban en el cuaderno. **[...]**

Los estudiantes toman la gráfica y borran el segmento erróneo para hacer el cambio respectivo, obteniendo un nuevo gráfico (gráfica 60) con el cual comienzan a indagar el tipo de recipiente se podría modelar con esa gráfica. La primera estrategia que mencionan es asociarla con las gráficas de la situación inicial expresando que ese recipiente tendría la forma esférica, pero señalan que en la parte superior hay un cambio, esta después de la mitad del gráfico. Obteniendo el siguiente bosquejo de la gráfica (gráfica 61).

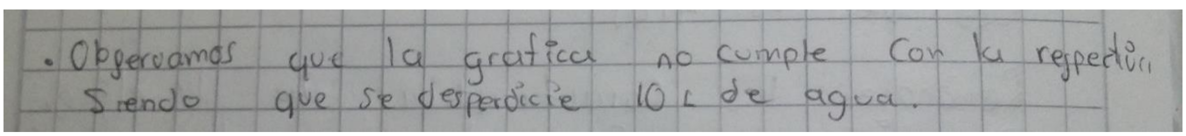
Gráfica 60. Fuente propia.

Gráfica 61. Fuente propia.

COMANDO 17 comienza a analizar la gráfica observando la altura que toma el recipiente al suministrar cada diez litros del líquido, para determinar en qué partes es más ancho y en que partes es angosto, observando que en la parte final de la gráfica hay un cambio de altura de 80 centímetros a 90 centímetros pero no hay cambios de volumen del líquido, encontrando otro error dentro de la gráfica, ya que no es posible que la altura del líquido cambie por sí sola, depende de la cantidad del líquido (gráfica 62). La anterior idea la escriben en el cuaderno (gráfica 63).



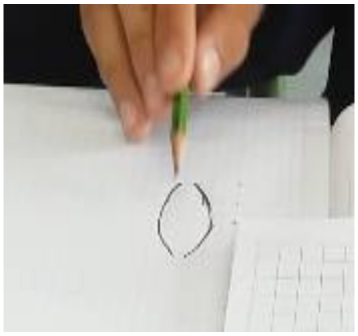
Gráfica 62. Fuente propia.


• Observamos que la grafica no cumple con la respecti
Siendo que se desperdicie 10 L de agua.

Gráfica 63. Fuente propia.

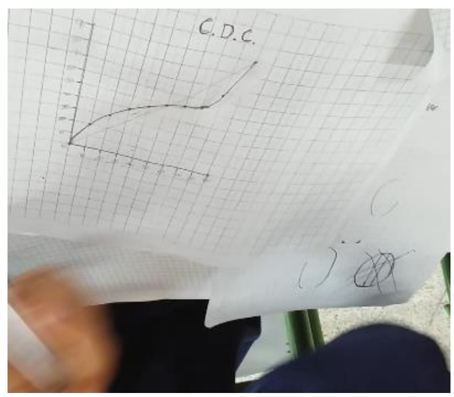
Una vez haciendo las correcciones de la gráfica, COMANDO 17 comienza a discutir la forma del recipiente que modela el gráfico. Comienzan determinando que al principio del recipiente, el líquido alcanza una altura rápidamente, concluyendo que la base del recipiente es angosta. Toman esta estrategia de observar la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente y de esta manera la forma del recipiente.

Un primer bosquejo del recipiente que podría ser modelado por la gráfica cartesiana es la forma de un huevo, llamado así por el mismo grupo COMANDO 17 (gráfica 64), pero en las discusiones y observando la gráfica cartesiana, resaltan que la parte superior debe ser más angosto, ya que el cambio de altura es bastante en la parte final del gráfico cartesiano (gráfica 65) tomando de mejor forma, el modelo de un huevo.

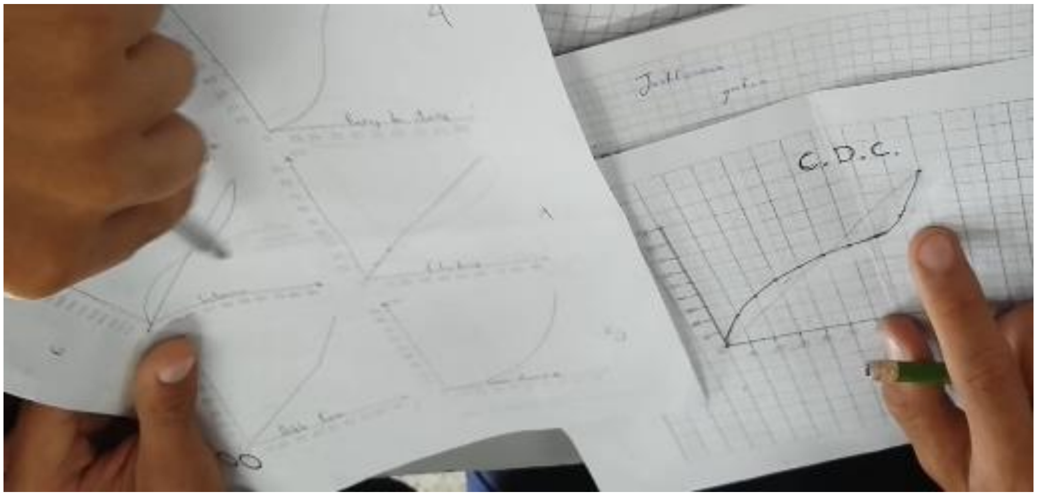
Gráfica 64. Fuente propia. Gráfica 65. Fuente propia.

Una vez dibujado el recipiente, COMANDO 17 dibuja dentro del boceto una vara para determinar la altura en centímetros haciendo la relación entre la gráfica cartesiana y el recipiente. Pero al observar la gráfica cartesiana nuevamente, observan que el recipiente que diseñaron no concuerda con la altura del líquido en centímetros, por consiguiente tachan el boceto del huevo y comienzan uno nuevo, tomando como estrategia trazar una línea recta desde el origen del plano cartesiano con el punto donde se refleja que el líquido alcanza su capacidad y su altura máxima dentro del recipiente (gráfica 67).

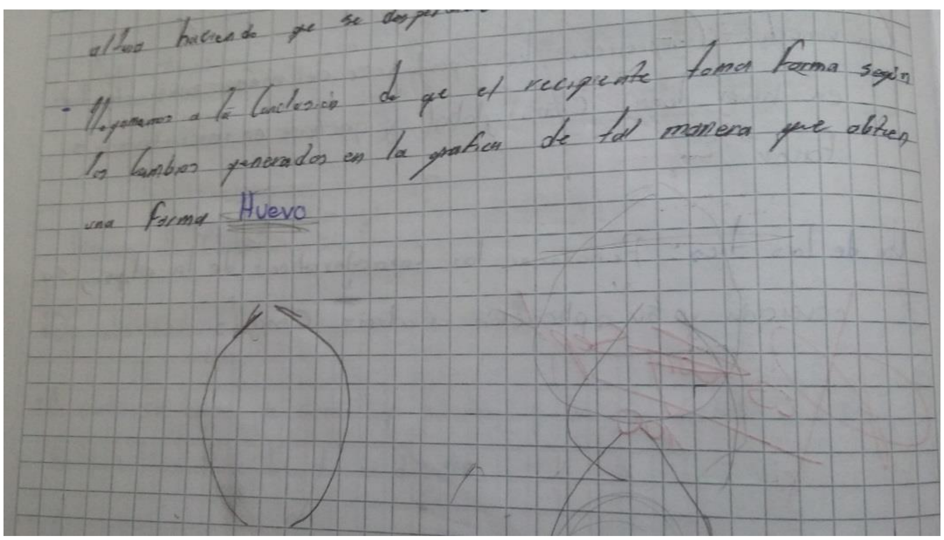
 

Gráfica 66. Fuente propia. Gráfica 67. Fuente propia.

Realizando esa línea dentro de la gráfica cartesiana, lo asocian inmediatamente a una de las gráficas cartesianas trabajadas en la situación original, (gráfica 68) asociando la forma del recipiente a diseñar con la forma del recipiente de forma esférica. Ademas, analizan que el punto donde cambia la dirección del gráfico esta en diferente posición entre las gráficas, tomando de nuevo que la forma del recipiente es la de un huevo que en la parte superior se cierra el recipiente para que el cambio de la altura sea mayor. Esta idea la escriben en el cuaderno de cada integrante del grupo (gráfica 69).



Gráfica 68. Fuente propia.



Gráfica 69. Fuente propia.

En la siguiente sesión de clase, el profesor comienza a realizar una socialización respecto al proceso realizado en las clases, como se puede evidenciar en el siguiente fragmento de transcripción del día 22 de septiembre:

DIÁLOGO 26.

(1) **[...] P:** Bueno, *[Dibuja los ejes x y y en el plano cartesiano]* ¿Cuáles son las dimensiones de los recipientes?

(2) **Curso**: 90 y 90.

(3) **P:** *[El profesor divide los ejes del plano cartesiano en nueve partes cada eje]* Entonces, ¿Los centímetros estaban en que eje?

(4) **Curso:** Y.

(5) **P:** y ¿los litros?

(6) **Curso:** X.

(7) **P:** Ok, entonces, ¿Sabemos cuántos litros tienen?

(8) **Curso:** 90.

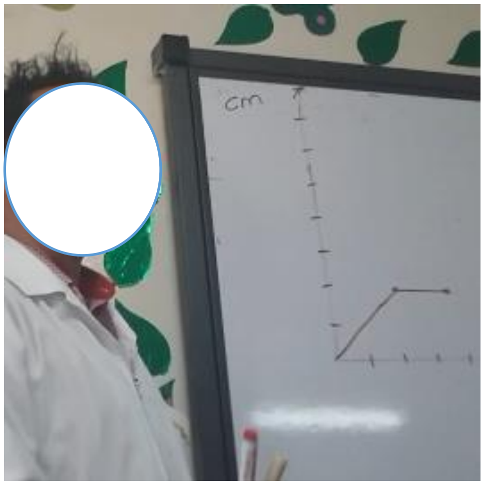
(9) **P:** ¿Y altura?

(10) **Curso:** 90 centímetros.

(11) **P:** 90 centímetros, no se les olvide las unidades, porque yo no puedo decir una altura de 90 litros ¿Sí o no?

(12) **Curso**: Si. **[...]**

La explicación ahora se dirige a mencionar algunos aspectos generales que se han visto en las gráficas diseñadas por cada grupo. El profesor empieza exponiendo las gráficas que no presentan cambios de altura, dibujando en el tablero un ejemplo (gráfica 70), les pide al curso analizar si ese tipo de gráfica modela con la situación de los recipientes se podría realizar. El estudiante M del grupo COMANDO 17 expone que si aumenta la cantidad de litros del líquido, debe aumentar la altura en centímetros del líquido. El profesor describe la situación que al llenar un vaso con gaseosa, la cantidad aumenta la altura, ya que no se puede aumentar la cantidad sin que no aumente la altura o viceversa.



Gráfica 70. Fuente propia.

La explicación sigue mencionando que es importante reconocer la información que arroja el plano cartesiano y tener claro que significa como tal la gráfica cartesiana, como se evidencia en el siguiente fragmento de transcripción del día 22 de septiembre de 2015:

DIÁLOGO 27.

(1) **[...]P:** En términos de lo que estamos *trabajando [señala los litros y centímetros]* ¿Qué es lo que está jugando acá? *[Señala la gráfica cartesiana, gráfica 64]*.

(2) **L:** Los litros y los centímetros.

(3) **P:** Obvio estamos jugando con litros y centímetros, pero ¿cuál es la relación que está jugando acá? *[señala la gráfica cartesiana, gráfica 69]*.

(4) **Curso:** El llenado, la altura, la constancia.

(5) **P:** Escuchan a K porfa.

(6) **K:** Que la cantidad de litros también aumenta la altura.

(7) **P:** ¿Si escucharon?

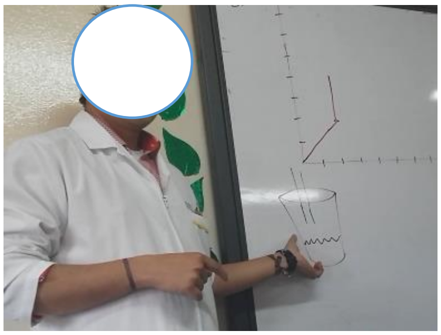
(8) **Curso:** Si.

(9) **P:** Que al aumentar la cantidad de litros también aumenta la altura del líquido en centímetros. ¿Haciendo referencia al líquido o al recipiente?

(10) **Curso:** Al líquido.

(11) **P:** Ok, al líquido **[...]**

Una vez clara la explicación anterior, el profesor toma otro ejemplo de gráfica (gráfica 71), pero el curso expone que tampoco sería acertada esa gráfica, ya que aumenta la altura pero no la cantidad del líquido, lo cual es imposible, ya que la altura no puede aumentar por sí sola, de la cual, también se obtiene que la altura no puede aumentar sin la cantidad de litros, por ende, la variable de altura es dependiente a la variable de volumen, haciendo la variable de volumen independiente.



Gráfica 71. Fuente propia.

El profesor da paso ahora a analizar los recipientes, tomando como ejemplo, el recipiente dibujado en el tablero (gráfica 71), como se puede evidenciar en el siguiente fragmento de transcripción del día 22 de septiembre de 2015:

DIÁLOGO 28.

(1) **[...] P:** ¿Cómo sería la relación en este recipiente?
(2) **G:** Como con curva.
(3) **P:** Escuchan a V.
(4) **V:** Pues como empieza, empieza a llenarse más rápido pero como el recipiente no va totalmente recto si no que se abre, va a llenar más lento.
(5) **P:** ¿Si? Como esta parte es angosta *[Señala la parte inferior del recipiente]*, la altura tiene ¿qué ser qué?
(6) **G:** Es lo que nos decía ahorita, dependiendo del volumen aumenta.
(7) **P:** La altura aumenta siempre.
(8) **M:** Toma una manera lenta, por decirlo así.
(9) **P:** Hay que empezar a hablar bien frente a este tipo de cosas.
(10) **L:** Que va a haber menos litros en la parte de abajo que en la parte de arriba.

(11) **P:** ¿Va a haber menos litros L?

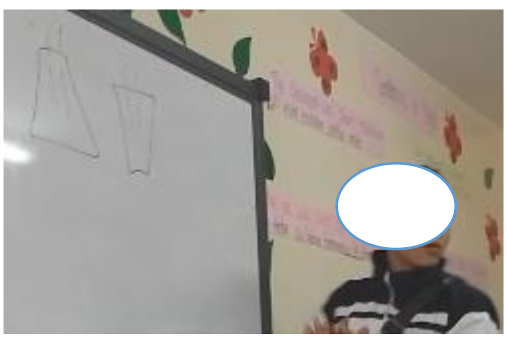
(12) **Curso:** No.

(13) **G:** No, centímetros. ¿Puedo pasar a dibujar las cosas?

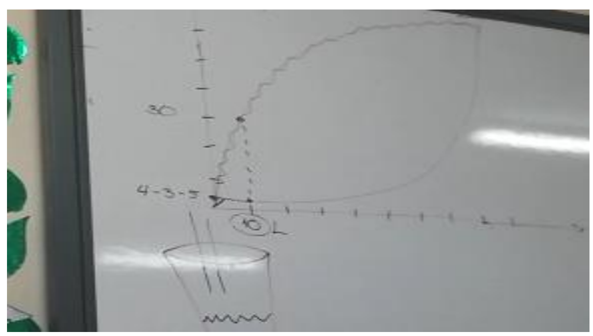
(14) **P:** Pase. **[...]**

El estudiante G pasa al tablero y dibuja los recipientes con forma de cono truncado (gráfica 72) mencionando que a medida que se llenan con la misma cantidad, el recipiente dos se va a ver más lleno que el recipiente uno, ya que la altura que toma en el recipiente dos es mayor por lo angosto del recipiente. Mencionan aspectos importantes dentro de la discusión, expresan que la cantidad de agua es la misma, entonces no es que un recipiente este más lleno que otro, sólo que la altura del líquido es mayor en el recipiente dos que en el uno.

El profesor a partir del ejemplo del estudiante G, expresa que entre mayor sea el ancho del recipiente, los cambios de altura son menores, mientras que entre más angosto el recipiente, mayores son los cambios de altura. Para explicar esta idea, el profesor dibuja las gráficas cartesianas de los recipientes con forma de cono truncado (gráfica 73) y expresa que van a mirar cual es la altura que alcanza el líquido en cada gráfica al suministrar diez litros de líquido en los dos recipientes.



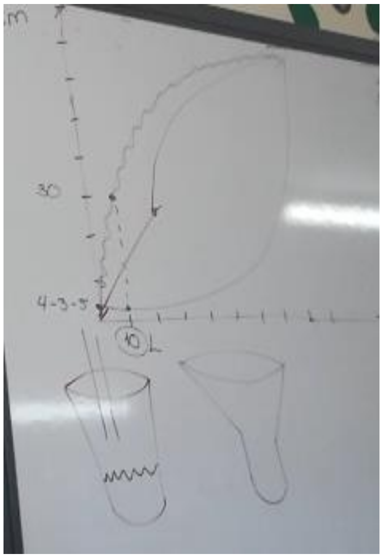
Gráfica 72. Fuente propia.

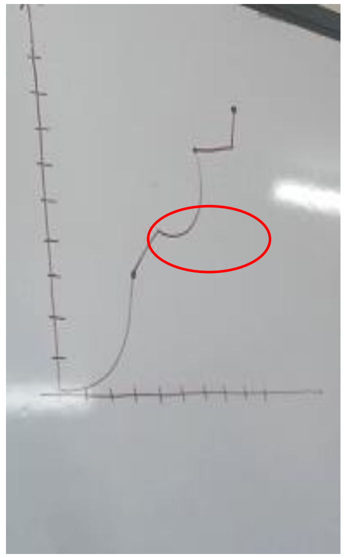
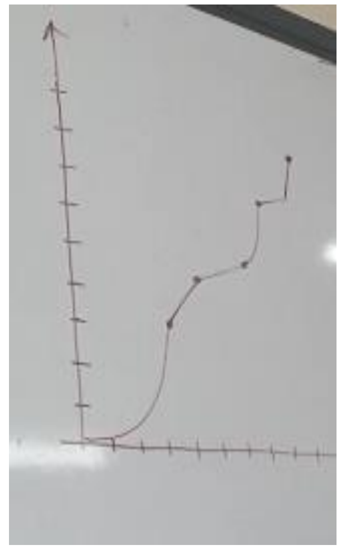


Gráfica 73. Fuente propia.

Se obtiene que en uno de los recipientes, la altura que alcanza el líquido al aplicar diez litros son de más o menos 5 centímetros, mientras que en el otro recipiente al aplicar los mismos diez litros de líquido la altura es de 30 centímetros, por consiguiente en el primer recipiente es más ancho ese primer segmento mientras que en el segundo recipiente es más angosto ese primer segmento.

El profesor dibuja otra gráfica y les pide que determinen entre todos, cuál sería el recipiente que podría modelar esa gráfica cartesiana. El curso menciona que la primera parte, la línea recta hace referencia a un cilindro, pero en la curva seria como un embudo obteniendo el recipiente (gráfica 74).



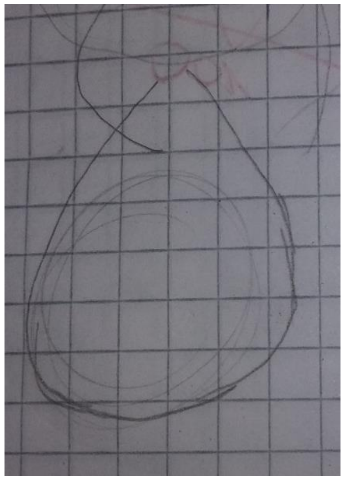



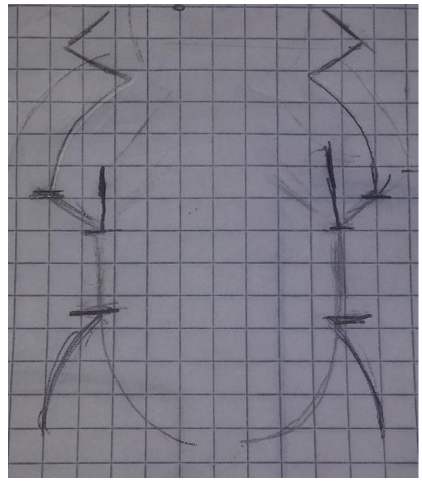
Gráfica 74. Fuente propia. Gráfica 75. Fuente propia. Gráfica 76. Fuente propia.

El profesor ahora dibuja una gráfica cartesiana para que por grupos de trabajo intenten obtener el recipiente que modele los cambios de altura en centímetros de acuerdo a la cantidad de litros suministrados de líquido (gráfica 75).

Antes de dar la indicación para comenzar a escribirla, pide al curso que analice muy bien la gráfica y determinen si hay algún problema o error en el mismo. El estudiante M expresa que en la mitad de la gráfica, la altura disminuye por lo cual no podría pasar, la altura como el volumen del líquido debe aumentar siempre. Esta idea es apoyada por otros estudiantes que expresan que deben aumentar las dos variables. El profesor realiza un cambio en la gráfica y les pide que construyan el recipiente que modela esa gráfica cartesiana (gráfica 76).

Se arman los grupos de trabajo, para esta constitución del grupo llega el estudiante R el cual pide a su compañero M que le explique los avances que tuvieron en la anterior sesión de clase. A medida que le explica el estudiante va realizando el boceto del anterior ejercicio explicando que tendría la forma de una gota (gráfica 77).

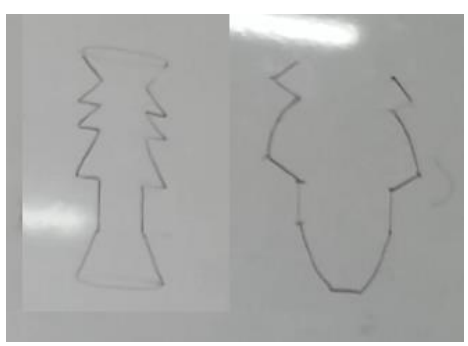




Gráfica 77. Fuente propia. Gráfica 78. Fuente propia.

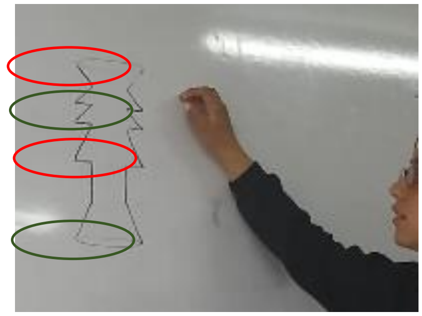
El grupo pasa a determinar el recipiente que modela la gráfica que el profesor realizó en el tablero. El grupo comienza explicando que la base del recipiente seria ancho, ya que los cambios de altura del líquido en centímetros son menores. Comienzan a observar los cambios de altura para determinar en qué partes es más ancho y en que partes es angosto el recipiente (gráfica 78). El grupo de trabajo determina que las líneas rectas dentro de la gráfica cartesiana corresponde a partes del recipiente con la cantidad de líquido en litros es constante a la altura en centímetros, es decir, no presentan amplitud. A partir de estas ideas, empiezan a construir el bosquejo del recipiente obteniendo un posible modelo.

El profesor vuelve a retomar la socialización, pidiendo a los grupos de trabajo que pasen al tablero a dibujar los recipientes que modelaron a partir de la gráfica cartesiana. Siendo la estudiante K del grupo SPLASH la primera (gráfica 79) y los estudiantes R y M los otros dos estudiantes del grupo COMANDO 17 (gráfica 78).



Gráfica 79. Fuente propia.

La estudiante K empieza justificar el modelo del recipiente mencionando que en la gráfica cartesiana, se evidencia que se llena más rápido en ciertas partes del recipiente las cuales se dibujaron más angostos (Color verde, gráfica 74) y los lugares donde se llenaba más lento se dibujaron más ancho (color rojo, gráfica 80).



Gráfica 80. Fuente propia.

Terminada la explicación, el estudiante M explica que en el discurso de la estudiante K hay un error en su expresión, como se evidencia en el siguiente fragmento de transcripción del día 22 de septiembre de 2015:

DIÁLOGO 29.

(1) **[...] P:** ¿Para todos es clara la explicación?
(2) **M:** Es que el tiempo no cuenta en la gráfica.
(3) **P:** ¿Cómo?
(4) **M:** Es que el tiempo no cuenta en la gráfica.
(5) **P:** Escuchen todos lo que dijo M por favor
(6) **M:** El tiempo no es válido en la gráfica
(7) **K**: Yo no digo el tiempo
(8) **M:** Es que usted dijo más despacio
(9) **K**: O sea, la cantidad
(10) **M:** Eso es otra cosa, porque usted dice que más lento y más rápido
(11) **P:** Si es entendible, pero explíquese un poco más que no todos lo oyeron
(12) **M:** Es que el tiempo no es válido en esto *[Refiriéndose a la situación]* es que usted dice que se llena lento y al ser lento el tiempo juega, y eso no es lo que estamos mirando.
(13) **R:** El tiempo es constante

(14) **M:** El tiempo es constante

(15) **K:** Yo lo digo como que la altura no cambia tanto.

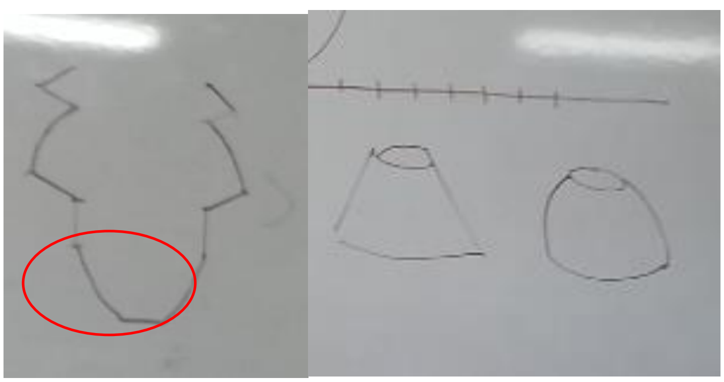
(16) **M:** Eso, no es más lento ni más rápido

(17) **P:** Exacto, recuerden que parte del ejercicio es afinar el lenguaje y referirnos bien sobre lo que estamos hablando ¿Vale? **[...]**

Una vez acabada la discusión sobre el recipiente del estudiante K, pasa el grupo COMANDO 17 representado por M y R, escribiendo que las partes curvas de la gráfica hacen referencia a las curvas del recipiente, mientras que la partes rectas son referenciadas por las partes lineales de la gráfica cartesiana. Expresan que a mayores cambios de altura el recipiente es angosto pero a menores cambios de altura el recipiente seria ancho.

Una vez acabada la explicación del grupo, el estudiante L expresa que hay una parte mal diseñada, ya que parte de la gráfica cartesiana dibujada por el profesor tiene la misma forma que una de las gráficas cartesianas de la situación original (gráfica 81), por lo tanto, tendría que tener una forma como de los recipientes trabajados en clase (Cono truncado con base mayor).

Gráfica 81. Fuente propia.



Gráfica 82. Fuente propia.

Esto empieza a generar una discusión dentro del curso, expresando si el borde del recipiente es recta o curva y cuál sería la incidencia que tendría en la gráfica cartesiana. Siendo esta, una tarea para la próxima sesión de clase, el profesor dibuja dos recipientes con bordes diferentes (gráfica 82), además, les pide que dibujen un recipiente con las mismas dimensiones trabajadAs durante las sesiones de clase anteriores.

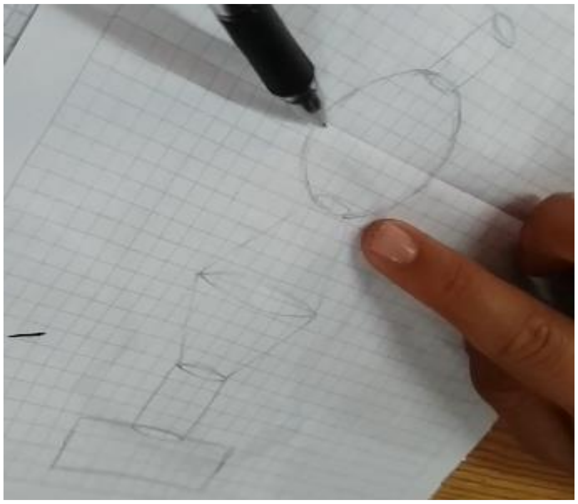
6.5 TAREA 5.

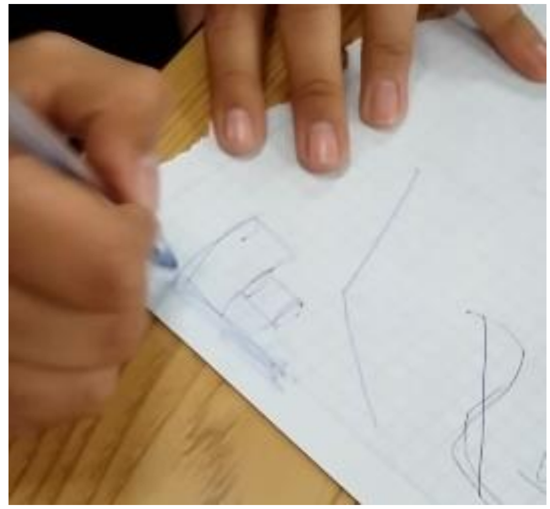
Al inicio de la sesión del primero de octubre de 2015, el profesor pide el diseño del recipiente por grupos, con el fin que al rotarlas por los demás grupos de trabajo se pudiera diseñar la gráfica cartesiana demostrando los cambios de altura del líquido en centímetros en el recipiente de acuerdo a los cambios de volumen en litros del líquido. El profesor pide las hojas y las empieza a mezclar repartiendo una hoja por grupo, con el fin de poder realizar la tarea pedida por el profesor.

El grupo COMANDO 17 al observar el recipiente que le correspondió (gráfica 83) deciden dividir en dos partes el recipiente para que por subgrupos comenzaran a determinar la gráfica que modelaba los cambios de altura en centímetros de acuerdo al volumen en litros del líquido.

La primera estrategia que el grupo utiliza, es observar por partes el recipiente total y asociarlo a los recipientes que se trabajó en la situación inicial y de esta manera asociarlas a las gráficas cartesianas.

El grupo se divide en dos, el primer grupo compuesto por R y M, el segundo grupo compuesto por M, T y X. El primer subgrupo empieza a determinar que las gráficas cartesianas de todo recipiente de forma cilíndrica son rectas (gráfica 84). Esta idea es socializada al otro subgrupo, el cual también expone que los recipientes que no son cilíndricos, su gráfica cartesiana corresponde a curvas. El primer subgrupo también afirna que dependiendo si el recipiente es ancho o angosto, pero con forma cilíndrica, la gráfica cartesiana es recta pero que su inclinación dependía del espacio que se muestra según el recipiente.





Gráfica 83. Fuente propia. Gráfica 84. Fuente propia.

El profesor llega al grupo para escuchar sus avances o su proceso en relación a la tarea pedida. Como se muestra a continuación en el fragmento de transcripción del día 1 de octubre de 2015:

DIÁLOGO 30.

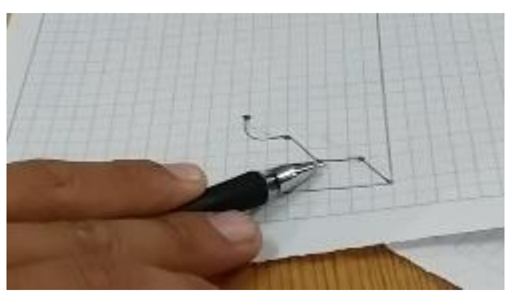
(1) **[...] P:** ¿Cuál tienen ahorita?

(2) **R:** Este *[Muestra el recipiente, gráfica 83]*

(3) **P:** ¿Y cómo les va con ese?

(4) **X:** Apenas estamos mirando.

(5) **T:** *[Le muestra al profesor un primer bosquejo de la gráfica cartesiana, gráfica 85]*.



Gráfica 85. Fuente propia.

(6) **M:** No, eso está mal *[Señala la gráfica cartesiana, en la línea vertical, gráfica 85]*.

(7) **X:** ¿Esta línea? *[Señala el mismo punto que su compañero, gráfica 85]*

(8) **M:** Esta remal.

(9) **X:** Esta línea.

(10) **P:** ¿Por qué está mal?

(11) **M:** Porque si sube la altura debe subir en litros.

(12) **P:** Pero hay está subiendo un poquito, ahí está inclinada, déjeme ver la hoja.

(13) **M:** No.

(14) **R:** Es que esta derecha *[Con el brazo hace una línea vertical en el aire]*.

(15) **P:** Si, la hizo así *[Con el brazo hace una línea vertical en el aire]*.

(16) **X:** Si profe.

(17) **P:** O sea, ahí ¿Qué está aumentando?

(18) **M:** La altura.

(19) **P:** Recuerden que si aumenta la altura debe aumentar la cantidad de litros del líquido *[Luego de caer en ese error, el grupo borra ese primer bosquejo de la gráfica cartesiana y empiezan a mencionar los aciertos que han encontrado en ese proceso]*.

(20) **R:** Ya tenemos la solución ¿Si? Todos los recipientes cilíndricos [*Dibuja un recipiente cilíndrico]* no importa si es angosto o ancho, siempre van a tener una gráfica recta *[Dibuja rectas en la hoja]*.

(21) **P:** Ok, porque estos *[señala los recipientes cilíndricos que el estudiante dibujo]* siempre van a ser estas *[Señala las rectas que el estudiante dibujo en la hoja]*.

(22) **M:** Por ser constante.

(23) **R:** Por ejemplo, se aumentan diez litros, ¿Si? Se suministran diez litros ¿Si? Entonces van aumentar diez centímetros ¿Si? Entonces su gráfica siempre va a ser así *[Dibuja una línea recta]*.

(24) **P:** Cada vez que se aplique diez litros ¿Qué pasa?

(25) **R:** Pues si el recipiente es como este *[Señala el recipiente cilíndrico]* va a aumentar diez centímetros.

(26) **P:** Y si aplico veinte litros.

(27) **R:** Pues va a llegar a veinte centímetros. Pero si es más angosto su gráfica va ser de esta forma, más inclinada *[Dibuja una línea recta inclinada a la izquierda]* pero si es más ancho estará inclinada así *[Dibuja una línea recta inclinada a la derecha]*.

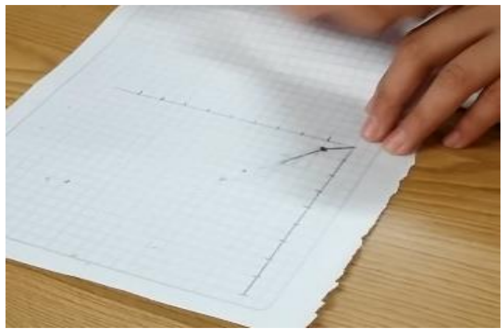
(28) **P:** Debido a qué pasa eso. Ustedes *[Señala a los demás integrantes del grupo]*.

(29) **X:** *[Quedan en silencio]*.

(30) **P:** Ustedes, ¿Por qué no participan?

(31) **R:** Es que estamos haciendo cosas diferentes, nosotros estamos debatiendo otras cosas. **[...]**

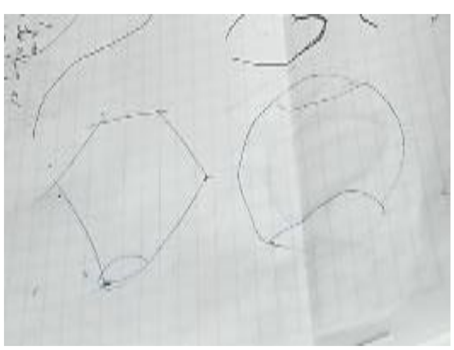
Luego, el estudiante R empieza a exponer que los demás recipientes que tienen su borde inclinado corresponderían a curvas dentro de su gráfica cartesiana. Mientras que R y el profesor están discutiendo estas ideas, el estudiante X y M están trabajando en el bosquejo de la gráfica cartesiana del recipiente que les correspondió (gráfica 86).



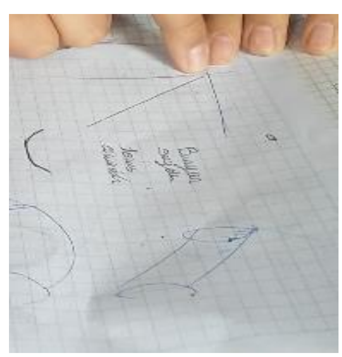
Gráfica 86. Fuente propia.

El estudiante M comienza una nueva discusión, en encontrar la gráfica cartesiana y distinguir si el recipiente tiene forma curva o con rectas, ya que las gráficas cartesianas del reloj de arena (bordes rectos) y la esférica (Borde curvo) son muy parecidas, aunque su forma los diferencia pero su gráfica son parecidas.

El estudiante R va dibujando el recipiente de forma esférica y al lado dibuja un recipiente con forma de rombo (gráfica 87) con el cual, el profesor resalta que fue una de las tareas de la clase anterior, evidenciar si los dos recipientes son iguales. Los estudiantes mencionan que son recipientes similares, los cuales tienen la misma forma de llenado.



Gráfica 87. Fuente propia.

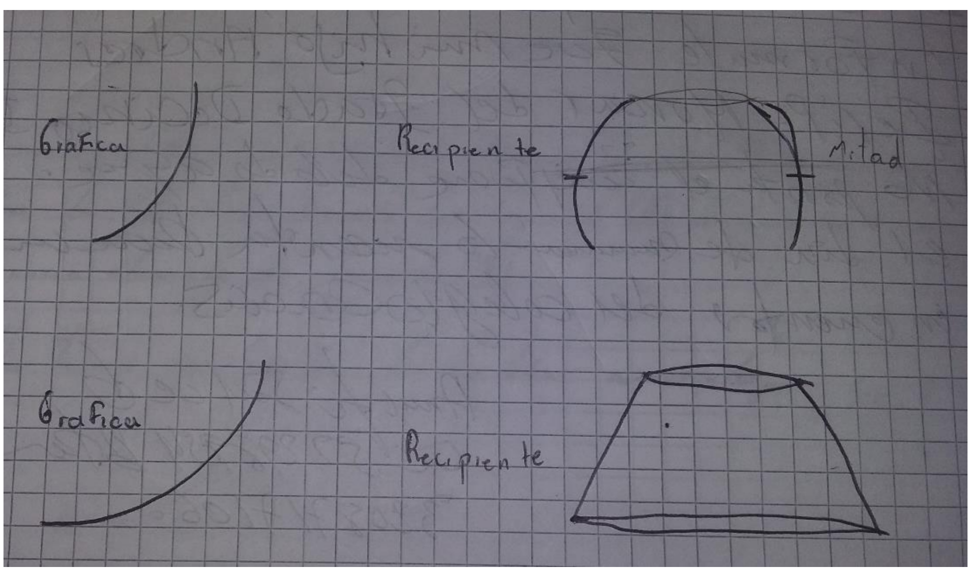


Gráfica 88. Fuente propia.

El profesor centra la discusión en que no hay un único recipiente que modela los cambios de altura en centímetros del líquido de acuerdo al volumen en litros del líquido, por lo cual, los estudiantes mencionan que hay varios recipientes que se pueden asociar ya que los cambios de altura son los mismos en varios recipientes. El profesor les pide que profundicen en esa discusión, y expresa que en el recipiente que les correspondió hacer tiene en la parte superior un segmento de forma cilíndrica pero inclinada (gráfica 88) a lo cual el estudiante R expresa que tendría una gráfica cartesiana en forma lineal.

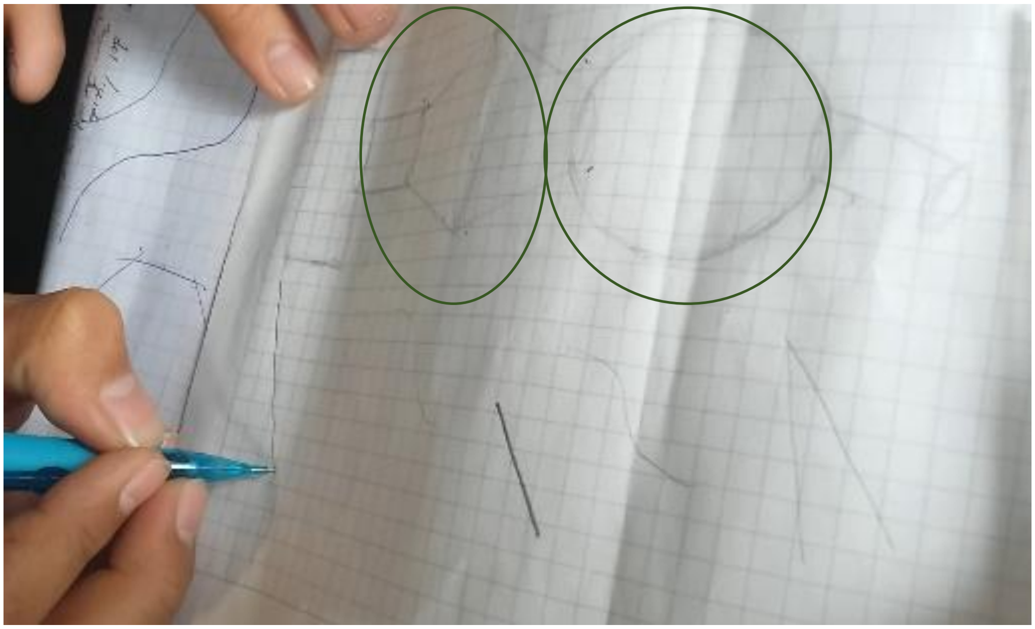
En la siguiente sesión de clase, los estudiantes se centran en dos aspectos: (1) Por qué la gráfica del cilindro inclinado corresponde a una gráfica cartesiana lineal, y (2) Por qué los recipientes (gráfica 87) son similares y se pueden asociar a una misma gráfica cartesiana.

Los estudiantes atacan el primer punto, dibujando en el cuaderno dos recipientes que tendrían la misma gráfica cartesiana, (gráfica 89) pero se diferencian en los bordes, ya que uno es en forma recta y el otro en forma curva.



Gráfica 89. Fuente propia.

Los estudiantes expresan que se pueden asociar hasta un tercer recipiente a la misma gráfica cartesiana, pero no encuentran la forma de determinar ese recipiente. Por lo tanto, vuelven al recipiente al cual deben diseñar su gráfica cartesiana, por lo cual, deciden dividirlo en varias partes y de esta manera determinar la forma que tendría la gráfica cartesiana en cada uno de esas partes (gráfica 90).

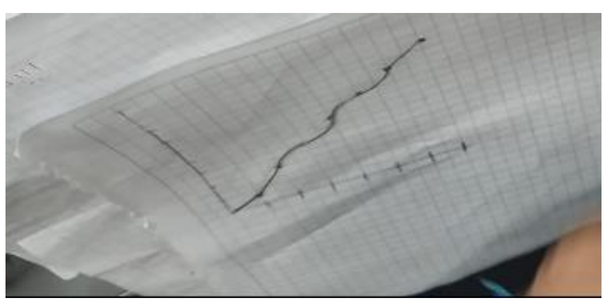


Gráfica 90. Fuente propia.

Cuando llegan a la parte superior del recipiente, encuentran un cilindro inclinado, en donde se centra la discusión en la forma que debería ir el gráfico cartesiano, coincidiendo que es una línea recta, pero la inclinación del recipiente no afecta en nada la gráfica cartesiana, pero el estudiante R menciona que si debería afectar.

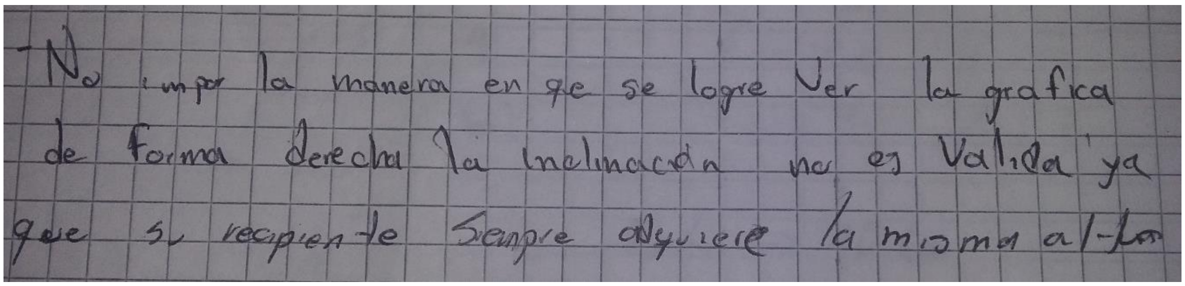
M resalta que no importa la inclinación, lo importante es que va a mantener la forma de cilindro, y R entiende la idea y expresa que los cambios de altura van a depender de lo ancho de la base, ya que entre más ancho, los cambios son menores y entre más angosto los cambios son mayores.

Una vez aclarada la discusión, expresan que la gráfica del recipiente esférico es igual al segmento anterior (gráfica 90). Una vez encontrada la gráfica cartesiana de cada parte del recipiente total, contrastaron esas gráficas con la que habían generado en la anterior sesión (gráfica 91).



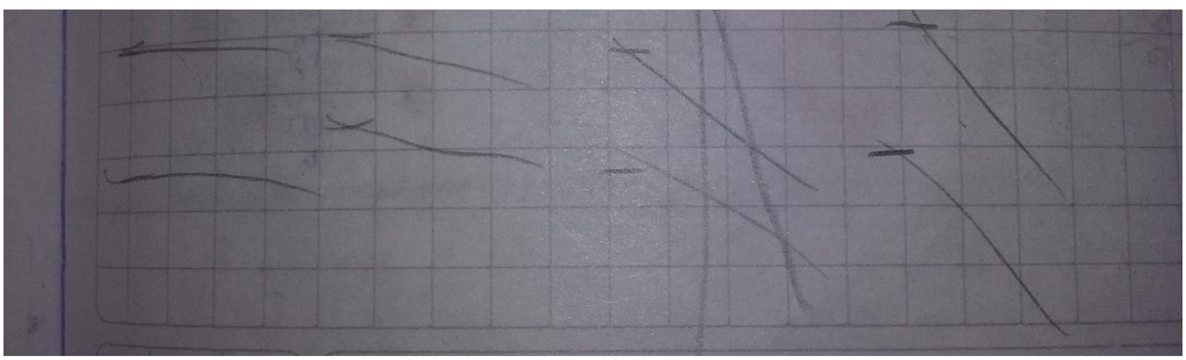
Gráfica 91. Fuente propia.

Los estudiantes empiezan a copiar la respuesta al primer aspecto que se mencionó al principio de la clase, (gráfica 92). Una vez escrita la respuesta, comenzaron a arreglar la gráfica cartesiana del recipiente que les correspondió, pero comienzan a arreglar el eje x ya que al principio sólo tiene 70 litros, sin cumplir la condición que deben tener 90 litros de volumen, pero mencionan que no importa mucho aspecto, ya que lo que importa es la gráfica cartesiana y su forma.



Gráfica 92. Fuente propia.

Teniendo la gráfica cartesiana, comienzan a obtener respuestas de su proceso: (1) A una gráfica cartesiana se le puede asociar varias gráficas, tomando como ejemplo, el recipiente cilíndrico con muchas inclinaciones (gráfica 93), lo importante es que tengan la misma dimensión en lo ancho, ya que si el recipiente cambia de ancho, la gráfica cartesiana si va a cambiar.



Gráfica 93. Fuente propia.

El grupo COMANDO 17 llama al profesor para socializar los avances que han tenido en relación a su proceso, como se evidencia en el siguiente fragmento de transcripción del día 1 de octubre de 2015:

DIÁLOGO 31.

(1) **[...] P:** Bueno, R me dijo que *este [Señala una gráfica cartesiana recta] puede estar asociado a este [señala el recipiente cilíndrico inclinado]*.

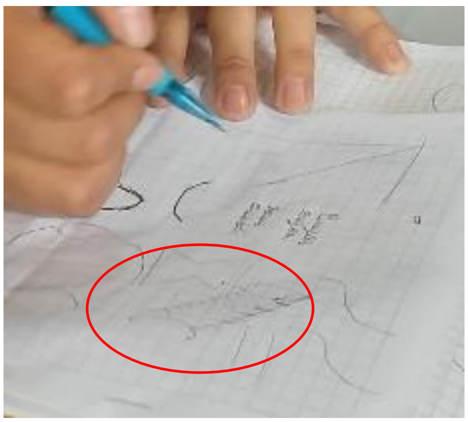
(2) **R:** Es que ya tenemos las ideas claras, es que técnicamente… *[Es interrumpido por el profesor]*.

(3) **P:** Se puede quitar el tapabocas, es que no le estoy escuchando nada, es que hay mucho ruido.

(4) **R:** *[El estudiante se quita el tapabocas]* es que mire, es que aparte de esto *[Refiriéndose a la pregunta anterior]* ya respondimos a la siguiente pregunta, que era: ¿Por qué a una sola gráfica se le puede asociar tres o más recipientes?

(5) **M:** Cuatro.

(6) **R:** Es que mire, nosotros podemos tener este recipiente si *[Señala el recipiente en el cuaderno, gráfica94]* mientras no les cambiemos el ancho va a tener la misma gráfica. No importa si está inclinado, puede estar así inclinado *[Vuelve a señalar la gráfica del recipiente, gráfica 89]* o puede estar inclinado al otro lado, pero si tiene el mismo ancho va a tener la misma gráfica *[Refiriéndose a la gráfica cartesiana]*.



Gráfica 94. Fuente propia.

(7) **R:** Es que hasta donde tengo entendido, esto *[Señala el recipiente, gráfica 94]* se mide así *[Realiza pequeñas líneas inclinadas en el borde del recipiente]* y no así *[realiza líneas paralelas a la base]*.

(8) **T:** Lo único que cambia es el ancho.

(9) **M:** La única variable valida es el ancho.

(10) **R:** Exactamente, si cambiamos el ancho la gráfica va a cambiar. **[...]**

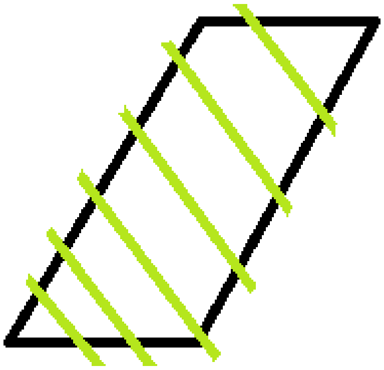
El grupo comienza a determinar que los cambios de altura que se generan en el recipiente cilíndrico inclinado, son los mismos que en el recipiente de forma cilíndrica, ya que al tener el mismo ancho, los cambios son los mismos.

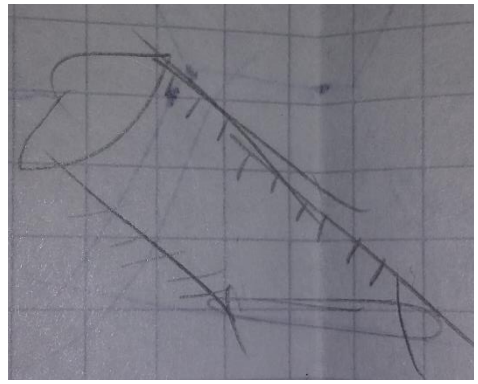
Para que esta idea sea más explícita, el profesor les pregunta: ¿Cuál es la representación que modela las gráficas cartesianas? COMANDO 17 contesta que es la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente. Por lo tanto, el profesor les recalca que deben hablar en términos de esa relación para determinar y justificar la relación de las gráficas cartesianas con los recipientes, como se evidencia en el siguiente fragmento de transcripción del día 1 de octubre de 2015:

DIÁLOGO 32.

(1) **[...] P:** ¿Las gráficas cartesianas que representan?
(2) **X:** El líquido, la forma que toma del recipiente.
(3) **P:** ¿Es eso de lo que estamos hablando?
(4) **M:** Cómo el líquido es suministrado *[Se genera un silencio en el grupo]*.
(5) **P:** Por eso les estoy preguntando ¿Qué representan las gráficas cartesianas? Las que están onduladas, lineal.
(6) **T:** La altura en centímetros *[Queda en silencio]*.
(7) **M:** La altura del líquido en centímetros según el líquido en litros suministrados en el recipiente
(8) **P:** Listo, ¿Qué podemos hacer para relacionar esta gráfica *[Señala la gráfica del recipiente cilíndrico]* con esta *[Señala la gráfica del recipiente cilíndrico inclinado (gráfica 95)]?* **[...]**

En este momento, es cuando se presenta la confusión en el grupo, ya que el grupo comienza a mencionar que para medir la cantidad de líquido suministrado y la altura, toca de forma inclinada, y no en la perpendicular. Los estudiantes comentan que si el recipiente cilíndrico se inclina el agua que está contenida también se inclinará (gráfica 95). El profesor les pide que analicen muy bien las respuestas, que de acuerdo a la interpretación de las gráficas cartesianas, justifiquen sus respuestas.





Gráfica 95. Fuente propia.

Los estudiantes mencionan que el ancho del recipiente permite que los cambios de altura de acuerdo a los litros suministrados del líquido en el recipiente, sean constantes, definiendo constante como los cambios que se realizan de litros son los mismos en la altura, ejemplo, a diez litros de líquido suministrado en el recipiente, el líquido toma 10 centímetros de altura y sucesivamente.

La discusión se centra en cómo medir la altura del recipiente si se inclina el recipiente, para eso, el profesor realiza el siguiente ejemplo, como se muestra en el siguiente fragmento de transcripción:

DIÁLOGO 33.

(1) **[...] P:** Bueno, tenemos estos dos recipientes *[Toma dos esferos de los estudiantes, gráfica 96*] ¿vale? Inclino este *[inclina el esfero azul]* y aplico diez litros a este y a este *[Refiriéndose a los recipientes]* ¿Qué pasa cuando los lleno?

Gráfica 96. Fuente propia.

(2) **R:** En este se ve lleno *[Señala el recipiente que no está inclinado]*

(3) **X:** Lo mismo, porque ambos tienen el mismo tamaño.

(4) **M:** No.

(5) **P:** Por eso les digo, es del mismo tamaño, son dos recipientes que son iguales.

(6) **M:** ¿Iguales?

(7) **P:** Sí. Los pongo ahí *[los coloca sobre la mesa]* este lo puedo inclinar, *[Inclina el esfero azul]* aplico diez acá y aplico diez acá *[Señala los esferos]* ¿Qué pasa con la altura?

(8) **M:** Toma más altura en ese *[Señala el recipiente inclinado]*

(9) **T:** El otro ¿No?

(10) **X:** La misma.

(11) **P:** ¿Cuál es la altura acá? *[Refiriéndose al recipiente que no está inclinado]*

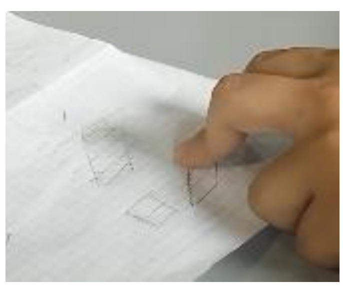
(12) **X:** Pues diez.

(13) **P:** ¿Cuál es la altura acá? *[Refiriéndose al recipiente que está inclinado]*

(14) **X:** Pues diez, pues porque los dos son iguales.

(15) **M:** Es que vea, es hacer como esto.*[Señala un gráfico que realizó previamente, gráfica 97]*

(16) **P:** Usted hizo una gráfica ahí *[Señalando el cuaderno]*, préstemela. Aplico diez que es esto *[Sombrea un trozo de los que ya estaban dibujados]*.



Gráfica 97. Fuente propia.

(17) **M:** Diez centímetros.

(18) **P:** Escuchen lo que dice M. Entonces ¿Cuál es la altura?

(19) **M:** Cambiaría su altura pero no su capacidad, su capacidad viene siendo la misma **[...]**

COMANDO 17 presenta confusiones sobre la inclinación del recipiente, ya que piensan que al inclinar el cilindro, su altura cambiará, ya que surge la idea que inclinar significa apoyarlo sobre una de sus esquinas, para ello el estudiante M toma un borrador y muestra esta idea (gráfica 98), expresando que como cambia la altura, entonces la gráfica cartesiana sigue siendo lineal, pero debe dirigirse a otro punto.

Gráfica 98. Fuente propia.

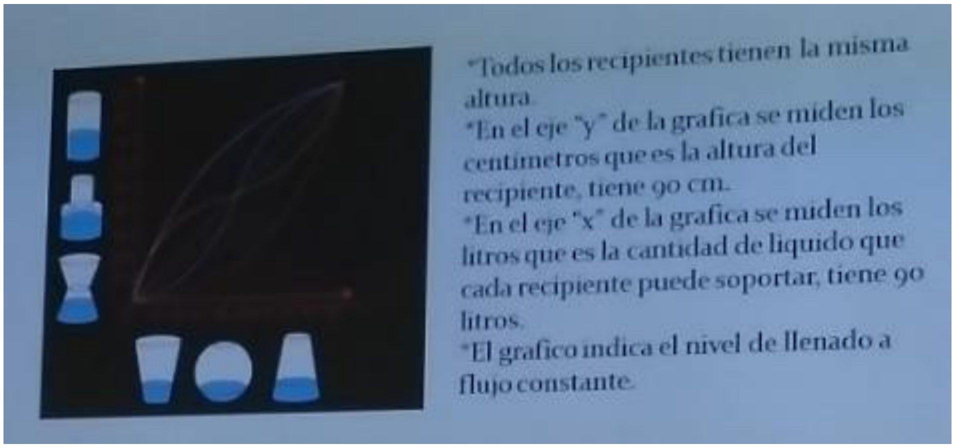
El profesor les pide que no justifiquen sus respuestas con la forma del recipiente, sino con la relación que se evidencia en las gráficas cartesianas. El estudiante R antes de seguir con la discusión le pide al profesor la explicación de cómo medir la altura del líquido si se inclina el recipiente, explicándole que la medida se hace de forma perpendicular y no con la inclinación del borde del recipiente. Por lo tanto, R concluye que al inclinarlo la altura de uno de los recipientes cambia, pero el profesor les pide nuevamente que revisen sus respuestas, ya que están enfocados a los recipientes y no a las variables que juegan dentro de la situación.

De acuerdo a lo anterior, se evidencia que los estudiantes están presentando una toma de conciencia de las resignificaciones relacionado con el nivel formal en cuanto se reconoce que las re-significaciones conllevan a construir redes de objetos matemáticos que permiten resolver situaciones en otros contextos; consolidando nuevos procesos, conceptos e ideas matemáticas a lo largo del proceso.

6.6 SOCIALIZACION FINAL.

GRUPO CDC.

CDC comienza mencionando los aciertos más importantes que tuvieron en el proceso, expresando que la primera idea surgida en el grupo es que los recipientes tienen una altura de 90 cm y una capacidad de 90 litros, expresando que esta idea se sustenta mediante el plano cartesiano en donde se encuentran las gráficas cartesianas. El eje y representa la altura del recipiente y el eje x representa la cantidad de litros suministrados en los recipientes (gráfica 99).

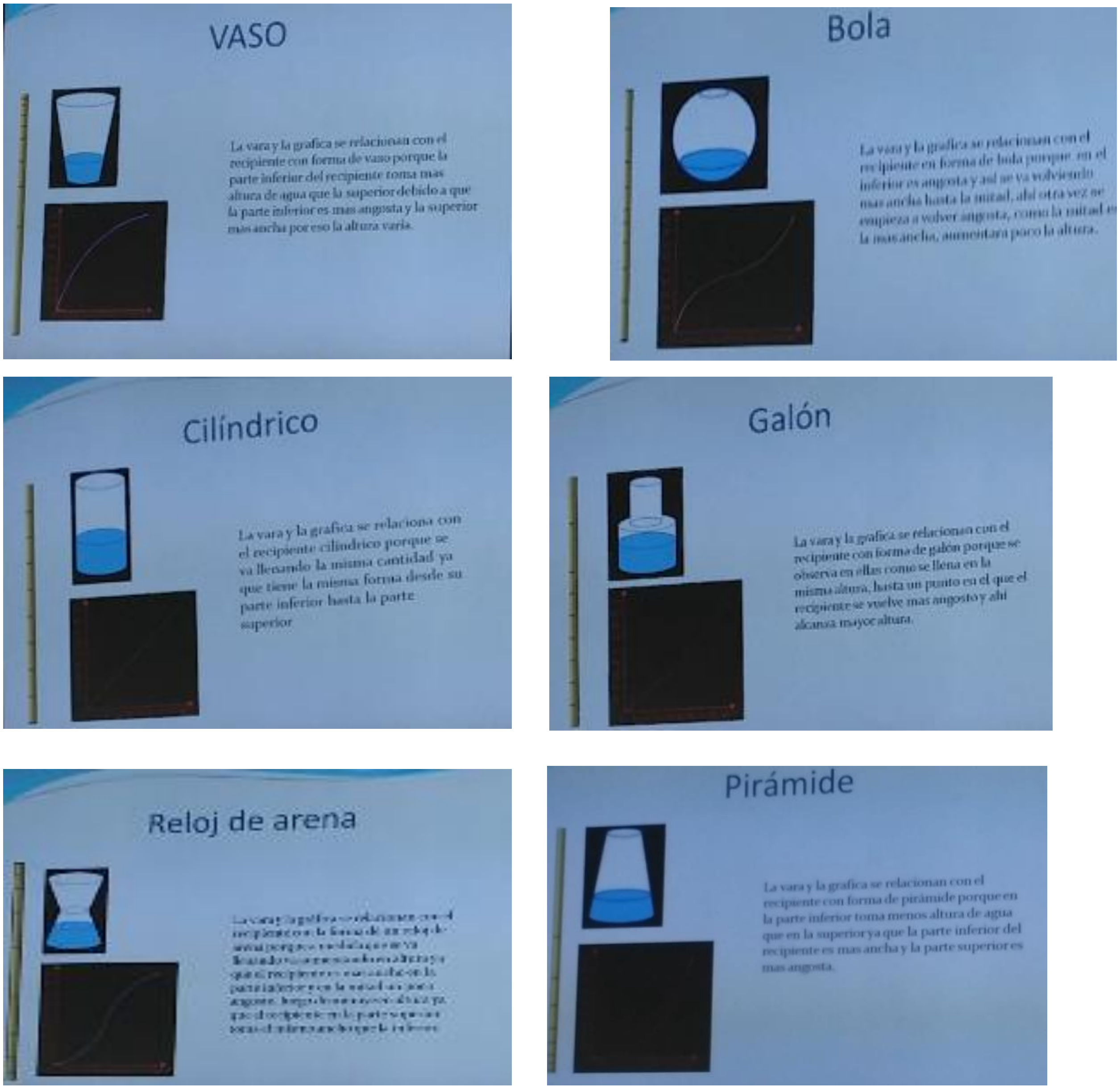


Gráfica 99. Fuente propia.

CDC expone las varas como un instrumento que les permitió dar solución al problema, mencionando que las varas representa el aumento de la altura del líquido a medida que se agregada ciertas cantidades de líquido a los recipientes (gráfica 100) Por lo tanto existe una relación entre las varas, las gráficas cartesianas y los recipientes.

Gráfica 100. Fuente propia.

Para realizar la relación entre las varas, gráficas cartesianas y los recipientes, había que tener en cuenta que a medida que se iba aplicando cierta cantidad de líquido su altura iba aumentando de acuerdo a la forma del recipiente, ya que entre más angosto el recipiente la altura que el líquido alcanzaba era mayor y si el recipiente presentaba partes muy anchas la altura que alcanzaba el líquido era menor. De acuerdo a esta idea, realizaron la siguiente relación (gráfica 101):

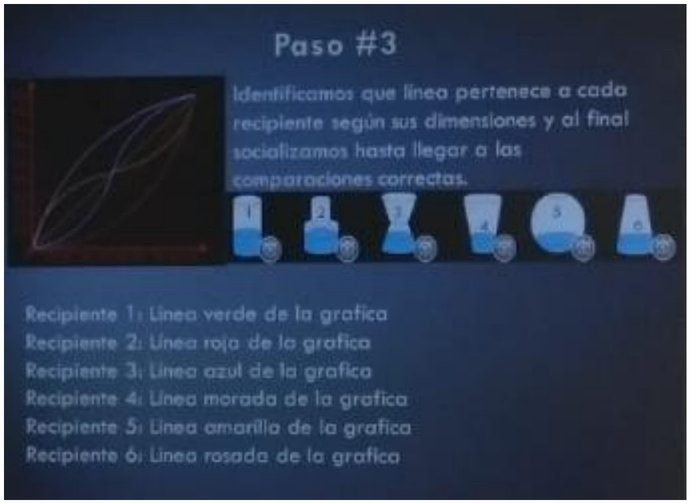


Gráfica 101. Fuente propia.

GRUPO AQUÍ TOY.

AQUÍ TOY comienza haciendo todo un recorrido de su proceso, empezando desde la primera tarea la cual estaba destinada a tener un primer acercamiento al problema, para después comenzar a indagar más aspectos sobre la situación. Dentro de la segunda tarea, se muestran seis gráficas cartesianas y seis recipientes, por lo cual, se deduce que todos los recipientes tienen la misma altura y la misma capacidad, que corresponde a 90 centímetros y 90 litros respectivamente.

Teniendo en cuenta esta información, AQUÍ TOY realizó una primera relación entre las gráficas cartesianas y los recipientes (gráfica 102).



Gráfica 102. Fuente propia.

Seguido a eso, se presentó unas varas que estaban relacionadas a los recipientes, expresando que la longitud de las varas cambia pero no cambiaban sus litros, olvidando la correspondencia que hay entre litros del líquido y la altura del líquido en los diferentes recipientes.

Gráfica 103. Fuente propia.

AQUÍ TOY resalta que con las tareas de asociar una gráfica cartesiana a un recipiente e identificarlo, se dieron cuenta que había una dependencia entre las variables de la altura del líquido y la cantidad de litros del líquido, ya que ambas deben aumentar para que la dependencia exista.

Acabada la exposición el profesor les menciona unas preguntas al grupo AQUÍ TOY, ya que se vio muchas inconsistencias en la exposición:

DIÁLOGO 34.

(1) **[...] P**: ¿Qué representaban las gráficas?

(2) **L**: ¿Qué representaban las gráficas?... Heee…. Como se llenaba el recipiente

(3) **R**: La manera que se tomaba… *[Es interrumpida]*

(4) **L**: La relación entre los centímetros y los litros representa la gráfica…en cada segmento del recipiente, que tanto líquido hay en esos centímetros y de qué forma se va llenando.

(5) **P:** ¿Está seguro de lo que me está diciendo? ¿Cuánto líquido había de acuerdo a los centímetros?

(6) **L:** Y viceversa.

(7) **Q:** Es al contrario.

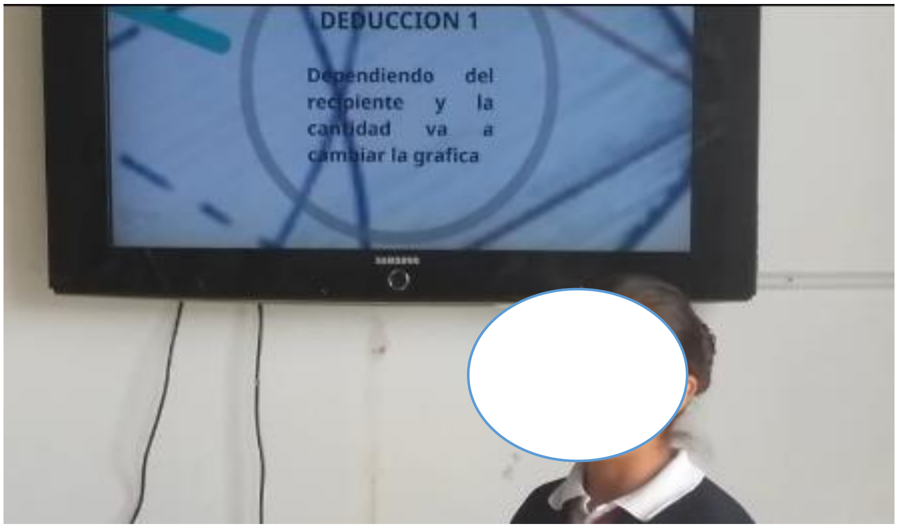
(8) **L:** Por eso, como se llena el recipiente cada centímetro, la relación que hay entre el líquido y cada centímetro. **[...]**

El curso comienza a interferir en la discusión, mencionando que el estudiante L está confundiendo la dependencia de las variables, ya que los centímetros dependen de los litros del líquido. El estudiante L expresa que la dependencia se puede observar en ambos sentidos, pero AQUÍ TOY y el profesor expresan que la dependencia se realizaba de acuerdo a la cantidad de litros suministrados en el recipiente, la altura en centímetros del líquido cambiaba. El grupo expositor no cae en cuenta de los comentarios del curso y siguen mencionando los mismos errores.

GRUPO PEACE.

En la exposición de PEACE sólo una integrante expone ya que el resto de los alumnos fueron llamados a unas actividades extra-clase. La exposición estaba diseñadas con el fin de mostrar las deducciones que se fueron realizando a lo largo del desarrollo de las tareas realizadas en la clase.

La primera deducción que se obtuvo en el grupo PEACE es que dependiendo del recipiente, y la cantidad de líquido suministrado la gráfica va a presentar cambios (gráfica104). Esta idea surge al momento de contrastar las gráficas cartesianas y los recipientes, ya que al analizar estos dos objetos se relaciona que a medida que se llenada los recipientes las gráficas cambian de acuerdo a la forma del recipiente.



Gráfica104. Fuente propia.

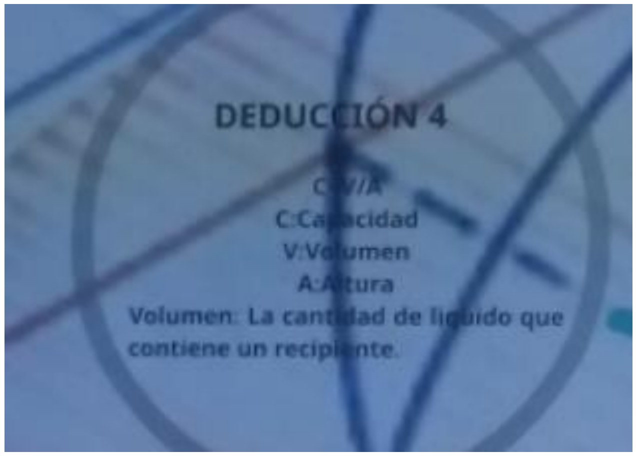
En el siguiente fragmento de transcripción se evidencia estas ideas expuestas por la integrante del grupo PEACE:

DIÁLOGO 35.

(1) **[...] K:** Por las… O sea, las gráficas nosotros al relacionarlo con los recipientes pues deducimos esto *[Señala la diapositiva, gráfica 104]* porque veíamos que según el recipiente iba a cambiar la forma de la… en la que se llenaba el recipiente. Porque digamos, si el recipiente es más ancho entonces la línea de la gráfica va a adquirir menos altura, porque el recipiente ancho va a tomar menos altura, y el recipiente más angosto va a adquirir más altura. **[...]**

La estudiante sigue con la siguiente deducción, mencionando que las gráficas cartesianas presentan la cantidad de agua que contienen los recipientes pero con la ayuda del desarrollo de las tareas, se llegó a una tercera deducción que era que todos los recipientes tienen la misma altura y la misma capacidad.

Otra de las deducciones, fue determinar las variables que jugaban dentro de la situación, que son volumen, altura, capacidad y la relación entre capacidad y altura (gráfica105).



Gráfica105. Fuente propia.

La estudiante resalta que a medida que se fue trabajando en las tareas, pudieron llegar a otra deducción, que las variables que juegan son la altura en centímetros y el volumen en litros todo relacionado al líquido en el recipiente y al mismo tiempo, estas son las que están relacionadas en las gráficas cartesianas, evidenciando que los centímetros dependían de los litros.

Al observar las gráficas, se deduce que la forma del recipiente hace que la altura del líquido cambie al agregar ciertas cantidades de líquido.

GRUPO JESSICA Y SU HABLADO.

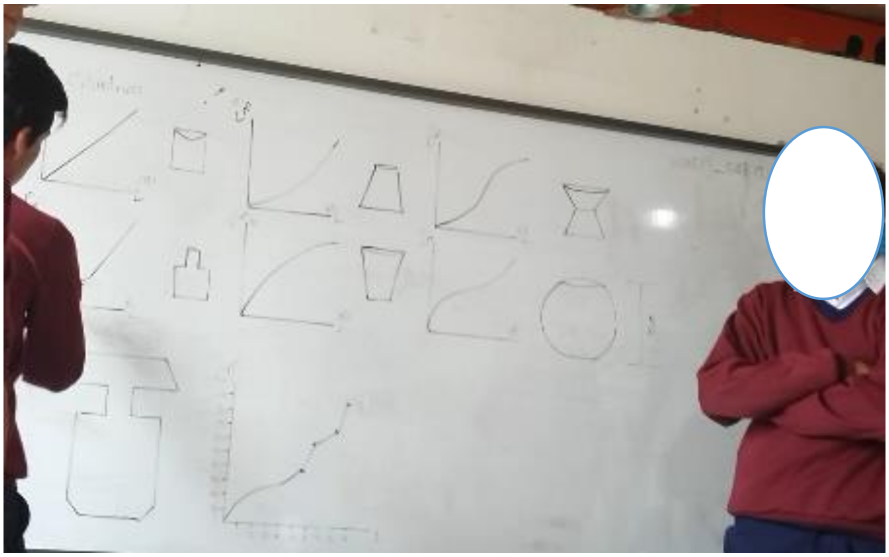
El grupo JESSICA Y SU HABLADO comienza exponiendo sus aciertos respecto al proceso, mencionando que la primera idea expuesta es que los recipientes presentan una relación entre las gráficas cartesianas y los recipientes.

Analizando las gráficas cartesianas se deduce que todos los recipientes tienen una altura de 90 centímetros y un volumen de 90 litros.

GRUPO SPLASH.

El grupo SPLASH comienza su exposición evidenciando todo su proceso a lo largo de su proceso en la secuencia de tareas. En la primera tarea SPLASH reconoció las variables que se presentan en la actividad, que son la altura en centímetros y el volumen en litros que se relacionan entre ellos.

Además de ello, en las gráficas cartesianas se podría evidenciar respecto a los recipientes, que cada uno de ellos tiene 90 centímetros de altura y una capacidad de 90 litros.



Gráfica 106. Fuente propia.

La primera relación se presentó ya que el recipiente cilíndrico no tiene cambios en su forma, por lo tanto, la forma de llenarse es de manera constante y de forma lineal. La segunda relación se establece ya que el recipiente presenta dos cambios, la base del recipiente es ancha y cambia en un punto ya que la parte final el recipiente es más angosto, por lo tanto, la gráfica lleva una parte constante y en un punto cambia por ser más angosto. La tercera relación se establece ya que la base del recipiente es ancha, por lo tanto, la altura del líquido presenta cambios en la altura menores. Ya que el siguiente recipiente igual que el anterior, sólo que colocado de forma contraria, asocian las gráficas de la misma manera, de forma contraria (gráfica 106).

El siguiente recipiente lo asocian a la gráfica cartesiana ya que al unir los dos recipientes anteriores, se obtiene la forma del recipiente con la forma del reloj de arena, entonces la unión de las gráficas de los vasos se relaciona con el reloj de arena. Por descarte, realizan la asociación del recipiente esférico con la última gráfica cartesiana, aunque se menciona que el recipiente en la forma de la base y la forma final, tienen el mismo ancho pero en la forma del centro es más ancho, por lo tanto, la gráfica se ajusta al recipiente.

La exposición sigue mencionando que las variables que se presenta en la situación son los centímetros y los litros del líquido, como se evidencia en el siguiente fragmento de transcripción del día 19 de octubre de 2015:

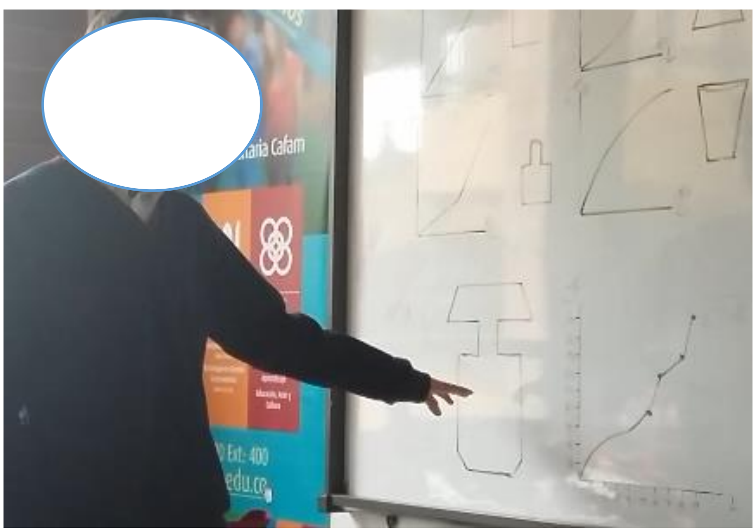
DIÁLOGO 36.

(1) **[...] W:** Las variables que se presentan en la gráfica son centímetros y litros, los centímetros son dependientes de los litros ¿Sí? Entonces si los litros no suben los centímetros tampoco.

La exposición sigue mencionando que la interpretación que el grupo SPLASH obtiene de las gráficas, es la forma de representar el llenado de cada uno de los recipientes. Otra de las ideas expuestas es que con la situación y la presentación de las varas, se pudo concluir que esta herramienta les permitió identificar que por cada cantidad de litros suministrados las varas resaltaban la altura que toma el líquido en el recipiente, tomando como ejemplo la vara relacionada con el recipiente cilíndrico, ya que a cada diez litros la altura marcada es de 10cm en 10 cm.

Con esta herramienta SPLASH concluyó que la altura que toma el líquido cada vez que se aplica cierta cantidad de líquido en el recipiente depende del recipiente, para ser más preciso depende del angosto o ancho del recipiente, ya que entre más ancho el recipiente toma menos altura y viceversa.

El grupo SPLASH termina la exposición con una gráfica de un recipiente el cual expresan que la gráfica está diseñada de acuerdo a los análisis que pudieron obtener en proceso, mencionando que los cambios de altura mayores se obtienen cuando el recipiente es angosto, mientras que las partes donde el recipiente presenta cambios menores el recipiente es ancho. Así mismo, expresan que cuando el recipiente no presenta cambios en su forma significa que si forma es cilíndrica (gráfica 107).



Gráfica 107. Fuente propia.

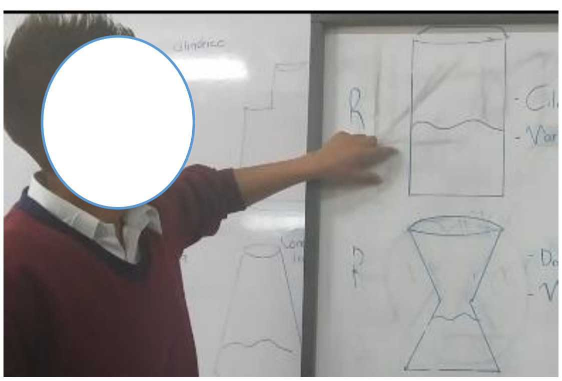
GRUPO COMANDO 17.

La exposición empieza con la presentación de todos los integrantes del grupo COMANDO 17, para seguir dentro de la exposición con la tarea de las varillas, tomando como ejemplo para realizar las asociaciones el recipiente de forma cilíndrica. Este recipiente lo asociaron a la varilla número uno, como se evidencia en el siguiente fragmento de transcripción del día 19 de octubre de 2015:

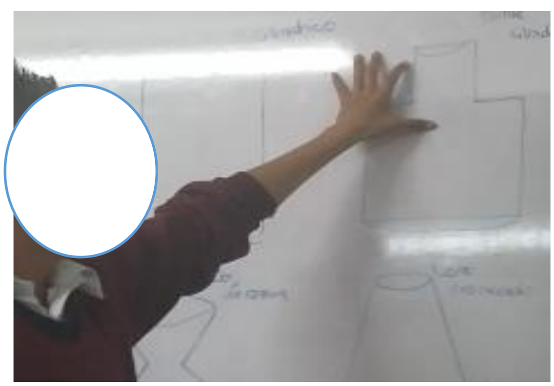
DIÁLOGO 37.

(1) **[...] T:** Bueno, nosotros empezamos a asociar las varillas con los recipientes. El recipiente cilíndrico lo asociamos con la varilla número uno ya que podemos ver que su llenado es constante, que cada vez que suministramos 10 centímetros de líquido… *[Hace un gesto para corregir su idea anterior]* 10 litros de líquido su altura es de 10 centímetros y así *sucesivamente [gráfica 108]*.

El doble cilindro empieza ancho y termina angosto, por esta razón el líquido toma menor altura al principio y cuando se va llenado, su altura es mayor *[Señala la parte final del recipiente, gráfica 109]* por esta razón, la asociamos a la vara número tres.



Gráfica 108. Fuente propia.



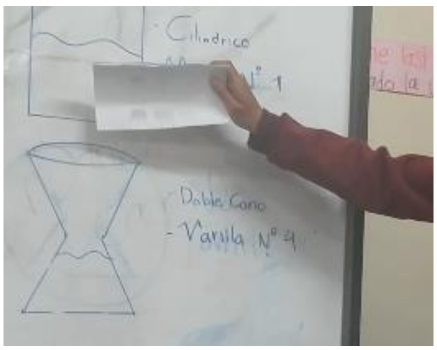
Gráfica 109. Fuente propia.

El cono truncado girado, en este recipiente podemos ver que su base es angosta y la altura del líquido aumenta mayor, está la asociamos con la vara número dos.

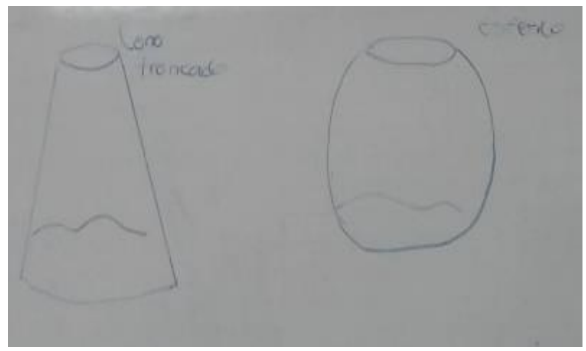
(2) M: Heee… En el reloj de arena, en la varilla número cuatro… *[Hace gesto de inconformidad]* En la figura número cuatro, el reloj de arena y la varilla número cuatro vemos que su forma representa diferentes cambios que están en la estructura, estos cambios

hace ver que en la parte superior y en la parte inferior es más ancha, eso hace que el líquido tome menor altura al llenarlo constantemente y en la mitad podemos observar es más angosta entonces el líquido va a tomar mayor altura (gráfica 110) y en la parte de arriba podemos ver que el recipiente es más ancho, entonces el líquido toma menor altura.

El cono truncado podemos ver que en la parte inferior es mucho más ancha entonces el líquido va a tomar menor altura en el llenado constante y en la parte superior como es menor tamaño toma mayor altura (gráfica 111).



Gráfica 110. Fuente propia.



Gráfica 111. Fuente propia.

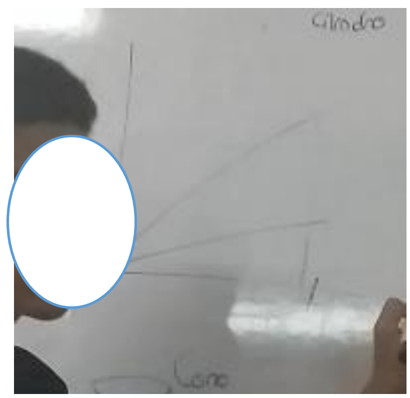
En la esfera podemos observar (gráfica 111) que en su comienzo presenta menor espacio así que irá ganando más altura pero a medida que se va llenado el líquido va a des aumentar altura y así hasta que llegue a la parte superior que gana altura. **[...]**

COMANDO 17 concluye que las varas representan la altura del líquido en centímetros según el volumen de litros. Las líneas representan su altura y los espacios entre cada línea representan la cantidad de litros suministrados de líquido en cada recipiente.

Se puede resaltar que la estrategia de automatización está teniendo efecto sobre el grupo (Rojas y Romero, 2006); relacionado con el nivel formal, por el hecho de expresar en lenguaje técnico los instrumentos (Los recipientes, las varas) y objetos matemáticos involucrados en el proceso de la resolución de la situación (gráficas cartesianas, variables, dependencia entre variables). Lo más importante dentro de esta relación, es poder usar los nuevos conceptos y procesos generados en el desarrollo de la situación de forma automática pero teniendo una toma de conciencia de la forma de proceder y de porqué se efectúa de la manera en la que se utiliza, como lo hacen en la exposición los estudiantes al intentar justificar la relación que se tiene entre las gráficas cartesianas y los recipientes.

De esta manera, al llegar a un nivel formal dentro del proceso de matematización, se evidencia que la empresa negociada por la comunidad de práctica fue desarrollar un proceso matemático con la secuencia de tareas, cumpliendo con el último descriptor de la existencia de la comunidad de práctica.

Una de las ideas que se obtuvo en su proceso, es que puede haber recipientes con su misma capacidad pero con diferentes alturas (gráfica 112), y realiza una gráfica con dos líneas exponiendo lo anterior.



Gráfica 112. Fuente propia.

COMANDO 17 expone otra idea, expresando que todas las gráficas cartesianas de línea recta son cilindros ya que su llenado es constante, lo que podrían cambiar son su altura y su capacidad. Las gráficas cartesianas con curvas representan que el recipiente tiene su base ancha o angosta y van aumentando en su altura más ancho o más angosto según el caso.

Otra de las conclusiones que el grupo COMANDO 17 menciona, es que no toda gráfica cartesiana con curva corresponde a recipientes con formas curvas y no toda gráfica lineal corresponde a los recipientes cilíndricos, ya que las gráficas no hacen referencia a la forma del recipiente, ya que estas hacen es referencia a los cambios de altura del líquido según la cantidad de litros del líquido suministrados en los recipientes. Por lo tanto, una sola gráfica podría corresponderles muchos recipientes en donde esos cambios de altura se realicen de la misma forma que expresa la gráfica (D.33, L.14- 19).

6.7 SÍNTESIS DEL PROCESO.

En esta sección de resultados es necesario hacer una síntesis de como los estudiantes fueron constituyendo el objeto mental variable y dependencia entre variables, evidenciando la trayectoria de aprendizaje recorrida por los estudiantes e identificada por el investigador.

Las primeras acciones de COMANDO 17 fue centrarse en la relación entre las gráficas cartesianas y las gráficas de los recipientes, expresando que a cada uno de los recipientes les cabe diferente cantidad de líquido, dando ejemplos como que el recipiente cilíndrico le cabe menos líquido que el recipiente esférico. Estas ideas las obtienen desde la percepción que tienen de la relación perceptual, el contexto de la clase de matemáticas y su experiencia previa a la actividad entre los distintos vasos. Por lo tanto, la relación que se evidencia es que cada línea representa la cantidad de líquido que le cabe a cada uno de los recipientes. En este momento los estudiantes reconocen una primera variable presente en la situación problema (p. 50) a partir de las indicaciones dadas por el docente en la tarea 1.

El grupo al trabajar con la gráfica cartesiana, resalta algunas cuestiones que aparecen en el proceso, como las líneas onduladas, que corresponden cada una a un recipiente pero no logran interpretarlas para determinar su relación con cada recipiente. Estas cuestiones describen el estado de comprensión que pueden verbalizar en relación con las variables y sus relaciones, siendo parte del proceso de matematización de las variables y de la situación.

Mas adelante los estudiantes relacionan los recipientes con las líneas, con la forma de los recipientes, pero también empiezan a organizar algunos aspectos dinámicos de la situación, cuando usan palabras como “cambia la cantidad de líquido” refiriéndose que cambiando el recipiente también cambia la cantidad de líquido que le quepa (D.4, L.63) aceptando que la cantidad del líquido presenta cambios en la situación, así mismo, la forma de los recipientes determinan el llenado de los mismos con la cantidad del líquido, dejando de lado la variable de la altura del líquido en el recipiente.

Para dejar de lado la idea que surgia de la percepción de los estudiantes, se les pidió fijarse más en la visualización de los gráficos cartesianos dada la autorización implícita en la entonación fuerte de la palabra *gráficas* emitida por el profesor.

Los estudiantes pudieron establecer la relación que existe en la situación por medio de una socialización dirigida por el docente. El estudiante K participe de la constelación de práctica, expresa que a cada litro que se le suministre al recipiente también va a cambiar su altura de centímetros (p. 67, D 11) resaltando que las variables de la situación son la cantidad de litros de un líquido y la altura del líquido en centímetros.

En el desarrollo de una socialización el profesor explica la idea de dependencia e independencia, expresando que la variable dependiente varía de acuerdo a los cambios presentes en la variable independiente. Los conceptos de dependencia e independencia el curso los asocia con la situación problema, mencionando que los centímetros dependen de los litros, es decir, los litros es la variable independiente y la altura de en centímetros es la variable dependiente. Se puede evidenciar un ítem que expresa Freudenthal (1983) para establecer la constitución del objeto mental dependencia de variables, reconociendo cuál es la variable dependiente (altura del líquido) e independiente (volumen del líquido) y estableciendo un patrón de cambio de las variables, como se evidencia que por cada litro suministrado de líquido, la altura del líquido cambia en el recipiente.

COMANDO 17 en su proceso, resalta que algunos recipientes al aplicar la misma cantidad de líquido la altura de acuerdo al recipiente varían, haciendo que algunas alturas sean mayores y otras sean menores. Estos cambios los asocian con palabras “más rápido” o “más despacio” respectivamente. La discusión indica el costo de quitar de la dinamicidad de la situación la variable tiempo. Hay un choque entre la idea de variable como hecho dinámico y la idea de variable como nombre

El docente para apoyar el proceso de COMANDO 17 hace uso de algunos instrumentos (Calculadora y lápiz) haciendo una relación análoga con los recipientes, ya que les permite ir generando procesos y conceptos que brindaban solución o avances a la situación (gráfica 28). Obteniendo la idea que entre más espacio en el recipiente menos altura toma el líquido en el recipiente y entre menos espacio en el recipiente más altura toma el líquido.

COMANDO 17 por medio de las varas como instrumentos de trabajo, concluyen que las varas expresan altura y volumen del líquido en un recipiente especifico, aclarando que las rayas marcadas en las varas representan la altura que alcanza el líquido en unos tramos y los espacios representan la cantidad de líquido suministrado en el recipiente, expresando que cada espacio entre líneas es la cantidad de litros suministrados en el recipiente. A partir de esta idea, determinan que las variables que juegan en el problema son litros y centímetros del líquido en los recipientes (D.16, L 4 -10), pero a su vez, existe una relación entre ellas, generando una relación de dependencia entre los centímetros del líquido en los recipientes de acuerdo la cantidad de litros suministrados en los recipientes (D.16, L 2).

Otro de los momentos a resaltar en el proceso del grupo, fue cuando se les entregó las gráficas construidas por las demás comunidades de práctica, (gráfica 52) y encuentran un error en la gráfica (gráfica 53) la cual, en un punto no se presenta un cambio de altura, lo cual es imposible, ya que al suministrar una cantidad de litros del líquido, debe presentar un cambio en la altura y no se puede mantener constante. En este instante, el grupo evidencia que hay una dependencia entre las variables de la situación.

El grupo COMANDO 17 comienza a escribir esta observación en el cuaderno, siendo muy concientes con la forma de describir y manteniendo la forma de escribir cantidades de Schwartz (1988) con la forma de la triada (numerosidad, unidad de medida y el atributo medible) (gráfica 54) reconociendo las variables de la situación y la dependencia entre ellas.

Además de ello, se dan cuenta que la dependencia entre las variables es directa, al aumentar la cantidad de litros del líquido en un recipiente, aumenta también la altura en centímetros del líquido, por lo tanto, si aumenta la numerosidad de una variable también aumenta la otra (gráfica 59).

7. REDISEÑO DE LA SECUENCIA DE TAREAS.

REDISEÑO TAREA 1.

Dentro de la implementación, se realizó una socialización con la constelación de práctica al finalizar la tarea (p.54), con el fin de aclarar dudas, escuchar las soluciones de todos los grupos e ir avanzando con todos los grupos de manera uniforme. Además, se debe garantizar que cada comunidad de práctica interactúe con la imagen de la situación problema, ya que en la implementación sólo se contó con un computador en el cual cada grupo observaba la gráfica correspondiente de la actividad (p. 42, D 1, L 1).

TAREA 1.

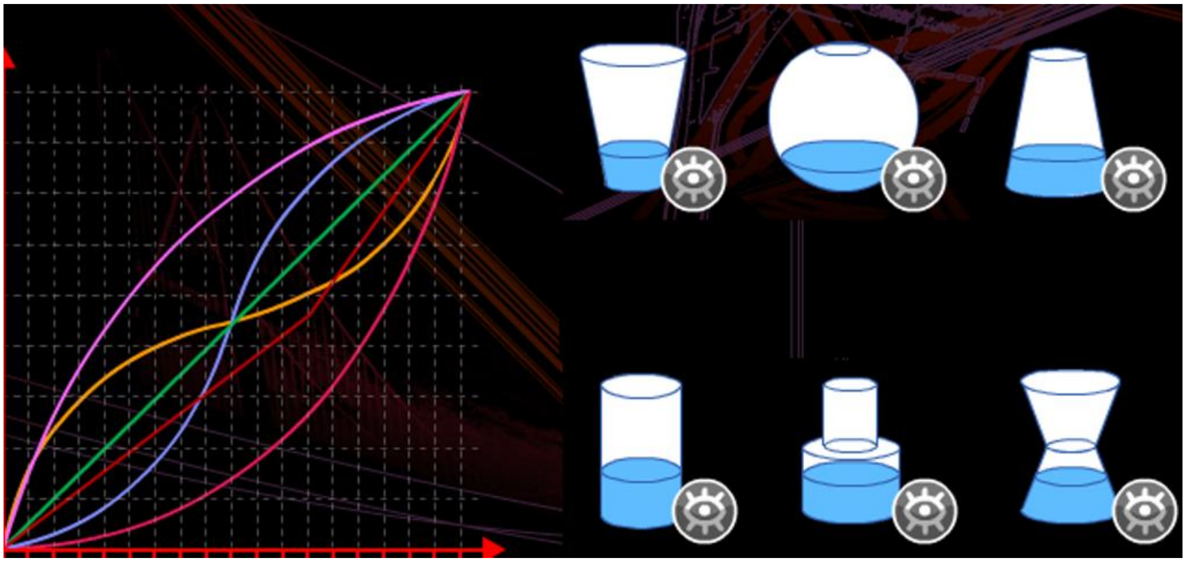
Interactúe con las gráficas representadas en el programa Geogebra y establezca que tipo de situación modelan las gráficas cartesianas presentadas, y qué relación hay con las seis gráficas de los recipientes.

Objetivos rol del estudiante.

Identificar la situación problema dentro de la secuencia de tareas, reconociendo características generales de la situación por medio de la percepción e ideas preliminares del mismo.

Descripción.

Se les presentará en grupos de tres o cuatro estudiantes la gráfica en la que están representadas seis gráficas de seis recipientes con diferentes formas, y seis gráficas cartesianas que representan la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente (gráfica 113). Cabe resaltar que la presentación de la situación se les brindará a los estudiantes por un computador por grupo de trabajo.



Gráfica 113. Fuente http://www.experiencingmaths.org/

Los estudiantes interactuan con las gráficas cartesianas, intentando inferir que tipo de situación podría modelar dichos gráficos. A partir de una lluvia de ideas de los estudiantes respecto a la posible situación, el profesor les mencionará las preguntas orientadoras para que comiencen a trabajar y tener un primer acercamiento al problema reconociendo características generales de la situación.

La idea de esta tarea, es establecer qué tipo de situación modelan las gráficas cartesianas, haciendo una relación entre las gráficas de los recipientes, indagando y reconociendo las propiedades de cada uno de los recipientes de acuerdo a las variables en juego.

Dentro de la implementación, se realizará una socialización con la constelación de práctica al finalizar la tarea, con el fin de aclarar dudas, escuchar las soluciones de todos los grupos e ir avanzando con todos los grupos de manera uniforme.

Preguntas orientadoras.

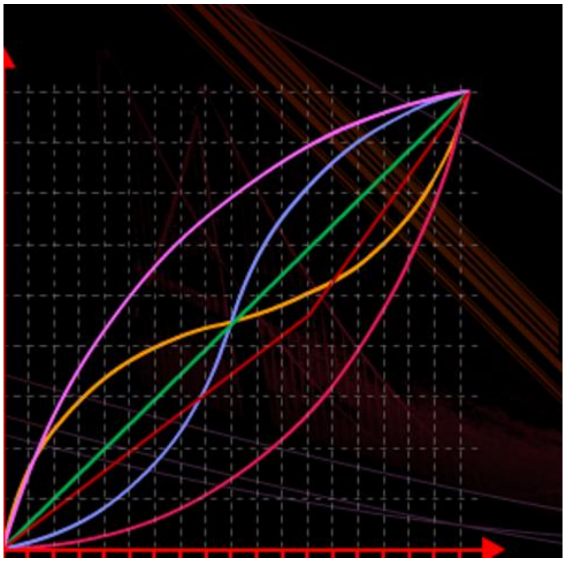
¿Cuál de los recipientes presenta una mayor altura?

¿Cuál de los recipientes presenta un mayor volumen?

¿Cuáles son las dimensiones que presenta cada uno de los recipientes de acuerdo a la altura y volumen?

Herramientas.

Programa Geo-gebra en la cual está representada la situación por medio de la gráfica a trabajar (gráfica114). Cada imagen debe estar en un computador por comunidad de práctica para garantizar la interacción con la gráfica.



Gráfica 114. Fuente http://www.experiencingmaths.org/

Imagen en la cual están las gráficas que representan la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente y los 6 recipientes que modelan la situación problema.

REDISEÑO TAREA 2.

Dentro de la implementación, al acabar esta tarea, se realizó una socialización con la constelación de práctica con el fin de aclarar dudas, escuchar las soluciones de todos los grupos e ir consolidando una idea de la situación problema (p.62). Además, se debe garantizar que cada comunidad de práctica interactúe con el simulador de la situación problema, ya que en la implementación sólo se contó con un computador (p.55, gráfica 16) en el cual cada grupo observaba las acciones correspondientes a la actividad.

- **TAREA 2.**

Establezca cuál de las seis gráficas cartesianas representa la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente presentados en la situación problema.

Objetivos rol del estudiante.

Reconocer las cantidades expuestas dentro de la situación, expresándolas de acuerdo la numerosidad, unidad de medida y el atributo medible (Schwartz, 1988).

Identificar la dependencia entre la altura del líquido suministrado en un recipiente con la cantidad de litros vertidos en dicho recipiente.

Descripción.

Una vez reconocidas las características de la situación y formulada la problemática, se les pedirá a los estudiantes que reconozcan las variables que intervienen, identificando la triada mencionada por Schwartz (1988) (numerosidad, unidad y atributo medible). Por medio del plano cartesiano reconocerán dicha triada, relacionándola con la misma gráfica cartesiana. Se garantizará que cada comunidad de práctica interactúe con el simulador de la situación problema en el cual cada grupo observará las acciones correspondientes a la actividad.

Una vez reconocidas las cantidades y variables de la situación, se comenzará a plantear las preguntas orientadoras con el fin que comiencen a identificar la relación que existe entre dichas variables, generando la dependencia entre ellas, para posibilitar la constitución del objeto mental (dependencia entre variables) de una manera más formal en el estudiante, para ello, es indispensable reconocer cual es la variable dependiente e independiente y poder generar dicha dependencia. Se realizará una socialización con la constelación de práctica con el fin de aclarar dudas, escuchar las soluciones de todos los grupos e ir consolidando una idea de la situación problema.

Preguntas orientadoras.

¿Cuáles son las variables que se presentan en la situación y que son modeladas por las seis gráficas cartesianas?

¿Cuál es la relación que existe entre cada una de las variables de la situación?

¿Cuál es la curva que representa la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente?

Herramientas.

Simulador en el cual está representada la situación por medio de la gráfica a trabajar (gráfica 107).

Las seis gráficas cartesianas impresas en una hoja, representadas cada una en un plano cartesiano diferente (Anexo 1).

Los seis recipientes del problema impresos en una hoja (Anexo 2).

REDISEÑO TAREA 3.

El inicio de esta tarea se realizó después de vacaciones de mitad de año, por lo tanto, el desarrollo de las actividades deben aplicarse de forma continua, ya que tanto tiempo sin interactuar con la secuencia de tareas, no permite el progreso normal de las actividades y de los procesos de matematización de los estudiantes (p.64).

La utilización de los instrumentos para que los estudiantes puedan apoyar sus conjeturas frente a la solución del problema también debería ser tangible brindándole algunos recipientes, ya que en el desarrollo de la tarea los estudiantes tuvieron que utilizar objetos de tu entorno como un lápiz y calculadora simulando ser recipientes (p.72, gráfica 28).

- **TAREA 3.**

Realice un análisis y una relación de las varas, suministradas gráficamente por el profesor, con la situación del problema; realice una correspondencia entre las varas y los recipientes, identificando de igual manera la relación con las gráficas cartesianas (anexo 3).

Identifique la dependencia que se presenta en las variables del problema, descubriendo el factor que modela dicha dependencia utilizando como instrumento las varas de la tarea, ya que en la implementación se puede observar que los estudiantes utilizaron muchos objetos, como lápices, calculadoras, reglas, entre otros, para hacer similitudes con los recipientes para hacerse a una idea como eran los cambios de altura del líquido en los diferentes recipientes.

Objetivos rol del estudiante.

Identificar la dependencia que se presenta entre las variables de la situación propuesta a trabajar dentro de la secuencia de tareas.

Descripción.

Los estudiantes que tengan a mano las hojas donde están representadas las gráficas cartesianas por individual y las varas donde se representa las marcas del cambio de altura del líquido de acuerdo a la cantidad de litros suministrados en los diferentes recipientes.

Se les brindará a los estudiantes instrumentos tangibles (recipientes) para que puedan apoyar sus conjeturas frente a la solución del problema.

Se les pedirá a los estudiantes analizar las varas para deducir la información que estás arrojan, para que puedan realizar la relación entre las varas y los recipientes. Los estudiantes tendrán que mencionar que las varas representan la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente, por lo tanto, analizar a que se debe esos cambios observando los recipientes permitiendo hacer la relación. Además de ello, deben asociar las varas, las gráficas cartesianas y los recipientes.

Preguntas orientadoras.

¿En cuál de los recipientes se presenta mayor cambio de altura respecto a los litros y en cual se presenta un menor cambio de altura respecto a los litros?

¿Qué información se puede tomar de las varas y qué relación tiene con la situación problema?

¿Cuál de las varas le corresponde su respectivo recipiente?

Herramientas.

La gráfica de los seis recipientes trabajados dentro de la situación.

Seis gráficas de varas en las que se demuestran los cambios de altura al ir suministrando cada diez litros de un líquido en cada uno de los recipientes.

REDISEÑO TAREA 4.

La relación de las varas se realizará de manera experimental permitiendo al estudiante interactuar con las varas y la forma en la que se llena los recipientes. Ya que las varas en las hojas no cumplen la misma función que al experimentar con ellas presentando algunas confusiones en el desarrollo de la tarea (p.74).

Establecer ciertos criterios para la elaboración de los recipientes ya que muchos de estos que se diseñaron en clase tuvieron similitudes con las gráficas de las tareas 1 y 2, por lo tanto, no se pudo establecer otros recipientes con diferentes formas (p.103, gráfica 60).

Realizar una socialización al proceso con los estudiantes para mencionar los avances de los alumnos respecto a la tarea, aciertos, conceptos, procesos para socializar con toda la constelación de práctica (p.108).

- **TAREA 4.**

Construir la gráfica de la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente dado por sus compañeros de clase.

Objetivos rol del estudiante.

Realizar un proceso de comprensión al desarrollo de la situación, demostrando los conceptos y procesos adquiridos durante la secuencia de tareas.

Reconocer las propiedades y características que presentan las gráficas cartesianas para asociarlas a diferentes recipientes, comprendiendo que la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente se determina de acuerdo a la forma que lleve dicho recipiente.

Descripción.

Cada grupo de trabajo dibujará un recipiente que presente una altura de 100 cm y un volumen máximo de 100 litros. Dicho dibujo estará elaborado en la mitad de una milimetrada ya que en la segunda mitad de la hoja, se realizará la segunda parte de la tarea.

Una vez terminada la elaboración de la gráfica del recipiente por grupos, se entregará al profesor, el cual al tener todos gráficos del salón, se distribuirá a cada grupo un recipiente aleatoriamente.

Cada grupo debe realizar la gráfica cartesiana del recipiente de acuerdo a la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros de cada recipiente otorgado.

Se establecerán ciertos criterios para la elaboración de los recipientes como el sentido de la gráfica cartesiana no puede ser horizontal ni vertical. La gráfica cartesiana debe tener diferentes formas a las presentadas en la tarea 1 y 2.

Realizar una socialización al proceso con los estudiantes para mencionar los avances de los alumnos respecto a la tarea, aciertos, conceptos, procesos para socializar con toda la constelación de práctica

Preguntas orientadoras.

¿Cuáles son las dimensiones que debe tener cada uno de los ejes del plano cartesiano?

¿Esa gráfica que se construyó sólo representa la forma de llenado de ese recipiente?

¿Qué características o que formas deben tener los recipientes para que la forma de llenado sea la misma de acuerdo a la gráfica construida?

Herramientas.

Hoja milimetrada.

REDISEÑO TAREA 5.

Antes de construir la gráfica cartesiana, se realizará una socialización para mencionar algunos aspectos que tiene que cumplir la gráfica cartesiana para que sea válida (p.108, gráfica 70), es decir, no se pueden realizar trazos horizontales ni verticales, ya que en esos momentos no se evidencia una relación de la altura del líquido de acuerdo a la cantidad de litros suministrados del líquido, ya qué en la implementación ocurrió este evento, por lo cual, muchas gráficas no tenían un recipiente al cual asociarse (p. 111, gráfica 75 - 76).

- **TAREA 5.**

Construir el recipiente a partir de su gráfica.

Objetivos.

Realizar un proceso de automatización de los conceptos y procesos construidos a lo largo de la secuencia de tareas, evidenciando las variables que juegan en la situación generando la dependencia existente.

Descripción.

Antes de construir la gráfica cartesiana, se realizará una socialización para mencionar algunos aspectos en relación a la tarea.

A partir de una serie de gráficas cartesianas que evidencia la altura del líquido en centímetros de acuerdo a la cantidad de líquido en litros, realizar la construcción del o los recipientes que modelan la gráfica.

Construido el recipiente, se le comenzará a indagar a los estudiantes que propiedades deben tener los recipientes que se pueden asociar a la gráfica establecida en la tarea.

Preguntas orientadoras.

¿A qué se debe que se pueda asociar varios recipientes a una misma gráfica cartesiana?

¿Cuáles son las características que debe cumplir un recipiente para asociarlo a las gráficas dadas por el profesor?

Herramientas.

Hoja milimetrada.

TAREA 6.

Realizar una socialización respecto al proceso de matematizarían realizado durante la secuencia de tareas, resaltando los atascos y soluciones a las diferentes tareas (p.128). De igual manera, realizar proceso de metareflexión y metacognición de su proceso, resaltando los avances más significativos dentro de la comunidad de práctica para exponerlo en la constelación de práctica (p. 128 -145).

8. CONCLUSIONES.

El grupo COMANDO 17 inmerso en el ambiente de aprendizaje para el desarrollo de la secuencia de tareas constituyó el objeto mental dependencia entre variables dentro del fenómeno trabajado, a partir de tres descriptores como los menciona Freudenthal (1983). El primer aspecto es el reconocimiento de las variables por parte de la comunidad de práctica, como los litros y los centímetros, detectando que estas variables tenían un máximo de 90, pero sin reconocer el atributo medible (Schwartz, 1988) (p.49-50). Luego de reconocer la unidad de medida y la numerosidad, pasaron a reconocer que el atributo medible es el líquido suministrado en cada uno de los recipientes. Esta idea se obtuvo por medio de la interacción con el fenómeno por medio simulador y la deducción (a partir del principio de realidad) (p.60-66). El segundo aspecto, es el reconocimiento de la variable dependiente (altura del líquido) e independiente (volumen del líquido), determinando su relación (p.51 – p.62 – p.65). El tercer aspecto es el reconocimiento de patrones de cambio dentro del fenómeno expresados explícitamente por los estudiantes, los cuales los realizaron numéricamente y de acuerdo a características de los recipientes, entre más angosto el segmento del recipiente mayores son los cambios de altura del líquido pero entre más ancho el segmento del recipiente menores son los cambios de altura del mismo líquido (p. 61 –p. 70, gráfica 30 - p.95).

Pensar la secuencia de tareas a partir de fenómenos de cambio y relación de dependencia entre variables permitió entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, recuperando la dinamicidad de la variable; rompiendo con los esquemas estáticos de enseñanza sobre el concepto de función y estableciendo una relación entre los elementos de los conjuntos que se trabajaron en la secuencia. (p. 51). Además, permitió qué los estudiantes establecieran una correspondencia entre los fenómenos del diario vivir y los objetos matemáticos.

Al constituir el objeto mental de variables, el diseño que se realizó y su puesta en marcha permitió alcanzar los objetivos de la clase y de la investigación, acertando en la elección del fenómeno del cual se basó para diseñar las actividades. Además, el ambiente de aprendizaje tomando el fenómeno como objeto de actividad permitió que emergieran varios principios de la educación matemática realista como objetivo de la investigación. Algunos de los principios que se evidenciaron fueron: (1) Principio de realidad (p. 39) partiendo de la situación que es real para el estudiante, para que el mismo estudiante lo asocie a sus acciones del diario vivir, imaginando la manera en la que se llena el recipiente, la manera de llenar y suponer acciones desde su experiencia acerca del fenómeno. (2) Principio de interacción (p.41) evidenciando este principio desde la forma de actuar entre los integrantes del grupo a lo largo del proceso.

Dentro de la incidencia de la secuencia de tareas, la mayor dificultad que tuvieron los estudiantes fue cambiar la convicción de que el tiempo era una variable de la situación (p.60), ya que muchos estudiantes determinaban que los recipientes se llenaban más rápido o más despacio, haciendo referencia que los cambios de altura del líquido de acuerdo a la cantidad de litros del líquido suministrados eran mayores o menores, pero lo relacionaban con la variable tiempo, lo cual dificultó el reconocimiento de la relación entre las variables. Para solucionar esta dificultad de la variable tiempo se realizaron tres acciones: (1) el profesor realiza un ejemplo en un contexto real imaginable para el estudiante, expresando que el tiempo que gasta para llenar un recipiente es indefinido, bien se podría tardar un minuto como se podría gastar 3 meses (p. 64), (2) el docente utiliza dos esferos iguales, para ejemplificar que al aplicar la misma cantidad de líquido a los dos recipientes pero en diferente frecuencia de tiempo (cinco minutos, tres meses), los recipientes van a tener los mismos cambios de altura sin modificar la gráfica cartesiana., volviendo la situación meramente relacional y atemporal (p.66, D. 12, L. 3), y (3) la interacción y discusión de los integrantes del grupo para sacar la variable tiempo de la situación (p. 110, D. 29, L. 12)

Uno de los aciertos dentro de la secuencia de tareas, fue hacer que los estudiantes reconocieran las variables dentro de la situación, expresándolas de acuerdo la numerosidad, unidad de medida y el atributo medible (Schwartz, 1988), ya que por medio de esta forma, los estudiantes identificaron características de las variables y del desarrollo del fenómeno de la secuencia de tareas. En la ruta de aprendizaje diseñada en el ambiente, se prevé que los estudiantes pudieran establecer la triada (numerosidad, unidad de medida y el atributo medible) de Schwartz (1988) y que en el proceso de problematización, los estudiantes pudieran establecer esa relación. Además, el reconocer y replicar la triada de Schawartz (1998) en la situación, permitio que los estudiantes enfocaran su atención en la situación recordando las varaibles que estaban en juego.

La secuencia de tareas permitió la constitución del objeto mental a partir de las instrucciones y planteamientos desarrollados en estas, apoyadas desde las estrategias del experimento de enseñanza (Rojas y Romero, 2006) establecidas desde el ambiente de aprendizaje, permitiendo que COMANDO 17 pasara por la ruta de aprendizaje diseñada. Aunque en la secuencia de tareas, fue importante realizar socializaciones dirigidas por el docente a la constelación de práctica para aclarar dudas, relacionar los procesos de las diferentes comunidades de práctica y llevar a un mismo nivel el proceso de las mismas (p. 52 – p. 60 – p. 62 –p.104).

9. BIBLIOGRAFÍA.

Armstrong, D., & Wilcox, S. (2007). *The gestural origin of language.*New York: Oxford University Press.

Bishop, A. (2005). *Aproximación Sociocultural a la Educación Matemática.* . Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de educación Matemática. Universidad del Valle.

Bonilla, M., Romero, J., Narváez, D., & Bohórquez, A. (2015). Características del proceso de construcción del significado del concepto de variación matemática en estudiantes para profesor de matemáticas . *AIEM Avances de Investigación en educación matemática*, 73-93.

Bressan, A. (2005). *Los principios de la educación matemática.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations Didactiques.* La Pensée: Sauvage

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista educación 32.*

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula: Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* Mexico DF: Paidos.

Coba, J., Laverde, E., & Valenzuela, A. (2013). *Descripción de la transformación de conceptos básicos en un curso de transición aritmética álgebra en un experimento de enseñanza.* Bogotá D.C: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales del aprendizage de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Cali, Valle del Cauca: Universidad del valle.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* New York: Kluwer academics publishers.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer academics publishers.

García, G., Serrano, C., & Espitia. (1997). *Hacia la Noción de Función como Dependencia y Patrones de la función líneal.*Bogotá DC: Universidad pedagógica nacional.

Gravemeijer, K. (1994). *Educational development and developmental research in mathematics education.* Journal for research in mathematics education.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. En J. Akker, B. Brenda , A. Kelly, N. Nieveen, & T. Plomp, *Educational design research* (págs. 72 - 113). Holanda: Tjeerd Plomp &Nienke Nieveen.

López, J., & Sosa, L. (2002). *Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato.* Yucatán México: Universidad Autónoma de Yucatán.

Posada, F. y Villa J. (2006). Propuesta Didáctica de Aproximación al Concepto de Función Lineal desde una Perspectiva Variacional. Colombia: Universidad de Antioquia.

Quintero, C., & Cadavid , L. (2009). Construcción del concepto de función en estudiantes de octavo grado. *Asocolme, encuentro colombiano de matemática educativa*.

Rojas, P., & Romero, J. (2006). *Estrategias para promover el aprendizaje de la multiplicación como cambio de unidad.* Bogotá DC: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Sánchez, M., & Revuelta, F. (30 de Noviembre de 2009). Obtenido de Youscribe: http://es.youscribe.com/catalogue/recursos-pedagogicos/educacion/ciencias-de-la-educacion/el-proceso-de-transcripcion-en-el-marco-de-la-metodologia-de-1844316.

Sandoval, C. (2002). *Investigación cualitativa.* Bogotá: ARFO.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En M. Behr, & J. Hiebert, *In number concepts and operations in the middle grades* (págs. 41 - 52). Reston VA: National Council of teachers of mathematics.

Treffers, A. (1987). *Didactical background on a mathematics program for primary education.*Dordrecht: Reidel.

UNESCO. (20 de Junio de 2013). *Matemáticas experimenales*. Obtenido de http://www.experiencingmaths.org/

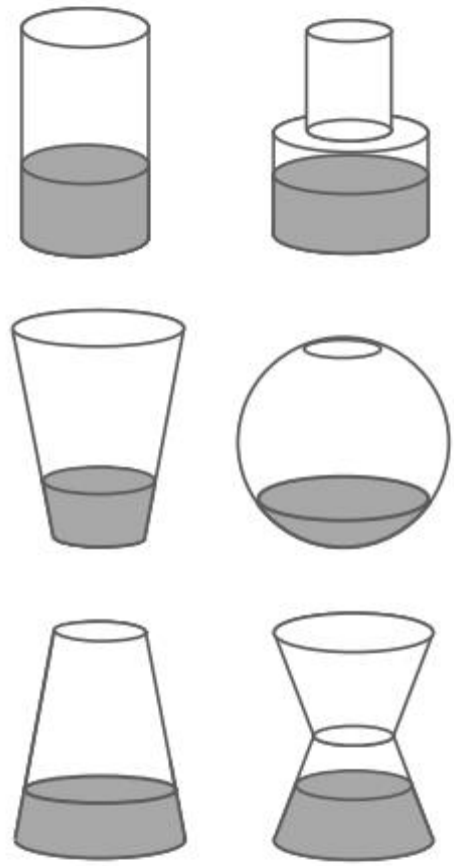
Vygotski, L. (2000). *Obras Escogidas, tomo II (2 ed.)* Madrid: Visor.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad.*Barcelona: Paidós.

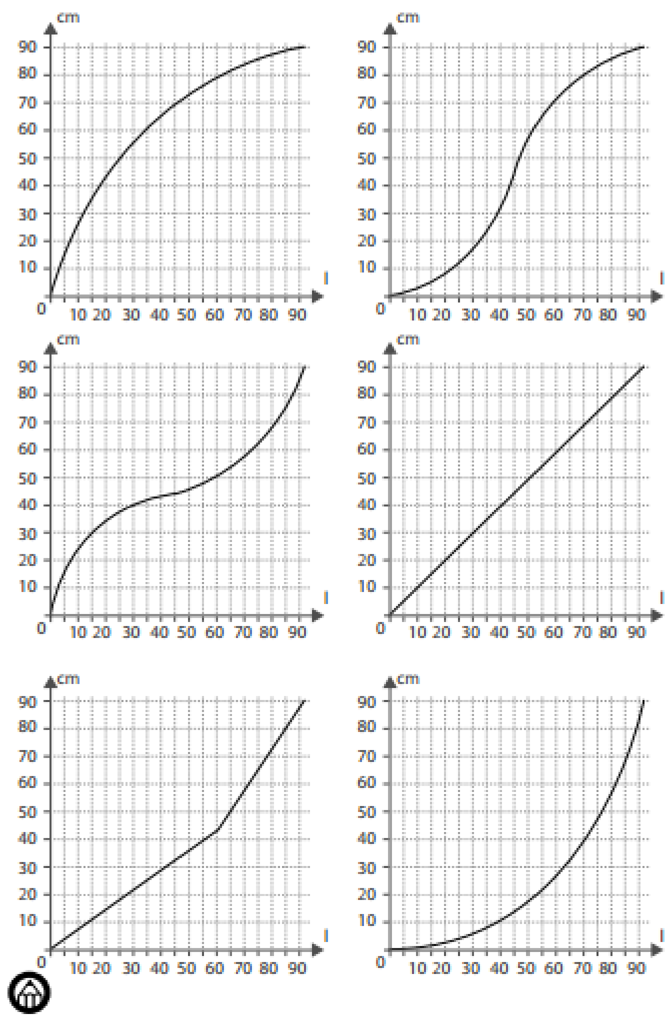
Yuni, J., & Urbano, C. (2002). *Técnicas para investigar y formular un proyecto. Recursos metodológicos para la preparación de proyectos de investigación.* Córdoba, Argentina: Mi Facu.

ANEXOS.

ANEXO 1



ANEXO 2



ANEXO 3