

**EVALUACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES DE LOS ESTUDIANTES EN UN PROCESO DE ESTUDIO EN TORNO A LA PROPORCIONALIDAD INVERSA.**

**JENY ALEXANDRA MEJÍA OSORIO  
EDISON SEPÚLVEDA SEPÚLVEDA**

**INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN  
TRABAJO DE GRADO**

**UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN  
BOGOTÁ D.C.  
2017**

**EVALUACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES DE LOS ESTUDIANTES EN UN PROCESO DE ESTUDIO EN TORNO A LA PROPORCIONALIDAD INVERSA.**

PRESENTADO POR:

**JENY ALEXANDRA MEJÍA OSORIO  
EDISON SEPÚLVEDA SEPÚLVEDA**

INFORME FINAL DE INVESTIGACIÓN  
TRABAJO DE GRADO

DIRECTOR:  
ORLANDO LURDUY

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN  
BOGOTÁ D.C.  
2017

## Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN.....	12
CAPITULO 1 - DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.....	13
1.1 CONTEXTUALIZACIÓN Y PERSPECTIVA DE LA PROBLEMÁTICA.....	13
1.1.1 La Didáctica De Las Matemáticas: Campo De Investigación.....	13
1.1.2 Evaluación.....	14
1.1.3 Entorno de resolución de problemas.....	15
1.1.4 Procesos de cognición e instrucción matemática: la proporcionalidad como contenido matemático de estudio.....	16
1.1.5 Presentación del problema.....	17
1.1.6 Objeto de estudio.....	18
1.2. JUSTIFICACIÓN.....	18
1.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN.....	19
1.3.1 Pregunta de investigación general.....	19
1.3.2 Preguntas de investigación específicas.....	20
1.4. ANTECEDENTES DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	20
1.4.1 Elementos de análisis didáctico.....	20
1.4.1.1 Enfoque Ontosemiótico. – Tetraedro didáctico.....	20
1.4.2 Evaluación.....	21
1.4.3 Resolución de problemas.....	23
1.4.5 Proporcionalidad.....	24
1.5 OBJETIVOS.....	25
1.5.1 Objetivo general.....	25
1.5.2 Objetivos específicos.....	25
1.6. PROCESO METODOLÓGICO.....	25
1.6.1 Población y contexto de la aplicación.....	25
1.6.2 Fases de la investigación.....	26
1.6.3 Cronograma de la investigación.....	26
1.6.4 Instrumentos de recolección de información.....	28
1.6.5 Textos.....	29
CAPITULO 2 – REFERENTES TEÓRICO - METODOLÓGICOS.....	32
2.1 REFERENTES TEÓRICOS.....	32
2.1.1 ELEMENTOS DE ANÁLISIS DIDÁCTICO.....	32

2.1.1.1	Perspectiva semiótica .....	32
2.1.1.2	Enfoque Ontosemiótico.....	33
2.1.1.3	Tetraedro didáctico.....	33
2.1.1.4	Sistemas de prácticas- Significados.....	34
2.1.1.5	Tipos de significado.....	35
2.1.1.6	Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de práctica - Elementos de significado.....	36
2.1.1.7	Relación Sistemas de Prácticas-Elementos del Significado .....	37
2.1.2	EVALUACIÓN.....	38
2.1.3	PROPORCIONALIDAD.....	39
2.1.3.1	Clases de problemas de tipo multiplicativo.....	39
2.1.3.2	Isomorfismo de medidas.....	40
2.1.3.3	Producto de Medidas .....	40
2.1.3.4	Proporcionalidad directa e inversa.....	40
2.1.4	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	42
2.2.	REFERENTES METODOLÓGICOS.....	43
2.2.1	Criterios.....	43
2.2.2	Tipo de investigación .....	43
2.2.3	Enfoque.....	44
2.2.4	Técnica .....	44
2.2.5	Articulación de estrategias.....	44
2.2.5.1	Teoría fundamentada en los datos (TFD).....	44
2.2.5.2	Análisis cualitativo de contenido (ACC).....	45
2.2.5.3	Análisis ontosemiótico de textos (AST).....	45
2.2.5.4	¿Cómo se usan las técnicas?.....	45
2.2.6	Unidades de análisis .....	46
2.2.6.1	Unidades de muestreo- Um .....	46
2.2.6.2	Unidades de contexto- Uc.....	46
2.2.6.3	Unidades de registro- Ur.....	47
2.3	REDES CATEGORIALES .....	47
2.3.1	Red categorial parte No 1 (Sistemas de Prácticas-Significados Institucionales).....	48
2.3.2	Red categorial parte No 2 (Sistemas de Prácticas – Elementos del Significado).....	49
2.3.3	Red categorial-parte No 3 (Objetos primarios del significado).....	49
2.3.4	RED CATEGORIAL FINAL.....	51
2.4	DESARROLLO METODOLÓGICO.....	53

2.4.1 El modelo DECA-Brousseau.....	53
2.4.2 Evaluación como metodología.....	54
CAPITULO 3 – RECOLECCIÓN, SISTEMATIZACIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN.....	56
3.1 RECOLECCION DE INFORMACIÓN.....	56
3.1.1 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN.....	57
3.1.1.1 Portafolios.....	58
3.1.1.2 Grabaciones de video.....	59
3.1.1.3 Protocolos de clase.....	60
3.2 ORGANIZACIÓN DE LOS DATOS.....	60
3.2.1 Tetraedro didáctico.....	60
3.2.2 Tipos de significado.....	62
3.2.3 Codificación.....	63
3.3 SISTEMATIZACIÓN DE LOS DATOS.....	66
3.4 REDUCCIÓN DE LA INFORMACIÓN.....	67
3.5 UNIDADES DE ANÁLISIS.....	68
3.5.1 Unidades de muestreo.....	68
3.5.2 Unidades de contexto.....	71
3.5.3 Unidades de registro.....	75
CAPÍTULO 4 -EVALUACION DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES.....	76
4.1 IDENTIFICACIÓN DE SIGNIFICADOS PERSONALES.....	76
4.1.1 Actividades de acción y formulación.....	76
4.1.2 Sistemas de prácticas - situaciones de acción (1A-2A).....	77
4.1.3 Sistemas de prácticas - situaciones de formulación (3F – 4F).....	77
4.1.4 Conclusiones Identificación - Sistemas de prácticas.....	78
4.2 DESCRIPCIÓN SIGNIFICADOS PERSONALES.....	78
4.2.1 Actividades de Acción – Formulación – Validación.....	79
4.2.2 Elementos de significado.....	79
4.2.3 Elementos de significado (Prácticas discursivas).....	81
4.2.4 Elementos de significado (Prácticas operativas).....	86
4.2.5 Elementos de significado (Prácticas normativas).....	92
4.2.6 Conclusiones Descripción- Elementos de significado.....	97
4.3 CARACTERIZACIÓN SIGNIFICADOS PERSONALES.....	99
4.3.1 Primera Caracterización (UM – UC → Actividades Acción - Formulación – Validación).....	99
4.3.2 Segunda Caracterización (UR → Actividades de Acción - Formulación – Validación).....	103

4.3.3 Tercera Caracterización (UR → Actividades de Validación).....	105
4.3.4 Conclusiones Caracterización- Niveles de expresión semiótica.....	113
<b>CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES</b> .....	<b>114</b>
5.1 Proceso investigativo.....	114
Diseño (Problema – Preguntas de investigación – Objetivos).....	114
Gestión (Metodología – Recolección – Sistematización – Análisis).....	115
Evaluación (Identificación – Descripción – Evaluación).....	115
5.2 Conclusiones con relación a los datos.....	116
5.3 Reflexión proceso formativo.....	118
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	<b>120</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Cronograma de investigación.....	27
Tabla 2. Textos estudiantes.....	29
Tabla 3. Cronograma aplicación.....	30
Tabla 4. Cuadro explicativo secuencia .....	31
Tabla 5. Red categorial parte 1.....	49
Tabla 6. Red categorial parte 2.....	49
Tabla 7. Red categorial parte 3.....	50
Tabla 8. Momentos Actividades.....	57
Tabla 9. Instrumentos de recolección de información.....	57
Tabla 10. Ejemplo transcripción video.....	59
Tabla 11. Ejemplo de Codificación y aplicación de la Red Categorial No 4.....	65
Tabla 12. Ejemplo Codificación Niveles de Expresión Semiótica.....	66
Tabla 13. Ejemplo de Sistematización de los datos .....	66
Tabla 14. Unidades de muestreo – Situaciones de acción.....	69
Tabla 15. Unidades de muestreo – Situaciones de formulación.....	70
Tabla 16. Unidades de contexto - Actividades de Acción-Formulación.....	72
Tabla 17. Unidades de contexto -Actividades de Validación.....	73
Tabla 18. Totalidad de elementos de significado.....	74
Tabla 19. Niveles de expresión semiótica - Unidades de Registro.....	75
Tabla 20. Descripción-Elementos de Significado-Prácticas Discursivas.....	81
Tabla 21. Descripción-Elementos de Significado-Prácticas Discursivas.....	86
Tabla 22. Descripción-Elementos de Significado-Prácticas Normativas.....	92
Tabla 23. Primera Caracterización- Situaciones de acción, formulación y validación.....	102
Tabla 24. Segunda caracterización – Situaciones de acción, formulación, validación.....	104
Tabla 25. Niveles de Expresión Semiótica- 5V - Unidades de Registro.....	106
Tabla 26. Niveles de Expresión Semiótica- 6V - Unidades de Registro.....	108
Tabla 27. Niveles de Expresión Semiótica- 7V - Unidades de Registro.....	110
Tabla 28. Niveles de Expresión Semiótica- 8I - Unidades de Registro.....	112

## ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 1. Tetraedro didáctico.....	34
Imagen 2. Tipos de significado.....	35
Imagen 3. Elementos de significado.....	37
Imagen 4. Isomorfismo de medidas.....	40
Imagen 5. Ejemplo portafolio estudiante.....	58
Imagen 6. Ejemplo protocolo profesor.....	60
Imagen 7. Tetraedro didáctico.....	61
Imagen 8. Relación practicas – elementos de significado.....	64
Imagen 9. Criterios asociados a Elementos de Significado y Sistemas de prácticas.....	64
Imagen 10. Unidades de análisis.....	68
Imagen 11. Unidades de muestreo.....	68
Imagen 12. Unidades de contexto.....	71
Imagen 13. Unidades de registro.....	75
Imagen 14. Identificación-Ejemplo de Categorías .....	77
Imagen 15. Descripción-Ejemplo de Categorías .....	79

## ÍNDICE DE DIAGRAMAS

Diagrama 1. Relación Sistemas de Prácticas-Elementos del Significado. ....	38
Diagrama 2. Uso de técnicas. ....	46
Diagrama 3. Redes categoriales. ....	47
Diagrama 4. Red categorial final. ....	52
Diagrama 5. Evaluación como metodología ....	55
Diagrama 6. Ampliación relaciones tetraedro didáctico. ....	62
Diagrama 7. Características de relaciones tetraedro didáctico. ....	62
Diagrama 8. Reducción de la Información. ....	67
Diagrama 9. Identificación de significados personales. ....	76
Diagrama 10. Descripción de significados personales. ....	79
Diagrama 11. Conclusiones descripción – Practicas discursivas. ....	97
Diagrama 12. Conclusiones descripción – Practicas operativa. ....	98
Diagrama 13. Conclusiones descripción – Practicas normativas. ....	98
Diagrama 14. Caracterización de significados personales. ....	99
Diagrama 15. Conclusiones sobre los datos. ....	117

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Resultados Sistemas de Prácticas-Acción. ....	77
Gráfico 2. Resultados Sistemas de Prácticas- Formulación. ....	78
Gráfico 3. Elementos de significado – Acción, formulación. ....	80
Gráfico 4. Elementos de significado - Validación. ....	80
Gráfico 5. Elementos de significado - Acción, formulación, validación.....	81
Gráfico 6. Resultados Elementos del Significado – Prácticas Discursivas.....	82
Gráfico 7. Resultados Elementos del Significado – Prácticas Operativas.....	87
Gráfico 8. Resultados Elementos del Significado – Prácticas Normativas.....	92

## ÍNDICE DE ANEXOS

- Anexo 1. Secuencia de actividades.
- Anexo 2. Transcripciones portafolios estudiantes.
- Anexo 3. Protocolos de clase.
- Anexo 4. Codificación de la información
- Anexo 5. Sistemas de prácticas.
- Anexo 6. Elementos de significado
- Anexo 7. Niveles de expresión semiótica (*Um, Uc*)
- Anexo 8. Niveles de expresión semiótica (*Ur*)

## INTRODUCCIÓN

La presente investigación se desarrolla en el marco del programa de la Maestría en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en el énfasis de Educación Matemática y en la modalidad de profundización. El proceso investigativo se llevó a cabo en el periodo comprendido entre el segundo semestre del año 2014 y el primer semestre del año 2017 y contó con la participación de los estudiantes de grado quinto del Colegio Alfonso Jaramillo.

En esta, se presenta una caracterización de los significados personales de los estudiantes en un proceso de estudio en torno a la proporcionalidad inversa, a partir de las relaciones e interacciones que se generan en el proceso de estudio y que denominamos sistema didáctico (Lurduy, 2012).

La perspectiva teórica asumida parte de la propuesta didáctica del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) formulado por Godino y colaboradores (1991-2014), así como en la interpretación y adaptación para el medio Colombiano desarrollada por Lurduy (2000- 2014), en el programa de investigación Rutas de Estudio y Aprendizaje en el Aula, REA, gestionada por el grupo CRISALIDA (2005-2014). La perspectiva metodológica utilizada se fundamenta en la interpretación y articulación coherente y compleja de tres referentes metodológicos para el estudio de textos, tales como Análisis Cualitativo del Contenido (ACC), Teoría Fundamentada en los Datos (TFD) y Análisis Semiótico de Textos (AST), desarrollada por Lurduy, (2009-2013).

En el capítulo 1, se presenta la contextualización y perspectiva de la problemática haciendo una aproximación a esta desde diversos elementos claves en la investigación, como lo son: La Didáctica De Las Matemáticas como campo De Investigación, evaluación, entorno de resolución de problemas y la proporcionalidad como contenido matemático de estudio. Tales elementos se apoyan con la respectiva justificación y planteamiento de antecedentes, pregunta de investigación y objetivos, así como el correspondiente diseño metodológico.

El capítulo 2, hace referencia a la fundamentación teórica y metodológica. En tal apartado se describen a profundidad los elementos mencionados en el primer capítulo, como medio para validar su implementación. En lo que concierne al aspecto metodológico, se plantea un tipo de investigación cualitativa, con un enfoque descriptivo que haciendo uso de una serie de técnicas (ACC, TFD, AST) busca identificar unidades de análisis y a partir de estas evaluar los significados personales de los estudiantes.

El capítulo 3, se presenta el proceso de recolección, sistematización y análisis de la información, describiendo la aplicación de los instrumentos, al tiempo que se amplía la información referente a organización y sistematización la información de acuerdo a las unidades de análisis y la correspondiente reducción de la información.

El capítulo 4, retoma los planteamientos dados en todos los apartados anteriores y se centra en evaluar los significados de los estudiantes, atendiendo a identificar (unidades de muestreo), describir (unidades de contexto) y caracterizar (unidades de registro) los avances generados en torno a las situaciones problema planteadas.

Finalmente, el capítulo 5, correspondiente a las conclusiones, busca articular las mismas desde tres miradas, el proceso investigativo, atendiendo a cada uno de los apartados de la investigación (cumplimiento de objetivos, validez del problema, avances en torno a antecedentes y su problemática planteada), un análisis sobre los datos, obteniendo conclusiones sobre los desarrollos propios de los estudiantes y por ultimo una reflexión didáctica propia de nuestra labor como docentes e investigadores en el campo de la educación matemática.

## **CAPITULO 1 - DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.1 CONTEXTUALIZACIÓN Y PERSPECTIVA DE LA PROBLEMÁTICA**

El planteamiento del problema, se encuentra estructurado en cuatro partes, a entender: la Didáctica de las Matemáticas como campo de investigación, evaluación de los aprendizajes, entorno de resolución de problemas y procesos de cognición e instrucción matemática: la proporcionalidad como contenido matemático de estudio.

A través de estas, se busca presentar diferentes niveles de aproximación y contextualización de la problemática. Para tal tarea, en primera medida se expone la perspectiva general de la Didáctica de las Matemáticas sobre la cual se enmarca la investigación y que posibilita el entrar a estudiar y analizar la proporcionalidad como contenido matemático de estudio.

#### **1.1.1 La Didáctica De Las Matemáticas: Campo De Investigación**

Reconocemos que a partir de las transformaciones de la escuela y los procesos que allí tienen lugar, se ha posibilitado el nacimiento de nuevas visiones de la enseñanza de las matemáticas escolares. Es ahí, donde es posible ver que estas visiones han permitido cambiar la concepción de “didáctica” como “el arte de enseñar” (Komensky, 1640, citado por Brousseau 1986), al ser reconocida ahora como campo de investigación. Identificamos que el fin específico de la Didáctica de las Matemáticas, como tal campo, es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos. (Godino, Batanero & Font, 2007).

En tal sentido, dentro del proceso de investigación que se lleva a cabo se toma como base la concepción de la Didáctica de la Matemática expuesta por Brousseau (1986, p. 3) al concebirla como:

"Una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos".

Este tipo de concepciones permiten realizar conexiones acerca de cuáles pueden ser los objetivos que incorpora la didáctica como entes de estudio; para ello se involucran las posibles preocupaciones que emergen al existir pocas difusiones de los conocimientos y de las normas que deben regirla en un contexto de aprendizaje para transformar las producciones que se realizan a nivel del conocimiento y de las herramientas que facilitan la ejecución de los conocimientos matemáticos.

Sin embargo, la concepción de didáctica que llevan consigo algunos planes de estudio carece de espacios en los cuales sea posible construir y comunicar el conocimiento, pues la falta de problema en el aula de clase no permite adquirir la habilidad de convertir el contexto en una herramienta para la construcción de significados, y debilita la puesta en escena de actividades individuales y colectivas, que ayudan a tener un auto control de los procesos de pensamiento matemático y a sistematizar los nuevos aprendizajes. Por ello es posible generar espacios de actividad matemática, en donde los estudiantes, por medio de su participación y sus acciones exploratorias logren interactuar con los conocimientos matemáticos y a partir de ellos comuniquen las diversas ideas asociadas a los conceptos en cuestión.

### 1.1.2 Evaluación

Buscando promover una evaluación integral de los procesos de aprendizaje, se busca usar la evaluación como una herramienta para potenciar los aprendizajes y procesos que tienen lugar en el aula, reconocer y valorar los diferentes saberes, los procedimientos, estrategias y métodos de solución que se construyen en las prácticas matemáticas y que favorecen la diversidad de situaciones problema.

De igual manera a partir de lo que establece el Ministerio de Educación con respecto a la evaluación, es importante reconocer que los procesos evaluativos deben permitir el obtener información pertinente de los alcances y limitaciones de los procesos académicos que se llevan a cabo en las aulas de clase, permitiendo tomar decisiones con respecto a los resultados que estos generan, al cumplimiento de lineamientos institucionales de parte de docentes y seguimiento de políticas nacionales, todo ello encaminado al mejoramiento de las prácticas evaluativas al interior de las aulas de clase.

En tal sentido es claro notar que las prácticas evaluativas, debe direccionarse bajo los lineamientos establecidos en la Ley General de Educación (1994) la cual busca dar paso a:

“Una evaluación formativa, integral y cualitativa, más centrada en el desarrollo de las habilidades de los estudiantes que en los contenidos de la enseñanza, teniendo como marco las competencias, haciendo que el proceso en el aula cobre un sentido distinto. Reglamentada la ley por decretos como el 1860 de 1994, el 230 y el 3055 de 2002 se propició un cambio importante en las prácticas pedagógicas, al establecer la autonomía curricular de las instituciones mediante la definición de su Proyecto Educativo Institucional”.

Sin embargo, concebimos que hasta tanto no se brinden las herramientas necesarias para que los estudiantes construyan el conocimiento y lo pongan en práctica, no se estará en disposición de emitir un juicio sobre qué se comprendió y qué no. Tal proceso de aprendizaje, ha de estar mediado por las relaciones que se establecen en el aula de clase (tetraedro didáctico) y por diversos factores que conllevan a procesos de transformación de formas de ver y entender el acto educativo, como lo plantea Chevallard (1998, citado por Vergel), al reconocer que el hecho didáctico no debe ser explicado por el estudio aislado de cada uno de sus componentes y entonces se sigue que es necesario el análisis del “sistema didáctico”, formado por la triada profesor-alumno-saber (enseñado), considerando el contexto en el que el hecho didáctico se produce.

Tal precepto, lo reproduce Lurduy (2012) cuando reconoce las relaciones que son posibles establecer en el aula para analizar las prácticas educativas en toda su dimensionalidad, en concordancia con tales ideas, plantea “el tetraedro didáctico como un constructo analítico para el análisis del sistema didáctico y la construcción de significados didácticos (Semiósis didáctica). Reconocemos pues, que en todo proceso de enseñanza/aprendizaje, se producen relaciones e interacciones entre los actores que deben ser caracterizadas y valoradas, pues en todo proceso interactúan estudiantes, profesores, medios y recursos didácticos, ambientes y entornos, se constituyen contratos didácticos y se manifiestan relaciones con el saber construido personal e institucionalmente por dichos actores. Es así, que en toda esta articulación de elementos cada uno de los polos que interviene (estudiante, profesor, saber y entorno) entra a relacionarse y complementarse buscando dar respuesta a preguntas tales como: ¿qué enseñar?, ¿por qué?, ¿a quién y dónde? y ¿cuándo y cómo?

Factores a los que se hace referencia anteriormente, pueden ser reconocidos en el tratamiento que se le da a la superación de errores y dificultades que emergen en el proceso de construcción conceptual de los estudiantes en lo que a la presente investigación refiere, de la proporcionalidad inversa. De acuerdo a tales factores, mencionamos ahora algunas tensiones que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad inversa y que son citados por García (1999), tales como: el planteamiento de situaciones no posibilita el que los estudiantes puedan hacer interacciones en contextos diarios,

por lo que del mismo modo, no se tiene la facilidad o las herramientas necesarias para realizar diversos registros, que faciliten mejorar las debilidades que emergen cuando se trata de dar a conocer los resultados obtenidos.

Ahora bien, para posibilitar la superación de dificultades y potenciar las habilidades propias de cada estudiante, concebimos que un concepto se estructura a partir del manejo que se le dé a una serie de situaciones, donde el sujeto está enfrentado a procesos multidimensionales que le otorga la libertad de construir procesos que lo sumerjan en aprendizajes significativos que ayuden a obtener diferentes niveles de complejidad. No obstante, pensar en una evaluación que se adapte a tales circunstancias, implica desarrollar un ambiente de aprendizaje que no sea normativo. Es decir, consideramos necesario permitir a los estudiantes ser parte clave del proceso y a partir del acompañamiento del profesor, poder alcanzar los objetivos que se han propuesto en el ámbito académico y disciplinar. Y es en dirección de posibilitar tales prácticas, que planteamos la necesidad de llevar a cabo procesos de construcción conceptual en diferentes momentos en los que el docente, en su papel de guía, sea el responsable de buscar las estrategias adecuadas para cumplir tal fin. Cuando en el aula se propician espacios para la socialización de argumentos de los estudiantes y las discusiones, se fortalece el trabajo cooperativo favoreciendo espacios en los que los estudiantes están en posibilidad de comunicar sus ideas. Es así que la evaluación, vista antes que, como un resultado final, busca brindar a los estudiantes la posibilidad de ser parte de un proceso formativo, en el que como lo menciona Clark (2002) el aprendizaje del estudiante está en el núcleo del proceso de evaluación y se puede propiciar desde este la superación de dificultades.

### **1.1.3 Entorno de resolución de problemas.**

Teniendo en cuenta que se busca promover espacios en los que los estudiantes estén en posibilidad de plantear y validar hipótesis y que estos sean abiertos a la comunicación, consideramos necesario trabajar en nuevas alternativas que permitan tanto a docentes como a estudiantes, tener a su disposición una pluralidad de situaciones problema que ayuden a mejorar los métodos de presentación o interacción del conocimiento y que haga posible la aplicación de la proporcionalidad inversa a situaciones problema. Por lo anterior, a continuación exponemos una serie de aspectos en los que los estudiantes presentan dificultades.

- Cuando los estudiantes están enfrentados a situaciones problema que presentan un enunciado, evidencian dificultades en los procesos de lectura, al estar acostumbrados a una lectura no tan rigurosa o con formatos de comparación entre razones, por pretender estas que en los métodos no exista una respuesta numérica.
- En las respuestas que presentan los estudiantes no se evidencia que exista o que sepan el significado de manejar una representación tabular, que contribuya a facilitar técnicas de solución.

Sin embargo, reconocemos que a partir de todo lo anteriormente mencionado es indispensable para dar solución a las dificultades previamente expuestas, plantear estrategias que repercutan en el mejoramiento de los espacios en los que se aplica la resolución de problemas. En tal sentido, vemos que se hace necesario proponer e implementar, en gran proporción, la resolución de problemas, como medio para que provea en grandes cantidades un impacto y trascendencia del trabajo cooperativo por parte de los estudiantes. Tal situaciones, debiesen articularse con procesos de enseñanza en los que el maestro sea el mediador de los conocimientos y el proveedor de diversas situaciones, que permitan a los estudiantes la adquisición de saberes, de maneras dinámicas y significativas.

Así pues, todos los procesos que implementa el docente hacen de él, el directo responsable de estar en capacidad de abastecer gran cantidad de preguntas desestabilizadoras, que induzcan a la necesidad de implementar estrategias que ayuden a mejorar los procesos de argumentación de los estudiante, fundamentado en la creación y organización de discursos que desarrollen la habilidad de un mejor razonamiento.

Alineados a las estrategias ya descritas, nos encontramos en concordancia con lo expuesto por García, G., & Serrano, C. (1999), cuando reconocen la resolución de problemas, como el mediador oportuno en la construcción de conocimiento, que desarrolla grados de comprensión, en contextos sociales, geométricos, aritméticos y científicos.

#### **1.1.4 Procesos de cognición e instrucción matemática: la proporcionalidad como contenido matemático de estudio**

Al caracterizar la proporcionalidad como contenido matemático de estudio y entrar a trabajarla desde los lineamientos y estándares curriculares para un determinado grado de escolaridad, reconocemos que hay ausencia en el desarrollo de investigaciones que propongan nuevas maneras de ser explorada, ejecutada, evaluada en las diferentes aulas de clase y que por lo mismo conlleva a presentar ausencias y dificultades en su manejo.

En tal sentido, resultados como los generados por las pruebas de matemáticas (TIMSS) y que son expuestos por Díaz, Álvarez, Torres y Guacaneme, (1997), evidencian que la proporcionalidad directa e inversa, ha presentado niveles de desempeño bastantes bajos en el ámbito internacional y con respecto a los resultados obtenidos por la población colombiana existen dificultades en la enseñanza y evaluación de la proporcionalidad directa e inversa.

Otro campo que determina dificultades en el ámbito de la proporcionalidad inversa, es que existen pocas investigaciones con relación a cómo proponerla en el aula, dado que en muchas ocasiones, termina siendo presentada a través de la repetición de ejercicios, lo que lleva a los estudiantes a la memorización y no a lo que propone el (MEN, 2010, p 74) cuando sugiere que la proporcionalidad debiese ser vista como una actividad matemática, que debe proporcionar al estudiante una indagación hacia el problema, planteamiento de diversos procesos de solución y la generación de razonamientos que permitan al estudiante comunicar, generar algunos pasos de modelación para realizar comparaciones y ejercitación de procedimientos.

A su vez Vergnaud (1981) establece que la proporcionalidad puede ser vista como una base indispensable para el campo multiplicativo y conceptual al determinar, en la mayoría de los casos, que los diferentes problemas de la educación básica se pueden reducir o resolver con el establecimiento de una proporción simple o múltiple, al poder relacionar estas con procesos de transición entre la aritmética y el álgebra. Similarmente se procede en los momentos de evaluar la proporcionalidad inversa, al ser el maestro quien no le otorga a la proporcionalidad la importancia que fue señalada con anterioridad por Vergnaud. En muchos casos, el maestro, contrario a lo que debiese ser, se limita a ser quien da validación en clase, pues es él quien determina lo correcto o incorrecto a través de su bagaje matemático, controla además los errores y es él quien los corrige.

Por ello, desde toda la perspectiva que se ha mencionado, se puede argumentar que la proporcionalidad se determina como un campo muy importante en los procesos de enseñanza que ha venido manifestando una serie de vacíos y/o inconsistencias, al ser parte del pensamiento matemático que habilita nuevas estrategias en la resolución de problemas, donde interviene la proporcionalidad como ámbito de estudio. (MEN, 2010). Por razones como estas, resulta importante reconocer que esta brinda grandes aportes al pensamiento aritmético y algebraico, y en tal sentido, no desconocer los aportes al pensamiento multiplicativo, todo ello al convertirse como lo proponen (Lesh & otros, 1988) en el recogimiento de la aritmética para dar el nacimiento al álgebra, y a su vez como lo reconoce Vergnaud (1981), el cual lo determina como la columna vertebral del pensamiento multiplicativo.

A su vez en una investigación realizada en Popayán con estudiantes de grado séptimo, de la Institución Educativa “Los Comuneros”, en la que se trabaja sobre el manejo que se da a una situación de reparto proporcional, se muestra de qué manera los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad, son usados para enfrentar la situación, mediante la

explicación de los conceptos a partir de los fundamentos teóricos y metodológicos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), llevando a concluir en esta investigación que las estrategias desplegadas por los estudiantes al resolver situaciones de variación y cambio, en particular situaciones referidas a repartos proporcionales. Para tal fin, el carácter proporcional de la situación o el tipo de proporcionalidad no se hizo explícito, para permitir que los estudiantes determinaran si la situación era o no de proporcionalidad y qué tipo de proporcionalidad estaba presente.

Dentro de los problemas que se reconocen en tal investigación, se hace alusión al cuestionamiento de la estructura del conocimiento matemático en la escuela, mencionando que no es suficiente el análisis didáctico de los aspectos de orden cognitivo y matemático, al tiempo que también se debe incluir la organización escolar. Más precisamente, se mencionan los cuestionamientos a la organización que de las razones, las proporciones y la proporcionalidad se han hecho, por ejemplo, desde la desarticulación del currículo.

Conjuntamente como lo mencionan Modestou & Gagatsis (2010) se evidencia como problemática que hay una falencia en la utilización de una serie de conceptos y teoremas en acto relativos a las razones, las proporciones y la proporcionalidad, tales como los análisis escalar y funcional, las propiedades de la función lineal y la aparición de dos de los tres roles de la razón, a saber el relator y el operador. Y en la mayoría de técnicas de solución empleadas por los estudiantes dejan ver la prelación para acudir al razonamiento por analogías, esto es, observar qué ocurre con las cantidades de magnitud de una de las series para luego trasladar este patrón de comportamiento a las cantidades de magnitud correspondientes en la otra serie.

#### **1.1.5 Presentación del problema**

Con anterioridad se ha planteado la necesidad de incorporar el trabajo en torno a la proporcionalidad directa e inversa en los diversos espacios de formación académica, dado que se reconoce la multiplicidad de tensiones que han surgido en torno al trabajo que se lleva a cabo con esta en las instituciones educativas.

Claramente la proporcionalidad guarda estrecha relación con conceptos que se trabajan a posteriori y en los cuales los estudiantes llegan a presentar dificultad pues se ha dado una ausencia en el proceso de instrucción de la misma en los niños. Es importante resaltar que existen diversas dificultades en el manejo de la proporcionalidad inversa, al no existir procesos transversales en la educación colombiana y que de igual manera, en la mayoría de los casos no se tiene claridad sobre el cómo establecer criterios de evaluación.

En tal sentido, desde la perspectiva de Mochón (2012) es posible observar que el razonamiento proporcional aparece muy poco en el aula de clase debido a que en general es remplazado rápidamente por la regla de tres, ya que en algunas ocasiones el maestro no sabe que son posibles varias aproximaciones del tema y que esta problemática también se asocia a que los estudiantes en sus maneras de proceder, evidencian que no pueden considerar a los “problemas matemáticos” como algo que requiere de reflexión para poder definir una estrategia y así encontrar la solución y aquellos que aplican la regla de tres, lo hacen de manera mecánica y descontextualizada, lo cual los lleva a cometer errores.

A su vez como lo establece Camelo & Mancera (2006) refiriéndose a la proporcionalidad es importante reportar que existen conceptos que son considerados como “previos” que se ignoran pues no es posible distinguir fácilmente la diferencia entre la proporción y la proporcionalidad, pues se les da un tratamiento equivalente, como si fueran conceptos sinónimos, al quitarle a la proporcionalidad su característica más importante, la variación y presentarla a través de la explicación de algunos ejercicios, lo que exige a los estudiantes memorización y repetición.

De igual modo, es visible la ausencia de estudios que daten sobre la enseñanza de esta, por lo que consideramos conveniente el llevar a cabo una investigación que aporte a superar algunas de las dificultades existentes en la actualidad. Es por esto, que buscamos hacer uso de los referentes teóricos-metodológicos del enfoque ontosemiótico realizados por las interpretaciones e implementaciones realizadas por Lurduy (2013), con el fin de identificar, describir y caracterizar los significados personales de los estudiantes entorno a la proporcionalidad inversa.

### **1.1.6 Objeto de estudio**

Significados personales de los estudiantes, declarados en un proceso de estudio entorno a la proporcionalidad inversa.

## **1.2. JUSTIFICACIÓN**

La posibilidad de disponer un espacio en el que los estudiantes construyan el conocimiento y lo pongan en práctica, nos lleva a viabilizar espacios en los que estos son parte del proceso que se está llevando a cabo dentro del aula, y no simple espectadores. En tal sentido, propuestas como estas, permiten que la transcendencia de los procesos académicos que emergen en nuestra investigación esté determinada e influenciada por los grandes cambios que se gestionan en la sociedad y que hacen que en nuestras aulas de clase, los procesos se vean permeados por la formalidad y la caracterización del cómo, para que y por qué de la razón de nuestras prácticas pedagógicas. Por ello con el desarrollo de la presente investigación, buscamos viabilizar la mejora de los ambientes de aprendizajes en las aulas de clase o entornos educativos, a partir de la puesta de práctica de estrategias que mejoren la enseñanza de determinado saber (proporcionalidad inversa.)

Así pues, la resolución de problemas debe propiciar la construcción de procesos de construcción conceptual en diversidad de situaciones problema, para facilitar el manejo de los roles existentes en el aula de clase a partir de las interacciones para ayudar a mejorar el papel del docente como guía del proceso y poder establecer las estrategias adecuadas para cumplir con los objetivos propuestos; para tal fin resulta clave reconocer como el aspecto didáctico debe tener la funcionalidad de ser explicado a partir del sistema didáctico formado por la triada profesor-alumno-saber (enseñado) y no como el estudio aislado de cada uno de sus componentes que lo conforman.

Para ello, contamos con la integración de un enfoque rico en significados (Enfoque Ontosemiótico), que aporta nuevas estrategias que brindan elementos clarificadores para poder entender la complejidad del proceso de enseñanza y aprendizaje al buscar explicitar concepciones, ideas y significados de los estudiantes en torno a un tema determinado. De igual modo, nos permite identificar, describir y caracterizar los diferentes significados que se generan en entornos sociales dentro y fuera de un campo de formación, lo cual desencadena en la consolidación de espacios mediados por la innovación y la mejora de los procesos educativos. Con este fin, el desarrollo de la presente propuesta, se centra en evaluar los significados personales de los estudiantes en torno a la proporcionalidad inversa, mediados por la valoración de errores, partiendo de la premisa de que se hace necesario el reconocer y potencializarlos con el fin de generar aprendizaje desde los mismos, y posibilitando el hacer de la educación un instrumento de competitividad, por medio del cual el fortalecimiento y mejoramiento de los procesos educativos propendan por el mejoramiento de las mallas curriculares que desencadenen en el progreso de la educación.

Reconocemos los beneficios de implementar el EOS en lo referente a evaluación de significados personales, para evidenciar desde una perspectiva multidimensional las practicas personales que manifiesta, expresa y alcanza un sujeto al trabajar mediante la resolución de problemas con un objeto matemático. En tal sentido, el enfoque se convierte en un articulador

multidimensional, al ser su punto de partida la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado, pero teniendo en cuenta además la dimensión cognitiva individual.

Así pues, la resolución de problemas se convierte en una metodología que aporta a la construcción de conocimiento, en lo que refiere a esta investigación, en la aplicación de una secuencia didáctica, enmarcada en la implementación de la resolución de problemas como entorno de metodología de clase. Y es en tal sentido, que se propicia el implementar espacios para la socialización, posibilitando la comunicación de argumentos de los estudiantes y las discusiones, lo cual conlleva a fortalecer el trabajo cooperativo favoreciendo escenarios en los que los estudiantes están en posibilidad de comunicar sus ideas.

Es por esto, que a partir de cada una de las consideraciones expuestas anteriormente y desde referentes dados en cuanto a evaluación por diversos enfoques, resolución de problemas como metodología de clase y el Enfoque Ontosemiótico para evaluar los significados personales de los estudiantes en torno a la proporcionalidad inversa; se plantea la puesta en práctica de una propuesta de investigación a desarrollar en un espacio de formación, de grado quinto, atendiendo a que en tal momento, se está dando una primera aproximación a situaciones que implican el trabajo en torno a la proporcionalidad. Atendemos de igual modo, a que en la enseñanza de esta, se privilegia la aritmética, las situaciones se dan sin contexto alguno limitándose a seguimiento de algoritmos, razones por las cuales no se le otorga a la resolución de problemas el papel de mediatizador en la construcción de conocimiento.

Desde lo anterior, la necesidad de investigar acerca de cómo evaluar los significados personales de los estudiantes en la proporcionalidad inversa, lo resaltamos al exponer la falta de investigaciones desarrolladas en torno a ella y reconocemos que un mayor trabajo en torno a esta en diferentes ámbitos educativos, desencadenará en grandes aportes a la transversalidad de pensamientos como lo son el variacional, geométrico, numérico y algebraico.

### **1.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN.**

Para el desarrollo de la investigación, tenemos como referencia el Colegio Alfonso Jaramillo, en grado quinto el cual cuenta con un total de 13 estudiantes. Con tal población, buscamos dar a conocer cómo en un proceso de estudio desarrollado en torno a la resolución de problemas como metodología de clase, es posible determinar los significados personales de los estudiantes con relación a la proporcionalidad inversa, y dar respuesta a las preguntas ¿qué enseñar?, ¿por qué?, ¿a quién y dónde?, ¿cuándo y cómo? Así, buscando gestionar una propuesta de investigación que permita dar respuesta y atender las necesidades que se presentan en torno a la proporcionalidad inversa, planteamos la siguiente pregunta de investigación.

#### **1.3.1 Pregunta de investigación general.**

En un proceso de estudio desarrollado en grado 5° en torno a la resolución de problemas como metodología de clase, ¿Cuáles son los significados personales que los estudiantes expresan al trabajar una secuencia didáctica fundamentada desde la proporcionalidad inversa?

### 1.3.2 Preguntas de investigación específicas.

- ✓ ¿Cuáles son los posibles procesos a implementar para posibilitar la construcción de un saber en el aula de clase?
- ✓ ¿Qué categorías son necesarias para posibilitar la caracterización de la información producto del trabajo desarrollado por los estudiantes?
- ✓ ¿Cómo analizar cada uno de los significados que el estudiante pone en juego en el desarrollo de determinada actividad?
- ✓ ¿Cómo evaluar los significados personales de los estudiantes cuando se ven enfrentados a desarrollar diversidad de actividades matemáticas.

## 1.4. ANTECEDENTES DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Buscando dar una respuesta al planteamiento del presente trabajo y abordar el problema usando elementos teóricos desde una perspectiva metodológica diferente, al tiempo que darle otro sentido a la evaluación (evaluación orientativa, certificativa y regulativa) propuestos por Lurduy (2012), buscamos recopilar fundamentos teóricos y aportes de diversas investigaciones relevantes, que han centrado su atención en temas relacionados con cada una de las categorías que estructuran la investigación, tales como elementos de análisis didáctico: Enfoque Ontosemiótico y tetraedro didáctico, evaluación, resolución de problemas y proporcionalidad.

### 1.4.1 Elementos de análisis didáctico

#### 1.4.1.1 Enfoque Ontosemiótico. – Tetraedro didáctico

En primera medida, al referirnos al enfoque ontosemiótico reconocemos en este desde Godino, Batanero & Font (2007), la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Por su parte, la funcionalidad del tetraedro recae en las diferentes relaciones que existen entre sus diversos componentes como son estudiantes profesores, medios y recursos didácticos, por ello se caracteriza por ser una base sólida en los procesos de análisis de un sistema didáctico y de todas las posibles dimensiones que la incorporan.

Referente a investigaciones desarrolladas, Font, Mayén y Ortiz (2009), buscando identificar los significados personales de la media aritmética de profesores en formación, utilizan diferentes configuraciones propias del (EOS) desde el cual se manifiestan los diferentes significados implementados, que van relacionados hacia la comprensión del concepto, bajo todo ese proceso se evidencia que existen importantes dificultades relacionadas con la comprensión del concepto y algunas de sus propiedades. Para tal objetivo, utilizan un cuestionario fundamentado en 5 problemas que implican la comparación y que permiten determinar el significado de referencia del objeto matemático “media aritmética”.

La herramienta configuración cognitiva propuesta por el EOS ayuda a poner de manifiesto la gran variedad de tipologías de significados personales declarados de los futuros profesores en formación cuando resuelven un problema de comparación de dos distribuciones. En tal sentido, resulta necesario reforzar la formación estadística elemental de los futuros profesores de Educación primaria que difícilmente podrán enseñar un tema en el que muestran dificultades tan notables.

Por otra parte, Torres y Lurduy (2013) al evaluar los significados personales en la construcción de la función lineal, abordan las principales características y principios a tener en cuenta en un proceso de investigación, que se fundamenta en la ejecución de una secuencia de actividades, generando instrumentos de análisis y triangulación. En tal caso, buscan identificar las dificultades de los estudiantes en el manejo de la función lineal, encontrando que estas recaen en el establecimiento e identificación y el paso de la representación verbal a la representación escrita, por lo que identifican la necesidad de encontrar análisis relacionados con la noción de función lineal (uso de sus representaciones).

De igual forma, Cajaraville, Rocha & Rodríguez (2010), presentan un estudio sobre el significado de referencia y el significado personal, atribuido al número áureo, como medio para analizar cómo desde la antigüedad surgen los problemas asociados al cálculo de la razón entre el lado y la diagonal del pentágono regular, y a su vez las dificultades de significado para los estudiantes. Para ello se propone en manifiesto las concepciones sobre el estudio de dicha problemática, utilizando algunas nociones centrales de la Didáctica de la Matemática, como son las de significado referencial y personal de un objeto matemático, tomando como referencia el libro de texto de Matemáticas (Cólera, García, Gaztelu y Oliveira, 2002) para analizar significado referencial del número áureo. A su vez, muestran los conflictos semiótico y cognitivos que se presentan al utilizar la noción de “dualidad expresión y contenido, centrando su atención en el análisis del significado de los objetos matemáticos tanto a nivel personal como institucional, estudiando los fenómenos derivados de la transposición didáctica escolar tratando de integrar los aspectos sintácticos, semánticos, pragmáticos y socioculturales.

Finalmente, se categoriza a cada estudiante según los procesos que realiza, evidenciando en esto que los significados logrados en muchos casos no han quedado claros lo que los lleva a establecer comparaciones erróneas.

En última medida, López (2014) desarrolla una propuesta que busca evaluar los significados personales de los estudiantes, en un proceso de estudio dirigido sobre la proporcionalidad directa. Tal investigación, responde a la necesidad de abordar la problemática de la comprensión y del aprendizaje de dicho objeto matemático desde los significados personales de los estudiantes, dadas las insuficiencias, necesidades y tensiones que surgen en las relaciones estudiante, saber, profesor y entorno.

#### **1.4.2 Evaluación**

En lo referente a la evaluación de un proceso de enseñanza-aprendizaje y buscando promover espacios en los que los estudiantes sean dinamizadores de su propia construcción conceptual, se exponen una serie de investigaciones que han tenido como centro la reflexión de la propia práctica, mediada por la formación en un espacio crítico e integral.

A partir de la propuesta realizada por Mejía (2012) titulada “*Una propuesta para la evaluación del proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesor en un espacio de formación de la LEBEM mediado por la metodología de resolución de problemas*” al tener como referencia una propuesta de evaluación desde el trabajo colaborativo de estudiante-investigador y profesor, se da la necesidad de reconocer a cada uno de los entes como protagonistas del proceso de aprendizaje, al reconocer a la evaluación del aprendizaje como un diálogo constructivo con los estudiantes, al evidenciar que al calificar un resultado exclusivamente final, pierde credibilidad sobre el proceso llevado a cabo en el aula dado que no ha de ser posible tener un acercamiento a los avances y dificultades de los estudiantes y por tanto no se analiza el proceso en su totalidad. En este sentido, la propuesta de investigación está guiada hacia la búsqueda de alternativas que faciliten llevar a cabo procesos de construcción conceptual en diferentes momentos, que fortalezcan el trabajo cooperativo y donde se permita a los estudiantes estar en posibilidad de equivocarse, como medio para llevar a cabo un proceso dinamizador y reflexivo.

Desde esta perspectiva se tiene como referente que la evaluación tiene como necesidad de cambiar la práctica discursiva en torno a la evaluación de los aprendizajes, al señalar las tensiones que en ésta se dan, tales como. La evaluación y dada la normatividad, se busca evaluar el nivel de aprendizaje logrado por los estudiantes a través de prácticas evaluativas relacionadas con exámenes que arrojan un valor meramente numérico, llevado al aula de clase se observa que existen espacios restringidos para generar socialización de avances e igualmente se hace un seguimiento reducido a diversos elementos usados para la comunicación.

A su vez, la evaluación tiene como antecedente que en ocasiones, no se evalúa el proceso en su totalidad, sino la finalización de éste, con el cual la evaluación a partir de resultados finales (sumativa) no muestra que tan significativos han sido los aprendizajes y como la diversidad de evaluación como lo es la autoevaluación, coevaluación (intragrupal e intergrupal) y heteroevaluación, no se tiene en cuenta, llevando a cabo una falencia en el fortalecimiento de un proceso reflexivo por parte de los estudiantes. De igual forma se encuentra que referente al trabajo desarrollado por los profesores en las aulas de clase, existe un aislamiento en el sentido que no se comparten experiencias y/o efectos de la puesta en práctica de diversidad de estrategias en pro de posibilitar mejores prácticas.

Funcionando a la par y con el objetivo de atender algunas miradas de cada uno de los actores del proceso sobre la evaluación como se viene describiendo, Iñiguez (2008) con *La evaluación al servicio de quién... Significados que los estudiantes de 2° y 3° año de enseñanza media científico humanista le otorgan a la evaluación de los aprendizajes*, pretende clarificar el significado que le otorgan los estudiantes a la evaluación de los aprendizajes identificando las diversas formas de evaluación del aprendizaje usadas por los docentes mediante el estudio de casos y la investigación cualitativa con un enfoque interpretativo-comprensivo desde técnicas de la investigación tales como: entrevista a profundidad.

Con tal investigación, se evidencia y se toman elementos a poner en consideración para la elaboración de la propuesta, tales como la necesidad de tratar el aprendizaje, como el desarrollo de procesos de pensamiento, reflexión y análisis, desde el trabajo construido por estudiantes y profesores al tratar en conjunto las acciones realizadas y partir de discusiones que retroalimenten el trabajo desarrollado en el aula, como medio para consolidar espacios de reflexión en el aula.

En tal sentido y con el objetivo de posibilitar algunas prácticas reflexivas se pone en juego el referente de Balli, Guido, Campo & Mendoza (2001), en su Tesis para optar por el título de Magister en Educación con Énfasis en Docencia Universitaria. UPN<sup>1</sup>, titulada *Evaluación del aprendizaje del conocimiento en metodologías constructivistas*, se identifica la propuesta de evaluación del aprendizaje del conocimiento para el aprendizaje basado en problemas (ABP) y la enseñanza para la comprensión (EPC) en la que las prácticas evaluativas se constituyen en una experiencia formativa que mejora el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los pasos de la investigación, estuvieron dados por una revisión de prácticas evaluativas de cada participante (planificación), desarrollo de clases de acuerdo al diseño de propuestas (acción), análisis individual-grupal de la práctica (observación) y el respectivo análisis de la experiencia (reflexión), mediante observación directa, encuestas y diarios de campo en las que el investigador actuaba como instrumento de medida. Dentro de las conclusiones, cabe resaltar la necesidad de incluir modelos epistemológicos y teorías de aprendizaje que subyacen a las prácticas evaluativas en la formación docente además de discusiones que posibiliten un intercambio de experiencias para enriquecer la práctica.

---

<sup>1</sup> Universidad Pedagógica Nacional

Además, tal como se plantea en la propuesta de evaluación que se está estructurando con el presente trabajo, se reconoce que es importante vincular al estudiante al proceso que debe ser regulado con la retroalimentación, logrando tomar conciencia sobre los aprendizajes logrados.

### 1.4.3 Resolución de problemas.

Un espacio mediado por la resolución de problemas, se caracteriza por la interacción de los estudiantes con situaciones problema como medio para posibilitar la construcción de determinado conocimiento. En tal sentido, el conocimiento se entiende como solución a una situación planteada que permite analizar los planteamientos que se realizan basados en una reflexión continua entre la situación y el conocimiento previo, generando las primeras estrategias de resolución, para permitir en los estudiantes la construcción del conocimiento.

Al respecto, Cañón, Carrasquilla & Diamante (2001), identifican que el problema que se ha dado en el aula tiene que ver con la dificultad de los estudiantes al enfrentarse a una situación problema modelizándola desde la matemática. Es por esto que elaboran una *Propuesta para el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento numérico enfocados desde la Resolución de problemas*, buscando la construcción de un modelo que promueva dicha metodología y que contribuya a superar las dificultades presentes en los estudiantes al resolver problemas. Para tal fin se da la elaboración de un módulo que posibilita la comprensión y avances conceptuales que hacen del estudiante un mejor resolutor de problemas, mediante laboratorios, y la acción participativa, interpretativa y virtual

Es así que dentro de los aportes a la presente investigación, se reconoce el gran papel de la resolución de problemas, al permitir diseñar actividades que contribuyan a lograr un desarrollo significativo del aprendizaje de los estudiantes durante el proceso, mediado por la evaluación cualitativa, la cual, permite observar y analizar el desempeño en las competencias interpretativa, argumentativa y propositiva. Se reconoce el valor de la resolución de problemas como metodología que posibilita el contribuir a la modelización de situaciones problema, a través de las cuales no se trabajan exclusivamente contenidos aislados, sino que por el contrario se vinculan, permitiendo desencadenar en procesos de razonamiento que tienen en cuenta diversos componentes.

En segunda medida, reconocemos que el carácter articulador que tiene la resolución de problemas, no muestra sus aportes sino se entran a valorar los procesos de pensamiento y heurísticas de los estudiantes al momento de enfrentarse a una situación y modelarla matemáticamente. Es por esto, que atendemos a la investigación desarrollada por Fresneda, Gutiérrez & Pantano (2010) y que fue presentada en el 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa 2010, bajo el título *La heurística como organizadora del trabajo en una comunidad de aprendizaje: Una herramienta de negociación de la empresa en un proceso de resolución de problemas*.

Encontramos pues que en el desarrollo de la investigación, realizan un estudio sobre el proceso de 5 estudiantes que trabajan en torno a la resolución de una situación matemática, como medio para identificar cómo influyen las heurísticas en un proceso de resolución. Para la recolección de la información, hacen uso de videograbaciones de clase, transcripciones, observaciones no participantes y cuadernos del resolutor. Reconocemos en tal investigación, y valoramos para la elaboración de la nuestra cómo a partir de los procesos de diálogo, colaboración, participación y negociación, se valora la

particularización como una herramienta heurística que permite una apropiación del objetivo siendo una actividad propia de los estudiantes que contribuye a generar distintas posibilidades de abordaje.

#### **1.4.5 Proporcionalidad.**

En primera medida, Mochón (2012) buscan darle importancia al razonamiento proporcional, al establecer que a este se le da muy poco trabajo en el aula de clase, debido a que en general es reemplazado rápidamente por la regla de tres, y que en algunas ocasiones el maestro no sabe que son posibles varias aproximaciones del tema. En tal sentido, se plantea un estudio en secundaria y se realiza un análisis de las respuestas a dos preguntas relacionadas con proporcionalidad. Dentro del análisis de las respuestas, fue posible ver que los estudiantes no consideran a los “problemas matemáticos” como algo que requiere de reflexión para poder definir una estrategia y así encontrar la solución y que igualmente, aquello que aplican la regla de tres, lo hacen de manera mecánica y descontextualizada, lo cual los lleva a cometer errores. Por razones como estas, se da una lista de posibles acercamientos a la proporcionalidad a manera de secuencia didáctica y actividades para que el maestro plantee en el aula, redactadas en forma de hojas de trabajo con ejemplos ilustrativos, lo que posibilita que este pueda reflexionar sobre su contenido

A su vez, Camelo & Mancera (2006), en su investigación describen y analizan el currículo desarrollado en torno a la proporcionalidad, entendido este como las diversas relaciones que se dan entre los actores del acto educativo en el salón de clase alrededor del contenido matemático mencionado. Buscan desarrollar tres niveles de aproximación y contextualización de la problemática, desde una perspectiva de la didáctica al permitir especificar el proyecto dentro del currículo de matemáticas escolares, y seleccionan a la proporcionalidad como contenido matemático de estudio. Establecen categorías de análisis como son el privilegiar el análisis de los currículos propuesto y desarrollado, para hacer reflexiones sobre la proporcionalidad en el currículo, a través del análisis de documentos oficiales y para-oficiales.

Referente a las conclusiones, llegan a que existen conceptos que son considerados como “previos” para lograr una mejor comprensión de la proporcionalidad, pero no se permite distinguir fácilmente la diferencia entre la proporción y la proporcionalidad, y que igualmente, la proporcionalidad es presentada a través de la explicación de algunos ejercicios, lo que exige a los estudiantes memorización y repetición, por lo que no existe actividad matemática en el aula de clases.

Otro aporte importante tiene que ver con Sánchez (2013), quien realiza una investigación con estudiantes de séptimo, basada en una situación de reparto proporcional, buscando determinar las estrategias desplegadas por los estudiantes al resolver situaciones de variación y cambio, en particular situaciones referidas a repartos proporcionales. En tal sentido, se muestra qué los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad, son usados para enfrentar la situación, tales conceptos, son explicados a partir de los fundamentos teóricos y metodológicos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

En el desarrollo de la investigación, encuentra problemas entorno a la estructura del conocimiento matemático en la escuela, que le permiten llegar a conclusiones tales como que las estrategias empleadas por los estudiantes para cuantificar sus respuestas dejan ver que la razón aparece cambiando continuamente de rol puesto que inicialmente aparece en su papel de relator y luego se utiliza como operador y se evidencia la utilización de una serie de conceptos y teoremas en acto relativos a las razones, las proporciones y la proporcionalidad, tales como los análisis escalar y funcional, las propiedades de la función lineal y la aparición de dos de los tres roles de la razón, a saber el relator y el operador.

En Baquero, Benítez, Naranjo, Rodríguez & Villamil (2001) se desarrolla una serie de actividades para estudiantes de séptimo grado a decimo, determinando que la mayor dificultad recae en establecer una relación entre las magnitudes implicadas y poder reconocer las características de una relación de proporcionalidad directa en situaciones planteadas, una

de ellas es completar una serie de tablas de datos, donde los estudiantes relacionan comparaciones entre magnitudes a partir de procedimientos de adiciones o cálculos dobles; evidencia a su vez que los estudiantes no aplican la propiedad fundamental de las proporciones para determinar los datos desconocidos y tampoco se evidencia la constante de proporcionalidad directa. Se concluye pues, que los estudiantes no exponen razones que permitan ver las generalizaciones realizadas por ellos en cada relación de las magnitudes inversas, a su vez determinan que algunos estudiantes realizan el trabajo a partir de un manejo adecuado de la constante de proporcionalidad en igualdades.

## **1.5 OBJETIVOS**

Con el fin de atender las necesidades previamente mencionadas, se proponen los siguientes objetivos, que buscan mediar una investigación con estudiantes de grado quinto al trabajar una secuencia didáctica mediada por la resolución de problemas y trabajada en torno a la proporcionalidad inversa, usando diversidad de referentes teóricos-metodológicos del enfoque ontosemiótico (EOS).

### **1.5.1 Objetivo general**

Evaluar los significados personales que los estudiantes expresan en un proceso de estudio de proporcionalidad inversa, desarrollado mediante la aplicación de una secuencia didáctica, enmarcada en la implementación de la resolución de problemas como metodología de clase.

### **1.5.2 Objetivos específicos**

- Identificar los significados personales que los estudiantes declaran en torno a la proporcionalidad inversa.
- Describir los significados personales que los estudiantes manifiestan al estar inmersos en un ambiente de resolución de problemas como generador de conocimiento de la proporcionalidad inversa.
- Caracterizar los significados personales que los estudiantes logran determinar cuándo validan un conocimiento referente a la proporcionalidad inversa.

## **1.6. PROCESO METODOLÓGICO**

### **1.6.1 Población y contexto de la aplicación**

En el desarrollo de la presente investigación, se promueve la aplicación de una secuencia de actividades para la enseñanza de la proporcionalidad inversa. Para tal fin, la población objeto de estudio está conformada por estudiantes de quinto grado de educación básica, cuyas edades oscilan entre los 11 y los 12 años de edad. La institución en la que se lleva a cabo la investigación es el Colegio Alfonso Jaramillo, ubicado en la zona norte de la ciudad de Bogotá.

Cabe anotar que aunque los sujetos a observar son específicamente, el profesor y el estudiante, pero que atendiendo a que el tetraedro es un constructo de relaciones triádicas que relaciona otros entes más: estudiante (polo cognitivo) – profesor (polo didáctico) – entorno (polo ecológico); el aspecto ecológico, también será descrito y observado.

Del mismo modo, y teniendo como base la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, aunque la secuencia implementada todas las situaciones que allí se describen, en esta investigación centramos nuestra atención en la fase de validación de la secuencia de actividades, ya que consideramos que en esta fase podemos evidenciar una mayor interacción profesor-

estudiante y estudiante-estudiante, debido a que en ella se pone a juicio de los interlocutores las producciones matemáticas individuales y grupales, sustentado los procedimientos empleados y las respuestas encontradas.

### **1.6.2 Fases de la investigación**

#### *Etapas de la Investigación*

En el proceso de investigación está enmarcado por una caracterización, análisis y valoración los significados personales de los estudiantes, en una secuencia de actividades enfocada hacia la proporcionalidad inversa, el cual cuenta con cuatro etapas con sus respectivas fases planeación, las cuales son:

#### *Etapa 1. Revisión bibliográfica.*

- Fase 1: Construcción teórica y revisión bibliográfica
- Fase 2. Apropiación teórica
- Fase 3. Definición del anteproyecto.

#### *Etapa 2. Apropiación teórica*

- Fase 4: Indagación referente teórico y metodológico de la investigación.
- Fase 5. Elaboración de referente teórico
- Fase 6 Elaboración de marco metodológico
- Fase 7. Construcción de instrumentos de análisis, categorías, elementos y componentes

#### *Etapa 3. Aplicación de metodología de la investigación.*

- Fase 8: Planeación y gestión de la aplicación.
- Fase 9. Recolección de la información
- Fase 10 Organización y sistematización de la información
- Fase 11. Análisis de la información

#### *Etapa 4. Resultados y conclusiones.*

- Fase 12. Elaboración de informe final
- Fase 13. Socialización de resultados

### **1.6.3 Cronograma de la investigación**

En el proceso investigativo se propone el siguiente cronograma, el cual posibilita el desarrollo de cada una de las fases, en lo que refiere a los momentos de diseño, recolección, sistematización, análisis y reflexión.

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas**  
**Facultad de Ciencias y Educación**  
**Maestría en Educación**



		2014		2015				2016				2017	
				I SEMESTRE		II SEMESTRE		I SEMESTRE		II SEMESTRE		I SEMESTRE	
<b>ETAPA 1</b>	FASE 1	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	FASE 2	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	FASE 3	X	X										
<b>ETAPA 2</b>	FASE 4			X	X								
	FASE 5				X	X	X						
	FASE 6				X	X	X						
	FASE 7					X	X	X	X	X	X		
	FASE 8					X	X						
<b>ETAPA 3</b>	FASE 9					X	X						
	FASE 10					X	X	X	X	X	X		
	FASE 11									X	X	X	X
	FASE 12											X	X
<b>ETAPA 4</b>	FASE 13											X	X

*Tabla 1. Cronograma de investigación*

#### 1.6.4 Instrumentos de recolección de información

En cuanto a los *instrumentos de recolección de información* puestos en juego en la ejecución de la investigación, estos se encuentra diferenciados en tres etapas: diseño, ejecución y validación. En el primer caso, para la configuración de este ambiente se ha realizado la adaptación y aplicación de una secuencia de actividades que ha sido pilotada y validada en la enseñanza de la proporcionalidad directa por López (2016) empleando los planteamientos de Guerrero, F., Sánchez, N. & Lurduy, O. (2006) respecto a la estructuración de situaciones didácticas de DECA y Brousseau.

En lo concerniente a la ejecución, instrumentos tales como los portafolios, los cuales permiten la evaluación del proceso de aprendizaje. Para la validación, encontramos las rejillas y red categorial, que son utilizadas con el fin de generar componentes de análisis que facilitan la organización de la información.

Así mismo, instrumentos tales como la observación de clases, grabaciones, protocolos de las mismas como medio para tener registros tanto orales como escritos que cada uno de los procesos que se desarrollan en el aula y los efectos que estos tienen en cada uno de los sujetos, serán usados tanto en la ejecución como en la validación. Para ampliar un poco más, el uso de cada una de estos instrumentos, a continuación se hace un breve señalamiento de sus aportes.

Dada la pregunta: ¿Qué observar? y con el fin de dar evidencias a las actuaciones generadas en el desarrollo de la clase y los instrumentos de grabaciones audiovisuales, es claro que debe existir un fenómeno que se quiere modelizar guiado por una problemática de investigación tal como se ha planteado hasta este punto y a partir de los cuales se hace necesario recoger determinadas evidencias. En tal sentido, nos interesaremos en las actuaciones de los estudiantes al momento de enfrentarse a una situación problema modelizándola desde la matemática lo cual permite tener evidencias de los momentos de solución y de qué forma se trabaja sobre estos para potencializar los avances y dificultades.

Al respecto, se hace uso de la *observación participante*, dado que es en esta, que se hace posible examinar los diferentes acontecimientos que se presentan en una investigación. Tal observación posibilita un estudio holístico para conocer, describir caracterizar las dinámicas desarrolladas dentro de un contexto educativo. Esta observación, es caracterizada por Taylor & Bogdan (1986) como una técnica en la que el objeto de investigación no es ajeno al investigador, el proceso de interacción es flexible, el observador puede hacer uso de uno o varios papeles en relación a los objetos observados, existiendo de tal modo una continua redefinición de aquellos que se considera problemático

De igual modo, reconocemos los aportes de la observación participante como instrumento metodológico para la obtención de datos en investigación, al convertirse en una práctica sistemática de observación y recogida de datos que nos conduce a una comprensión e interpretación de la realidad estudiada desde una base empírica. Este modo de investigación permite prestar mayor atención a los actores ya que, implica una interacción directa entre el investigador y los sujetos estudiados. (Taylor y Bogdan, 1992; Camas, 2008; Stake, R. 2010; Angrosio, 2012).

Tal observación se basa en una observación directa y mediatizada (videograbación) en la ejecución de la secuencia de actividades, centrandó su foco en la observación de las clases correspondientes a la fase de validación e institucionalización (a partir de la determinación que hace Brousseau, 1986 en la Teoría de las Situaciones Didácticas).

### 1.6.5 Textos

Teniendo en cuenta que en esta investigación se realiza un análisis de la construcción de significados personales de los estudiantes, en torno a la noción de proporcionalidad inversa, se indagan los siguientes textos que permiten dar cuenta de las acciones de los estudiantes en el aula en cada uno de los momentos del proceso propios de las situaciones de validación.

	Momento	Acciones de los participantes	Textos a indagar
<b>Situación de validación</b>	<b>Acción (Trabajo individual)</b>	Primera aproximación al problema. Enunciación de conjeturas e hipótesis	Portafolios  Video
	<b>Formulación (Trabajo grupal)</b>	Comunicar y validar hipótesis y estrategias	
	<b>Validación (Exposición de desarrollos)</b>	Justificar, probar y validar estrategias	

*Tabla 2. Textos estudiantes*

#### 1.6.5.1 Portafolios

Construcción de portafolios tanto individuales como grupales, en los que los estudiantes dan muestras del proceso llevado a cabo (todos los pasos seguidos) para llegar a la solución de la actividad.

#### 1.6.5.2 Grabación de video

Se realiza un registro audio visual como segundo método de contraste para el análisis del accionar de los estudiantes ante la actividad, dando así un punto neutral de comparación con sus acciones registradas en los portafolios.

Para el análisis, se tomará en cuenta la actividad de validación, ya que en este momento de es posible evidenciar las justificaciones y/o argumentos de los estudiantes en relación con sus acciones frente a las actividades.

#### 1.6.5.3 Secuencia de actividades

La secuencia de actividades implementada (*ver anexo 1*) está construida y organizada bajo una aproximación del enfoque teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (TSD). Al trabajar bajo la TSD en cada una de las situaciones se puede dividir o generar unos momentos, que se clasifican de acuerdo con las acciones de los participantes en acción, formulación, validación e institucionalización. Al respecto, se presenta la secuencia producto de las modificaciones desarrolladas por nosotros a la propuesta de López, A., Rodríguez, D. & Rojas, M (2005) y López, A., (2016). Cabe aclarar que tales secuencias fueron aprobadas después de su respectivo pilotaje, reestructuración y validación.

**1.6.5.3.1 CRONOGRAMA IMPLEMENTACIÓN – CUADRO EXPLICATIVO SECUENCIA DE ACTIVIDADES**

En la tabla se evidencian las fechas correspondientes a la implementación la secuencia de actividades, seguidamente se muestra la estructura de la misma, los temas trabajados en cada momento, el propósito y la descripción de las actividades.

**CRONOGRAMA**

<b>SEPTIEMBRE 2015</b>				
<b>LUNES</b>	<b>MARTES</b>	<b>MIÉRCOLES</b>	<b>JUEVES</b>	<b>VIERNES</b>
<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b> SITUACIÓN ACCIÓN # 1	<b>18</b> SITUACIÓN ACCIÓN # 2
<b>21</b> SITUACIÓN FORMULACIÓN # 3	<b>22</b> SITUACIÓN FORMULACIÓN # 4	<b>23</b> SITUACIÓN VALIDACIÓN # 5	<b>24</b> SITUACIÓN VALIDACIÓN # 6	<b>25</b> SITUACIÓN VALIDACIÓN # 7
<b>28</b>	<b>29</b> SITUACIÓN VALIDACIÓN # 8	<b>30</b> SITUACIÓN INSTITUCIONA LIZACIÓN # 9	<b>1</b>	<b>2</b>

**Tabla 3. Cronograma aplicación**

### 1.6.5.3.1 CUADRO EXPLICATIVO

*Tabla 4. Cuadro explicativo secuencia*

SITUACIÓN	#	TEMA	ACTIVIDAD	PROPÓSITO
<b>ACCIÓN</b>	1	Razón y proporción	Hacer parejas de fichas proporcionales	Identificar los procedimientos que utilizan los estudiantes al momento de solucionar situaciones problema asociadas a razón y proporción.
	2	Razonamiento proporcional	Comparar camiones y capacidad de cajas	Reconocer las estrategias implementadas para trabajar en torno razones equivalentes y registrar los tipos de representaciones usados.
<b>FORMULACIÓN</b>	3	Serías proporcionales	Percepción del sabor (jarra y jugo de limón)	Evidenciar los argumentos que utilizan los estudiantes para determinar series proporcionales. Trabajar en torno a la comparación de probabilidades incluyendo ideas casos favorables y posibles y no simplemente la estrategia aditiva.
	4	Producto de medidas	Recubrir cancha rectangular con áreas cuadradas de diferente tamaño	Favorecer la adquisición de modelos (tablas de correspondencia y análisis dimensional) y lenguajes explícitos (operador escalar, operador funcional), que permitan abordar problemas de isomorfismo de medidas.
<b>VALIDACIÓN</b>	5	Proporcionalidad directa	Pesaje usando balanzas	Caracterizar los procedimientos usados en la solución de problemas que involucren proporcionalidad directa. Estimular la discusión y experimentación en la comparación y predicción de razones y proporciones.
	6	Correlación inversa en lo cualitativo	Dimensiones de rectángulo de determinada área	Potenciar el reconocimiento de relaciones cualitativas de dependencia entre dos variables. Proporcionar una amplia variedad de tareas sobre razones y proporciones en diversos contextos que pongan en juego relaciones multiplicativas entre distintas magnitudes
	7		Disolución de alka-setzer	Abordar situaciones que impliquen correlación inversa entre variables cualitativas y cuantitativas.
<b>INSTITUCIONALIZACIÓN</b>	8	Proporcionalidad inversa	Repartiendo el premio	Identificar los métodos usados por los estudiantes para realizar repartos proporcionales. Evaluar la forma de abordar una situación de proporcionalidad inversa y el uso de la constante de proporcionalidad.

## CAPITULO 2 – REFERENTES TEÓRICO - METODOLÓGICOS

### 2.1 REFERENTES TEÓRICOS

El siguiente apartado recoge los fundamentos teóricos y los aportes de diversas investigaciones relevantes, que han centrado su atención en temas relacionados con cada una de las categorías que estructuran la investigación, tales como elementos de análisis didáctico: Enfoque Ontosemiótico y tetraedro didáctico, evaluación, resolución de problemas y proporcionalidad.

#### 2.1.1 ELEMENTOS DE ANÁLISIS DIDÁCTICO

##### 2.1.1.1 Perspectiva semiótica

En el desarrollo de la presente investigación se aplica la interpretación de algunas nociones y herramientas del análisis ontosemiótico, complementada con la adaptación hecha por Lurduy (2012) de la perspectiva semiótica peirceana.

Los planteamientos de la perspectiva semiótica peirceana, son tratados por Castañares (1994), dando una definición de semiósis al tomarla como “la acción, o influencia, que es, o implica, una cooperación de tres sujetos, a saber un signo, su objeto y su interpretante”

Se aprecia que la lógica tiene para Peirce un componente semiótico y desde éste, el problema fenomenológico puede ser planteado en estos términos: todos nuestros contenidos mentales son signos porque no podemos pensar si no es por medio de signos y, por tanto, los procesos mentales son procesos de semiósis.

Ahora bien, para evitar el mentalismo Peirce pensó que a los contenidos mentales no les convenía el nombre de “ideas” - como había propuesto el mismo Locke-, sino más bien el de “fenómenos”, por lo que con el fin de caracterizarlos, Peirce parte del modo en que son experimentados estos fenómenos, y los redujo a tres categorías: Primeridad, segundidad y terceridad.

*Primeridad:* no puede ser “pensada” como un hecho real sino como simple posibilidad. Es aplicable a fenómenos relacionados con el sentimiento espontáneo, inmediato y sin analizar. Tiene que ver con sentimientos o emociones, las cualidades y las apariencias.

*Segundidad:* es la categoría de la ocurrencia, del hecho, de las cosas reales. Tiene que ver con todo lo que implica polaridad: acción-reacción, causa-efecto, cambio y resistencia al cambio.

*Terceridad:* es además de mediación, como sugieren estos ejemplos, síntesis, hábito, necesidad y ley. Si la segundidad era el hecho bruto, cuando aparece una razón o una ley que lo explica, aparece la terceridad.

Para Peirce según Castañares (1994), un signo es todo aquello que comunica "una noción definida de un objeto. Y es aquí, donde plantea que los signos pueden entrar a clasificarse mediante tres tricotomías de acuerdo a las relaciones que se establecen con los signos.

1. considerar al signo en sí mismo.
2. considerar el signo con relación con su objeto.
3. considerar al signo con relación a su interpretante.

La segunda tricotomía puede ser considerada como fundamental y es también la más conocida. El criterio de esta clasificación se refiere a las relaciones que el signo mantiene con su objeto. Desde este punto de vista los signos pueden ser iconos, índices y símbolos.

**ICONO:** El icono es un signo que mantiene con su objeto una relación de semejanza o similitud. De ahí que cualquier cosa pueda ser considerada como un signo (posible) de cualquier cosa a la que encontremos un parecido.

La función que los iconos desempeñan en la comunicación es muy importante: la única manera de comunicar directamente una idea es mediante un icono. Un cuadro o un diagrama son ejemplos de iconos.

**INDICE:** Los caracteres fundamentales del índice residen en su individualidad y en el hecho de remitirnos a un objeto con el que está en conexión dinámica. El índice se refiere a un objeto por el que está afectado. El agujero de una bala en la pared o el dedo apuntando a un objeto son índices

**SÍMBOLO:** El símbolo es una regla que determina a un interpretante; en otros términos, representa a su objeto en virtud de una ley o convención.

Ahora bien, en este trabajo se aplica la interpretación de los niveles de expresión semiótica, realizada por Lurduy (2013), para implementarla en la descripción y caracterización de los textos elaborados por los estudiantes. En esta interpretación para el análisis de las acciones e interacciones didácticas en un proceso de estudio, se usa la codificación por color (ícono, color verde; índice, color amarillo; y símbolo, color rojo) para la recolección y sistematización y análisis de la información dispuesta en los textos (portafolios de los estudiantes, transcripciones de videos y entrevistas).

#### **2.1.1.2 Enfoque Ontosemiótico.**

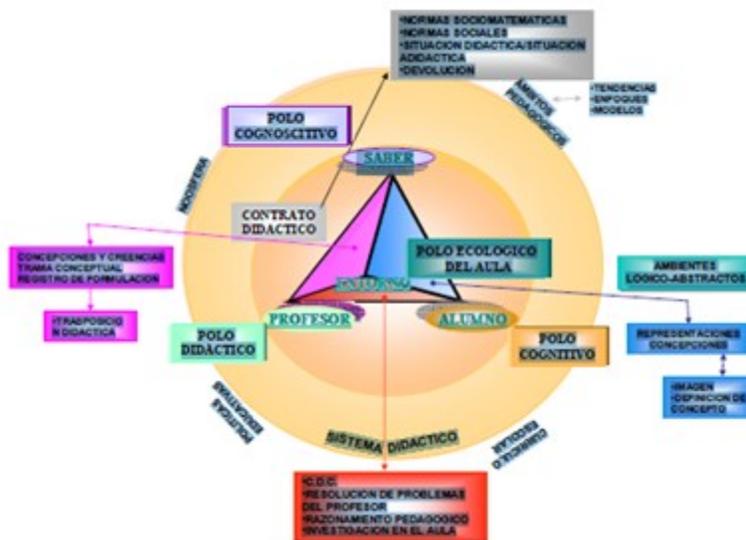
En primera medida, al referirnos al enfoque ontosemiótico reconocemos en este desde Godino, Batanero & Font (2007), la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. En tal sentido, es posible entrar a determinar los conceptos teóricos de práctica, significado personal (global, declarado, logrado) e institucional (implementado, evaluado, pretendido, referencial), con el fin de hacer evidente el triple carácter de la matemática y la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

#### **2.1.1.3 Tetraedro didáctico**

El tetraedro didáctico se toma como un constructo analítico, para el análisis del sistema didáctico y la construcción de significados didácticos (Semiósis didáctica). La funcionalidad de este, recae en las diferentes relaciones que existen entre sus diversos componentes (estudiantes, profesor, medios y recursos didácticos), razón por la que es posible articularlo como una base sólida en los procesos de análisis de un sistema didáctico.

Es posible configurar cuatro subsistemas (unidades complejas), ligados a sus respectivas díadas de relaciones complejas, que posibilitan la emergencia de triadas de relaciones, que determinan planos de observación y análisis. Tales subsistemas se explicitan a continuación:

- Polo didáctico (*profesor*): hace referencia a los elementos que caracterizan la unidad compleja profesor y las acciones propias de las relaciones de este con los demás polos, en relación con la acción, reflexión, gestión, diseño y evaluación de los procesos de estudio por parte del profesor.
- Polo ecológico (*entorno*): estudios sobre los elementos que caracterizan la unidad compleja entorno y cultura del aula (textos y contextos). Guarda estrecha relación con las interacciones, roles, mediaciones, comunicación, reglas y normas, entornos de enseñanza aprendizaje.
- Polo cognitivo (*estudiante*): estudios sobre la unidad compleja estudiante y las relaciones con la comprensión y aprendizaje, sobre los significados personales, los observables cognitivos por medio de sus manifestaciones de conducta cognitiva de manera verbal, gestual y escrita, sus acciones e interacciones, roles.
- Polo epistémico (*saber*): hace referencia a los estudios sobre la unidad compleja saber matemático o didáctico, los significados institucionales y de referencia matemáticos y didácticos, pretendidos e implementados en el proceso de estudio y sobre las relaciones saber-entorno, saber-profesor, saber-estudiante.



**Imagen 1. Tetraedro didáctico**

#### 2.1.1.4 Sistemas de prácticas- Significados

Para entrar a caracterizar y documentar acerca del sistema de prácticas es indispensable usar la perspectiva relacionada con las descripciones que realiza Ernest con referencia al sistema semiótico con la noción introducida por Godino y Batanero (1998).

En este sentido, es indispensable determinar que los sistemas de prácticas son vistos en el EOS como uno de los posibles caminos a recorrer para poder entender “el significado del objeto matemático” los cuales están relacionados con un contexto o marco institucional y a su vez son evocados de la solución de cierta clase de situaciones problema.

Ahora bien, según lo menciona Lurduy (2012), el significado de un objeto didáctico visto como el objeto didáctico, es identificado como aquellas sistemas de prácticas discursivas, operativas y normativas que realiza determinada persona en un contexto institucional, los cuales manifiestan en diferente grado y con énfasis distintos, como aquellos que entre si permiten el acontecimiento que puede tener el significado de los objetos-procesos, reflexión y semiósis didáctica, como una salida a los diversos problemas didácticos que se presentan y que pueden ser producto de la profesión llevada a cabo y de las expresiones idoneidad del profesor

### 2.1.1.5 Tipos de significado

La relatividad socio epistémica y cognitiva de los significados, entendida como sistemas de prácticas, y su uso en el análisis didáctico llevaron a introducir en el EOS la siguiente tipología de significados para poder tener procesos que atiendan el análisis de cada actividad matemática que se puede presentar en la enseñanza y aprendizaje de diversos procesos matemáticos.

Para el cual es importante dar a conocer las posibles relaciones que existen entre varios significados que emergen en cada fase de interacción con el conocimiento, como lo son los significados institucionales y personales.

Ahora bien, se debe tener en cuenta que los sistemas de prácticas se han categorizado en el EOS teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción del carácter personal, o idiosincrásico, de las prácticas (prácticas personales) y del carácter institucional (compartido, social) de tales prácticas.

La interpretación semiótica de las prácticas matemáticas, personales e institucionales, permite describir los procesos de aprendizaje en términos de acoplamiento de significados, como se indica en la parte central de la figura 1. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados (Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. & Lurduy, O. (2009)



*Imagen 2. Tipos de significado*

### *Significados personales.*

**Global:** corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencial el sujeto relativas a un objeto matemático.

**Declarado:** sistema de prácticas expresadas y que dan cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.

**Logrado:** sistema de prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

### *Significados institucionales*

**Referencial:** sistema de prácticas que se toma como referencia en la elaboración del significado pretendido.

**Pretendido:** sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio

**Implementado:** en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas implementadas por el docente.

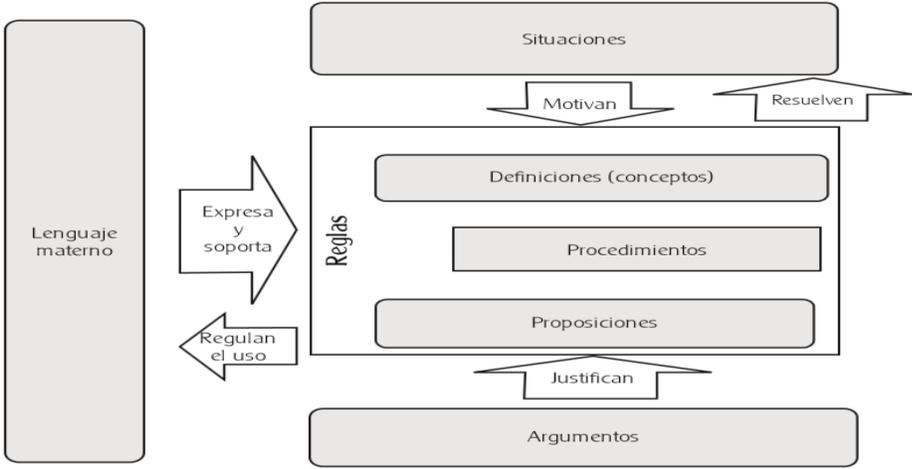
**Evaluado:** sistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes de los estudiantes.

### **2.1.1.6 Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de práctica - Elementos de significado**

Como bien lo reconocen Godino, J., & Font, V., (s.f.) , en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc., que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura

En tal sentido, se propone la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

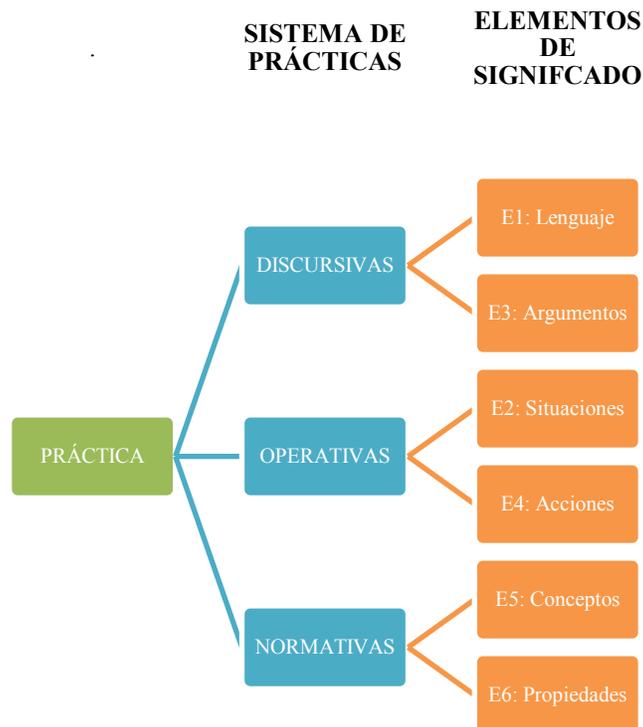
- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos,...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,...)
- Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios,...)
- Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,...)
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos,...)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,...)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...).



*Imagen 3. Elementos de significado*

**2.1.1.7 Relación Sistemas de Prácticas-Elementos del Significado**

De acuerdo a los planteamientos señalados por Lurduy (2013) y entendiendo el significado como los sistemas de prácticas discursivas, operativas y normativas, se elaboran redes categoriales que permiten identificar los sistemas de prácticas y describirlos a partir de sus elementos del significado. Para tal tarea, dichos elementos teóricos-metodológicos se pueden asociar de la siguiente manera:



**Diagrama 1. Relación Sistemas de Prácticas-Elementos del Significado. Fuente: Lurduy (2013)**

### 2.1.2 EVALUACIÓN

En lo referente a la evaluación de un proceso de enseñanza-aprendizaje, se toman como referentes Giménez (1997), Clark (2002), Rico (2000), García (2003), William (2009), Sanmartí (1998) y Lurduy (2012)

Desde Giménez (1997), se hace posible tener una aproximación a lo que ha sido la transformación histórica de las prácticas evaluativas llevadas a cabo en el aula, es desde éste autor, que se reconoce que independientemente del modelo con el cual se trabaje, todo proceso de evaluación ha de tener el sentido de reconocer el nivel de logro alcanzado en el mismo. Del mismo modo, expone modelos de evaluación que pueden ser implementados, atendiendo a la puesta en práctica de un sistema multidimensional, en el cual el aspecto cognitivo no es el único factor a evaluar. En lo referente a Clark (2002), se hace uso de conceptos claves en la práctica de la evaluación en matemáticas desde un enfoque constructivo.

Por su parte, García (2003), en su libro *Currículo y evaluación en matemáticas*, resalta la evaluación como un área problemática dado que los aspectos que se tienen en cuenta en ésta, no permiten la consecución de resultados objetivos que posibiliten reconocer al estudiante desde puntos de vista diferentes a los meramente cognitivos. En el sentido de posibilitar un seguimiento al proceso, Rico (2000), nos expone una perspectiva en la que se deja de lado una visión reduccionista y se

reconoce la importancia del trabajo evaluativo en el aula permitiendo definir la evaluación como “el campo de estudio e investigación que se plantea cuestiones mucho más amplias que las que derivan directamente de la pregunta: ¿Cómo calificar a nuestros alumnos?”. Es así, que se reconoce la importancia de valorar el trabajo de los estudiantes al tiempo que se reflexiona sobre ¿qué evaluar y cómo evaluar?, todo esto dadas las bases que permiten ver las matemáticas como un elemento clave de la cultura.

Ahora bien, con el fin de darle sentido a cada uno de los planteamientos desarrollados anteriormente, se da razón al sentido de evaluación desde una perspectiva formativa propuesta por William (2009), al propiciar en el aula espacios claves para la reflexión sobre la práctica que se está implementando en la que los logros de los estudiantes son tenidos en cuenta para la toma de decisiones que posibiliten el que los procesos de instrucción avancen significativamente.

En consecuencia, la evaluación-regulación continua de los aprendizajes desde Sanmartí (1998) se sustenta en tres aspectos principales: la evaluación considerada como autorregulación que lleva a cabo cada estudiante de su propio proceso de aprendizaje, la coevaluación o regulación mutua que tiene lugar a partir de las interacciones entre los propios alumnos; y la evaluación que lleva a cabo el profesorado y que deberá orientarse fundamentalmente a la detección y regulación de aquellos aspectos que los estudiantes no son capaces de regular autónomamente.

### 2.1.3 PROPORCIONALIDAD

La proporción puede ser matemáticamente explicada como una relación entre magnitudes o números, que viene dada por una función lineal, cuya constante de proporcionalidad establece la relación entre las cantidades de ambas magnitudes, o números correspondientes (García, Serrano, Espitia, 1999).

Se dice que dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales si los valores tomados por la magnitud A y los inversos de los valores tomados por la magnitud B forman dos series proporcionales

Se enumeran a continuación algunos ejemplos expuestos por Godino, J & Batanero, C. (2002) para mostrar la variedad de situaciones en las cuales se ponen en juego el modelo matemático de la proporcionalidad.

1. Los numeradores y denominadores de todas las fracciones que son equivalentes entre sí (representantes del mismo racional).
2. La longitud de cualquier circunferencia con su diámetro (o su radio):  $l = \pi d$  ( $2\pi r$ )
3. Longitud del arco de circunferencia y la amplitud del ángulo central correspondiente a dicho arco.
4. El área de un sector circular y la amplitud del ángulo correspondiente.
5. Las longitudes de diferentes segmentos marcados sobre una recta y sus proyecciones paralelas sobre otra recta (teorema de Thales)
6. El volumen de líquido introducido en un recipiente con una sección regular (prisma, cilindro,...) y la altura del líquido en el recipiente. (Esto permite la lectura del volumen graduando la altura).y el número.

#### 2.1.3.1 Clases de problemas de tipo multiplicativo

Vergnaud (1991), define tres categorías a entender: isomorfismo de medidas, producto de medidas, y proporcionalidad múltiple diversa del producto. Así, toda situación puede ser llevada a una combinación de relaciones de base con datos conocidos y datos desconocidos, en la estructura multiplicativa las relaciones de base más simples son las cuaternarias, porque los problemas más simples de multiplicación y división implican la proporción simple de dos variables.

### 2.1.3.2 Isomorfismo de medidas

Pone en juego cuatro cantidades, pero en los problemas más simples se sabe que una de ellas es igual a uno. En tal caso, hay tres clases de problemas (multiplicación, búsqueda del valor unitario y búsqueda de la cantidad de unidades) según que la incógnita sea alguna de las otras tres cantidades.

*Multiplicación*



*División: búsqueda del valor unitario*



*División: búsqueda de la cantidad de unidades*



**Imagen 4. Isomorfismo de medidas**

### 2.1.3.3 Producto de Medidas

Vergnaud (1981), define Producto de medidas como “una relación ternaria entre tres magnitudes, de las cuales, una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional. El producto de medidas permite distinguir dos clases de problemas: *Multiplicación*: encontrar la medida producto cuando se conocen las medidas elementales. *División*: encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra, y la medida producto.

### 2.1.3.4 Proporcionalidad directa e inversa

Con relación a la proporcionalidad directa, “dos magnitudes varían en forma directamente proporcional cuando la razón de sus medidas es constante. Es decir: Si  $x$  es la medida de la magnitud  $P$  y  $y$  es la medida de la magnitud  $Q$ , entonces  $P$  y  $Q$  son directamente proporcionales si  $\frac{x}{y} = k$  donde  $k$  recibe el nombre de constante de proporcionalidad. (Londoño y Bedoya, 1988, p. 243)

Londoño y Bedoya (1993, citados por López, Rodríguez, y Rojas, (2005), mencionan:

*“Dos magnitudes son proporcionales o directamente proporcionales si sus cantidades se corresponden biunívocamente, ordenadamente, en la igualdad y en la suma.*

*Designaremos por  $a, b, c...$  las cantidades de la primera magnitud y por  $a'', b'', c''...$  Las cantidades homólogas o correspondientes en la segunda magnitud, entonces:*

*i) Al decir que las cantidades  $a, b, c...$  Se corresponden ordenadamente queremos indicar que si las cantidades se suceden en cierto sentido (por ejemplo  $a < c < b < ...$ ), lo mismo debe ocurrir a las cantidades  $a'', b'', c''$  (o sea  $a'' < c'' < b'' < ...$  O bien  $a'' > c'' > b'' > ...$  ).*

*ii) La correspondencia en la igualdad exige que si  $a=b$  entonces también  $a'' = b''$ .*

*iii) por último la correspondencia en la suma exige que si  $a = a + b$ , sea también  $c'' = a'' + b''$ (p.162, 163).*

En lo que refiere a proporcionalidad inversa, decimos que dos magnitudes varían en forma inversamente proporcional cuando el producto de las cantidades correspondientes es una constante. Es decir, si  $x$  es la medida de la magnitud  $P$  y  $y$  es la medida de la magnitud  $Q$ , entonces  $P$  y  $Q$  son inversamente proporcionales si  $x \cdot y = k$  donde  $k$  recibe el nombre de constante de proporcionalidad. (Londoño y Bedoya, 1988, p. 243)

### Propiedades

- “Las propiedades de isomorfismo de la función lineal.  
-  $f(nx) = nf(x)$  para cualquier número real  $n$   
-  $f(n_1x_1 + n_2x_2) = n_1f(x_1) + n_2f(x_2)$ .
- Propiedades referidas al coeficiente constante entre dos variables linealmente ligadas:  
-  $f(x) = ax$   
-  $x = \frac{1}{a} f(x)$ .
- Propiedades de la bilinealidad:  
-  $f(n_1x, n_2x_2) = n_1 * n_2 f(x_1, x_2)$ ” (p.166)
- Propiedades de las Proporciones
  1.  $ad = bc$
  2.  $a/b = c/d$ , entonces  $a+c / d+b = a/b$
  3. si  $a/b = c/d$ , se cumple  $a+c/b = c+d/d$
  4. si  $a/b = c/d$ , entonces  $a+b/a-b = c+d/c-d$
  5. Si  $a/b = c/d$ , entonces  $a+b/a = c+d/c$ ” (p.175)

### Aportes Euclides

El libro V de Euclides y el libro I referentes al equilibrio y el centro de gravedad de los planos, nos permiten tomar los siguientes postulados para caracterizar los significados de los estudiantes.

**Postulado 1.** Pesos iguales a distancias iguales (del punto de apoyo de una balanza de brazos iguales) se equilibran, y a distancias desiguales se rompe el equilibrio y hay una inclinación hacia el lado del peso que está a mayor distancia.

#### Proposición 1

*Pesos balanceados a igual distancia son iguales, ya que si ellos son desiguales, tome del mayor la diferencia entre los dos. Los restos estarán entonces no balanceados lo cuales absurdo. Por consiguiente los pesos no pueden ser iguales*

#### Proposición 2

*Pesos desiguales a iguales distancias no estarán balanceados pero se inclinarán hacia el mayor peso. Ya que si toma del mayor la diferencia entre los dos. Los restos iguales estarán por consiguiente balanceados. Por tanto, si nosotros agregamos la diferencia de nuevo, los pesos no estarán balanceados pero se inclinarán hacia el mayor.*

#### Proposición 3

*Pesos desiguales estarán balanceados a distancias desiguales, si el peso mayor está a menor distancia.*

#### Proposición 4

*Si dos pesos iguales no tienen el mismo centro de gravedad, el centro de gravedad de ambos tomados juntos está en el punto medio de la línea que une sus centros de gravedad.*

#### Proposición 5

*Si tres magnitudes iguales tienen sus centros de gravedad en una línea recta a distancias iguales, el centro de gravedad del sistema coincidirá con el de la magnitud intermedia (se sigue de la proposición 4)*

#### 2.1.4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Desde Santos (1997) es importante reconocer los métodos generales y particulares en la resolución de problemas al apreciar el trabajo de esta metodología en las prácticas educativas. Al respecto, se entiende por problema aquella tarea o situación que permite al estudiante enfrentarse a proponer diversas estrategias de solución, en la que aparecen componentes importantes tales como son:

- Presencia de un objetivo → se necesita encontrar una solución.
- No existe solución inmediata → no hay método que garantice la solución inmediata de la situación.
- Diversos métodos de solución → (algebraico, numérico, geométrico).
- Atención por parte de un grupo para llevar a cabo un conjunto de acciones que permita resolver la situación → existe un interés y se emprenden acciones para resolverlo

La resolución de problemas según Charnay. (1994, citado en Remesal, 1999), se reconoce que una situación puede ser observada a través de las relaciones que se dan entre tres polos: maestro, alumno, saber; proponiendo así tres modelos de aprendizaje, tales como:

- El modelo llamado “normativo” (centrado en el contenido)
- El modelo llamado “incitativo” (centrado en el alumno)
- El modelo llamado “aproximativo” (centrado en la construcción del saber por el alumno)

En el desarrollo de la investigación, se privilegia la relación estudiante-saber, por lo que el modelo llamado aproximativo se estructura como el criterio orientador/organizador del desarrollo de clases.

Por otra parte, reconociendo que existen variados y múltiples modelos, herramientas e instrumentos para desarrollar diseños, gestión y evaluación en el proceso de elaboración de secuencias didácticas, optaremos por implementar el expuesto por Brousseau, quien reconoce que el análisis de la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas debe centrarse en las interacciones de los estudiantes con unas situaciones problemáticas; es decir, caracterizar situaciones didácticas para los contenidos matemáticos. Desde esta perspectiva el conocimiento se entiende como solución a una situación planteada. Tal estructura, permite analizar los planteamientos que se realizan basados en una reflexión continua entre la situación y el conocimiento previo, generando las primeras estrategias de resolución, para permitir en los estudiantes la modificación del conocimiento.

De igual forma, Brousseau, establece cuatro tipos de situaciones que permiten disponer el desarrollo de una clase para posibilitar tales estrategias. Tales situaciones son acción, formulación, validación e institucionalización. En las situaciones de *acción*, los estudiantes están enfrentados a una situación que les propone algún tipo de problema para encontrar la solución; estas acciones posibilitan alguna solución que pretende dar lugar a la generación de un saber. Las situaciones de *formulación*, se caracterizan por el intercambio de conocimiento o información, de estrategias y posibles resultados, producto de tal proceso se da la necesidad de justificar, de comprobar los procesos, lo que lleva a las situaciones de *validación*. Finalmente, en las situaciones de *institucionalización* se interviene activamente, al darse la consideración “oficial” del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro. (Brousseau, 1986).

## 2.2. REFERENTES METODOLÓGICOS

### 2.2.1 Criterios

Dentro del desarrollo de la investigación y para darle objetividad a la misma, se debe cumplir con los criterios de *pertinencia, validez y fiabilidad* que plantean DeKetele y Roegiers (1995), con el fin de lograr ser *pertinentes* en la realización de la investigación, al basarnos en hechos, enfocados a las características que emergen en los procesos de estudio producto de comportamientos e interacciones que se establecen entre los agentes del proceso y los procesos de comunicación que tienen como foco de atención las producciones de los estudiantes.

En tal sentido, buscamos que la información recogida, sea *fiable* basados en la aplicación de métodos e instrumentos de recolección de información por medio de la sistematización, mediada por la coherencia y viabilidad de técnicas rigurosas.

Cada momento de recogida de información obtendrá un grado de *validez* según Ketele y Roegiers (1995), a partir de la estrategia de recogida de información que se elija, por ello la secuencia de actividades a aplicar debe permitirnos examinar un ejemplo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad inversa, como medio para obtener información sobre los entes investigados a partir de las relaciones que se pueden realizar entre profesor – estudiante y entorno.

### 2.2.2 Tipo de investigación

El desarrollo de investigación, esta mediado por el *tipo de investigación cualitativo*, al permitir la captación y reconstrucción de significados de forma abierta valorando multiplicidad de elementos. En tal sentido, entendemos esta desde (referenciado en<sup>2</sup>) como “una categoría de diseños de investigación que extraen descripciones a partir de observaciones que adoptan la forma de entrevistas, grabaciones, transcripciones, registros escritos, entre otros”

*Características de los métodos cualitativos.*

- Su objetivo es la captación y reconstrucción de significados
- Su lenguaje es básicamente conceptual
- Su modo de captar la información no es estructurado sino flexible y desestructurado
- Su procedimiento es más inductivo que deductivo.
- La orientación no es particularista y generalizadora sino holística y concretizadora.

Del mismo modo reconocemos en este tipo de investigación, algunos de los elementos expuestos por Taylor y Bogdan (1986), que aportan al reconocimiento de significados emergentes de datos descriptivos previamente tomados, tales como la posibilidad que tiene el investigador de analizar el entorno desde una perspectiva holística usando métodos inductivos, que le permiten apartar sus propias creencias para entrar a valorar todas las perspectivas de los sujetos y de tal forma no reducir los grupos a variables, sino considerarlos como un todo.

*Estrategias de la investigación cualitativa.*

Dados los planteamientos de Hammersly (2004, citado por Vasilachis, 2006), se hace uso de estos para determinar cuáles son los procesos que proveen mayores aportes o elementos para establecer las rutas de ejecución de la investigación, basados en cada particularidad que suministra las fases de implementación de la secuencia didáctica. A partir de Creswell (1998, citado por Vasilachis, 2006), se adquiere la posibilidad de estudiar y analizar el acto educativo que en el aula de clases está teniendo lugar de forma compleja y holística, lo cual permite tener una visión amplia de los procesos desarrollados por los individuos.

<sup>2</sup> Documento en línea sin autor. Disponible en <http://www.iiicab.org.bo/Docs/doctorado/dip3version/M2-3raV-DrErichar/investigacion-cualitativa.pdf>

Por último, Denzing y Lincoln (1994, citados por Vasilachis, 2006), establecen que los investigadores indagan en situaciones naturales, intentando dar sentido o interpretar los fenómenos en los términos del significado que las personas le otorgan, es por esto que resulta indispensable para esta investigación, tener claridad de cada una de las situaciones que permiten la recolección de la información, en torno a los significados personales de los estudiantes con respecto a la proporcionalidad, como medio para dar cumplimiento a los objetivos previamente establecidos.

### 2.2.3 Enfoque

Al posibilitar el uso en procesos de evaluación e investigación, el *enfoque descriptivo* brinda herramientas para describir y analizar de manera rigurosa la complejidad de un sistema, en donde la presente investigación aporta a describir el constructo de conocimiento matemático adquirido por los estudiantes. (De Ketele & Rogers, 1995)

### 2.2.4 Técnica

Para realizar el proceso de confrontación de la información recogida se usa como *técnica* una articulación coherente y compleja de tres referentes metodológicos tales como: la teoría fundamentada (TF), el análisis cualitativo del contenido (ACC) y el análisis semiótico de textos (AST). Glaser, y Strauss, 1967; Strauss y Corbin, 1990, 2002; Bardin, 1986; Andreu, 2009; Abril 1994; Fontanille 2004, citados en Lurduy, 2013), donde es primordial establecer algunas unidades de análisis que permitan construir un muestreo, un registro y un determinado contexto, donde exista la creación de criterios para el manejo de la información y construcción de codificaciones que permitan la categorización y registro de la información.

La aplicación de tales técnicas se fundamenta en el análisis del registro de video basado en diferentes intervalos de unidades de texto, que son analizados haciendo uso del ACC, TFD y AST.

En tal sentido, por tanto la observación de la población se delimita a un subconjunto denominado *unidad de muestreo*, con la cual se define un grupo de quinto grado de primaria (conformado por 13 estudiantes). De este grupo en un segundo momento, se toman nueve (9) estudiantes que conforman una nueva *unidad de estudio*. En un tercer momento, a partir de la información recogida se continua con una *unidad de registro*, conformada por tres (3) estudiantes, uno de cada subgrupo de la *unidad de muestreo*, este proceso se realiza por ser estudiantes que evidencian aspectos importantes de la investigación, con el fin analizar los relatos de cada subgrupo. Los relatos de estos tres estudiantes son separados en unidades de texto que son analizadas bajo las mismas técnicas de análisis empleadas por Lurduy (2013).

### 2.2.5 Articulación de estrategias.

Atendiendo a que buscamos realizar una análisis sobre lo declarado por los estudiantes en lo referente a significados personales, desde una perspectiva ontosemiótica (Godino, 2002), complementado con la perspectiva semiótica Peirceana (1975), es importante aclarar que la articulación de técnicas usadas en la investigación, corresponde a una estrategia de combinación, complementariedad y flexibilidad entre dichas técnicas, en ámbitos diferentes, de acuerdo a los intereses y las necesidades de todo el proceso investigativo.

#### 2.2.5.1 Teoría fundamentada en los datos (TFD)

Asumimos algunos de los enunciados provenientes de la teoría fundamentada a partir del análisis de los datos proporcionados por los estudiantes en el trabajo en torno a la proporcionalidad inversa.

En un primer momento de aplicación de algunas de las estrategias de lo que interpretamos como Teoría Fundamentada en los Datos (TFD), proponemos la generación y desarrollo de criterios de evaluación de los procesos desarrollados por los

estudiantes. Para ello, y atendiendo a que contamos con una gran cantidad de datos, partiremos de una técnica de codificación abierta que posibilite la descripción del material, la ordenación conceptual y la conceptualización relacionada con referentes específicos en la clasificación y organización del corpus general de información

Es así, que esta técnica, permite ir fundamentando las interpretaciones, inferencias y conclusiones generales de los textos, que emerjan del proceso de recolección y tratamiento de la información, al posibilitar la descripción conceptualización y organización sistemática de la misma.

#### **2.2.5.2 Análisis cualitativo de contenido (ACC)**

Esta es la estrategia central del trabajo de sistematización, análisis de los datos focalmente detectados como proveedores de información relevante y pertinente. Según Bardin (1986), el análisis de contenido es “un conjunto de instrumentos metodológicos...aplicados a “discursos” (contenidos y continentes) extremadamente diversificados”

Es así, que esta técnica permite dar tratamiento a la densidad y abundancia de datos, para aplicarlos a una reducción y sistematización inicial de la información, lo cual contribuya a la clasificación y organización de la información pertinente a los intereses del presente estudio.

#### **2.2.5.3 Análisis ontosemiótico de textos (AST).**

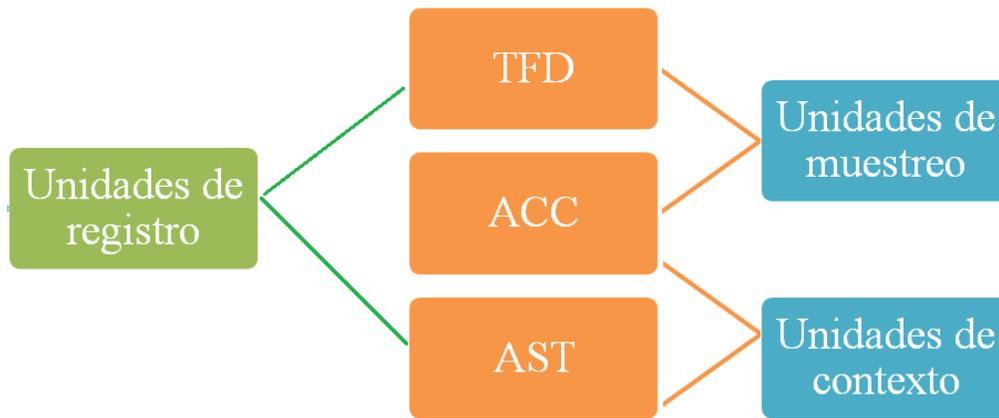
Partimos de nuestra interpretación como aplicación y adaptación de la técnica propuesta por Abril, (1994) “...análisis textual como herramienta para el análisis del discurso...”. Igualmente de nuestra adaptación (con el énfasis teórico-metodológico) de la propuesta de análisis ontosemiótico de los textos de Godino, Font, y Wilhelmi, (2008). Este análisis empieza a operar para las adaptaciones metodológicas de las herramientas teórico-metodológicas de EOS y se hace sobre los textos específicos en un procedimiento de lectura interpretativamente densa y de codificación selectiva, para la reducción de los textos en unidades específicas de análisis, con las categorizaciones e inferencias logradas con respecto a los elementos de significado de análisis, reflexión y semiósis didácticas.

#### **2.2.5.4 ¿Cómo se usan las técnicas?**

Para una primera recolección, delimitación y reducción de los datos combinamos y adaptamos algunas de las estrategias metodológicas de TFD con algunos de los aspectos pertinentes de ACC, que posibilitan homogeneizar y tratar la gran cantidad de información.

Para el tratamiento, delimitación y focalización de la información utilizamos la combinación de algunos de los procedimientos del ACC con los aspectos de AST que le eran complementarios, de manera que se pueda generar las condiciones metodológicas y conceptualmente adecuadas para el tratamiento de los textos.

Para el proceso de análisis específico de la información en los textos, combinamos convenientemente aspectos del análisis semiótico de los textos, con aspectos técnicos de TFD con el fin de interpretar, inferir y abducir resultados del proceso de evaluación de los estudiantes.



*Diagrama 2. Uso de técnicas*

## 2.2.6 Unidades de análisis

### 2.2.6.1 Unidades de muestreo- Um

#### Proceso de identificación, recolección y reducción primaria de los textos

Es indispensable para establecer *unidades de muestreo* pertinentes tener claro que hace referencia a un proceso de identificación, recolección y reducción de los textos, para el cual es importante realizar procesos de aplicación metodológica, como lo evidencia la descripción, escalonamiento de la información textual y reducción de la información, donde debe existir un proceso de selección, reducción y organización análisis contextual llamadas unidades de contexto.

Por lo anterior, hacemos referencia a *unidades de muestreo* a aquellos conjuntos total de textos, que permite una lectura extensiva enfocada hacia lo gramatical y lo descriptivo que es el texto en sus contenidos, para lograr una identificación y descripción primaria, basados en los hallazgo de planos de análisis, los niveles de rangos de expresión didáctica y rasgos comunes, la descripción de la estructura organizativa común de los textos, y la definición de los documentos estudiados. Ello produce una reducción de la información, a partir de algunos criterios de ordenación y escalonamiento de la información necesario para la diferenciación de niveles de análisis.

### 2.2.6.2 Unidades de contexto- Uc

#### Proceso de selección, reducción secundaria, organización análisis contextual.

Al referirnos a las *unidades de contexto*, estas son identificadas como el subconjunto de unidades de análisis resultantes de la primera reducción de la información. Ellas son descritas como referencias de elementos focalizados y característicos del contenido de los textos que están relacionados al contexto de la investigación, donde se podrá utilizar la segmentación de los textos y codificación por colores, como elementos diferenciadores de tipo temático para el contenido.

Es aquí, donde tenemos texto reducido y segmentado para ser tratado con codificación axial, caracterizada por la descripción de los elementos de significado de los objetos didácticos y descripciones semióticas de los órdenes de regularidad semiótica.

Para el cual, el análisis esta enfocado a ser específico de los memorandos de registro seleccionados, con el fin de realizar descripciones y características de la información, la lectura interpretativa, la determinación de la dinámica pragmática y comunicativa de los contenidos específicos de los textos.

### 2.2.6.3 Unidades de registro- Ur

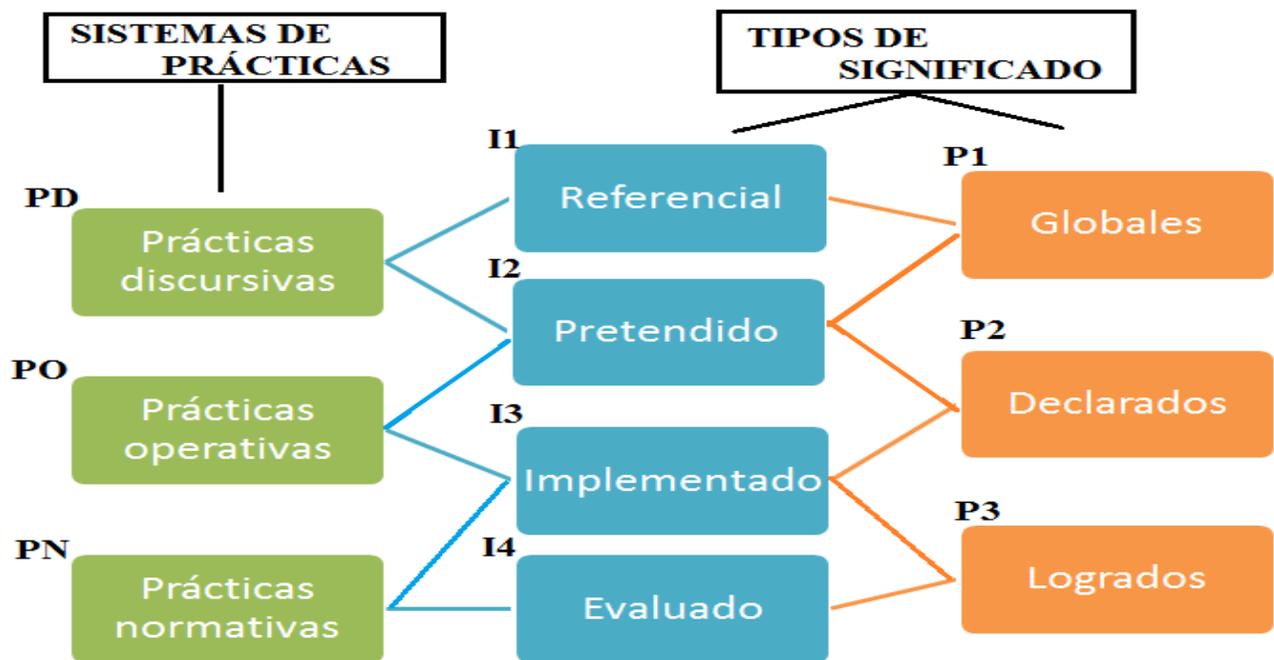
#### Proceso sistematización y análisis específico de la información.

Al referirnos a *unidades de registro*, estas permiten la caracterización y la descripción densas en las subunidades de análisis, desde unos elementos diferenciadores y categoriales identificados como comunes en las unidades de contexto.

A su vez al referirnos en los procesos de sistematización y análisis específico de la información, es llamada unidades específicas de registro; estructurada por buscar un texto específico para su análisis semiótico, basado en la codificación selectiva, que busca identificar los grados de expresión semiótica y descriptores cualitativos.

## 2.3 REDES CATEGORIALES

Con relación a los referentes teóricos abordados, a continuación que expone la construcción que se llevó a cabo de la red categorial y la respectiva codificación que se usó en el desarrollo de la investigación.



*Diagrama 3. Redes categoriales*

### 2.3.1 Red categorial parte No 1 (Sistemas de Prácticas-Significados Institucionales)

Se asocian sistemas de Prácticas-Tipos de Significados Institucionales De igual manera, se evidencia en esta construcción algunos criterios que se pueden asociar a los Tipos de Significados Institucionales y los correspondientes sistemas de prácticas.

SISTEMAS DE PRÁCTICAS (P)	SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES (S.I)																						
	REFERENCIAL (I.R)	PRETENDIDO (I.P)	IMPLEMENTADO (I.I)																				
<b>PRÁCTICAS DISCURSIVAS (P.D)</b>	1) En el Medioevo, la regla de tres era una herramienta básica para el comercio de la época y servía para determinar las proporciones de capital, tierras o cada tipo de bienes que correspondía a cada persona. El concepto de regla de tres y todos los conceptos involucrados en él, han permeado la civilización humana, hasta el punto de que proposiciones famosas se encuentran en los más disímiles campos del saber humano, como son los casos de la proporción áurea	1) Con relación a los procesos a tener en cuenta en la proporcionalidad se establece desde la perspectiva de Vergnaud (1991), que debe ser observada desde la mirada de: La proporcionalidad como razón, las razones inversas, la noción de proporción, relación directa o inversamente, magnitudes directamente proporcionales.	1) La proporcionalidad como razón, puede entenderse como aquella que a partir de una cantidad inicial y una final se puede determinar un cociente entre estos dos números, el cual al realizar diversas comparaciones se obtiene unos términos que se llaman términos de la razón.  2) magnitudes directamente proporcionales, hacemos referencia que cuando se utiliza la noción de ser mayor o menor cierta cantidad de veces, esta guarda una relación con la otra,																				
<b>PRÁCTICAS OPERATIVAS (P.O)</b>	1.2) la regla de tres realiza su intervención cuando en determinada situación de proporcionalidad directa o inversa se identifica tres magnitudes con el fin de encontrar una cuarta magnitud de la proporción. 1.3) Se dice que dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales si los valores tomados por la magnitud A y los inversos de los valores tomados por la magnitud B forman dos series proporcionales	1) dos series de números, con el mismo número de elementos, son proporcionales entre sí, si existe un número real fijo k, llamado razón de proporcionalidad, que permite escribir cada valor de la segunda serie como producto por k de los valores correspondiente de la primera serie.	<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 20px;">1</td> <td>1) Multiplicación: encontrar f(x)</td> </tr> <tr> <td>f(1)</td> <td>2) Tipo de división (partición) : encontrar f(1)</td> </tr> <tr> <td>x</td> <td>3) Tipo de división II (cuotitiva). Encontrar x</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>4) Problema de regla de tres encontrar cualquiera de estos cuatro conociendo los otros tres.</td> </tr> <tr> <td>X1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>f(X)</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1)</td> <td></td> </tr> <tr> <td>X2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>f(X)</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2)</td> <td></td> </tr> </table>	1	1) Multiplicación: encontrar f(x)	f(1)	2) Tipo de división (partición) : encontrar f(1)	x	3) Tipo de división II (cuotitiva). Encontrar x	f(x)	4) Problema de regla de tres encontrar cualquiera de estos cuatro conociendo los otros tres.	X1		f(X)		1)		X2		f(X)		2)	
1	1) Multiplicación: encontrar f(x)																						
f(1)	2) Tipo de división (partición) : encontrar f(1)																						
x	3) Tipo de división II (cuotitiva). Encontrar x																						
f(x)	4) Problema de regla de tres encontrar cualquiera de estos cuatro conociendo los otros tres.																						
X1																							
f(X)																							
1)																							
X2																							
f(X)																							
2)																							
<b>PRÁCTICAS NORMATIVAS (P.N)</b>	1) Libro I y V de Euclides acerca del equilibrio y el centro de gravedad de los planos; en cuanto a este se	1) Propiedades de la Proporcionalidad. "...si se supone A,B son magnitudes directamente proporcionales, y si $a \in A$ , $b \in B$ de	1) Propiedades de las proporciones: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>ad = bc</math></li> <li>• <math>a/b = c/d</math>, entonces</li> </ul>																				

	<p>plantean las siguientes proposiciones que posteriormente se tomaran como los conceptos y teoremas que utilizan los estudiantes cuando abordan las situaciones de tipo multiplicativo:</p> <p>1.1) <b>POSTULADO:</b> Pesos iguales a distancias iguales (del punto de apoyo de una balanza de brazos iguales) se equilibran, y a distancias desiguales se rompe el equilibrio y hay una inclinación hacia el lado del peso que está a mayor distancia.</p> <p>1.2) <b>PROPOSICIÓN 1:</b> Pesos balanceados a igual distancia son iguales.</p> <p>1.3) <b>PROPOSICIÓN 2:</b> Pesos desiguales a iguales distancias no estarán balanceados pero se inclinarán hacia el mayor peso.</p>	<p>tal manera que <math>a</math> y <math>b</math> son correspondientes, entonces para el número racional, sucede que: <math>axc</math> y <math>bxc</math> son cantidades correspondientes;</p> <p>es decir <math>axc \in A</math> y <math>bxc \in B</math>, y <math>\frac{axc}{bxc}</math> es la constante de proporcionalidad.</p>	<p><math>a+c/d+b = a/b</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• si <math>a/b = c/d</math>, se cumple <math>a+c/b = c+d/d</math></li> <li>• si <math>a/b = c/d</math>, entonces <math>a+b/a-b = c+d/c-d</math></li> <li>• si <math>a/b = c/d</math>, entonces <math>a+b/a = c+d/c</math></li> </ul> <p>2) Las propiedades de isomorfismo de la función lineal.</p> <p>- <math>f(n x) = n f(x)</math> para cualquier número real <math>n</math></p> <p>- <math>f(n1 x1 + n2x2) = n1 f(x1) + n2 f(x2)</math>.</p>
--	--	---	---

**Tabla 5. Red categorial parte 1**

### 2.3.2 Red categorial parte No 2 (Sistemas de Prácticas – Elementos del Significado)

Se evidencian las relaciones que se establecen entre los Significados Institucionales y personales, caracterizados desde los Elementos del Significado y a partir de los diferentes Sistemas de Prácticas.

P	I	SP	E	
PD	II	PI	E1	Se evidencian expresiones y términos propios de las matemáticas
PO			E2	Situación Problema 1 Situación problema 2
PN			E3	1) Dados A y B figuras siendo l y l' lados de A y B respectivamente, si $l = l'$ $A \sim B$ 2) $Kn=b$ y $Km=c/b$ y $c$ se relacionan. 3) P es primo si P/1 y P/P únicamente

**Tabla 6. Red categorial parte 2**

### 2.3.3 Red categorial-parte No 3 (Objetos primarios del significado)

Usando cada una de las redes previamente elaboradas se definen los siguientes niveles, mediante los cuales se busca realizar el correspondiente análisis de lo expresado por los estudiantes al resolver las correspondientes situaciones problema.

P	P					
	PD		PN		PO	E1 (SIT.)
	E2 (ARGUMENTOS)	E3 (LENGUAJE)	E5 (CONCEPTOS)	E6 (PROPIEDADES)	E4 (ACCIONES)	
P1	1. Tabulaciones, expresiones numéricas y expresiones algebraicas.  2. Hace uso de representaciones pictóricas que facilitan la coordinación de todas las cantidades involucradas.  3. Hace uso del material manipulativo para justificar sus respuestas	1. El esquema utilizado en las acciones realizadas por los estudiantes corresponde a determinar el valor de una determinada cantidad de unidades partiendo del valor de la correspondiente Unidad.  2. Justifica el valor de sus afirmaciones haciendo uso de modelos matemáticos.	1. Igualdad. 2. Rotación. 3. Magnitud (longitud). 4. Múltiplos. 5. Divisores 6. Razón. 7. Operador Escalar. 8. Proporción. 9. Isomorfismo de Medidas.	1. Reflexiva $a=a$ .  2. Dado $(a,d,c) \in M$ (magnitud). $a < b$ $a = b$ $a > b$  3. Divisibilidad: para cada $a$ en $m$ y $n \in N$ , existe $b \in M/ a=n.b$ donde $nb = b+b+...+b$ .  4. $a/b = c/d$ si $a.d = c.b$ donde $a,b,c,d \in Z^+$	1. Reparte un conjunto de rectángulos para establecer proporciones.  2. Empareja diversas cantidades para determinar cuáles son proporcionales  3. Establece relaciones entre igualdad de cantidades y formas  4. Reconoce objetos de la misma forma en escalas diferentes cualitativamente.  5. Ejecuta la comprobación de hipótesis mediante su propio trabajo.  6. Reconoce el cambio que se genera en los resultados de acuerdo a la temperatura del agua.	
P2 P3	4. Pesos iguales a distancias iguales se equilibran, y a distancias desiguales se rompe el equilibrio	3. El esquema utilizado en las acciones realizadas por los estudiantes corresponde a determinar el valor de una determinada cantidad de unidades partiendo del valor de la correspondiente Unidad.	10. Isomorfismo de medidas 11. Unidad 12. Operadores escalares. 13. Operadores funcionales. 14. Correlación Inversa. 15. Espacios de medida. 16. Igualdad 17. Magnitud 18. Equilibrio. 19. Peso. 20. Constante de proporcionalidad	5. Noción y propiedad de la Monotonía. Si $a < b$ , $f(a) < f(b)$  6. <i>Las propiedades de isomorfismo de la función lineal.</i>  $f(nx) = nf(x)$ para cualquier número real $n$  $f(n_1x_1 + n_2x_2) = n_1f(x_1) + n_2f(x_2)$ .  <i>Propiedades referidas al coeficiente constante entre dos variables linealmente ligadas.</i>  7. $Ar = b.h$ , donde $b$ es la base y $h$ es la altura.	7. Considera el valor unitario $F(1)$ que toma la relación formando una unidad compuesta "1 es $f(1)$ " para luego hacer de ella una unidad iterable cierto número de veces ( $x$ ) y después asignarle la cantidad de unidades correspondiente ( $f(x)$ ); en tal proceso hace uso de un esquema de doble conteo.  8. Hace uso de operadores escalares o funcionales  9. Utiliza operadores funcionales que le permiten pasar de un espacio de medida a otro.  10. Hace uso de la multiplicación para dar cuenta del peso de determinada cantidad de conejos.  11. Hace uso del concepto de equilibrio para establecer la correspondiente equivalencia entre la cantidad de conejos y el peso de los conejos.  12. Recubre superficies usando figuras con diferentes áreas.  13. Efectúa repartos proporcionales.	S.V Pb 5 Pb 6  S.I Pb 7 Pb 8

**Tabla 7. Red categorial parte 3**

#### **2.3.4 RED CATEGORIAL FINAL**

Con la construcción de los instrumentos de categorización se busca tener una base de análisis de las elaboraciones de los estudiantes durante el desarrollo de la secuencia de actividades en el aula.

Para ello se diseña una red categorial que nos permite guiar el proceso de organización y análisis de los datos recolectados, al igual que reflejar los sistemas de prácticas didácticas que exponen los sujetos de investigación al realizar una actividad matemática frente a los objetos trabajados en el aula de clase.

Con los instrumentos de recolección de las acciones de los estudiantes, se realiza una caracterización de los instrumentos, para generar así información coherente y pertinente con el proceso de estudio llevado a cabo.

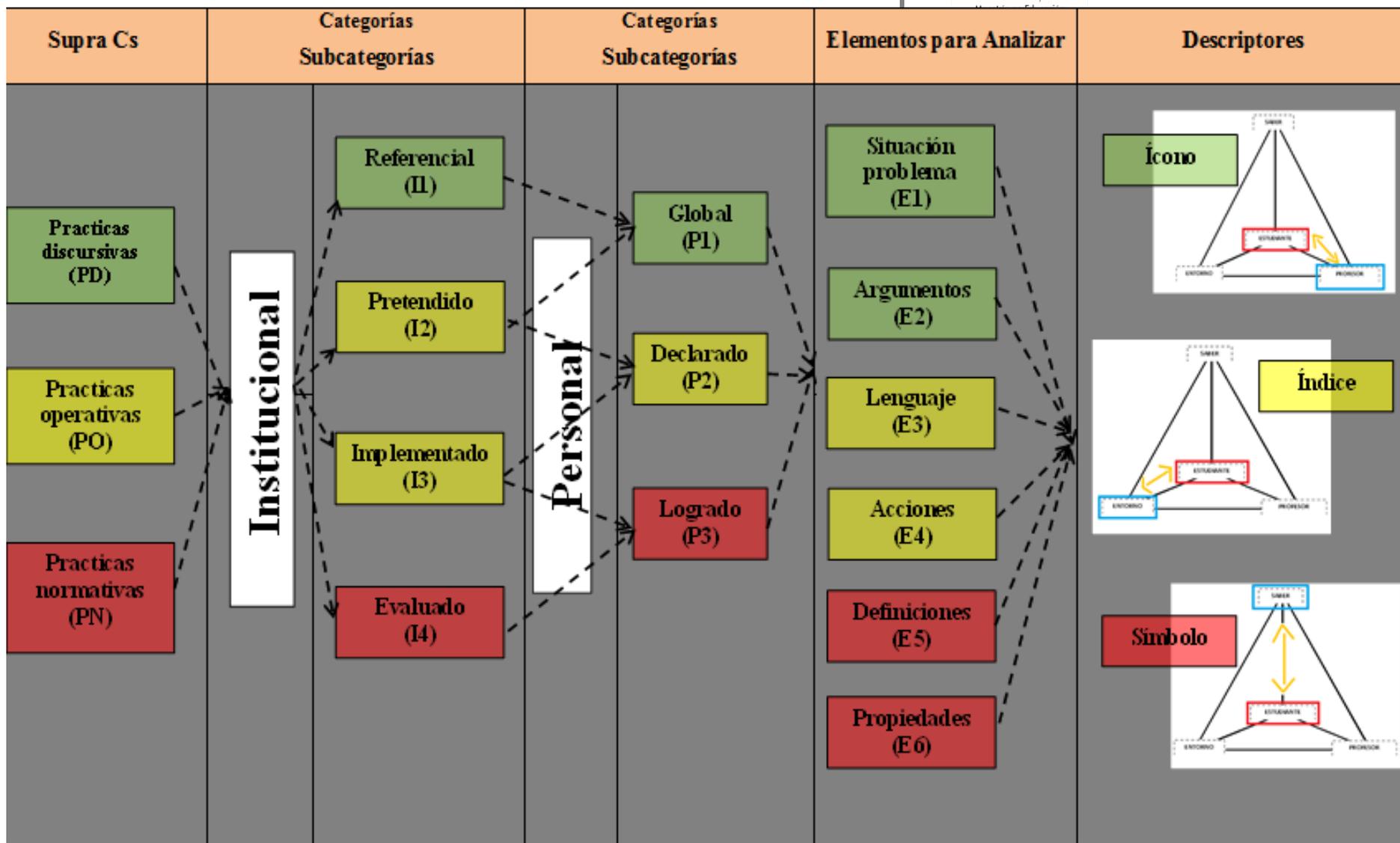


Diagrama 4. Red categorial final

## 2.4 DESARROLLO METODOLÓGICO

### 2.4.1 El modelo DECA-Brousseau

La propuesta implementada es producto de la indagación, pilotaje, validación e implementación de diversas perspectivas didácticas y su propuesta de implementación de secuencias de actividades, abordada desde los resultados obtenidos en las prácticas y trabajos de grado implementados desde el proyecto curricular LEBEM, como resultado de una propuesta que se nombró DECA-Brousseau (Guerrero, Sánchez y Lurduy, 2006), que articula a la perspectiva de la resolución de problemas didácticos del profesor, a la pragmática de la implementación y evaluación de actividades.

Dicha propuesta tiene sus bases en un modelo socioconstructivista del conocimiento, en el que las prácticas matemáticas de los estudiantes se conciben desde los modelos de matematización horizontal y vertical, desde donde emergen los significados matemáticos. La adaptación, la interpretación y la articulación del modelo DECA-Brousseau facilita la comprensión de los marcos conceptuales y modelos teóricos, que permitan comprender los procesos de formación y desarrollo profesional en la práctica docente.

Es así, que dicho modelo constituye el sustento teórico, para el diseño, gestión y evaluación de las prácticas didácticas, relacionando el análisis con la reflexión y la construcción de significado didáctico, permitiendo la descripción del conocimiento de contenido didáctico y pedagógico.

La tipología de las situaciones en que se fundamenta el modelo, se presenta a continuación según la interpretación que hace el grupo Crisálida de la teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y del grupo DECA (Guerrero, F., Sánchez, N., y Lurduy, O., 2006)

- ◆ **SITUACIONES DE ACCIÓN:** En las primeras sesiones se privilegia el trabajo desde lo concreto, para reconocer las nociones y dificultades que presentan los estudiantes cuando abordan problemas de proporcionalidad directa (con tiras de cartulina), de producto de medidas e isomorfismo de medidas. El profesor orientará la actividad a través de preguntas que promuevan el uso del material concreto, el trabajo con las representaciones gráficas y tabulares, que permita justificar las acciones realizadas por el estudiante. Interpretar las modelaciones de los estudiantes, para identificar avances y dificultades para abordar problemas de proporcionalidad simple y afrontarlas en las siguientes actividades.
- ◆ **SITUACIONES DE FORMULACIÓN:** En las siguientes sesiones los estudiantes abordan problemas de isomorfismo de medidas, para que reconozcan los operadores (escalar y funcional) y le den sentido a las operaciones realizadas, y de producto de medidas para que modelen este tipo de situaciones de producto cartesiano y área rectangular (recubrimiento) por medio de la multiplicación, abordando algunas dificultades detectadas en las situaciones de acción. Por su parte, el profesor gestionará la situación problema con preguntas que hagan al estudiante reflexionar sobre el ¿qué?, ¿para qué? y ¿cómo?, propiciando que el estudiante explique sus acciones por medio de las representaciones gráfica y tabular,
- ◆ **SITUACIONES DE VALIDACIÓN:** En las siguientes sesiones el estudiante aborda problemas de proporcionalidad inversa, partiendo de situaciones cualitativas, reconociendo algunas propiedades como: monotonía, correlación y a su vez identifique relaciones y diferencias entre las relaciones inversa y directa por

medio de la explicitación de sus respectivas características por medio de algunas representaciones las acciones; retomando lo realizado en las situaciones de acción y formulación y analizando su proceso para exponerlo a nivel grupal por medio de varias representaciones de la situación. El profesor incentiva a los estudiantes para que retomen las construcciones sobre el campo multiplicativo para utilizarlo en la modelación de estas las situaciones. En la socialización el profesor promoverá la explicitación de sus acciones, para llegar acuerdos por medio de discusiones en torno a los diferentes tipos de estrategias.

- ◆ **SITUACIONES DE INSTITUCIONALIZACIÓN:** En las últimas sesiones los estudiantes realizan una actividad en la que se requiere la resolución de problemas de tipo multiplicativo correspondiente a la proporcionalidad, recopilando las representaciones, procesos y nociones utilizadas en las anteriores actividades. El profesor contribuye para que los estudiantes utilicen todos los elementos (vistos en las anteriores actividades) necesarios para resolver el problema. Conjuntamente con los estudiantes llega a acuerdos sobre lo trabajado anteriormente, donde se exige a los estudiantes una actitud flexible de análisis frente a otras soluciones y la reestructuración de los procesos realizados que permiten consolidar una solución satisfactoria a la solución.

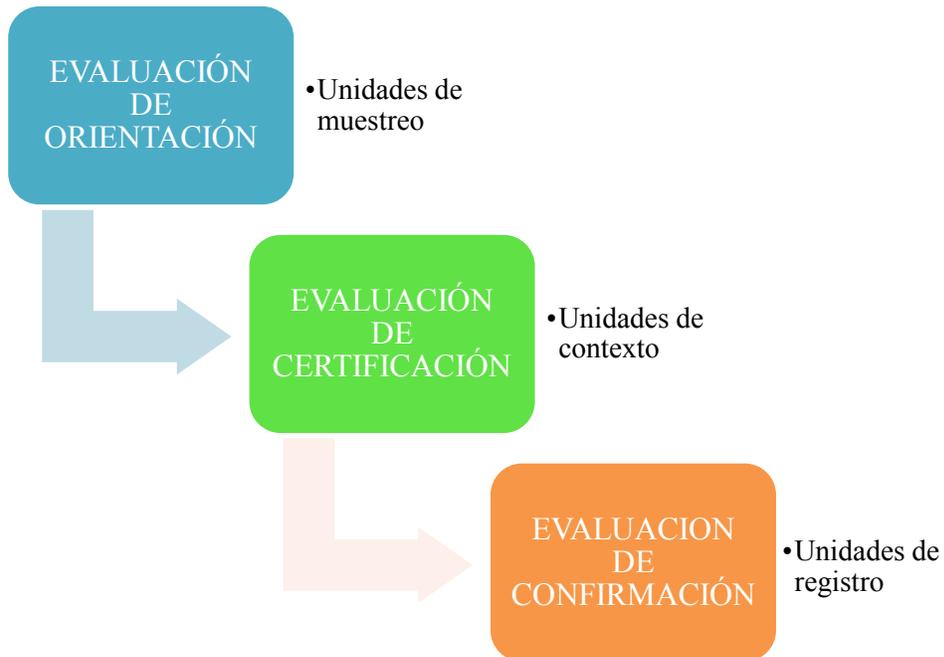
### 2.4.2 Evaluación como metodología

Los procesos evaluativos que se llevan a cabo en la investigación están enunciados por Lurduy (2013), con el fin de tener una interpretación cualitativa, el cual al ser ejecutada posibilita a la investigación un análisis e interpretación de tipo inferencial de datos y textos, las cuales ayudan a reducir la información en diferentes focos que contribuyen a construir criterios de evaluación de los tipos de significado personal de los estudiantes. Lurduy (2013) en relación al concepto de evaluación, menciona:

“Se designa con el término evaluación al estudio del proceso sistemático y riguroso de indagación que posibilita disponer de información continua y significativa, para conocer y caracterizar una situación problemática, así como para formar y construir juicios con respecto a ella y finalmente, potenciar la toma decisiones adecuadas para mejorar progresivamente la actividad formativa” (p. 88).

Y es a partir de tal concepción de la evaluación, que se busca el desarrollo de un procedimiento riguroso y sistémico mediante el cual sea posible el organizar, sistematizar y analizar la información con el fin de caracterizar los significados personales de los estudiantes al abordar situaciones o problemas relacionados con la proporcionalidad inversa.

En tal sentido, la evaluación que se plantea ha de ser de tres tipos: Orientativa (EVO), Certificativa (EVC), y Regulativa (EVR). Con relación a la Evaluación de tipo Orientativa, está permite identificar los significados personales de los estudiantes, reconociendo características generales en sus sistemas de prácticas; mediante la evaluación certificativa, es posible describir dichos significados a partir de las relaciones que se establecen entre los sistemas de prácticas y los elementos de significado; y respecto a la evaluación regulativa, vemos que esta corresponde a la última caracterización que se realiza y que corresponde a los elementos más particulares como lo son los niveles de expresión semiótica.



*Diagrama 5. Evaluación como metodología (Fuente Lurduy, 2013)*

### CAPITULO 3 – RECOLECCIÓN, SISTEMATIZACIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

#### 3.1 RECOLECCION DE INFORMACIÓN

En el proceso de caracterizar los significados personales de los estudiantes al abordar situaciones trabajadas en torno a la proporcionalidad inversa, se tiene como referencia una secuencia didáctica utilizando la propuesta de diseño, gestión y evaluación de actividades de clase ( DECA-Brousseau) propuesta por Guerrero, Sánchez y Lurduy (2006).

En el desarrollo de la secuencia se contemplan cada uno de las situaciones propias de tal diseño, como lo son acción, formulación, validación e institucionalización. No obstante, es en la actividad de validación, que se centra el análisis, pues es en esta que los estudiantes plantean y validan hipótesis propias de situaciones relacionadas con el tema de estudio, proporcionalidad inversa.

En lo que refiere a las actividades planteadas para tales situaciones, se expone a continuación una breve contextualización y seguidamente un cuadro que busca ampliar las mismas en lo que refiere a cada uno de los momentos en que estas se desarrollan (*ver anexo 1*)

En la primera actividad de validación (SP. 5) los estudiantes mediante trabajo grupal construyeron las balanzas que usaron para pesar diferentes objetos y hallar el peso de 1 o más conejos. En lo que concierne a la segunda actividad (SP. 6) se reconoció la dependencia entre dos variables, dado que los estudiantes debían encontrar diferentes dimensiones en un rectángulo para cubrir una región determinada. En la tercera actividad (SP. 7), la proporcionalidad inversa permitió observar las variaciones en el tiempo de disolución de un *alka setzer* en diferentes temperaturas de agua. Finalmente, en lo que concierne a la actividad de institucionalización (SP. 8), se planteó la repartición de un premio usando repartos proporcionales.

Ahora bien, el desarrollo metodológico de cada una de tales actividades, está mediado por diferentes momentos que contemplaron formas de trabajo tanto grupal como individual y en las que se busca promover la comunicación como eje articulador del aprendizaje.

<i><b>MOMENTOS</b></i>	<i><b>SITUACIONES</b></i>
<b>Momento de Acción (M1)</b>	En un primer momento, los estudiantes abordan cada una de las situaciones de forma individual y plantean hipótesis para posteriormente validarlas. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Primeros planteamientos</li> <li>• Hipótesis escritas (sin material manipulativo)</li> </ul>
<b>Momento de Formulación (M2)</b>	Elaboración de hipótesis a partir del uso de material manipulativo para ponerlas en conjunto con el grupo de trabajo. <ul style="list-style-type: none"> <li>• Conformación de grupos de trabajo.</li> <li>• Experimentación con material manipulativo.</li> <li>• Formulación de nuevas hipótesis producto de la experimentación.</li> </ul>

<b>Momento de Validación (M3)</b>	<p>Una vez se ha dado un espacio para plantear hipótesis de manera individual y grupal, se plantea el buscar su validación producto de la puesta en común y el uso del material manipulativo.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Validación de hipótesis</li> <li>• Contrastación de hipótesis generadas mediante trabajo practico con las balanzas y trabajo meramente teórico.</li> <li>• Presentación grupal de avances generados mediante el trabajo practico.</li> </ul>
<b>Momento de Institucionalización (M4)</b>	<p>Una vez se da el espacio para la socialización de avances, se presentan ante el curso los logros y dificultades grupales y se consolidan los conceptos matemáticos que se plantearon para el desarrollo de cada una de las actividades.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Validación de hipótesis.</li> <li>• Presentación y validación de procesos grupales</li> <li>• Institucionalización.</li> </ul>

*Tabla 8. Momentos Actividades*

### 3.1.1 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Teniendo en cuenta que en esta investigación se realiza un análisis de la construcción de significados personales de los estudiantes, en torno a la noción de proporcionalidad inversa, se indagan los siguientes textos que buscan dar cuenta de las acciones de los estudiantes en el aula en cada uno de los momentos del proceso propios de las situaciones de validación.

	Momento	Acciones de los participantes	Textos a indagar
<b>Situación de validación</b>	<b>Acción</b> (Trabajo individual)	Primera aproximación al problema. Enunciación de conjeturas e hipótesis	Portafolios
	<b>Formulación</b> (Trabajo grupal)	Comunicar y validar hipótesis y estrategias	Video
	<b>Validación</b> (Exposición de desarrollos)	Justificar, probar y validar estrategias	

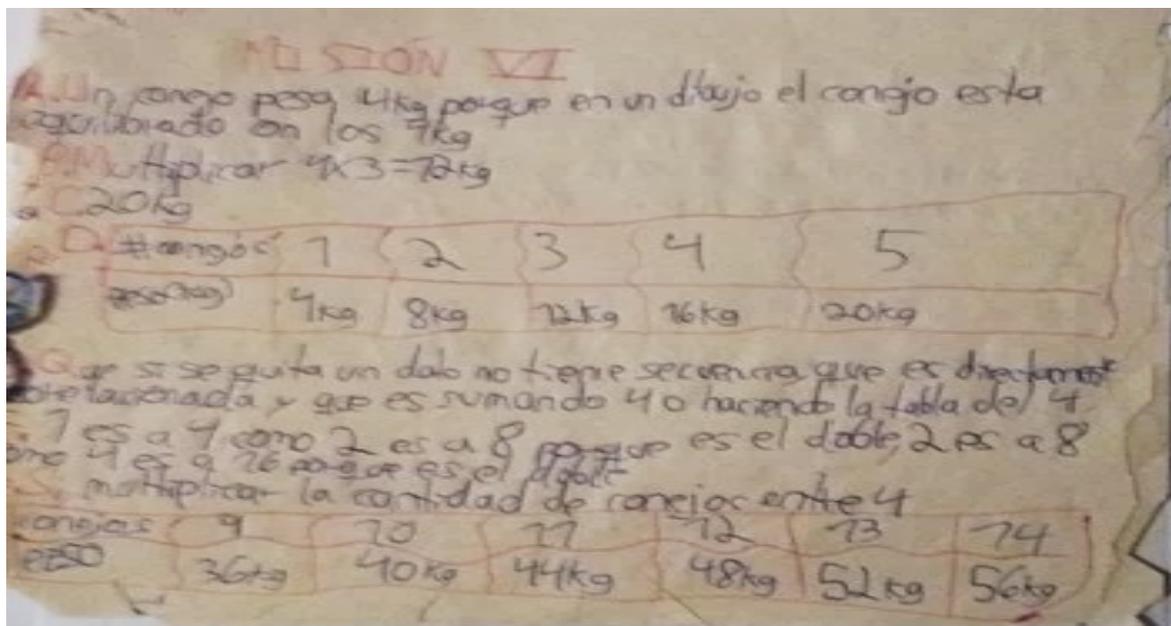
*Tabla 9. Instrumentos de recolección de información*

### 3.1.1.1 Portafolios

Construcción de portafolios tanto individuales como grupales, en los que los estudiantes dan muestras del proceso llevado a cabo (todos los pasos seguidos) para llegar a la solución de la actividad. Para la realización de este instrumento es importante tener en cuenta que todos los estudiantes deben mostrar cuáles son sus procesos a realizar para dar solución a cada situación. En tal sentido, este instrumento resulta pertinente para dar algunos elementos propios de la relación Saber-Estudiante.

A partir de lo anterior los procesos de evaluación de los significados personales de los estudiantes están dirigidos hacia los registros que se realizan por diferentes textos en la solución de las situaciones propuestas, como resultado de la consignación de los avances logrados en torno a las actividades de acción, de formulación, de validación y de institucionalización, que buscan dar evidencia de los Significados Personales de los estudiantes.

Es importante determinar que todos los registros (*ver anexo 2*) permiten reconocer tipos de prácticas, tipos de significados y los elementos de los mismos, lo cual se presenta en los posteriores análisis realizados a portafolios que evidencian algunos procesos de los estudiantes como lo son:



**Imagen 5. Ejemplo portafolio estudiante**

En el portafolio se consignan la solución a las Actividades de Acción, de Formulación, de Validación y de Institucionalización, lo cual permite determinar *Significados Personales Globales* del trabajo realizado por los estudiantes. En las Actividades de Acción y de Formulación se reconocen niveles a partir de las Categorías propuestas previamente por

los estudiantes. En los textos de los estudiantes se reconocen tipos de prácticas, elementos del significado y descriptores de Niveles de expresión semiótica.

### 3.1.1.2 Grabaciones de video

Se realiza un registro audio visual como segundo método de contraste para el análisis del accionar de los estudiantes ante la actividad, dando así un punto neutral de comparación con sus acciones registradas en el portafolio.

Para el análisis, se toma a profundidad la actividad de validación, ya que es en este momento que es posible evidenciar las justificaciones y/o argumentos de los estudiantes en relación con sus acciones frente a la actividad. En tal sentido, se evidencia a continuación la transcripción de un video.

**VIDEO DE ACTIVIDAD DEL 30 de septiembre**  
**Disolución del alka seltzer**

Profe: Como  
Niño 1. Mientras más caliente más rápido se disuelve  
Profe: Mas rápido oo...  
Niño. Más... a no menos tiempo  
Profe:Cuál de las dos...  
Niño 1 a no si menos tiempo  
Niño 2 AAAA si menos tiempo  
Profe. Entonces como se llama eso  
Niña 3 A es verdad es directamente correlacionada  
Profe. Contesta  
Niña 3 Aaaa ya entendí..... Pero si hay relación  
Niño 1 Nooo.  
Niño 2 Siii  
Profe ¿Por qué no hay relación?  
Niña 3 Porque entre más aumenta los grados más rápido se disuelve  
Niño 2 Si hay relación  
Profe Si hay o no hay  
Niña 2 Si hay  
Niña 3 Si hay  
Profe Aaaa. Ok.....  
.....Niña 3 Si lo que yo decía, mientras más calor hay menos rápido se disuelve  
Niño 2 Quee.. hay me perdi  
Niña 3 Mira esto es lo que yo copieee, si es más... si es inversamente, bueno a .....  
Niño 2 si es eso lo que yo dije muuuu,  
Niña 3 No también lo que yo dije  
Niña 2 tu dijiste que no era  
Niño 3 Yo coloque que si vea veaaa un siii  
Niño 2 Listo el punto

**Tabla 10. Ejemplo transcripción video**

### 3.1.1.3 Protocolos de clase

El protocolo (*ver anexo 3*) se caracteriza por suministrar información precisa y detallada sobre las acciones que se presentan en la practicas educativas, él nos ayudará a tener evidencia de la pertinencia de cada una de los elementos empelados para el desarrollo de la clase y los avances obtenidos con la utilización de los mismos, todo ello con el fin de obtener información más detallada que posibilite determinar los diferentes roles implementados por el profesor como estudiantes en torno a determinado proceso de enseñanza-aprendizaje.

PROTOCOLO CUANTITATIVO  
SESIÓN DE CLASE No. 1

Fecha: \_\_\_\_\_  
Actividad: \_\_\_\_\_

CATEGORÍA 1 → RELACIONES DIDÁCTICAS					
DOMINIO 1 ESTUDIANTE - SABER					
CRITERIOS					
	1	2	3	4	5
1		X			
2			X	X	
3				X	
4			X		
5	X				
DOMINIO 2 ESTUDIANTE - PROFESOR					
CRITERIOS					
	1	2	3	4	5
1	X				
2					X
3				X	
4			X		
5			X		
DOMINIO 3 ESTUDIANTE - ENTORNO					
CRITERIOS					
	1	2	3	4	5
1					X
2					X
3					X
4					X
5					X

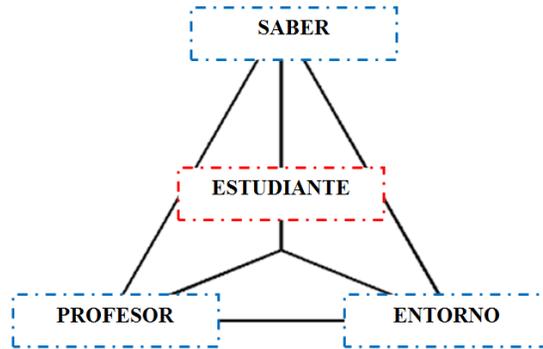
*Imagen 6. Ejemplo protocolo profesor*

## 3.2 ORGANIZACIÓN DE LOS DATOS

Para la organización de los datos se hace uso de los elementos propios de Tetraedro Didáctico y los Tipos de Significado Institucional y Personal.

### 3.2.1 Tetraedro didáctico

Haciendo uso de la red categorial que se construyó previamente (*ver Cap. 2*), se organizan los datos y es mediante el tetraedro que se busca configurar los Sistemas de Prácticas (*Pi*) y los Elementos del Significado (*Ei*), asociados a las relaciones duales y tríadicas como lo plantea Lurdúy (2012).



*Imagen 7. Tetraedro didáctico (Fuente Lurduy, 2014)*

Partiendo del hecho que nuestro centro es el estudiante, pues es este quien construye su conocimiento mediante el trabajo desarrollado en cada una de las actividades, es posible establecer las siguientes relaciones.

El profesor planea una secuencia de actividades referente a la proporcionalidad inversa sobre la cual trabaja un grupo de estudiantes.

Estudiante	Profesor
------------	----------



Los estudiantes trabajan en torno a la secuencia de actividades y exponen sus resultados mediante portafolios en los cuales es posible evaluar los significados personales.

Estudiante	Entorno
------------	---------



Los estudiantes trabajan en torno a la proporcionalidad inversa, realizan construcciones y producen textos mediante los cuales declara sus significados personales.

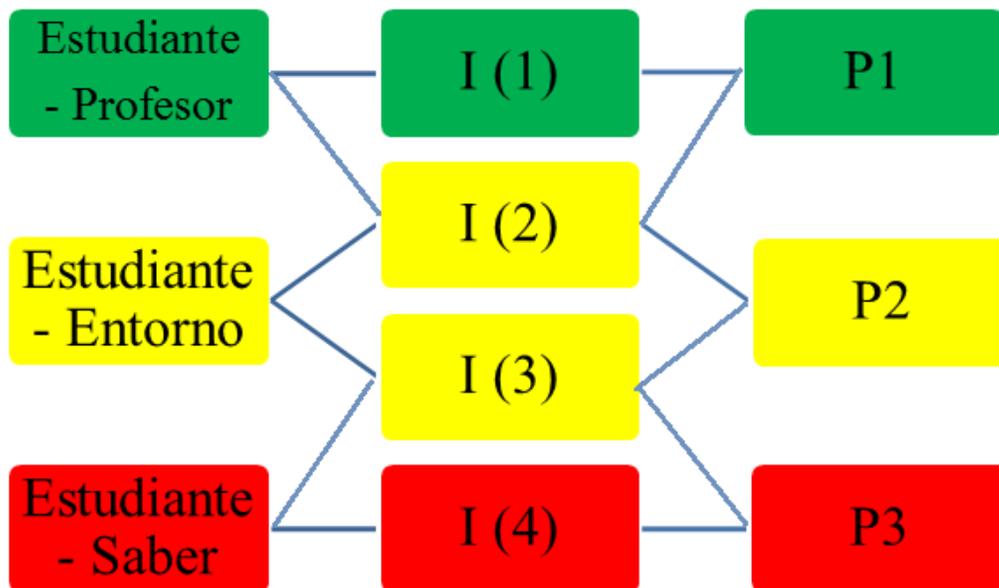
Estudiante

Saber

*Diagrama 6. Ampliación relaciones tetraedro didáctico*

### 3.2.2 Tipos de significado

Los tipos de significado se asocian en el proceso de organización de los datos a las relaciones previamente expuestas en el tetraedro didáctico y se consideran en estos una serie de características.



*Diagrama 7. Características de relaciones tetraedro didáctico*



El profesor parte de unos significados de referencia y pretendidos que le son útiles para *identificar* significados globales de los estudiantes al resolver situaciones o relacionadas con la proporcionalidad inversa.



Se implementa una secuencia de actividades mediante la cual es posible *describir* los significados personales declarados por los estudiantes.



La implementación de la secuencia de actividades en los momentos propios de las actividades de validación, permite *evaluar* los significados personales logrados por los estudiantes.

### 3.2.3 Codificación

Teniendo en cuenta los anteriores Planos y Niveles, se realizan las diferentes partes de la Red Categorial en los cuales fueron definidos, descritos, caracterizados y codificados los *Elementos del Significado* y los *Sistemas de Prácticas Discursivas (PD)*, *Operativas (PO)* y *Normativas (PN)* expresadas por los estudiantes en el proceso de solución de la Secuencia de Actividades. De igual manera, se exponen los criterios que se asocian a cada sistema de práctica, a fin de validarlo (*ver anexo 4*)



P	P					
	PD		PN		PO	E1 (SIT.)
E2 (ARGUMENTOS)	E3 (LENGUAJE)	E5 (CONCEPTOS)	E6 (PROPIEDADES)	E4 (ACCIONES)		

Imagen 8. Relación prácticas – elementos de significado

Ahora bien, los elementos de significado deben dotar de significancia cada una de las prácticas desarrolladas, en tal sentido, se exponen a continuación una serie de criterios previamente expuestos en el apartado correspondiente a redes categoriales.

P	P					
	PD		PN		PO	E1 (SIT.)
E2 (ARGUMENTOS)	E3 (LENGUAJE)	E5 (CONCEPTOS)	E6 (PROPIEDADES)	E4 (ACCIONES)		
P1	1. Tabulaciones, expresiones numéricas y expresiones algebraicas. 2. Hace uso de representaciones pictóricas que facilitan la coordinación de todas las cantidades involucradas.	1. Dados A y B figuras siendo l y l' lados de A y B respectivamente, si $l = l'$ A R B. Se puede establecer un isomorfismo entre sus cantidades, f de M en N tal que: Si a es menor que b implica que F(a) sea menor que F(b) y si $F(a+b) = F(a)+F(b)$ .	1. Igualdad. 2. Rotación. 3. Magnitud (longitud). 4. Múltiplos. 5. Divisores. 6. Razón.	1. Reflexiva $a=a$ . 2. Dado (a,d,c) E M (magnitud). $a < b$ $a=b$ $a > b$ 3. Divisibilidad: para cada a en m y n E N, existe b E M/ $a=n.b$ donde $nb = b+b+...+b$ .	1. Reparte un conjunto de rectángulos para establecer proporciones. 2. Empareja diversas cantidades para determinar cuales son magnitudes proporcionales 3. Establece relaciones entre diversas cantidades para determinar cuales son semejantes o diferentes.	S.A Pb1 Pb2 S.F Pb3 Pb4

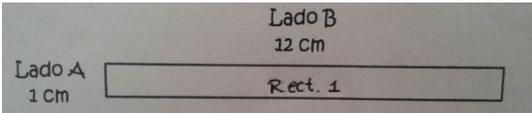
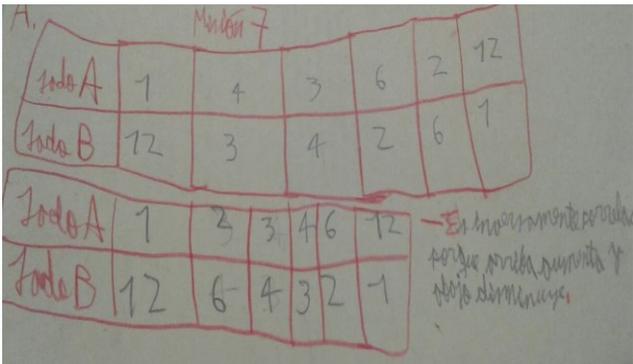
Imagen 9. Criterios asociados a Elementos de Significado y Sistemas de prácticas

Un ejemplo de cómo se organizaron los textos (*ver anexo 4*) de los estudiantes teniendo en cuenta cada uno de los Criterios descritos anteriormente es el siguiente:

Situación de Validación. <b>5V. 2 ¿Qué procedimiento llevaste a cabo para obtener el peso de 3 conejos?</b>	<b>Tipo de Problema: Isomorfismo de medidas - Multiplicación</b>
<p style="text-align: right;"><i>Ur.1:</i></p> <p>3 conejos pesan 12 kg, yo sume 3 veces 4</p> <p style="text-align: right;"><i>Ur.5:</i></p> <p>3 conejos pesan 12 kg, yo sume <math>4+4+4=12</math> o multiplicando <math>4*3=12</math></p> <p style="text-align: right;"><i>Ur.7:</i></p> <p>Tuve que multiplicar 3 por 4 porque cada conejo pesa 4kg y hay 3 conejos. Da 12 kg</p>	<p><i>Ur.1:</i> Considera que los tres conejos pesan cierta cantidad, para hallarla reitera el valor de la unidad.</p> <p style="text-align: center;"><i>Codificación: P3.PO.E4.6</i></p> <p>P3. Significado logrado  PO. Práctica operativa  E4.6. Acciones (Considera el valor unitario para luego hacer de este una unidad reiterable)</p>

***Tabla 11. Ejemplo de Codificación y aplicación de la Red Categorical No 4***

Ahora bien, en lo concerniente al análisis propio de los niveles de expresión semiótica se sigue la propuesta de Lurduy (2012) y como se mencionó en el apartado correspondiente a marco teórico, se hace uso de colores verde, amarillo y rojo, los cuales representan correspondientemente Icono, Índice y Símbolo. A continuación podemos ver el análisis generado en torno a los desarrollos de un estudiante.

<i>Texto de un Estudiante</i>	<i>Codificación- Niveles de Expresión Semiótica</i>
<p><b>Situación de validación.</b>  <b>6V. 1</b></p>  <p>Completa la tabla:</p> 	<p>P1.PD.E2.2: reconocimiento de la multiplicación, el estudiante afirma que debe multiplicar números de tal manera que su resultado sea 12.</p> <p>P2.PO.E4.2: respecto a las acciones realizadas, el estudiante establece relaciones de tipo multiplicativo entre las longitudes consideradas y las representa gráficamente señalando la medida de cada uno de los lados.</p> <p>P3.PN.E6.3: respecto a la propiedad evidenciada en este nivel es posible evidenciar la aplicación de divisores, pues el estudiante determina la medida de cada uno de los lados A y B hallando los divisores del número 12.</p>

**Tabla 12. Ejemplo Codificación Niveles de Expresión Semiótica**

### 3.3 SISTEMATIZACIÓN DE LOS DATOS

A partir de la correspondiente Codificación y de los textos expresados por los estudiantes en la solución de las actividades se realiza la siguiente sistematización mediante la cual se caracterizaron los significados de los estudiantes.

	<i>P</i>					
	<i>PD</i>		<i>PO</i>		<i>PN</i>	
	<i>E. 21</i>	<i>E. 22</i>	<i>3. 41</i>	<i>E. 42</i>	<i>E. 53</i>	<i>E. 56</i>
<i>C1</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>
<i>C6</i>	<i>X</i>		<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>
<i>C10</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>		<i>X</i>	<i>X</i>

**Tabla 13. Ejemplo de Sistematización de los datos**

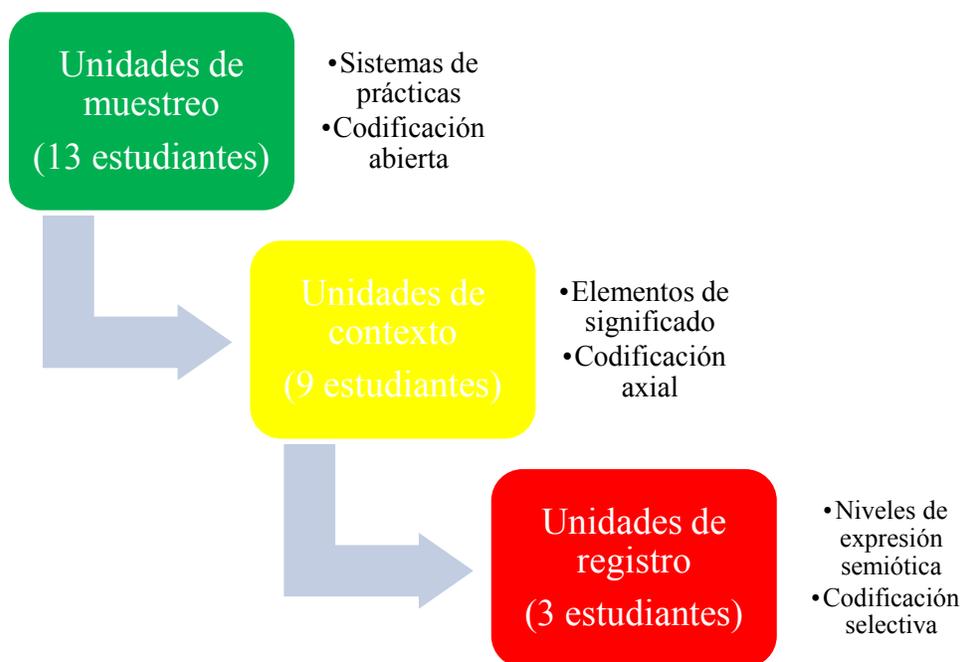
En tal sistematización, los textos de cada uno del estudiante se denotan de acuerdo a los siguientes criterios:

- Ci* → textos de los estudiantes
- Pi* → *Sistemas de Prácticas*
- Ei* → *Elementos del Significado*

De acuerdo a cada una de las unidades de análisis (muestreo, contexto y registro) la aparición de una práctica, elemento o nivel de expresión, se denotara en las tablas como M, C o R correspondientemente.

### 3.4 REDUCCIÓN DE LA INFORMACIÓN

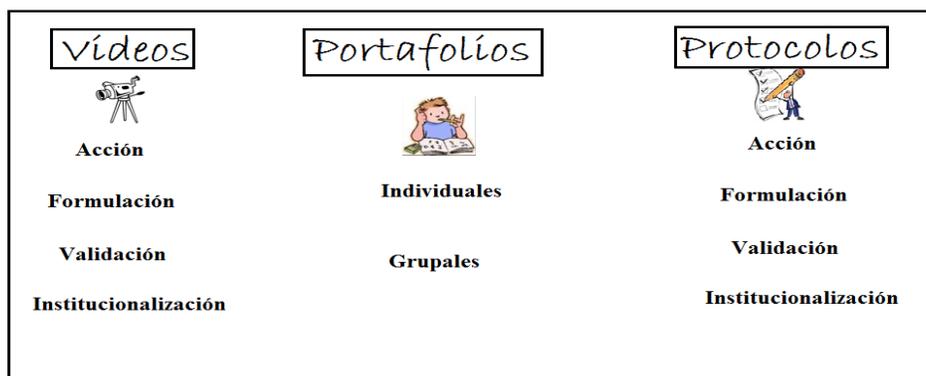
En lo que refiere al proceso de reducción de la información, este se da mediante el uso de unidades de análisis y las diferentes técnicas de codificación, como se representa en el siguiente diagrama:



*Diagrama 8. Reducción de la Información*

### 3.5 UNIDADES DE ANÁLISIS

Se toman como unidades de análisis cada uno de los textos elaborados por los estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica. Con estos textos y usando las técnicas ya expuestas previamente (AST- TFD- ACC) se delimitan y reducen los datos para su posterior análisis.

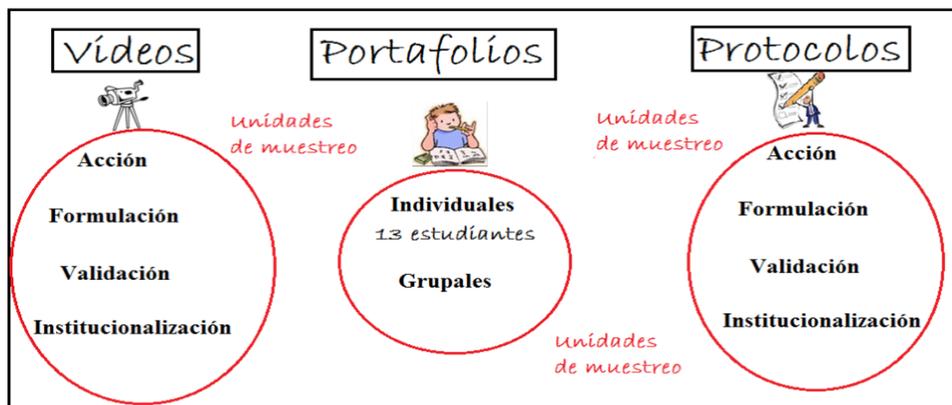


*Imagen 10. Unidades de análisis*

#### 3.5.1 Unidades de muestreo

Es indispensable para establecer *unidades de muestreo* tener claro que estas hacen referencia a un proceso de identificación, recolección y reducción de los textos, Por lo anterior, se nombra *unidades de muestreo* a aquel conjunto total de textos, que permiten una lectura general sobre lo desarrollado por los estudiantes en torno a la secuencia de actividades.

Al respecto, se toman como unidades la totalidad de textos de los estudiantes de grado quinto, es decir se tienen 13 unidades de muestreo para ser analizadas e identificar en estas los correspondientes tipos de prácticas (*ver anexo 5*)



*Imagen 11. Unidades de muestreo*

El análisis sobre las unidades de muestreo se realiza centrando la atención en las actividades de acción y formulación, en las cuales se analiza el tipo de prácticas presentadas, a entender discursivas, operativas y normativas. En las siguientes tablas se puede apreciar la reiteración de las mismas en los desarrollos de los estudiantes.

<b>PRÁCTICAS</b>												
<b>SITUACIONES DE ACCION</b>												
<b>1A – 2ª</b>												
	PRÁCTICAS DISCURSIVAS			PRÁCTICAS OPERATIVAS				PRÁCTICAS NORMATIVAS				TOTAL
	E2.1	E2.2	E3.1	E4.1	E4.2	E4.3	E4.5	E5.1	E5.3	E5.6	E5.7	
<b>C1</b>	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	<b>11</b>
<b>C2</b>	M		M		M	M		M		M		<b>6</b>
<b>C3</b>				M	M	M	M	M	M	M	M	<b>8</b>
<b>C4</b>			M				M					<b>2</b>
<b>C5</b>			M			M	M			M	M	<b>5</b>
<b>C6</b>	M	M	M	M	M		M	M	M	M	M	<b>10</b>
<b>C7</b>		M			M			M		M		<b>4</b>
<b>C8</b>		M			M			M		M		<b>4</b>
<b>C9</b>			M		M	M		M	M		M	<b>6</b>
<b>C10</b>	M	M	M	M		M	M	M	M	M	M	<b>10</b>
<b>C11</b>				M				M		M		<b>3</b>
<b>C12</b>	M	M	M		M	M				M	M	<b>7</b>
<b>C13</b>	M		M		M		M	M		M		<b>6</b>
<b>TOTAL</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>5</b>	<b>9</b>	<b>7</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>5</b>	<b>11</b>	<b>7</b>	

*Tabla 14. Unidades de muestreo – Situaciones de acción*

PRÁCTICAS											
SITUACIONES DE FORMULACIÓN											
3F – 4F											
	PRÁCTICAS DISCURSIVAS			PRÁCTICAS OPERATIVAS			PRÁCTICAS NORMATIVAS				
	E2.1	E2.2	E3.2	E4.2	E4.3	E4.5	E5.3	E5.6	E5.8	E5.9	TOTAL
<b>C1</b>	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	<b>10</b>
<b>C2</b>	M	M	M	M	M			M		M	<b>7</b>
<b>C3</b>	M	M	M	M		M	M		M	M	<b>8</b>
<b>C4</b>			M	M	M	M	M				<b>5</b>
<b>C5</b>	M	M					M				<b>3</b>
<b>C6</b>	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	<b>10</b>
<b>C7</b>	M			M	M			M			<b>4</b>
<b>C8</b>	M	M		M			M	M			<b>5</b>
<b>C9</b>		M			M	M	M	M	M		<b>6</b>
<b>C10</b>	M	M	M	M		M	M	M	M	M	<b>9</b>
<b>C11</b>		M			M		M	M	M		<b>5</b>
<b>C12</b>		M	M	M				M			<b>4</b>
<b>C13</b>	M				M	M	M	M		M	<b>6</b>
<b>TOTAL</b>	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	

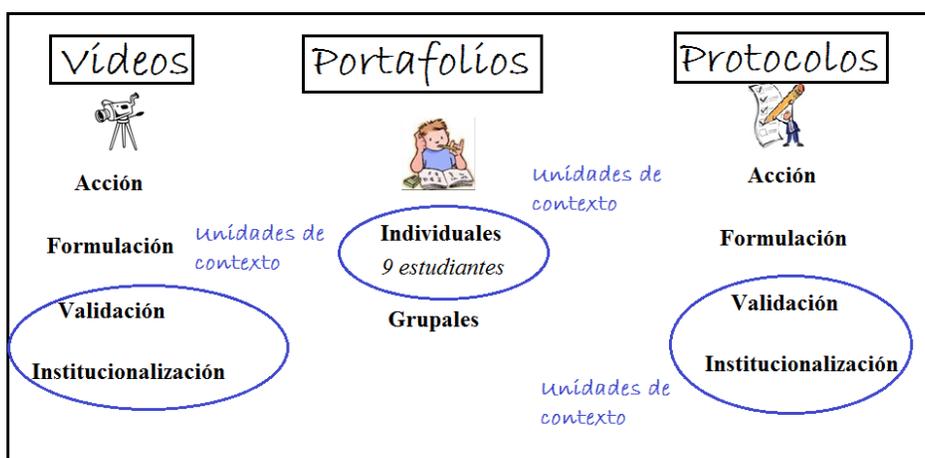
*Tabla 15. Unidades de muestreo – Situaciones de formulación*

En tal caso, se determinan como unidades de contexto *C1, C2, C3, C6, C7, C9, C10, C12 y C13* pues se consideran representativas del conjunto de datos al ser reiterativas en los avances generados en torno a las actividades de acción y formulación, como se expone en el siguiente apartado.

### 3.5.2 Unidades de contexto

Al referirnos a las *unidades de contexto*, estas son identificadas como el subconjunto de unidades de análisis resultantes de la primera reducción de la información. Es aquí, donde tenemos texto reducido y segmentado para ser tratado con codificación axial.

De las 13 Unidades de Muestreo se identifican 9 Unidades Contexto a partir de los Sistemas de Prácticas-Elementos del Significado y de lo evidenciado en cada uno de los portafolios de los diferentes momentos de la secuencia y lo correspondiente a las actividades de validación (*ver anexo 6*)



**Imagen 12. Unidades de contexto**

Se observa a continuación la determinación de los elementos presentados en el desarrollo de las actividad de acción – formulación y los correspondientes avances de los estudiantes. Se identifican con **negrilla (C)** aquellos que se evidencian en los dos tipos de actividades (acción-formulación). Del mismo modo, aquellos que no la tienen indican que se dieron únicamente en alguna de las actividades.

<b>ELEMENTOS DE SIGNIFICADO</b>												
<b>SITUACIONES DE ACCIÓN – FORMULACIÓN</b>												
	E2.1	E2.2	E3.2	E4.2	E4.3	E4.5	E5.3	E5.6	E5.8	E5.9	TOTAL	
<b>C1</b>	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	<b>10</b>
<b>C2</b>	C	C	C	C	C			C		C		7
<b>C3</b>	C	C	C	C		C	C		C	C		8
<b>C6</b>	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C		10
<b>C7</b>	C			C	C			C				4
<b>C9</b>		C			C	C	C	C	C			6
<b>C10</b>	C	C	C	C		C	C	C	C	C		9
<b>C12</b>		C	C	C				C				3
<b>C13</b>	C				C	C	C	C		C		6
<b>TOTAL</b>	7	7	6	7	6	6	6	8	5	6		

*Tabla 16. Unidades de contexto - Actividades de Acción-Formulación*

Del mismo modo, se configuran los elementos de significado propios de las actividades de validación.

<b>ELEMENTOS DE SIGNIFICADO</b>														
<b>SITUACIONES DE VALIDACIÓN</b>														
	E.21	E.24	E.33	E.47	E.48	E.4.12	E.4.13	E.5.10	E.5.11	E.5.14	E.5.17	E.5.20	TOTAL	
<b>C1</b>	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
<b>C2</b>	C	C	C	C	C			C	C	C	C	C	C	7
<b>C3</b>	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	6
<b>C6</b>	C		C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	11
<b>C7</b>	C	C	C		C	C	C	C	C	C	C	C	C	9
<b>C9</b>	C		C		C		C	C	C	C	C	C	C	6
<b>C10</b>	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	12
<b>C12</b>	C	C		C		C		C			C	C	C	6
<b>C13</b>	C	C			C		C	C	C		C	C	C	6
<b>TOTAL</b>	9	7	6	6	8	6	7	4	7	4	8	4		

*Tabla 17. Unidades de contexto -Actividades de Validación*

Una vez realizada tal reducción, resulta clave el sintetizar la reiteración de elementos de significado en cada uno de los portafolios. En tal sentido, a continuación se muestra el conteo como medio para definir las 3 unidades de registro, en tal conteo se tuvieron en cuenta aquellos los elementos de significado evidenciados en la totalidad de las situaciones de la secuencia correspondientes a las actividades propias de acción - formulación y validación...

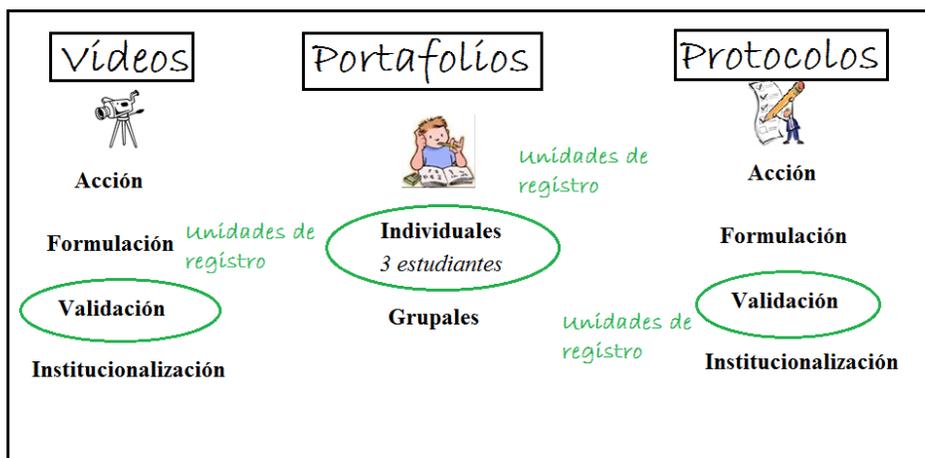
ELEMENTOS DE SIGNIFICADO																						
	E. 21	E. 22	E. 24	E.32	E.33	E. 42	E.43	E.45	E.47	E. 48	E4.12	E.4.13	E.53	E.56	E.58	E.59	E5.10	E.5.11	E5.14	3.5.17	E5.20	TOTAL
C. 1	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10
C. 2	C	C	C	C		C	C		C	C				C		C		C	C	C		8
C. 3	C	C	C	C	C	C		C	C	C	C	C	C		C	C						7
C. 6	C	C		C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	9
C. 7	C		C		C	C	C			C	C	C		C				C		C	C	8
C. 9	C	C			C		C	C		C		C	C	C	C			C		C		7
C. 10	C	C	C	C	C	C		C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10
C. 12		C	C	C		C			C		C			C			C			C		5
C. 13	C		C				C	C		C		C	C	C		C		C		C		8
TOTAL	8	7	7	6	5	7	6	6	6	8	6	7	6	8	5	6	4	7	4	8	4	

Tabla 18. Totalidad de elementos de significado

### 3.5.3 Unidades de registro

Al referirnos a *unidades de registro*, se tiene que estas permiten la caracterización y la descripción densas en las subunidades de análisis, desde unos elementos diferenciadores y categoriales identificados como comunes en las unidades de contexto.

Al respecto, se toman las 3 unidades configuradas en el apartado anterior como medio para determinar en estas los correspondientes niveles de expresión semiótica de acuerdo por lo declarado por los estudiantes en torno a las actividades planteadas (*ver anexo 7*)



**Imagen 13. Unidades de registro**

En la siguiente tabla se evidencian tales unidades y las correspondientes apariciones de expresiones semióticas en las actividades de validación. La ampliación de tal información y su correspondiente análisis se evidencia en el siguiente apartado (*ver capítulo 4*)

	NIVELES DE EXPRESIÓN SEMIÓTICA		
	SITUACIONES DE VALIDACIÓN		
	ÍCONO	ÍNDICE	SÍMBOLO
C. 1	R	R	R
C. 6	R	R	R
C. 10	R	R	R

**Tabla 19. Niveles de expresión semiótica - Unidades de Registro**

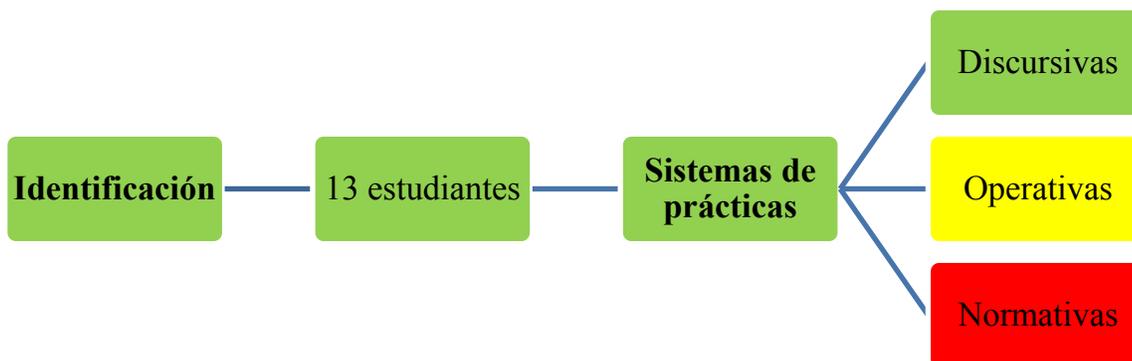
## CAPÍTULO 4 –EVALUACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES

Como medio para evaluar los significados personales que los estudiantes expresan en el desarrollo de una secuencia de actividades en torno a la proporcionalidad inversa, se identifican, describen y caracterizan tales avances mediante el análisis de sistemas de prácticas, elementos de significado y niveles de expresión semiótica correspondientemente. De igual manera, tales correspondencias se llevan a cabo mediante la reducción de la información en unidades de análisis propias de las unidades de muestreo, contexto y registro.

Como se menciona en el capítulo 1, en el apartado correspondiente al proceso metodológico, se parte de un análisis macro en las actividades de acción y formulación y se finaliza con un análisis micro en las actividades de validación pues es en estas que se identifican los niveles de expresión semiótica propios de los desarrollos logrados por los estudiantes, como medio para evaluar los significados personales en torno a la proporcionalidad inversa.

### 4.1 IDENTIFICACIÓN DE SIGNIFICADOS PERSONALES

Es en el proceso de identificación del tipo de significados que declaran los estudiantes que se hace uso de los sistemas de prácticas discursivas, operativas y normativas. Tales prácticas son analizadas en las actividades correspondientes a las situaciones de acción y formulación de la totalidad de estudiantes (13 estudiantes).



*Diagrama 9. Identificación de significados personales*

#### 4.1.1 Actividades de acción y formulación

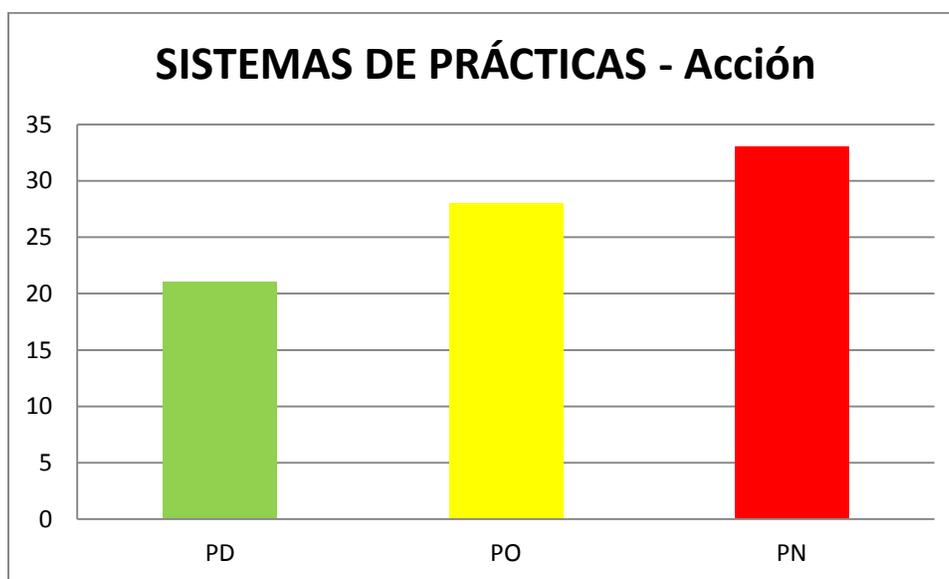
En las Situaciones de acción y formulación se aplican las situaciones problema 1A - 4F (ver anexo 1) Para identificar los significados propios de tales situaciones, se sistematiza primeramente la información, como se expone brevemente a continuación (para ampliación ver anexo 5) y de acuerdo a la red categorial final (ver apartado 2.3.4) se identifican sistemas de prácticas en los correspondientes textos de los 13 estudiantes.

		SISTEMAS DE PRÁCTICAS											
Estudiante	Ci	PD			PO				PN				TOTAL
Juan David Linares	C1	P1.PD.E2.1	P1.PD.E2.2	P1.PD.E3.1	P1.PO.E4.1	P1.PO.E4.2	P1.PO.E4.3	P1.PO.E4.5	P1.PN.E5.1	P1.PN.E5.3	P1.PN.E5.6	P1.PN.E5.7	11
Esteban Melo	C2	P1.PD.E2.1		P1.PD.E3.1		P1.PO.E4.2	P1.PO.E4.3		P1.PN.E5.1		P1.PN.E5.6		6
Sebastián Reyes	C3				P1.PO.E4.1	P1.PO.E4.2	P1.PO.E4.3	P1.PO.E4.5	P1.PN.E5.1	P1.PN.E5.3	P1.PN.E5.6	P1.PN.E5.7	8

**Imagen 14. Identificación-Ejemplo de Categorías**

#### 4.1.2 Sistemas de prácticas - situaciones de acción (1A-2A)

Ahora bien, de acuerdo a la anterior categorización se busca identificar los sistemas de prácticas en los textos de los estudiantes, en lo concerniente a las actividades propias de las situaciones de acción (1A – 2A) los sistemas de prácticas identificados en los textos corresponden a:

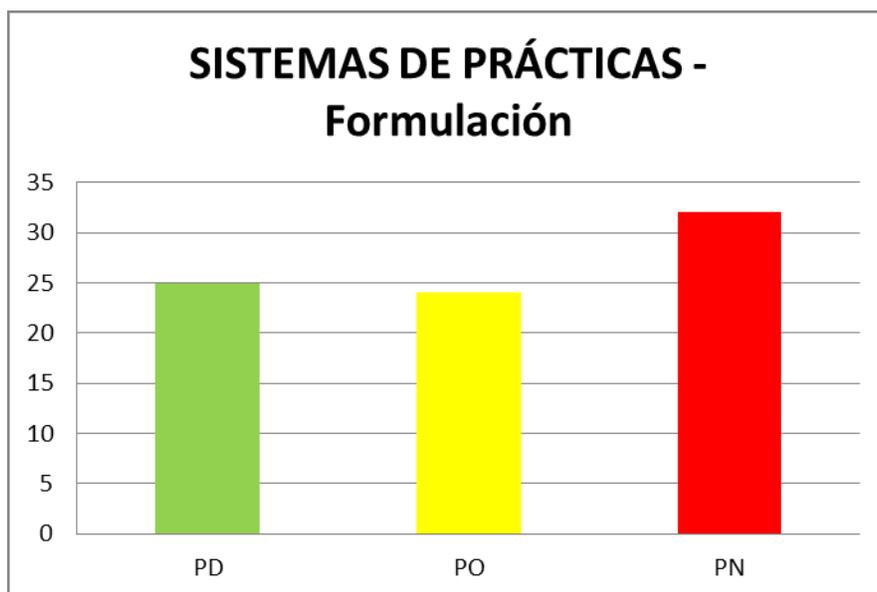


**Gráfico 1. Resultados Sistemas de Prácticas-Acción**

En el diagrama se observa que la mayoría de los textos de los estudiantes hacen referencia a prácticas normativas, ya que en sus soluciones se evidencian conceptos tales como multiplicación, al tiempo que buscan establecer razones equivalentes entre las cantidades dadas. Sin embargo, no se evidencia el uso de propiedades relacionadas con tales conceptos.

#### 4.1.3 Sistemas de prácticas - situaciones de formulación (3F – 4F)

En lo concerniente a las actividades propias de las situaciones de formulación (3F – 4F) los sistemas de prácticas identificados en los textos de los 13 estudiantes corresponden a:



*Gráfico 2. Resultados Sistemas de Prácticas- Formulación*

En las situaciones de formulación, aunque se mantiene la predominancia de las prácticas normativas, las operativas disminuyen su frecuencia pues los estudiantes tienden más a exponer sus creencias sobre el tema, dejando de lado la operatividad y/o hacer uso de propiedades para justificar sus razonamientos. De igual modo, al mencionar sus propias creencias sobre la situación, hacen referencia a multiplicación, unidades de medida, entre otros.

#### 4.1.4 Conclusiones Identificación - Sistemas de prácticas

A partir de lo expresado en las 13 Um, es posible identificar que las prácticas normativas, muestran la más alta frecuencia pues los estudiantes buscan justificar sus respuestas haciendo uso de conceptos tales como multiplicación, razón y probabilidad. De igual modo, aunque en menor medida las prácticas discursivas y operativas les permiten expresar en los textos sus propias creencias o concepciones sobre la situación utilizando diferentes expresiones matemáticas tales como tabulaciones, expresiones numéricas, letras, entre otros (prácticas discursivas) y realizar una serie de acciones y operaciones para dar solución a la situación propuesta (prácticas operativas). Con relación a las prácticas normativas se evidencian en las actividades de formulación que hacen referencia a la multiplicación, ya sea al plantear el algoritmo o mencionar el concepto al justificar sus respectivas respuestas.

#### 4.2 DESCRIPCIÓN SIGNIFICADOS PERSONALES

En el proceso de descripción del tipo de significados que declaran los estudiantes se hace uso de los elementos de significado. Tales elementos son analizados en las actividades correspondientes a las situaciones de acción, formulación y validación en un total de 9 estudiantes correspondientes a las unidades de contexto (*ver reducción de información, capítulo 3*)

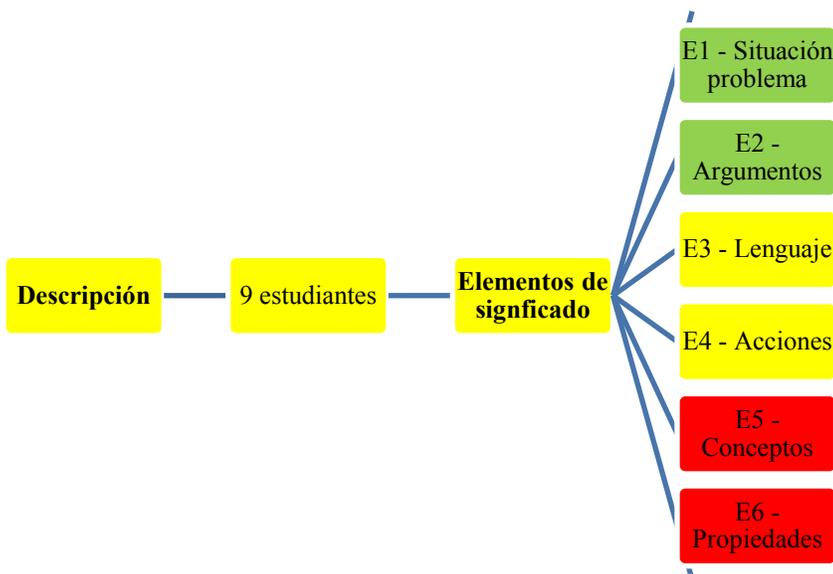


Diagrama 10. Descripción de significados personales

#### 4.2.1 Actividades de Acción – Formulación – Validación

Para describir los significados propios de las situaciones, se retoman las actividades implementadas en acción, formulación e igualmente las correspondientes a validación (ver anexo 1) se sistematiza primeramente la información, como se expone brevemente a continuación (para ampliación ver anexo 6) y de acuerdo a la red categorial final (ver apartado 2.3.4) se describen los elementos de significado correspondientes a los textos de los 9 estudiantes.

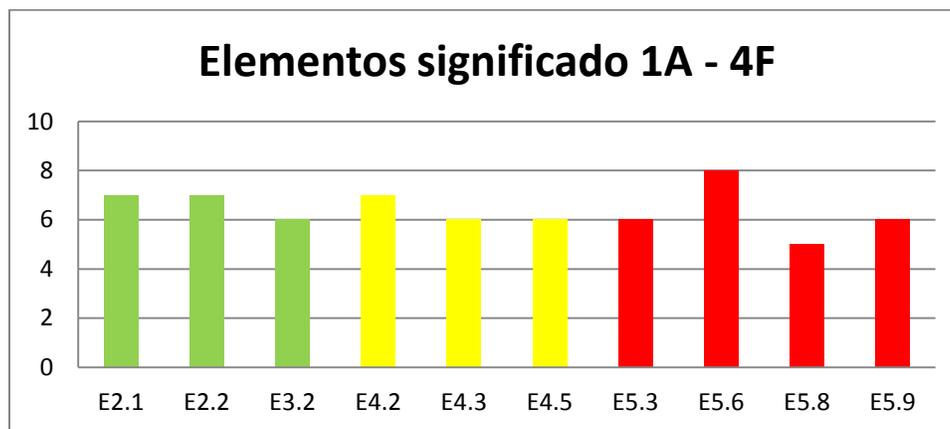
		ELEMENTOS DE SIGNIFICADO																				TOTAL	
		PD					PO					PN											
Estudiante		E.21	E.22	E.24	E.32	E.33	E.42	E.43	E.45	E.47	E.48	E.412	E.413	E.53	E.56	E.58	E.59	E.510	E.511	E.514	E.517	E.520	
Juan David Linares	C.1	PS.PD.E.21	PS.PD.E.22	PS.PD.E.24	PS.PD.E.32	PS.PD.E.33	PS.PD.E.42	PS.PD.E.43	PS.PD.E.45	PS.PD.E.47	PS.PD.E.48	PS.PD.E.412	PS.PD.E.413	PS.PD.E.53	PS.PD.E.56	PS.PD.E.58	PS.PD.E.59	PS.PD.E.10	PS.PD.E.11	PS.PD.E.14	PS.PD.E.17	PS.PD.E.20	10
Esteban Melo	C.2	PS.PD.E.21	PS.PD.E.22	PS.PD.E.24	PS.PD.E.32	PS.PD.E.33	PS.PD.E.42	PS.PD.E.43		PS.PD.E.47	PS.PD.E.48				PS.PD.E.56		PS.PD.E.59		PS.PD.E.11	PS.PD.E.14	PS.PD.E.17		8
Sebastian Reyes	C.3	PS.PD.E.21	PS.PD.E.22	PS.PD.E.24	PS.PD.E.32	PS.PD.E.33	PS.PD.E.42		PS.PD.E.45	PS.PD.E.47	PS.PD.E.48	PS.PD.E.412	PS.PD.E.413	PS.PD.E.53		PS.PD.E.58	PS.PD.E.59						7

Imagen 15. Descripción – Ejemplo de categorías

#### 4.2.2 Elementos de significado

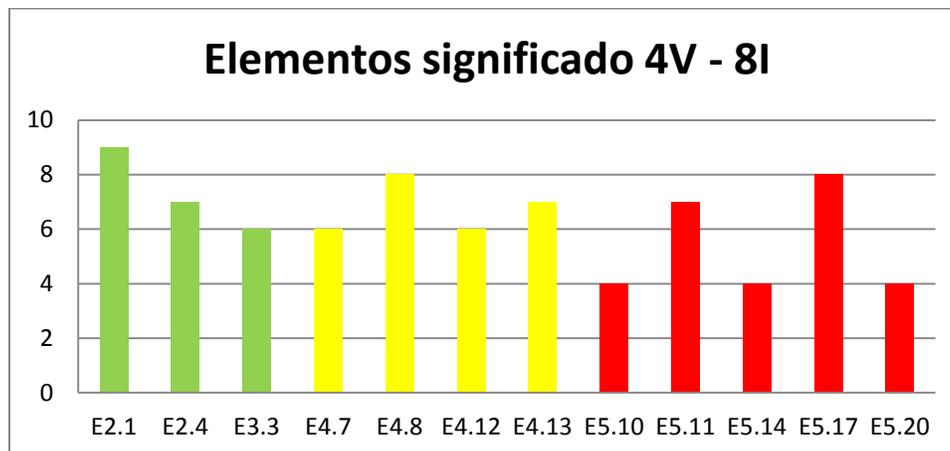
Los elementos de significado propios de las situaciones de acción, formulación y validación corresponden a:

#### 4.2.2.1 Situaciones de acción y formulación



Gráfica 3. Elementos de significado acción – formulación

#### 4.2.2.2 Situaciones de validación



Gráfica4. Elementos de significado validación.

#### 4.2.2.3 Elementos de significado – Acción – Formulación - Validación

Ahora bien, como medio para describir tales elementos, se sintetizan en la siguiente gráfica la reiteración de elementos en los textos. En tal sentido, se tienen en cuenta los elementos de significado con mayor índice de repitencia en las actividades de acción-formulación y su respectiva correspondencia con las actividades de validación.

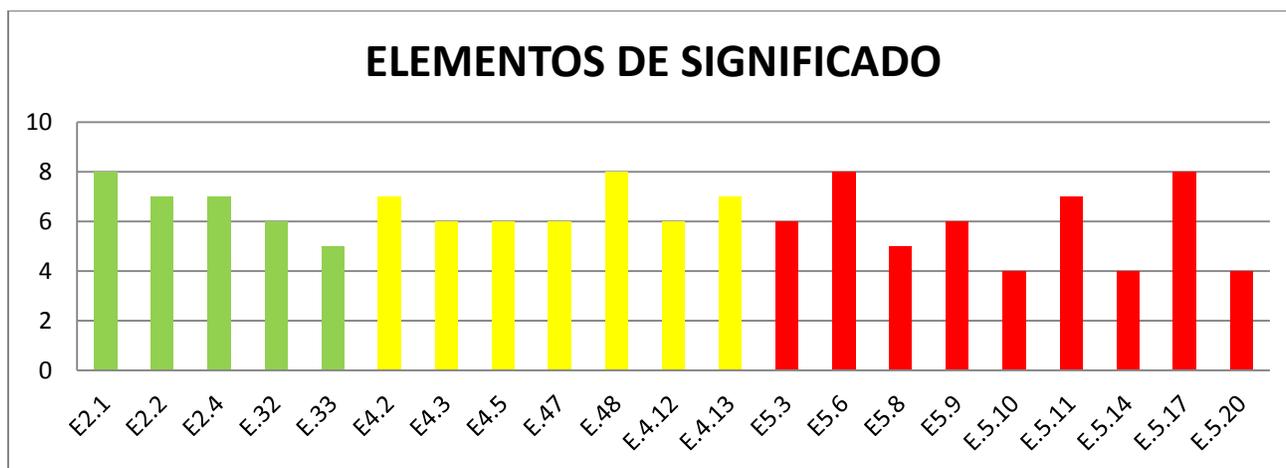


Gráfico5. Elementos de significado acción, formulación, validación

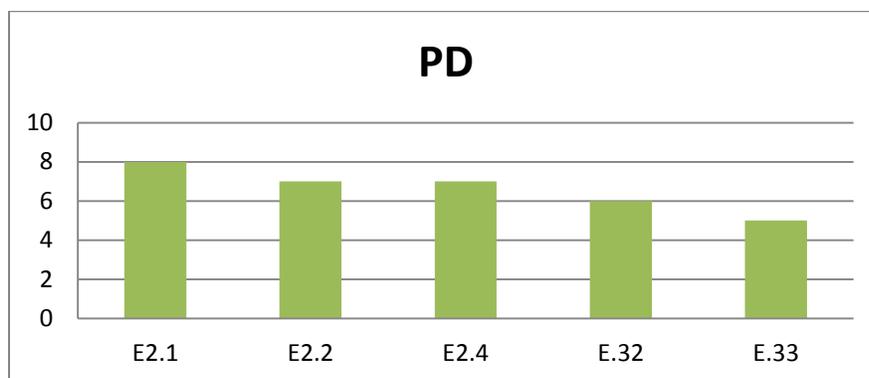
#### 4.2.3 Elementos de significado (Prácticas discursivas)

Con relación a los *Ei* asociados a estos sistemas de prácticas se reconocen los siguientes:

	ELEMENTOS DE SIGNIFICADO				
	PD				
	E. 21	E. 22	E. 24	E.32	E.33
C. 1	C	C	C	C	C
C. 2	C	C	C	C	
C. 3	C	C	C	C	C
C. 6	C	C		C	C
C. 7	C		C		C
C. 9	C	C			C
C. 10	C	C	C	C	C
C. 12		C	C	C	
C. 13	C		C		
<b>TOTAL</b>	8	7	7	6	5

Tabla 20. Descripción-Elementos de Significado-Prácticas Discursivas

Los elementos de significado asociados a los sistemas de prácticas discursivas y su correspondiente frecuencia de emergencia, se exponen en la siguiente gráfica.



**Gráfico 6. Resultados Elementos del Significado – Prácticas discursivas**

Como se observa, los elementos del significado asociados a este sistema de prácticas corresponden a E2 y E3 (argumentos y lenguaje) correspondientemente. En tal sentido, ampliaremos tales elementos describiendo los alcances logrados por los estudiantes en el desarrollo de las actividades.

### Argumentos

Con relación a este elemento, los descriptores que se registraron se exponen a continuación, nótese que se presentan ordenados de acuerdo a su reiteración (mayor a menor).

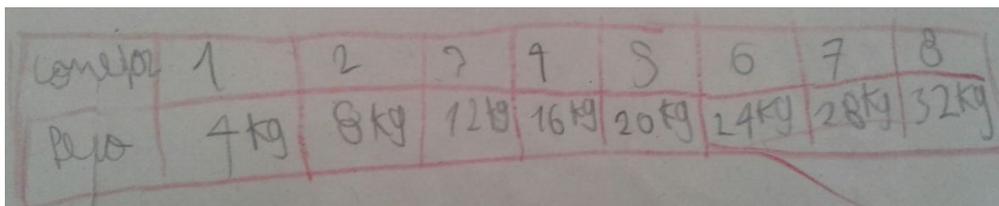
- **E.21:** *Tabulaciones, expresiones numéricas y expresiones algebraicas.*

En sus desarrollos los estudiantes hacen uso de tabulaciones, expresiones numéricas y expresiones algebraicas, como medio para justificar sus razonamientos.

En lo concerniente a la situación 5V por ejemplo, realizan tablas de frecuencias para expresar el peso de determinada cantidad de conejos.

#### 5V. 9

¿Cuánto pesarán 5 conejos? Completa la siguiente tabla



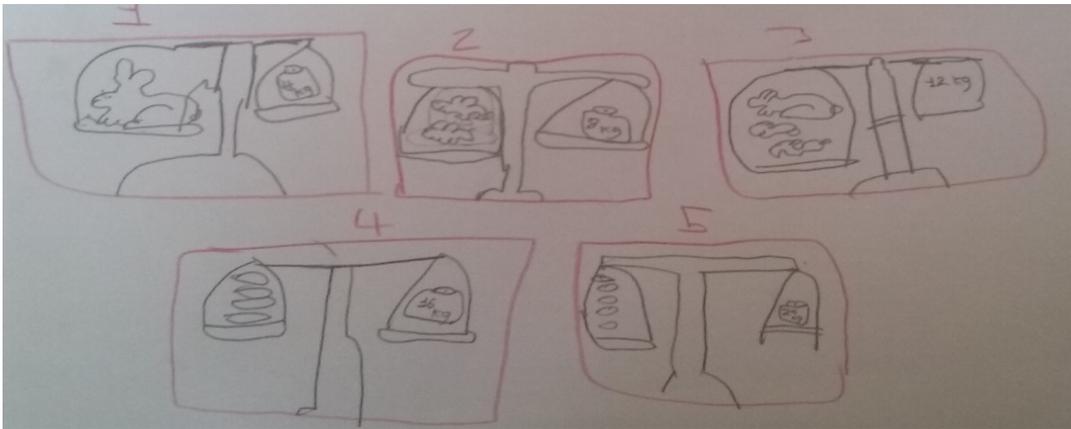
Conejos	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso	4kg	8kg	12kg	16kg	20kg	24kg	28kg	32kg

**Tabla de frecuencias dada por un estudiante**

- **E.22:** *Hace uso de representaciones pictóricas que facilitan la coordinación de todas las cantidades involucradas.*

Los estudiantes usan en la solución de las actividades diversidad de estrategias como medio para razonar y coordinar representaciones que le permitan comprender la naturaleza del problema y dar correspondencia a las cantidades necesarias para llevar implícito la utilización de un método o algoritmo que le permita hacer más viable la solución de la situación problema; utilizando así las representaciones pictóricas que facilitan la coordinación de todas las cantidades involucradas.

**5.V.1**  
¿Cuánto pesa 1 conejo?



*Representaciones pictóricas*

- **E.24:** Pesos iguales a distancias iguales se equilibran, y a distancias desiguales se rompe el equilibrio

Los estudiantes trabajan en torno a la situación, planteando hipótesis que buscar validar a partir de gráficos, planteamientos, procesos, y haciendo alusión a postulados ya planteados como el que indica el descriptor. Sin embargo, aunque usan ejemplos en los que dan cuenta de características de la situación, no lo relacionan directamente con el objeto matemático tratado. En este caso, por ejemplo, es evidente que cuando se pone en juego el peso de un conejo con relación a varios se requiere hacer un proceso de comparación dando a conocer que existe un punto de equilibrio para determinar el valor unitario del peso.

**5.v.5**  
A. ¿Cuánto pesa 1 conejo? ¿Cómo lo sabes?

P	# conejos	1	2	3	4	5
	Peso (kg)	4 kg	8 kg	12 kg	16 kg	20 kg

*Portafolio estudiante – 5V*

Para hallar el peso de 1 conejo, juego con los kilos (pesas)... Digamos pongo 8 kg y veo que el conejo queda muy abajo, entonces debo quitarle 1 kilo sino queda pues le voy quitando más hasta que queden nivelados. En el gráfico, la balanza esta inclinada hacia un lado cuando hay una pesa de 8 kg. y lo sigue estando cuando hay una pesa de 2 kg. Entonces, 1 conejo pesa 4 kg porque cuando se pone la pesa de 4 kg, esta equilibrada.

*Ampliación video – 5V*

### Lenguaje

Los descriptores correspondientes a tal elemento corresponden a:

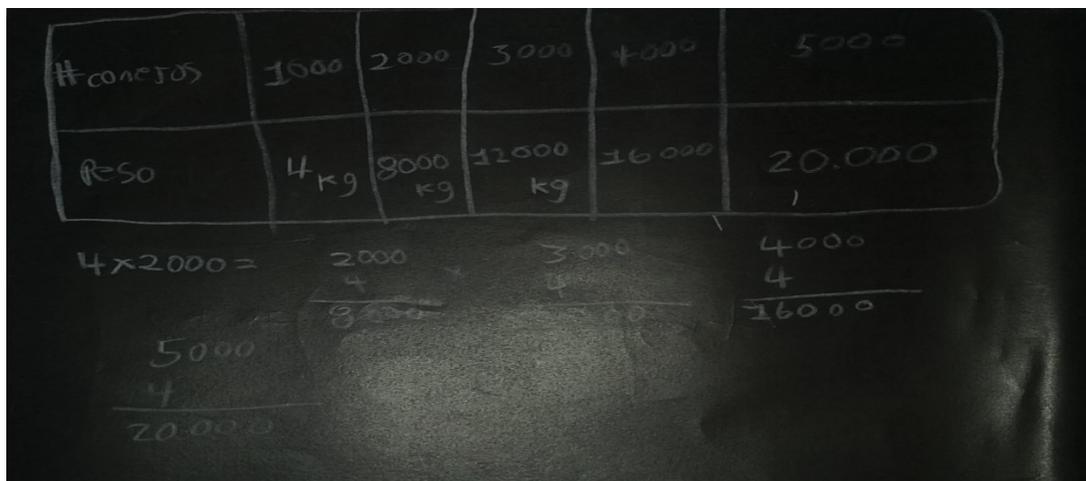
- **E.32:** *Justifica el valor de sus afirmaciones haciendo uso de modelos matemáticos*

En el desarrollo de las situaciones problema, los estudiantes acuden a diversos modos de representación y modelos matemáticos para justificar sus razonamientos. En tal caso, desde la mirada de Azcarate (1995) en su artículo sobre “*sistemas de representaciones*”, resulta clave el reconocer que este tipo de acciones por parte de los estudiantes ayuda a que se tenga una mejor interpretación del objeto matemático, dado que se están usando diversos procesos matemáticos que ayudan a describir el porqué de las acciones realizadas.

Podemos hacer referencia entonces, a desarrollos en los que los estudiantes realizan representaciones pictóricas, tablas de frecuencias, plantean razones y proporciones para validar sus hipótesis y dar respuesta a la situación problema.

### 5V. 6

F. Expresa la relación entre el número de conejos y su peso



# conejos	1000	2000	3000	4000	5000
Peso	4 kg	8000 kg	12000 kg	16000	20.000

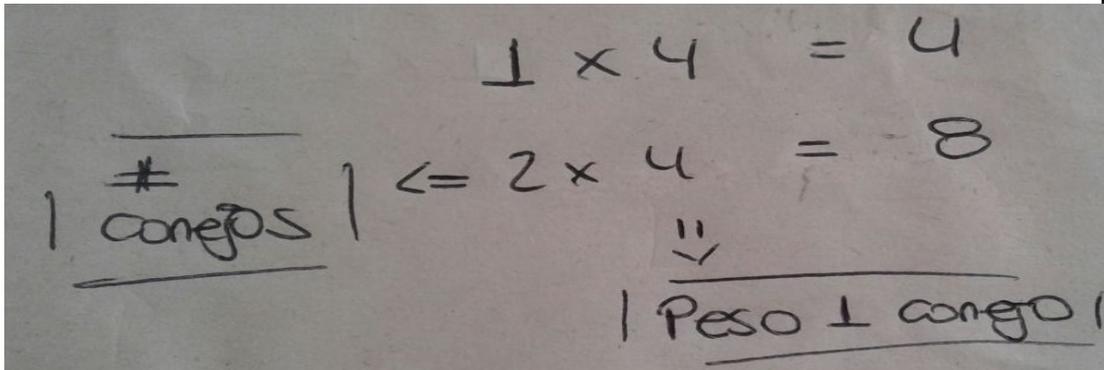
$$4 \times 2000 = 8000$$

$$4 \times 3000 = 12000$$

$$4 \times 4000 = 16000$$

$$4 \times 5000 = 20000$$

*Portafolio estudiante – 5V*



$1 \times 4 = 4$   
 $1 \text{ conejos} \leq 2 \times 4 = 8$   
 $1 \text{ Peso } 1 \text{ conejo}$

*Portafolio estudiante – 5V*

5V. 6

Puedo expresar la relación conejos – peso, así:

1:4:: 2:8

3:12:: 4:16

Y es una proporción porque siempre que aumenta 1 conejo, aumenta 4kg.

*Ampliación video – 5V*

- *E.33: El esquema utilizado en las acciones realizadas por los estudiantes corresponde a determinar el valor de una determinada cantidad de unidades partiendo del valor de la correspondiente Unidad*

Durante el proceso de solución de la situación es evidente por parte de los estudiantes como estrategia de solución, establecer el valor unitario para en un segundo momento realizar operaciones que les permiten encontrar el valor de determinada cantidad. Para tal caso, usan la suma reiterada o la multiplicación, lo cual les facilita el cálculo de cualquier cantidad que se solicite hallar.

5V

5V. 2

Yo creo que si 1 conejo pesa 4 kg, 3 conejos pesan 12 kg, yo lo sé sumando  $4+4+4=12$  u otra forma es

usar la multiplicación  $4 \times 3 = 12$

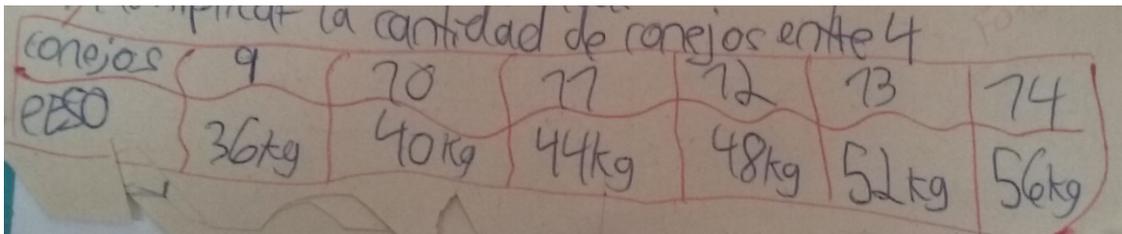
**5V. 4**

Conejos	1	2	3	4	5
Peso (Kg)	4 kg	8 kg	12 kg	16 kg	20 kg

**5V. 7**

Multiplicando el número de conejos por 4

**5V. 9**



*Portafolio estudiante – 5V*

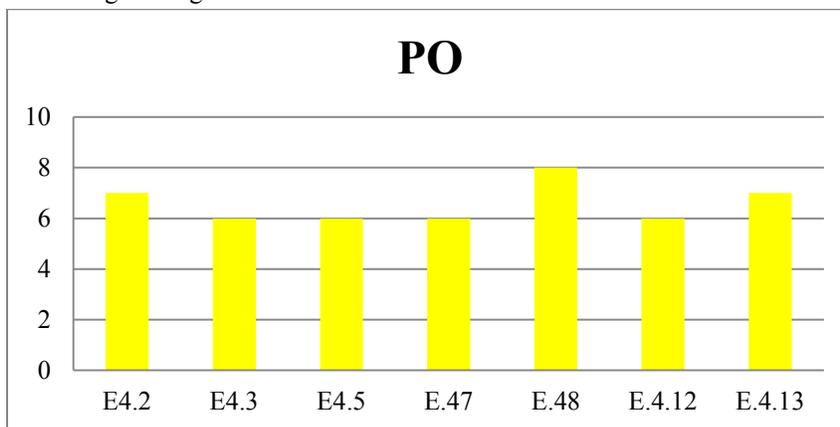
**4.2.4 Elementos de significado (Prácticas operativas)**

Con relación a los *Ei* asociados a estos sistemas de prácticas se reconocen:

	ELEMENTOS DE SIGNIFICADO						
	PO						
	E. 42	E.43	E.45	E.47	E. 48	E4.12	E.4.13
<b>C. 1</b>	C	C	C	C	C	C	C
<b>C. 2</b>	C	C		C	C		
<b>C. 3</b>	C		C	C	C	C	C
<b>C. 6</b>	C	C	C	C	C	C	C
<b>C. 7</b>	C	C			C	C	C
<b>C. 9</b>		C	C		C		C
<b>C. 10</b>	C		C	C	C	C	C
<b>C. 12</b>	C			C		C	
<b>C. 13</b>		C	C		C		C
<b>TOTAL</b>	7	6	6	6	8	6	7

**Tabla 21. Descripción-Elementos de Significado-Prácticas Discursivas**

Los elementos de significado asociados a los sistemas de prácticas discursivas y su correspondiente frecuencia de emergencia, se exponen en la siguiente gráfica.



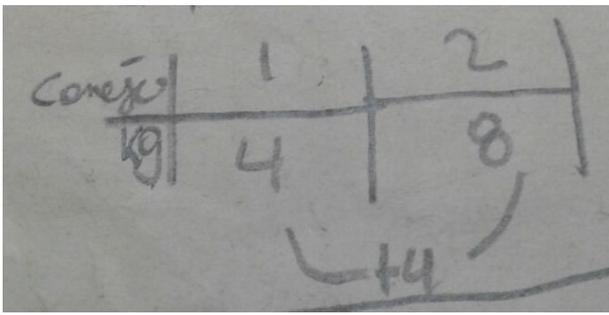
**Gráfico7. Resultados Elementos del Significado – Prácticas operativas**

Los elementos del significado asociados a este sistema de prácticas corresponden a E4 (acciones). En tal sentido, ampliaremos tales elementos describiendo los alcances logrados por los estudiantes.

- **E4.2** *Empareja diversas cantidades para determinar cuáles son proporcionales.*  
 En el desarrollo de las actividades los estudiantes realizan un conjunto de acciones y operaciones sobre la situación propuesta, usando los datos para plantear razones y proporciones que justifican sus razonamientos. En tal caso, toman cantidades (pesos, medidas, valores, entre otros) para determinar cuando son estas proporcionales.

**2A - 3F - 5V**

**5V. 5**  
 Puedo expresar la relación conejos – peso con una razón  
 $1:4:: 2:8$



**2A.1**

1 camión 3 cajas, 2 camiones 6 cajas, 3 camiones 9 cajas.

**2:6 :: 3:9**

**3F3.3**

Por cada escudo rojo debe haber 2 escudos azules

Rojo	1	6	16
azul	2	12	72

**1:2 :: 6:12**

*Portafolios estudiantes*

- **E4.3** Establece relaciones de igualdad entre cantidades y formas

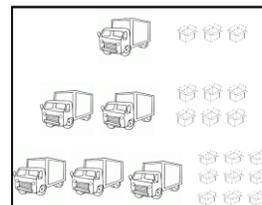
Los estudiantes buscan establecer proporciones mediante la comprobación de igualdad entre razones, para tal caso, establecen determinadas razones y haciendo referencia al aumento constante de determinadas variables, plantean proporciones que verifican usan algoritmos o representaciones gráficas. Por ejemplo, como se muestra a continuación comprueban gráficamente al notar que aumentan en razón constante y que si  $a/b$  corresponde a la razón, entonces  $a/b = c/d$  equivale a una proporción.

**2A**

**2A.1**

1 camión 3 cajas, 2 camiones 6 cajas, 3 camiones 9 cajas.

**Proporción  $\rightarrow 2:6 :: 3:9$**



- **E4.5 Ejecuta la comprobación de hipótesis mediante su propio trabajo.**

En el proceso los estudiantes se dan la oportunidad de cometer errores y potencializar el aprendizaje de estos, escribir, reescribir, buscar diversidad de soluciones de representaciones, todas estas acciones son las que les permiten dar solución a las situaciones planteadas y comprobar las hipótesis mediante su propio trabajo.

5V

5V. 1

1 conejo pesa 4 kg.

5V. 2

Usamos la multiplicación de tres conejos x 4 Kg = 12 Kg

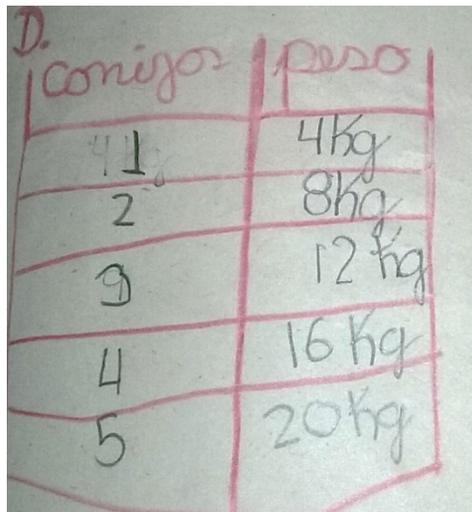
5V. 3

5 conejos pesan 20 Kg

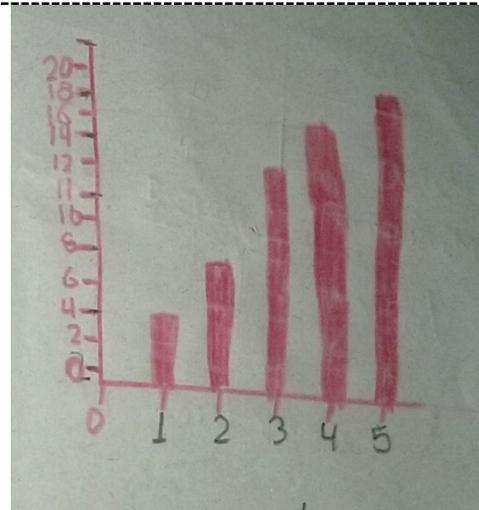
5V. 6

1:4::2:8 es una proporción porque es el doble

5V. 4



conejos	peso
1	4kg
2	8kg
3	12kg
4	16kg
5	20kg



- *E4.7 Considera el valor unitario para luego hacer de este una unidad reiterable cierto número de veces.*

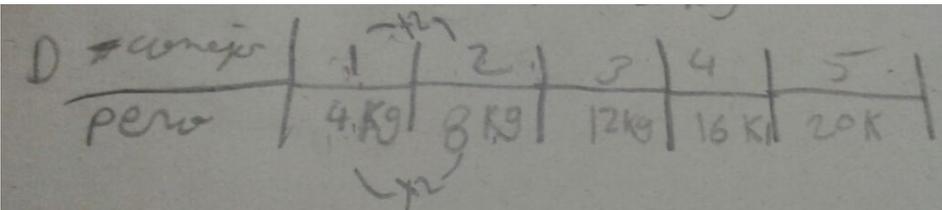
Durante los procesos llevados a cabo por los estudiantes es evidente que en la mayor parte de las situaciones sus representaciones dan a conocer la búsqueda de valor unitario que les permita relacionar con las demás cantidades, para ello es indispensable la utilización de diversos métodos matemáticos que le permitan relacionar y establecer relaciones funcionales.

Por eso las diferentes estrategias que utilizan los estudiantes están determinadas por la implementación de acciones que les ayuden a justificar cada uno de los resultados obtenidos, a partir de las razones que se encuentran, de las relaciones, de las diferencias y el encontrar una constante para relacionarlo con todas las cantidades. Cada una de las representaciones que realiza los estudiantes permiten dar a conocer como pretenden encontrar y relacionar las medidas de por ejemplo, los lados del rectángulo (situación 4F, 6V) con los otros para obtener un cubrimiento total de la superficie, de tal modo que las cantidades de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número las distintas cantidades de la otra. En tales situaciones y en las correspondientes a validación (5V) se evidencia que se considera el valor unitario  $F(1)$  que toma la relación formando una unidad compuesta “1 es  $f(1)$ ” para luego hacer de ella una unidad reiterable cierto número de veces ( $x$ ) y después asignarle la cantidad de unidades correspondiente ( $f(x)$ ); en tal proceso hace uso de un esquema de doble conteo.

<b>5V</b>					
<b>5V. 2</b>					
Yo creo que si 1 conejo pesa 4 kg, 3 conejos pesan 12 kg, yo lo sé sumando $4+4+4=12$ u otra forma es usar la multiplicación $4*3=12$					
<b>5V. 4</b>					
Conejos	1	2	3	4	5
Peso (Kg)	4 kg	8 kg	12 kg	16 kg	20 kg

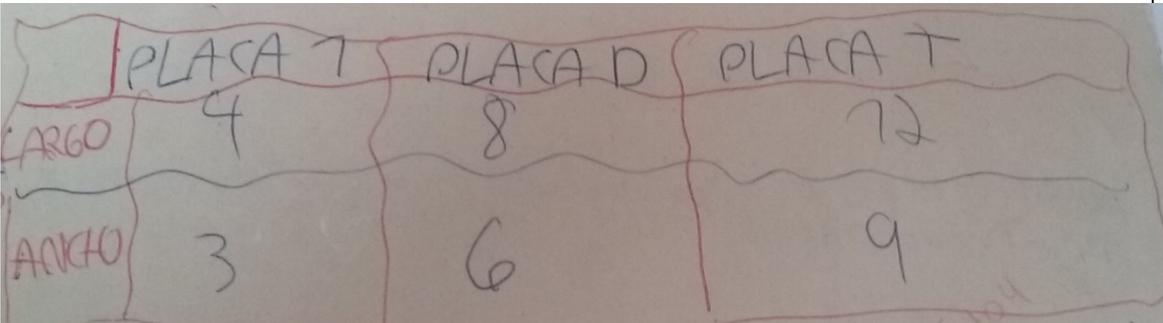
- *E4.8 Hace uso de operadores escalares o funcionales*

En la resolución de los problemas, los estudiantes hacen uso de operadores escalares al establecer la relación entre dos magnitudes de un mismo espacio de medidas por ejemplo, al relacionar la cantidad de conejos sin hacer referencia a su peso, o funcionales buscando relacionar la determinada cantidad de conejos con su respectivo peso.

<b>5V.</b>					
<b>5V. 2</b>					
El peso de 3 conejos es de 12 kg, gracias a que como ya sé que el peso de uno es 4 kg solo es sumar eso 3 veces.					
<b>5V. 4</b>					
					

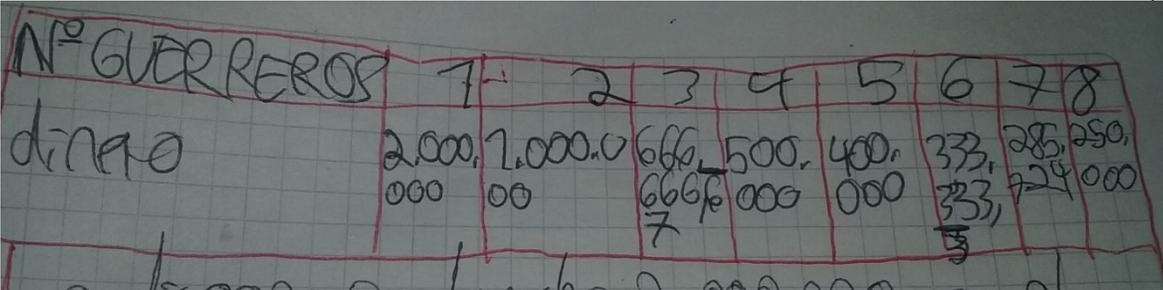
- **E4.12 Recubre superficies usando figuras con diferentes áreas.**

Los estudiantes realizan recubrimiento de una superficie (situación 4F) con figuras de diferentes áreas con el fin de encontrar posibles relaciones entre estas. Una vez se evidencian relaciones, se busca determinar si hay razones o proporciones entre la medida de las mismas.

<b>4F</b>
<p><b>4F.1.</b>                  En el largo caben 8 <i>placas 1</i>, en el ancho caben 4 <i>placas 1</i>.</p> <p><b>4F.2</b>                  En el largo caben 4 <i>placas 2</i>, en el ancho caben 6 <i>placas 2</i> y queda una parte sin recubrir.</p> <p><b>4F.3</b>                  En el largo caben 4 <i>placas 3</i></p>  <p><b>Proporción → 4:3 :: 8:6</b></p>

- **E4.13 Efectúa repartos proporcionales**

En lo correspondiente a la situación 8I, los estudiantes repartieron una cantidad de dinero entre un grupo de personas. Para tal tarea, debieron usar repartos proporcionales y hacer uso de diversidad de operaciones para justificar sus respuestas.

<b>8I.</b>
<p><b>8I. 1</b></p>  <p>La división, si divides 2.000.000 con el número de guerreros te da la respuesta</p> <p><b>8I. 2</b>                  Es inversamente correlacionada. Que entre el número de guerreros es el doble el dinero también lo es.                  Ejemplo. N° guerreros = 4 dinero = 500.000, N° guerreros =8 dinero 250.000</p>

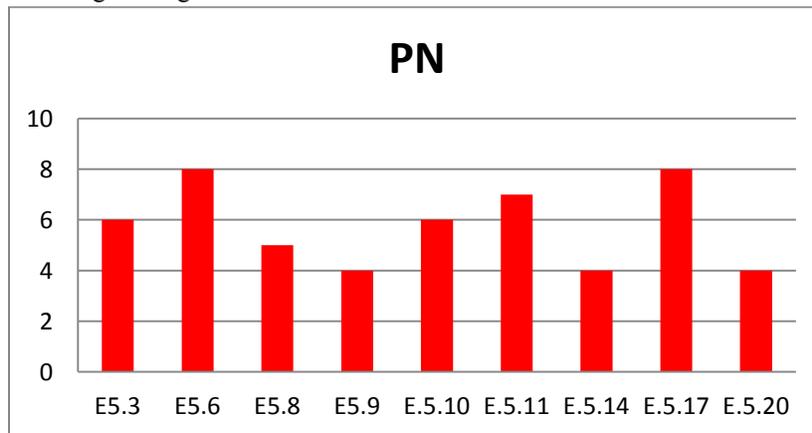
#### 4.2.5 Elementos de significado (Prácticas normativas)

Con relación a los *Ei* asociados a estos sistemas de prácticas se reconocen los siguientes:

ELEMENTOS DE SIGNIFICADO									
PO									
	E.53	E.56	E.58	E.59	E5.10	E.5.11	E5.14	3.5.17	E5.20
C. 1	C	C	C	C	C	C	C	C	C
C. 2		C			C	C	C	C	
C. 3	C		C		C				
C. 6	C	C	C	C	C	C	C	C	C
C. 7		C				C		C	C
C. 9	C	C	C			C		C	
C. 10	C	C	C	C	C	C	C	C	C
C. 12		C		C				C	
C. 13	C	C			C	C		C	
<b>TOTAL</b>	6	8	5	4	6	7	4	8	4

*Tabla22. Descripción-Elementos de Significado-Prácticas Normativas*

Los elementos de significado asociados a los sistemas de prácticas discursivas y su correspondiente frecuencia de emergencia, se exponen en la siguiente gráfica.

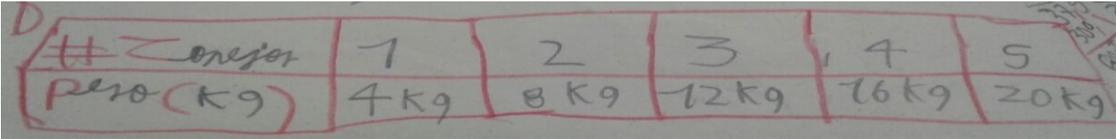
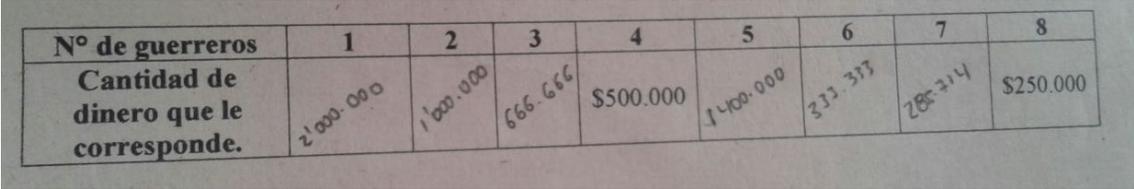


*Gráfico8. Resultados Elementos del Significado – Prácticas Normativas*

Los elementos del significado asociados a este sistema de prácticas corresponden a E5 (conceptos). En tal sentido, ampliaremos tales elementos describiendo los alcances logrados por los estudiantes.

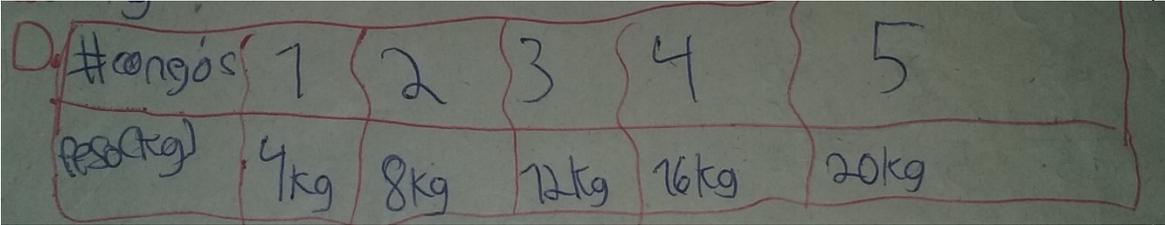
- **E5.6 Razón**
- **E5.8 Proporción**
- **E5.20 Constante de proporcionalidad**

El establecimiento de razones es la acción más recurrente en los desarrollos de los estudiantes. En un primer momento muestran relaciones entre cantidades, variables, números, mediante expresiones de tipo icónico y en un segundo momento plantean razones haciendo uso de expresiones de tipo simbólico. En algunas situaciones, plantean proporciones que justifican haciendo uso de un lenguaje icónico, pues resaltan que hay igualdad dado que aumentan o disminuyen en igual medida. Tan solo en las situaciones 5V y 8I, reconocen la existencia de una constante de proporcionalidad.

<b>3F – 5F</b>																																						
<p><b>3F3.3</b> Por cada escudo rojo debe haber 2 escudos azules</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 10px 0;"> <tr> <td style="width: 25%;">Rojo</td> <td style="width: 12.5%;">1</td> <td style="width: 12.5%;">6</td> <td style="width: 12.5%;">16</td> </tr> <tr> <td>azul</td> <td>2</td> <td>12</td> <td>72</td> </tr> </table> <p><b>5V. 6</b> Puedo expresar la relación conejos – peso, así:  1:4:: 2:8  3:12:: 4:16  Y es una proporción porque siempre que aumenta 1 conejo, aumenta 4kg</p>  <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 10px 0;"> <tr> <td># Conejos</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>Peso (Kg)</td> <td>4kg</td> <td>8kg</td> <td>12kg</td> <td>16kg</td> <td>20kg</td> </tr> </table> <p><b>8I. 1</b></p>  <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 10px 0;"> <tr> <td>Nº de guerreros</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>Cantidad de dinero que le corresponde.</td> <td>2.000.000</td> <td>1.000.000</td> <td>666.666</td> <td>\$500.000</td> <td>1.400.000</td> <td>333.333</td> <td>285.714</td> <td>\$250.000</td> </tr> </table> <p><b>8I. 3</b> Los datos están inversamente correlacionados y son proporcionales porque si multiplicamos los números de arriba por los de abajo siempre me va a dar 2.000.000</p>	Rojo	1	6	16	azul	2	12	72	# Conejos	1	2	3	4	5	Peso (Kg)	4kg	8kg	12kg	16kg	20kg	Nº de guerreros	1	2	3	4	5	6	7	8	Cantidad de dinero que le corresponde.	2.000.000	1.000.000	666.666	\$500.000	1.400.000	333.333	285.714	\$250.000
Rojo	1	6	16																																			
azul	2	12	72																																			
# Conejos	1	2	3	4	5																																	
Peso (Kg)	4kg	8kg	12kg	16kg	20kg																																	
Nº de guerreros	1	2	3	4	5	6	7	8																														
Cantidad de dinero que le corresponde.	2.000.000	1.000.000	666.666	\$500.000	1.400.000	333.333	285.714	\$250.000																														

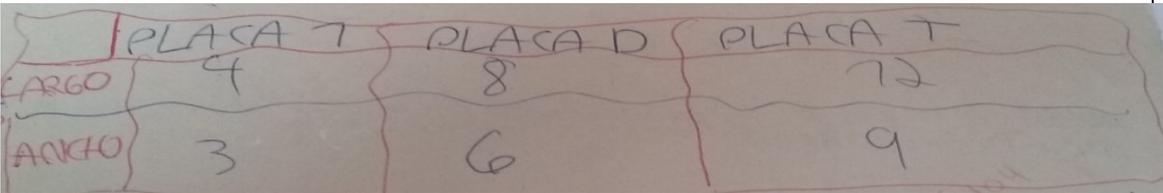
- **E5.17 Magnitud (peso)**

En lo correspondiente a la situación 5V, la cual requería que los estudiantes hallarán la masa de determinada cantidad de conejos, se muestran resultados en los que se reconoce la importancia de las unidades de medida, al tiempo que una correlación directa en la que estos resaltan que a medida que la cantidad de conejos aumenta, la masa también aumenta directamente.

<b>5V</b>												
<b>5V. 4</b>												
 <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"># conejos</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">5</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">peso (kg)</td> <td style="padding: 5px;">4kg</td> <td style="padding: 5px;">8kg</td> <td style="padding: 5px;">12kg</td> <td style="padding: 5px;">16kg</td> <td style="padding: 5px;">20kg</td> </tr> </table>	# conejos	1	2	3	4	5	peso (kg)	4kg	8kg	12kg	16kg	20kg
# conejos	1	2	3	4	5							
peso (kg)	4kg	8kg	12kg	16kg	20kg							

- **E5.11 Unidad**

La búsqueda de la unidad es una de las estrategias de solución que abordaron los estudiantes en diferentes acciones y situaciones, como medio para trabajar en torno a la situación y reiterarla para encontrar determinada cantidad (situación 5V) o la cual se busca determinar recubriendo superficies con áreas proporcionales (situación 4F)

<b>4 F - 5V</b>												
<b>4F.1.</b> 8x9=72 Caben 72 placas en el terreno, en el largo del terreno caben 8 placas de 1 y en el ancho caben 9												
<b>4F.8</b>												
 <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">PLACA 1</td> <td style="padding: 5px;">PLACA 2</td> <td style="padding: 5px;">PLACA 3</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">LARGO</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">8</td> <td style="padding: 5px;">12</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">ANCHO</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">6</td> <td style="padding: 5px;">9</td> </tr> </table>		PLACA 1	PLACA 2	PLACA 3	LARGO	4	8	12	ANCHO	3	6	9
	PLACA 1	PLACA 2	PLACA 3									
LARGO	4	8	12									
ANCHO	3	6	9									
<b>5V. 1</b> 1 conejo pesa 4 kg, porque en la balanza cuando está en 4 esta equilibrada.												
<b>5V. 2</b> Tuve que multiplicar 3 por 4 porque cada conejo pesa 4kg y hay 3 conejos. Da 12 kg												
<b>5V. 3</b> 5 conejos pesan 20 kg												

• **E5.3 Magnitud (longitud).**

La longitud se trabaja en situaciones tales como 1A, 4F y 6F y aunque en ninguna de estas se hace necesaria la conversión de unidades de medida, los estudiantes siempre hacen referencia en sus respuestas a la unidad con la cual se está trabajando. Del mismo modo, apoyan sus respuestas con representaciones gráficas de los elementos presentes en la situación, en los cuales tienen presente la medida dada en la situación sin necesidad de usar escalas para plantear una reducción o ampliación.

**4F – 6F**

**4F. 1**

	<b>H. PLACA T</b>	<b>PLACA D</b>	<b>PLACA T</b>
<b>LARGO</b>	3cm	6cm	9cm
<b>ANCHO</b>	4cm	8cm	12cm

**6V. 1**



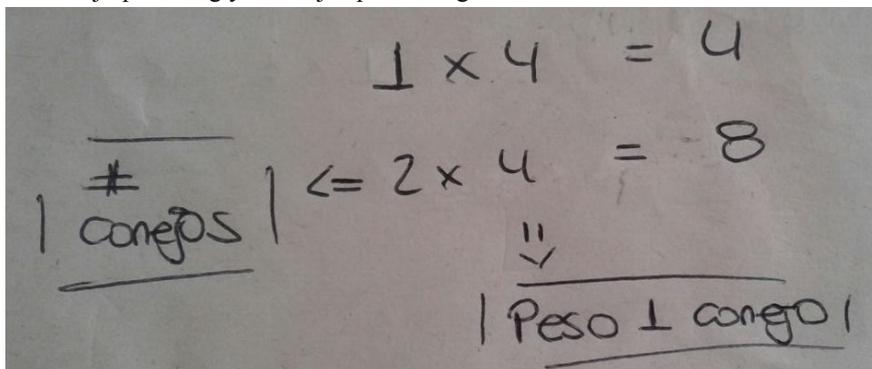
• **E5.9 – E5.10** *Isomorfismo de medidas*

De acuerdo a los tipos de problemas planteados por Vergnaud (1991), al hacer referencia al isomorfismo de medidas (multiplicación, búsqueda del valor unitario y búsqueda de cantidad de unidades ) y atendiendo a que toda situación puede ser llevada a una combinación de relaciones de base con datos conocidos y datos desconocidos, es posible identificar que el desarrollo (en su mayoría) de las situaciones inducía a los estudiantes a plantear relaciones cuaternarias en las que la multiplicación les permitía dar razón de por ejemplo el peso de determinada cantidad de conejos. Sin embargo, en la última situación, se les abrió la posibilidad de usar la búsqueda de cantidad de unidades, para hallar la cantidad de guerreros que recibirían el premio. En tal caso, los estudiantes tomaron los datos referentes al valor unitario y aplicaron la división.

5V

**5V. 1**

Un conejo pesa 4 kg y 2 conejos pesan 8 kg



**8I. 1**

Nº de guerreros	1	2	3	4	5	6	7	8
cantidad de dinero que se corresponde	2.000.000	1.800.000	500.000	700.000			280.000	250.000

• **E5.14** *Correlación Inversa*

En las situaciones 7V y 8I, se hace referencia a la correlación inversa, con la diferencia que en la primera de estas, se da una correlación de tipo cualitativo al indicar las variables como: temperatura del agua como helada, fría, tibia y caliente y tiempo de disolución; y en la segunda si trabajar las dos variables numéricas (número de guerreros y dinero). Sin embargo, en los dos casos, es claro para los estudiantes notar que existe una variación de tipo inversa.

7V - 8I

**7V. 0**

Hay correlación y es inversa porque la una baja y la otra sube. La relación que encuentro es que entre más caliente el agua menos tiempo de disolución y entre más fría más tiempo se demora

**8I. 2**

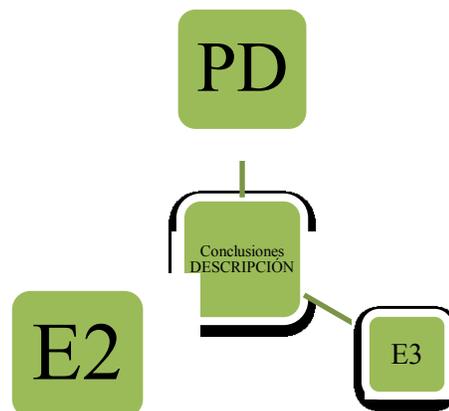
Es inversamente correlacionada y si hay proporcionalidad. Para repartir el dinero, vi que así como el número de guerreros es el doble el dinero también lo es.

Ejemplo. N° guerreros = 4 dinero = 500.000, N° guerreros = 8 dinero 250.000

#### 4.2.6 Conclusiones Descripción- Elementos de significado

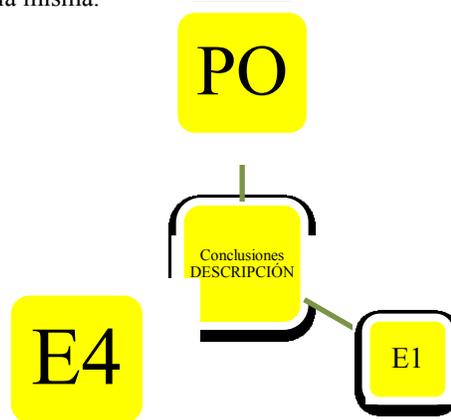
A partir de lo expresado en las 9 UC y teniendo en cuenta los respectivos textos de los estudiantes, en las correspondientes Actividades de Validación, se concluye lo siguiente con relación a los Elementos del Significado asociados a los Sistemas de Prácticas expresados.

1. En los textos correspondientes a las Actividades de Validación y asociados a los Sistemas de Prácticas Discursivas, emergen como Elementos del Significado E2 (argumentos) y E3 (lenguaje) primando el E2 al atender a que en los textos de los estudiantes se evidencian diferentes argumentos planteados por los estudiantes en la solución de las situaciones.



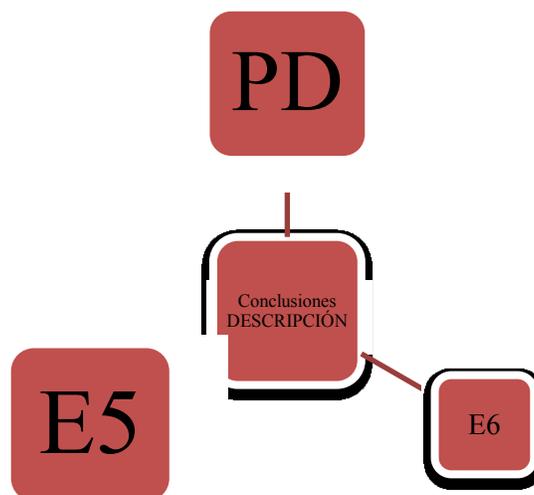
*Diagrama 11. Conclusiones Descripción – Prácticas discursivas*

2. En los textos correspondientes a las Actividades de Validación y asociados a los Sistemas de Prácticas Operativas, emergen como Elementos del Significado las Acciones (E4) y las situaciones problema (E1). En tal caso, E4 (con mayor índice de repitencia), permite a los estudiantes explicitar diferentes estrategias en la solución de las actividades y accionar sobre la misma.



*Diagrama 12. Conclusiones descripción – Prácticas operativas*

3. En los textos correspondientes a las Actividades de Validación y asociados a los Sistemas de Prácticas Normativas, emergen como Elementos del Significado Los Conceptos (E5) y las Propiedades (E6), siendo los primeros de estos los más utilizados por los estudiantes al buscar justificar sus razonamientos.



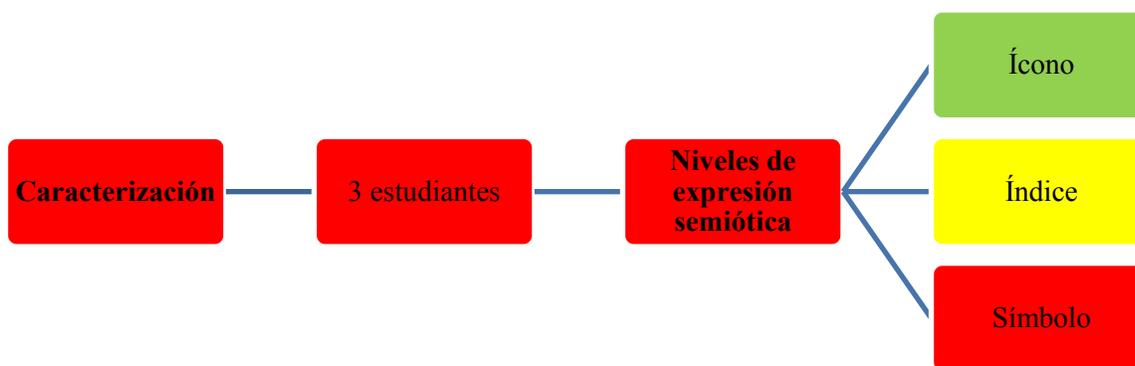
*Diagrama 13. Conclusiones descripción – Prácticas normativas*

A partir de las anteriores conclusiones es posible establecer pues, que en las relaciones entre los Sistemas de Prácticas y los elementos de significado, el elemento que presenta mayor frecuencia corresponde a E5 (Conceptos).

## 4.3 CARACTERIZACIÓN SIGNIFICADOS PERSONALES

En el proceso de caracterización del tipo de significados que declaran los estudiantes se hace uso de los niveles de expresión semiótica. Tales niveles son identificados y analizados en las actividades correspondientes a las situaciones de acción, formulación y validación, primeramente en la totalidad de los estudiantes (*Um*), en segunda medida en los correspondientes a la primera reducción (*Uc*) y por último en los desarrollos de 3 estudiantes (*Ur*) sobre los cuales se profundizará. (*ver reducción de información, capítulo 3*).

En tal caracterización, los niveles de expresión semiótica permiten certificar lo realizado por los estudiantes en cada uno de los momentos de la secuencia de actividades al establecer relaciones con los elementos del significado, los sistemas de prácticas, los planos del tetraedro didáctico (relación estudiante-profesor, estudiante-entorno y estudiante-saber) y los tipos de significado.



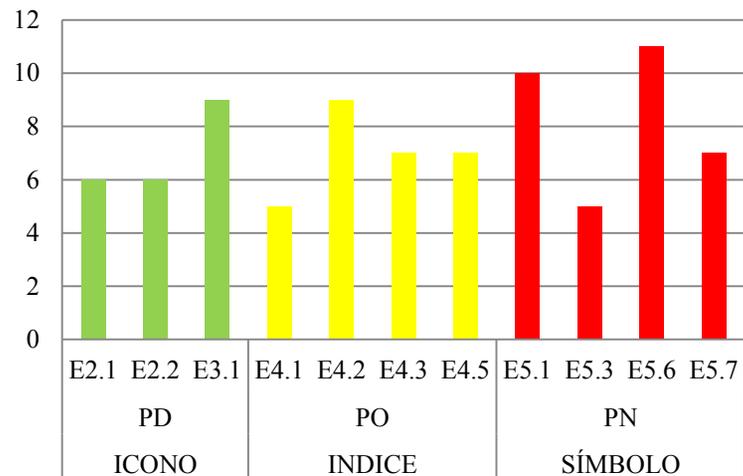
*Diagrama 14. Caracterización de significados personales*

### 4.3.1 Primera Caracterización (UM – UC → Actividades Acción - Formulación – Validación)

Con relación a los niveles de expresión semiótica expresados en los textos de los estudiantes en las actividades de acción y de formulación (*ver anexo 7*), se muestra a continuación la práctica y el tipo de elemento que emerge en cada de las actividades y su respectiva correspondencia con el nivel de expresión semiótica (ícono, índice, símbolo)

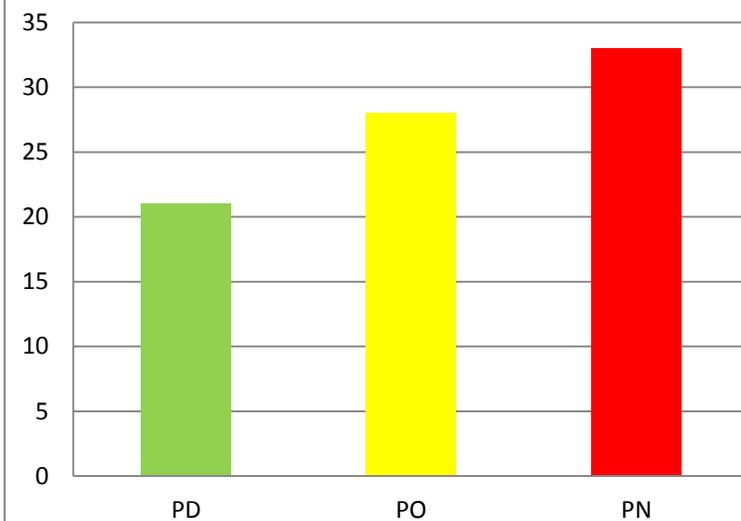
SISTEMAS DE PRÁCTICAS– ELEMENTOS DE SIGNIFICADO

**Prácticas - Elementos (Um)  
 Acción**

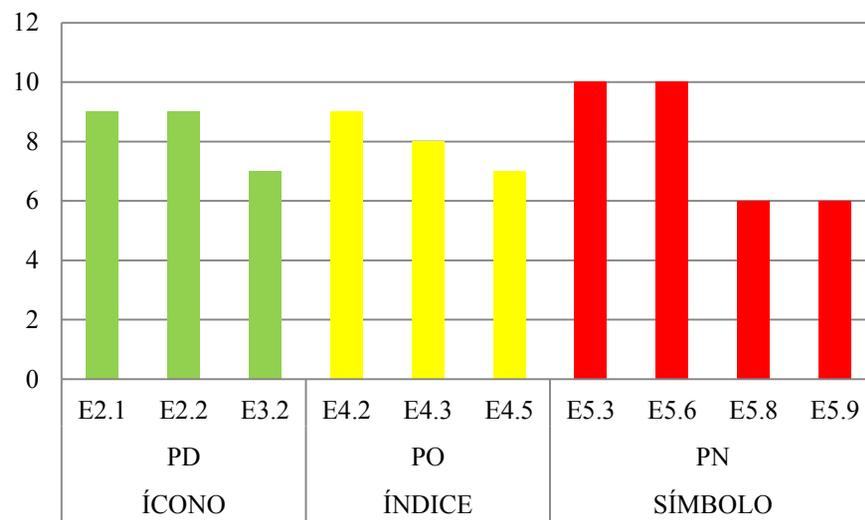


NIVELES DE EXPRESIÓN SEMIÓTICA

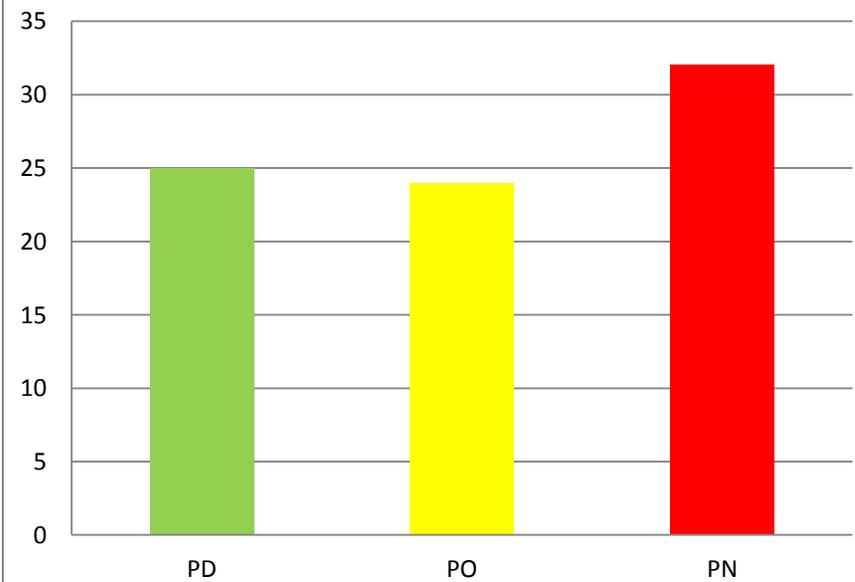
**Niveles de expresión semiótica (Um)  
 Acción**

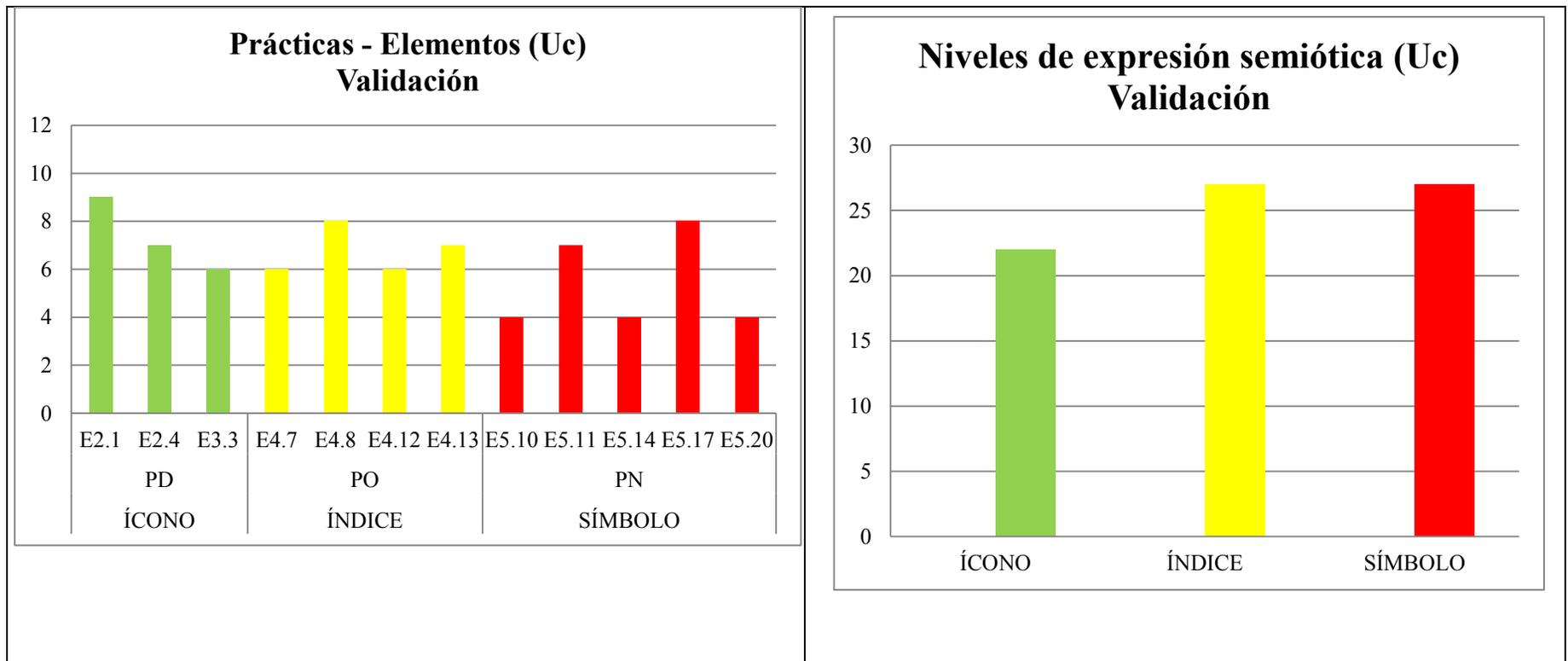


### Prácticas - Elementos (Um) Formulación



### Niveles de expresión semiótica (Um) Formulación





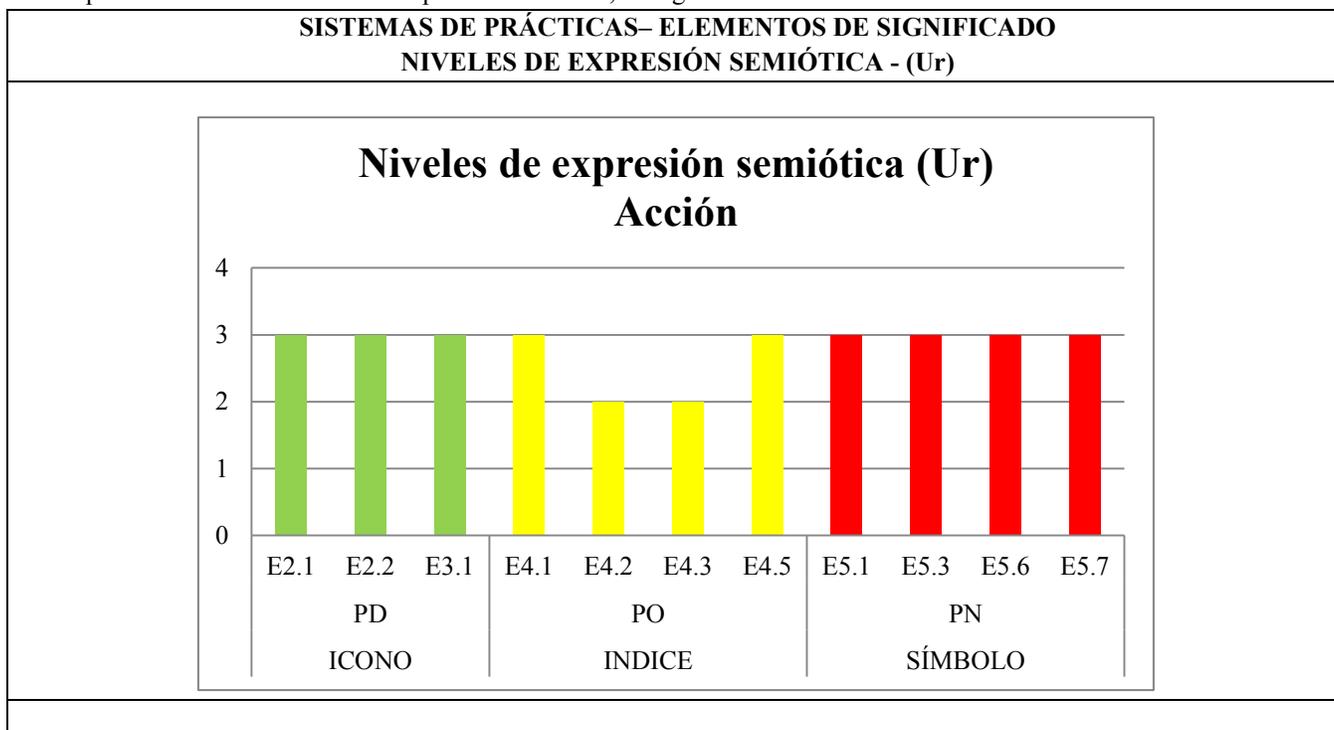
*Tabla 23. Primera Caracterización- Situaciones de acción, formulación y validación*

En esta primera caracterización realizada sobre las unidades de muestreo (acción y formulación) y contexto (validación), es posible apreciar que los textos de los estudiantes evidencian un nivel de expresión semiótica *normativa*, ya que buscan darle significado a los símbolos y expresiones previamente planteados, haciendo referencia al uso de determinados conceptos, sin llegar a profundizar en leyes, normas y/o propiedades de los mismos.

Sin embargo, también se evidencian expresiones *simbólicas* e *icónicas* en sus desarrollos, al mencionar sus propias creencias o concepciones sobre la situación utilizando diferentes expresiones matemáticas tales como tabulaciones, expresiones numéricas, entre otros y realizar un conjunto de acciones y operaciones sobre la situación propuesta.

#### 4.3.2 Segunda Caracterización (UR → Actividades de Acción - Formulación - Validación)

La segunda caracterización toma como objeto de análisis, las unidades de registro (C1, C6 y C10) con sus respectivos desarrollos respecto a las situaciones trabajadas (*ver anexo 8*). La emergencia de algún tipo de elemento y su correspondencia con los niveles de expresión semiótica, se registra a continuación.



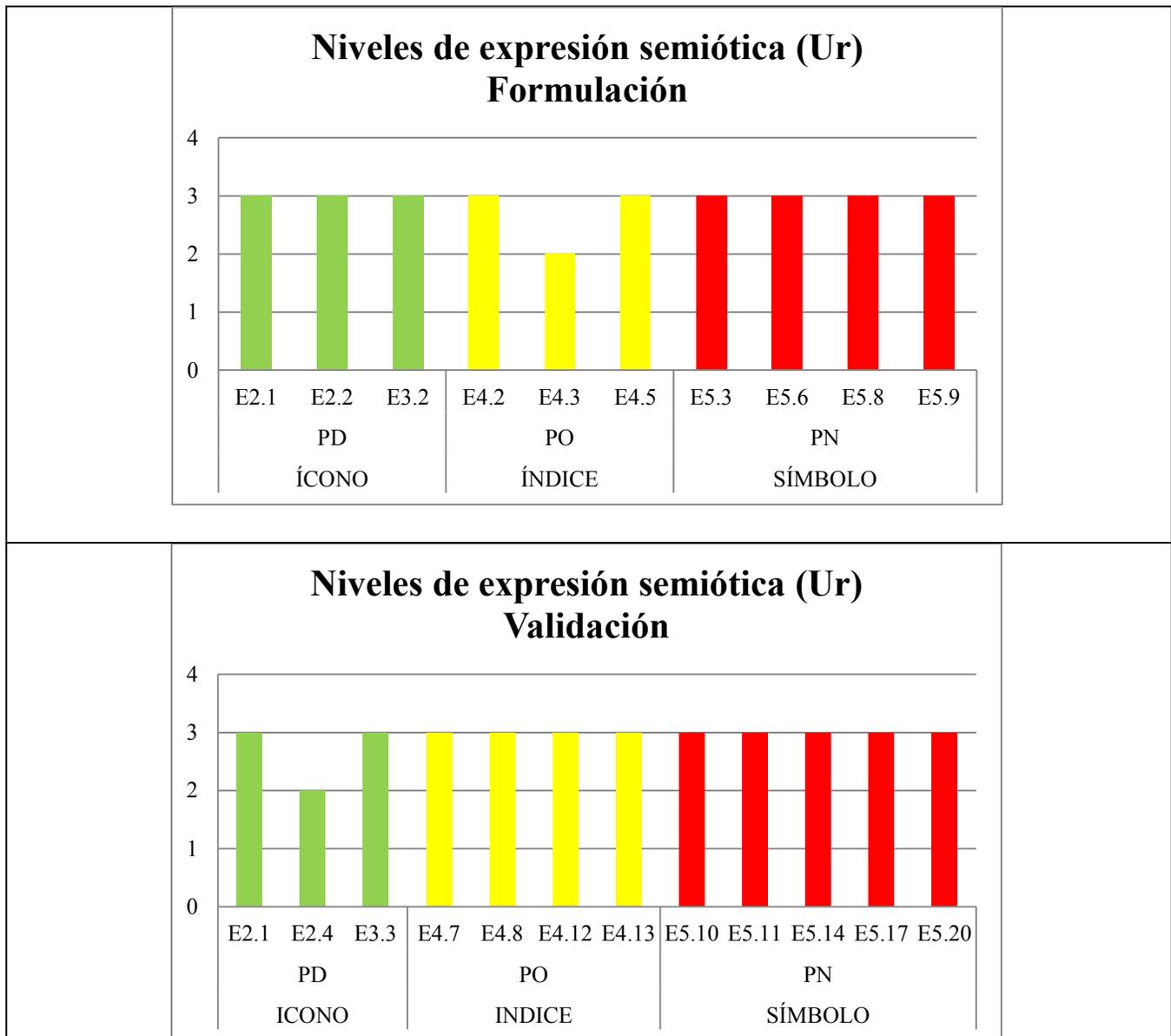


Tabla 24. Segunda caracterización – Situaciones de acción, formulación, validación

En lo que corresponde a la segunda caracterización realizada sobre las unidades de registro (3 estudiantes) y sus respectivos desarrollos sobre cada una de las situaciones (acción, formulación y validación), es posible destacar que tanto en las situaciones de acción como de formulación, los estudiantes refieren expresiones *icónicas* y *simbólicas* pues mencionan sus propias creencias o concepciones sobre la situación, acuden a expresiones que denotan relaciones (entre números, entre magnitud, entre unidades) al tiempo que hacen referencia conceptos, ya sea al plantear un algoritmo o mencionarlo al justificar sus respectivas respuestas. En lo que refiere a las actividades de formulación, las expresiones *normativas* siguen registrando la más alta frecuencia, sin embargo, expresiones de tipo *indicial* dotan de significado la práctica de los estudiantes, al permitirles utilizar diferentes modos de representación tales como dibujos, tabulaciones, gráficas y expresiones analíticas. Tales representaciones son construidas a partir de características o cualidades que les brinda la situación

#### 4.3.3 Tercera Caracterización (UR → Actividades de Validación)

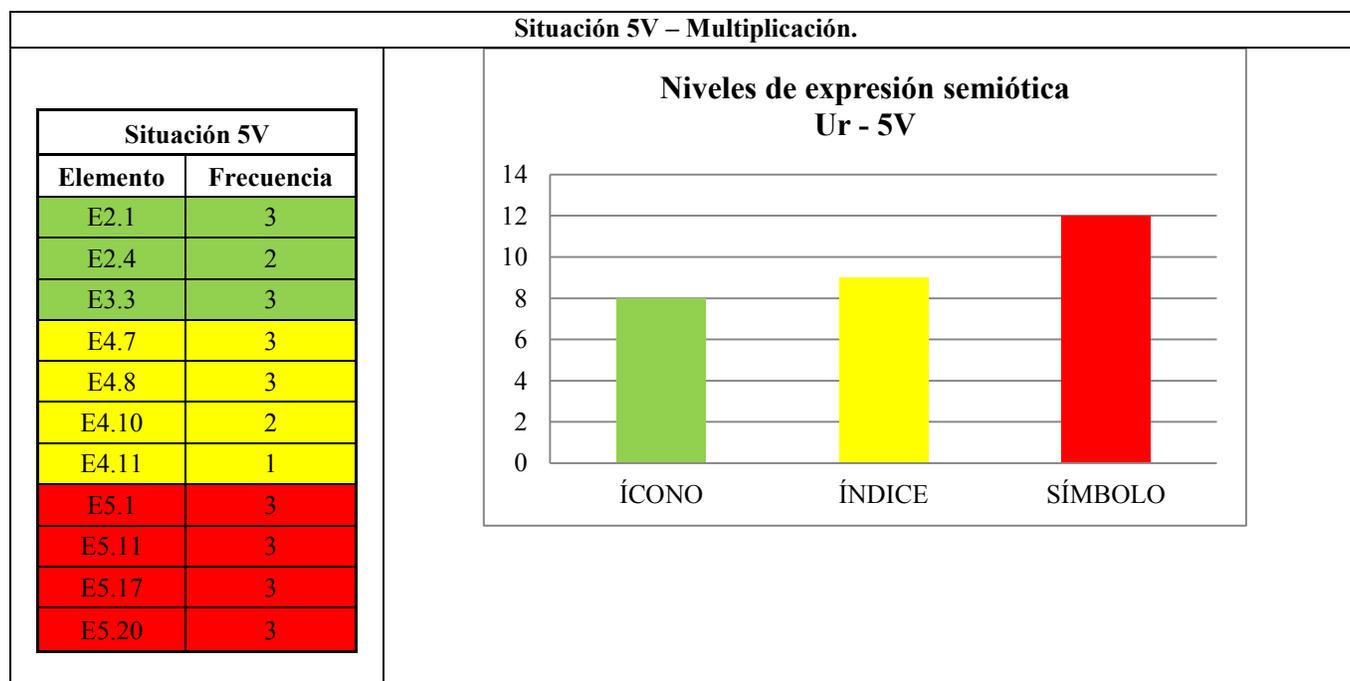
Tomando como base las 3 unidades de registro (Ur1, Ur6 y Ur10), se busca caracterizar los significados propios de los estudiantes, atendiendo a los sistemas de prácticas, elementos de significado y niveles de expresión semiótica y las evidencias de estos en cada uno de los portafolios y videos de los diferentes momentos de las actividades de validación (*ver anexo 8*)

Para tal tarea, se determina en cada una de las situaciones de validación un descriptor propio del tema que se trabaja en esta como medio para caracterizarlas, a entender: *5V - multiplicación*, *6V- razones equivalentes*, *7V- correlación inversa* y *8I – constante de proporcionalidad*. Es sobre estos que se centrará el análisis propio de la caracterización de los significados, al buscar determinar el nivel de reiteración de expresiones *icónicas*, *indiciales* y *simbólicas*.

#### 4.3.3.1 Situación 5V

#### Multiplicación.

Al respecto de la situación *5V-Multiplicación*, y su correspondiente análisis en las *Ur*, es posible identificar que los descriptores a los que hace mención las expresiones de tipo *simbólico*, se reflejan en los textos de todos los estudiantes. Dentro de estos cabe mencionar la dotación de significado que se le da a los símbolos y expresiones definiendo conceptos o nociones matemáticas, como equilibrio, multiplicación y proporción. Por su parte, las expresiones *icónicas* e *indiciales*, aunque en menor medida permiten igualmente especificar sus avances, pues permiten acudir a expresiones que denotan relaciones entre la cantidad de conejos y su peso, así como utilizar diferentes modos de representación tales como dibujos y tabulaciones construidas a partir de los datos que les brinda la situación. Un análisis más minucioso sobre tal precisión, se muestra a continuación al caracterizar algunas de las respuestas de los estudiantes.



**Tabla 25. Niveles de Expresión Semiótica- 5V - Unidades de Registro**

NIVELES DE EXPRESIÓN SEMIÓTICA

Ampliación portafolios 5V

Ur. 1

5V. 6

Puedo expresar la relación conejos – peso, así:

1:4:: 2:8

3:12:: 4:16

Y es una proporción porque siempre que aumenta 1 conejo, aumenta 4kg.

Ur. 6

5V. 2

Yo creo que si 1 conejo pesa 4 kg, 3 conejos pesan 12 kg, yo lo sé sumando  $4+4+4=12$  o otra forma es usar la multiplicación  $4*3=12$

Ur. 10

5V. 5

Que si se quita un dato no tiene secuencia, que es directamente correlacionada y que el peso se encuentra sumando 4kg, o haciendo la tabla del 4

Ampliación – Video

Para hallar el peso de 1 conejo, juego con los kilos (pesas)... Digamos pongo 8 kg y veo que el conejo queda muy abajo, entonces debo quitarle 1 kilo sino queda pues le voy quitando más hasta que queden nivelados. En el gráfico, la balanza esta inclinada hacia un lado cuando hay una pesa de 8 kg, y lo sigue estando cuando hay una pesa de 2 kg. Entonces, 1 conejo pesa 4 kg porque cuando se pone la pesa de 4 kg, esta equilibrada.

Puedo hallar el peso de cualquier cantidad de conejos sumando de 4 en 4 o multiplicando por 4. Y lo puedo escribir como proporción, porque siempre estoy multiplicando por el mismo número arriba y abajo. Por ejemplo, para 2 conejos multiplico arriba y abajo por 2, para 3 conejos multiplico abajo y arriba por 3 siempre empezando con 1 conejo y esto es proporción porque mira:

$$1:4 :: 2:8 \qquad 1:4 :: 3:12$$

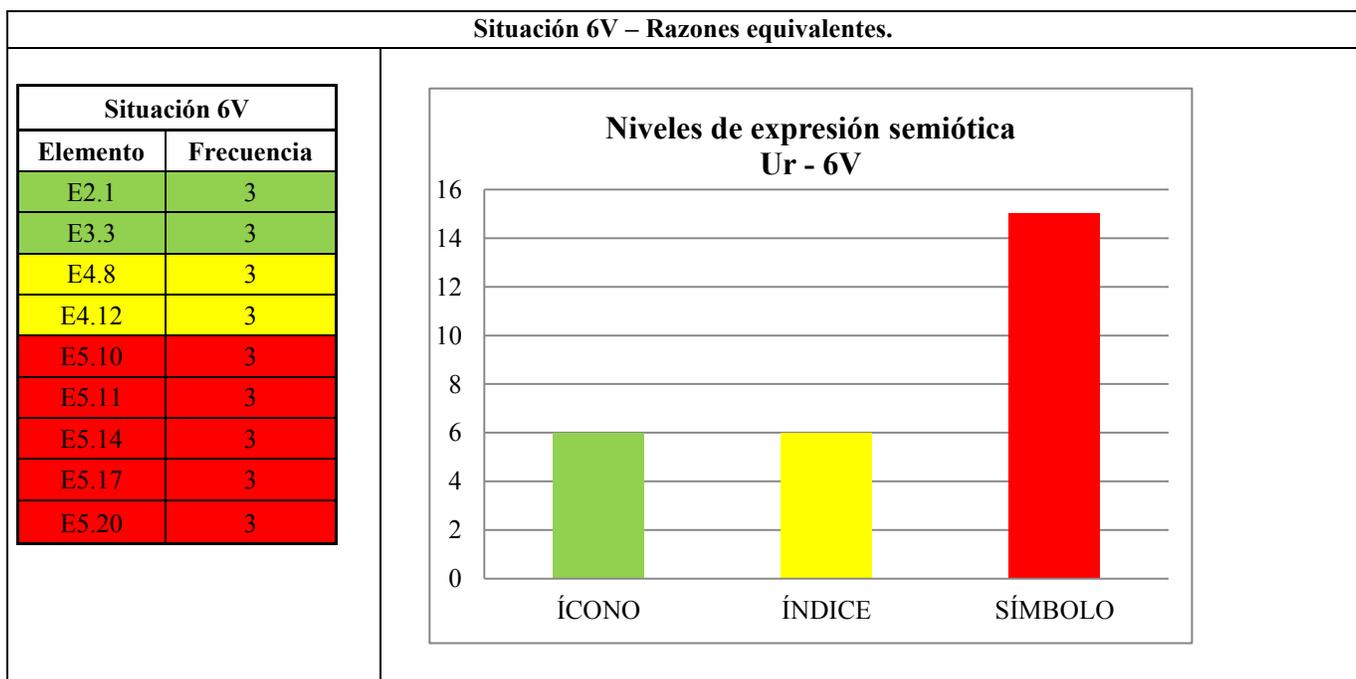
En la gráfica, puedo ver que cuando aumenta la cantidad de conejos, aumenta el peso, es decir, son directamente correlacionadas y que hay pesos para los que no puedo encontrar cantidad de conejos. Por ejemplo, si pusiera pesas que sumen 15 kg, no podre equilibrarla con conejos de este peso (4kg), porque 4 por "haciendo referencia a la multiplicación", nada me da 15.

#### 4.3.3.2 Situación 6V

##### Equivalencias

En esta situación todos los niveles de expresión semiótica mostraron su más alto nivel de reiteración, es decir todos los estudiantes evidencian en sus avances expresiones de tipo *icónico*, *indicial* y *simbólico* en lo correspondiente a cada uno de sus descriptores. En el gráfico, las expresiones de tipo *simbólico* muestran la más alta frecuencia, sin embargo, cabe aclarar que tal situación se debe a que estas expresiones contienen en sí mismas, mayor cantidad de descriptores que las demás.

Ahora bien, referente al nivel *icónico*, acuden a expresiones que denotan relaciones entre la medida de los lados del rectángulo; por otra parte realizan un conjunto de acciones y operaciones sobre la situación utilizan diferentes modos de representación tales como dibujos, tabulaciones y gráficas para hallar la medida de estos, correspondiendo tales acciones a un nivel *indicial* y finalmente, en lo concerniente al nivel *simbólico*, hacen referencia a conceptos como la multiplicación y divisores, ya sea al plantear un algoritmo o mencionarlo al justificar sus respectivas respuestas.



**Tabla 26. Niveles de Expresión Semiótica- 6V - Unidades de Registro**

NIVELES DE EXPRESIÓN SEMIÓTICA

Ampliación portafolios 6V

Ur. 1

6V. 2

Puedo concluir que el lado a va de 1 en 1 y cuando llega a 6 se le suma 6 y da 12. Y el lado b va al contrario que arriba porque disminuye desde 6 hasta 1. Es decir son correlacionadas porque la una aumenta y la otra disminuye. Y son proporcionales porque el resultado siempre es 12.

Ur. 6

6V. 2

Puedo concluir que solo son necesarias 3 multiplicaciones y para encontrar las otras 3 se les da la vuelta. Pues al multiplicar debe darme como resultado 12 y el 12 solo tiene 6 divisores.

Ej.:  $4 \cdot 3$  y  $3 \cdot 4$

Ur. 10

6V. 2

Puedo concluir que el lado A aumenta y el lado B disminuye ósea que son inversamente correlacionadas y no hay más rectángulos porque no hay más multiplicaciones que den 12

Ampliación – Video 6V

Primero que todo debemos encontrar dos números que multiplicados den lo mismo que el que nos dan, ósea 12. Por eso encontramos 1, 2, 3, 4, 6, 12 que también son los divisores del número 12.

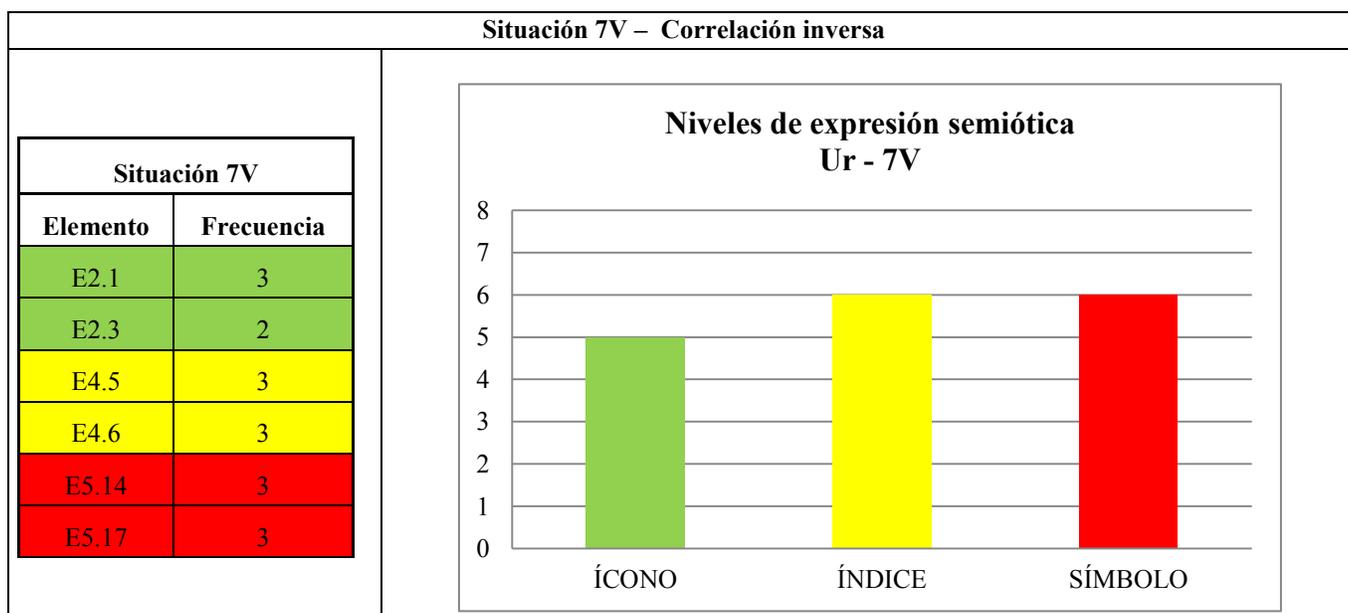
Mirando la tabla, veo que mis datos no son correlacionados, porque no están en orden, empieza aumentando y luego disminuyen (1,2,3,4,12,6) Mientras que los de “señala a su compañero” si lo están porque los del lado A aumentan (1,2,3,4,6,12) y los del lado B disminuyen siempre. Entonces, en esa tabla los datos están inversamente correlacionados porque uno aumenta y otro disminuye. Después de tener correlación, puedo hallar la constante, en este caso multiplicando el lado A por el lado B, esa multiplicación siempre nos da 12, ósea que hay constante y entonces hay proporcional

Entonces son inversamente proporcionales, porque son inversamente correlacionadas, porque es casi imposible que sea inversamente correlacionada y luego directamente proporcional.

#### 4.3.3.3 Situación 7V

##### Correlación inversa

Al respecto de la situación 7V- *Correlación inversa*, y su correspondiente análisis en las *Ur*, es posible identificar que los descriptores de los niveles de expresión semiótica emergieron de las prácticas de la totalidad de los estudiantes. Al respecto, evidenciaron expresiones semióticas *icónicas* al acudir a sus propias creencias o concepciones sobre la situación como al plantear que el agua caliente haría que la disolución se diera de manera mas rápida, para tal caso usaron ejemplos en los que dieron cuenta de características de la situación relacionadas con situaciones previas pero no lo relacionan directamente con el objeto matemático tratado. Al hacer referencia a sus creencias sobre el tiempo que tardaría en disolverse el alka-setzer en los diferentes recipientes de acuerdo a su temperatura, exponían sus ideas y planteaban hipótesis que en un segundo momento pasaron a validar al realizar un conjunto de acciones sobre la situación propuesta, buscando comprobar el tiempo de disolución ellos mismos, tales acciones corresponden a expresiones de tipo *indicial* y finalmente hacían referencia a conceptos como temperatura y correlación inversa, al mencionarlos en la justificación de sus respectivas respuestas, sin embargo, no profundizan en leyes, normas y/o propiedades de los mismos.



*Tabla 27. Niveles de Expresión Semiótica- 7V - Unidades de Registro*

NIVELES DE EXPRESIÓN SEMIÓTICA	
Ampliación portafolios 7V	
<b>7V. 1</b>	<p style="text-align: right;"><i>Ur. 1</i></p> <p>La relación que encuentro es que entre más caliente el agua menos tiempo de disolución se lleva y hay correlación inversa porque la una baja y a otra sube. Mientras menos grados, más tiempo.</p>
<b>7V. 1</b>	<p style="text-align: right;"><i>Ur. 6</i></p> <p>Hay correlación y es inversa porque la una baja y la otra sube. La relación que encuentro es que entre más caliente el agua menos tiempo de disolución y entre más fría más tiempo se demora</p>
<b>7V. 1</b>	<p style="text-align: right;"><i>Ur. 10</i></p> <p>Es inversamente correlacionada, hay una constante [...] Entre más la temperatura del agua sea mayor, menos tiempo dura en disolverse y viceversa.es decir, que entre más grados menos tiempo.</p>
Ampliación – Video 7V	
<p>Primero miramos que los cuatro recipientes si tengan una temperatura diferente porque o sino los datos nos quedarían iguales en la tabla y no tendría sentido [...] Yo creo que el alka-setzer se disolverá más rápido en agua caliente, porque cuando me enfermo mi mamá me da los remedios en agua caliente para que se disuelvan más rápido, entonces yo creo que eso pasará.</p> <p>[...] Los datos que aparecen en mi tabla, muestran que el alka-setzer se demoró más en disolverse en agua fría. Entonces, mientras más caliente sea el agua menos es el tiempo. Entonces, los datos están inversamente correlacionados porque el uno aumenta y el otro disminuye.</p>	

#### 4.3.3.4 Situación 8I

##### **Constante de proporcionalidad**

En esta situación todos los niveles de expresión semiótica muestran su más alto nivel de reiteración, es decir todos los estudiantes evidencian en sus avances expresiones de tipo *icónico*, *indicial* y *simbólico* en lo correspondiente a cada uno de sus descriptores. En el gráfico, las expresiones de tipo simbólico muestran la más alta frecuencia, sin embargo, cabe aclarar que tal situación se debe a que estas expresiones contienen en sí mismas, mayor cantidad de descriptores asociados que las demás.

Ahora bien, referente al nivel *icónico*, los estudiantes usan ejemplos en los que dan cuenta de características de la situación, aplicables en otros contextos pero no lo relacionan directamente con el objeto matemático tratado, igualmente acuden a expresiones que denotan relaciones entre determinada cantidad de personas y dinero. Respecto al nivel *indicial*, realizan un conjunto de acciones y operaciones sobre la situación propuesta buscando hacer un reparto proporcional del dinero entre ellos mismos, para tal tarea, utilizan diferentes modos de representación tales como dibujos, tabulaciones, gráficas y expresiones analíticas. Tales representaciones son construidas a partir de características o cualidades que le brinda la situación. Finalmente, dan cuenta de su accionar ante la situación problema acudiendo a conceptos previamente adquiridos como la multiplicación y división, sin embargo, aunque no hacen referencia a sus características o propiedades si lo hacen cuando referencian la proporcionalidad inversa, pues determinan la constante de proporcionalidad.

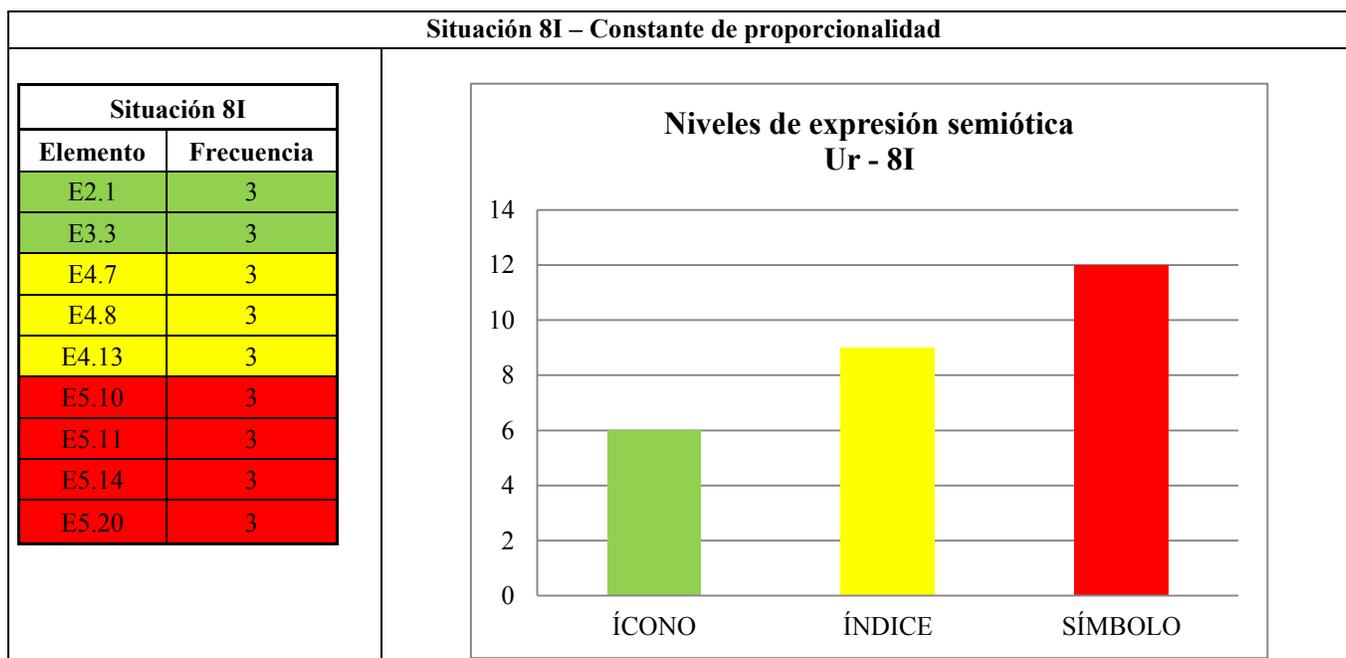


Tabla 28. Niveles de Expresión Semiótica- 8I - Unidades de Registro

NIVELES DE EXPRESIÓN SEMIÓTICA	
Ampliación portafolios 8I	
<p><b>8I. 2</b>                      Los datos están inversamente correlacionados y son proporcionales porque si multiplicamos los números de arriba por los de abajo siempre me va a dar 2.000.000</p>	<i>Ur. 6</i>
<p><b>8I. 2</b>                      La operación que me ayudo fue la división para saber cuánto dinero les tocaba de acuerdo al número de personas. La correlación es inversa pues una aumenta y la otra disminuye y si hay constante de proporcionalidad.</p>	<i>Ur. 6</i>
<p><b>8I. 2</b>                      Es inversamente correlacionada y si hay proporcionalidad. Para repartir el dinero, vi que así como el número de guerreros es el doble el dinero también lo es.                      Ejemplo.                      N° guerreros = 4 dinero = 500.000                      N° guerreros =8 dinero 250.000</p>	<i>Ur. 10</i>
Ampliación – Video 8I	
<p>Para completar la tabla, hice lo siguiente. Si hubiera 1 solo ganador, se llevaría todo el premio porque fue el único que</p>	

ganó, entonces tendría 2.00.000. Si hay 2, se dividen 2.000.000 en 2 y nos da 1.000.000 entonces cada uno recibe 1.000.000 y así sucesivamente dividiendo el dinero entre el número de ganadores.

[...] Puedo ver que el número de guerreros aumenta, porque voy de 1 a 8 y el dinero disminuye. Los datos son inversamente proporcionales. Ahhhh no, para que sean proporcionales debe haber una operación, entonces son correlacionados porque uno aumenta y otro disminuye.

Ahora, voy a explicar cómo sé que son proporcionales. Primero divido para completar la tabla, luego para encontrar la constante, se puede multiplicar o dividir (depende de si es directa o inversa). Entonces si tú no sabes si toca multiplicar o dividir, por descarte tú multiplicas la cantidad de participantes y el dinero si dan números muy diferentes, entonces toca dividir. Pero, en este caso, toca multiplicar, mira:

$$2.000.000 \times 1 = 2.000.000$$

$$1.000.000 \times 2 = 2.000.000$$

$$500.000 \times 4 = 2.000.000$$

$$250.000 \times 8 = 2.000.000$$

Como siempre me termina por dar el mismo número, hay correlación inversa y como encontré la constante que es 2.000.000 es inversamente proporcional.

#### 4.3.4 Conclusiones Caracterización- Niveles de expresión semiótica

A partir de lo expresado en las 3 Ur, es posible caracterizar los significados de los estudiantes al reconocer en sus avances propios de las situaciones de validación, expresiones de tipo *icónico*, *indicial* y *simbólico*. Como se describió previamente, en algunas situaciones las expresiones simbólicas muestran su más alto nivel de reiteración, sin embargo tal resultado se da atendiendo a que este nivel de expresión contiene en sí mismo mayor cantidad de descriptores que los demás.

Atendiendo a las expresiones de tipo *icónico*, es posible determinar que los estudiantes mencionan sus propias creencias o concepciones sobre la situación utilizando diferentes expresiones matemáticas tales como tabulaciones, expresiones numéricas, entre otros. Respecto a las expresiones de tipo *indicial*, realizan un conjunto de acciones y operaciones sobre la situación propuesta y dan cuenta de su accionar ante la situación problema acudiendo a conceptos previamente adquiridos. Por último, expresiones de tipo *simbólico* mostraron su emergencia al momento en que hacen referencia a conceptos, ya sea al plantear un algoritmo o mencionarlo al justificar sus respectivas respuestas. Sin embargo, aunque hacen referencia al uso de determinados conceptos, no profundizan en leyes y/o propiedades del mismo

## CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Con el fin de dar a conocer los alcances y limitaciones que se presentaron en el proceso investigativo llevado a cabo, en el siguiente apartado se exponen las conclusiones bajo la mirada de tres componentes primordiales en el proceso: *proceso investigativo*, *evaluación de los datos obtenidos*, y finalmente desde nuestra *reflexión didáctica* como profesores e investigadores matemáticos.

### 5.1 Proceso investigativo

#### Diseño (Problema – Preguntas de investigación – Objetivos)

Desde el planteamiento del problema, se reconocen una serie de tensiones en torno al trabajo con la proporcionalidad inversa. Se indicó por ejemplo, una ausencia en el desarrollo de investigaciones que propongan nuevas maneras de ser explorada, ejecutada y evaluada, falta de estrategias para trabajarla pues termina por reemplazarse rápidamente por la regla de tres y la aplicación de ejercicios que llevan a los estudiantes a la memorización. Buscando dar solución a estos y otros problemas previamente planteados (ver sección 1.1) se diseña una propuesta que permite verla como una actividad matemática que debe proporcionar al estudiante una indagación hacia el problema, planteamiento de diversos procesos de solución y la generación de razonamientos que permitan comunicar y generar pasos de modelación para dar solución a las situaciones problema propuestas.

Del mismo modo, se propone un espacio que contó con herramientas que apoyan la construcción de saberes interdisciplinarios y significativos en el aula de clase, al tener diversidad de actividades pertinentes hacia la construcción de pensamientos matemáticos, pues en las diferentes participaciones y registros obtenidos por parte de los estudiantes se observan acciones y participaciones que evidencian un proceso de aprendizaje mediado por la libre participación propia de dinámicas de comunicación enriquecedoras, logrando así la consolidación de una secuencia de actividades eficaz, pertinente y con grandes alcances en la actividad matemática como tal.

Ahora bien, se plantea la necesidad de promover un proceso evaluativo que tuviese en cuenta las necesidades que pueden surgir en los procesos de cada estudiante y en tal caso, contamos con el privilegio de trabajar con un grupo relativamente pequeño (13 estudiantes), lo que nos permitió potenciar sus aprendizajes constantemente con la ayuda de todas las herramientas puestas en juego, por ejemplo, fue posible el hacer un seguimiento exhaustivo a sus métodos de solución y estrategias implementadas en las situaciones problema reconociendo el lenguaje, escritura y diferentes métodos de solución, argumentado desde todas las declaraciones y evidencia registrados en sus papiros (nombre dado a los portafolios). En tal caso, se trabaja una evaluación centrada en las habilidades, competencias y acciones que realizan los estudiantes, brindándoles las herramientas necesarias para que construyeran el conocimiento, mediante las relaciones que puedan realizar con todos los entes presentes en el aula de clase.

Buscando gestionar la propuesta y responder a las necesidades que se presentan entorno a la proporcionalidad inversa, se plantea una serie de preguntas de investigación y objetivos, que buscan evaluar los significados personales de los estudiantes. Para tal efecto, se diseñaron instrumentos y categorías (ver capítulo 2) que posibilitan la caracterización de la información producto del trabajo desarrollado por los estudiantes al enfrentarse a diversidad de actividades matemáticas. Ahora bien, para evaluar los significados, resultó clave el comprender la dimensión de la propuesta, y buscar segmentarla para no terminar por perder información en el proceso. Es por esto que de acuerdo a los objetivos específicos se identifica, describe y caracteriza la información mediante un sistema de prácticas que contribuye a determinar los elementos de significado que emergen en los diferentes niveles de expresión semiótica (ver capítulo 4)

### **Gestión (Metodología – Recolección – Sistematización – Análisis)**

Con relación al proceso de la gestión llevada a cabo, es fundamental determinar como a partir de la propuesta realizada se logra relacionar todos aquellos aspectos que intervienen en la investigación, haciendo referencia a todo el proceso de aplicación, organización, sistematización, reducción y análisis de la información. Para tal caso, durante la estructuración de la investigación, fue necesaria la construcción y/o adecuación de instrumentos como lo son la secuencia de actividades, el cronogramas, la construcción e implementación de redes categoriales, las rejillas y tablas de sistematización de la información, las cuales nos permiten en un segundo momento obtener conclusiones del proceso investigativo.

Haciendo mención a la secuencia actividades, la cual fue tomada y readaptada de la propuesta de López (2016), cabe mencionar las variables que se le hacen, hacen referencia al énfasis propio de la proporcionalidad inversa. En tal caso, se ha podido concluir que al trabajar la propuesta de una secuencia didáctica estructurada, permite tener diversidad de situaciones problema que propiciaron un espacio de interacción mediado por procesos de comunicación propios de un ambiente no normativo y mediado por la resolución de problemas como metodología de clase.

Ahora bien, atendiendo a que buscábamos realizar una análisis sobre lo declarado por los estudiantes desde una perspectiva ontosemiótica (Godino, 2002), complementado con una perspectiva semiótica Peirceana (1975), resultó clave la articulación de técnicas usadas en la investigación, a entender ACC, AST y TFD pues al corresponder a una estrategia de combinación, complementariedad y flexibilidad entre dichas técnicas, nos fue posible el uso de las mismas de acuerdo a los intereses y las necesidades propias de todo el proceso investigativo.

Tal uso es posible visualizarlo (ver capítulo 3 y 4) en la primera recolección, de los datos al combinar y adaptar algunas de las estrategias metodológicas de TFD con algunos de los aspectos pertinentes de ACC, que posibilitaron homogeneizar y tratar la gran cantidad de información, seguidamente el tratamiento, delimitación y focalización fue mediado por algunos de los procedimientos del ACC con los aspectos de AST que le eran complementarios, de manera que se generan las condiciones metodológicas adecuadas para el tratamiento de los textos. Finalmente, en lo concerniente al proceso de análisis específico, combinamos aspectos del AST, con aspectos de TFD lo que nos permite caracterizar los significados personales, dando así los resultados del proceso de evaluación de los estudiantes.

### **Evaluación (Identificación – Descripción – Evaluación)**

En primera medida, resulta clave el reconocer que una evaluación constante y regulativa fue la clave para reconocer los avances de los estudiantes y guiarlos en su proceso de construcción conceptual. Del mismo modo, el tipo de evaluación planteada por Lurduy, (2013) a entender: Orientativa (EVO), Certificativa (EVC), y Regulativa (EVR). permitió evaluar los significados personales de los estudiantes, reconocen características generales en sus sistemas de prácticas; describir dichos significados a partir de las relaciones que se establecen entre los sistemas de prácticas y los elementos de significado; y caracterizar los elementos más particulares como lo son los niveles de expresión semiótica.

De acuerdo con lo anterior, metodológicamente hablando se redujo la información para su posterior análisis (ver capítulo 3), con el uso de las técnicas previamente expuestas (AST-TFD-ACC). Se tomaron como unidades de muestreo la totalidad de textos de los estudiantes (13 unidades Um) para analizarlas e identificar en estas los correspondientes tipos de prácticas. De las 13 Unidades de Muestreo se identificaron 9 Unidades Contexto (Uc) a partir de los Sistemas de Prácticas-Elementos del Significado y de lo evidenciado en cada uno de los portafolios de los diferentes momentos de la secuencia y lo correspondiente a las actividades de validación. Finalmente, se configuraron 3 unidades de registro (Ur) como medio para

determinar en estas los correspondientes niveles de expresión semiótica de acuerdo por lo declarado por los estudiantes en torno a las actividades planteadas. Fue en estas últimas, que se procedió a marcar indicativamente los textos (con códigos de colores verde, amarillo y rojo), en un procedimiento semiótico de lectura extensiva para dar cuenta del análisis de la información (ver capítulo 4).

Tales niveles son identificados y analizados en las actividades correspondientes a las situaciones de acción, formulación y validación, donde al realizar tal proceso de caracterización, los niveles de expresión semiótica permiten certificar lo realizado por los estudiantes en cada uno de los momentos de la secuencia de actividades, al establecer relaciones con los elementos del significado, a su vez se puede determinar que existe grandes niveles de reiteración con respecto a las diversas expresiones que realizan los estudiantes, al permitir que con referencia a los niveles de expresión semiótica existe una gran evidencia de que declaran sus expresiones, ya sean simbólicas o representativas, a partir del uso de un conjunto de acciones y operaciones en las situaciones que se ven involucrados.

## 5.2 Conclusiones con relación a los datos

Con relación a los datos y buscando evaluar se identificaron, describieron y caracterizaron los Significados personales de los estudiantes.

Al respecto de la *identificación* (ver apartado 4.1), se identifican sistemas de prácticas discursivas, operativas y normativas en los textos de los estudiantes en las Actividades correspondientes a Acción y Formulación. A partir de lo expresado en las 13 Um, es posible identificar que las prácticas normativas, muestran la más alta frecuencia pues los estudiantes buscan justificar sus respuestas haciendo uso de conceptos tales como multiplicación, razón y probabilidad. De igual modo, aunque en menor medida, las prácticas discursivas y operativas les permiten expresar en los textos sus propias creencias o concepciones sobre la situación utilizando diferentes expresiones matemáticas tales como tabulaciones, expresiones numéricas, letras, entre otros (prácticas discursivas) y realizar una serie de acciones y operaciones para dar solución a la situación propuesta (prácticas operativas). Con relación a las prácticas normativas se evidencian en las actividades de formulación que hacen referencia a la multiplicación, ya sea al plantear el algoritmo o mencionar el concepto al justificar sus respectivas respuestas.

Con relación a la *descripción* de los significados personales, y a partir de las correspondientes Uc, se reconocen Elementos del Significado (Ei), los cuales se asocian a los Sistemas de prácticas correspondientes. A partir de lo expresado en las 9 Uc y teniendo en cuenta los respectivos textos de los estudiantes, en las correspondientes actividades de Validación, se concluye lo siguiente con relación a los Elementos del Significado asociados a los Sistemas de Prácticas expresados.

- En los textos correspondientes a las Actividades de Validación y asociados a los Sistemas de Prácticas Discursivas, emergen como Elementos del Significado E2 (argumentos) y E3 (lenguaje) primando el E2 al atender a que en los textos de los estudiantes se evidencian diferentes argumentos planteados por los estudiantes en la solución de las situaciones.
- En los textos correspondientes a las Actividades de Validación y asociados a los Sistemas de Prácticas Operativas, emergen como Elementos del Significado las Acciones (E4) y las situaciones problema (E1). En tal caso, E4 (con mayor índice de repetencia), permite a los estudiantes explicitar diferentes estrategias en la solución de las actividades y accionar sobre la misma.

- En los textos correspondientes a las Actividades de Validación y asociados a los Sistemas de Prácticas Normativas, emergen como Elementos del Significado Los Conceptos (E5) y las Propiedades (E6), siendo los primeros de estos los más utilizados por los estudiantes al buscar justificar sus razonamientos.

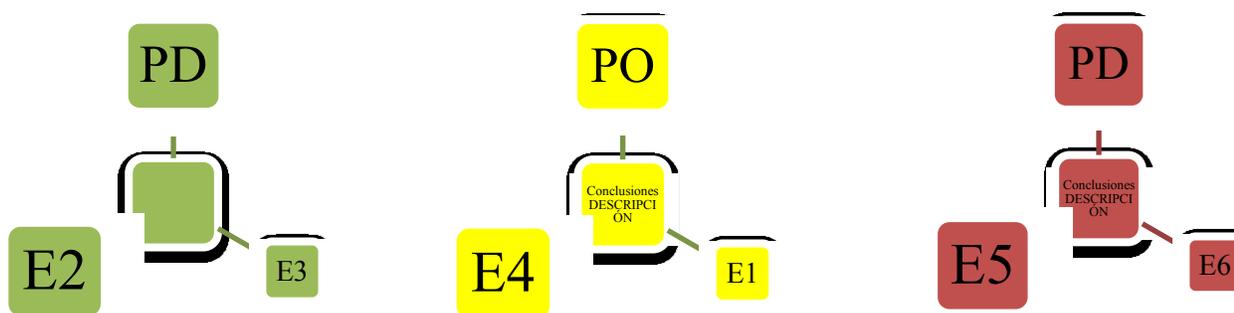
Finalmente, en lo que corresponde a la caracterización de los Significados Personales de los Estudiantes se tienen en cuenta los Niveles de Expresión Semiótica asociados a los Sistemas de Prácticas y los Elementos de Significado, obteniendo que a partir de lo expresado en las 3 Ur, es posible caracterizar los significados de los estudiantes al reconocer en sus avances expresiones de tipo *icónico*, *indicial* y *simbólico*. Como se describe previamente, en algunas situaciones las expresiones simbólicas muestran su más alto nivel de reiteración, sin embargo tal resultado se da atendiendo a que este nivel de expresión contiene en sí mismo mayor cantidad de descriptores que los demás.

Nos podemos dar cuenta que en el proceso de dar a conocer los diferentes componentes asociados a la caracterización, y atendiendo a que se evidencia un nivel de expresión semiótica normativa, en la mayoría de las situaciones asociadas a este, se muestra que las acciones que realizan los estudiantes están enmarcadas a darle un significado a los símbolos y expresiones, implementando diferentes conceptos.

A su vez se logra evidenciar que en las expresiones simbólicas e icónicas, se da la implementación de diferentes tabulaciones, expresiones numéricas o de pensamiento matemático, realizando diversos conjuntos de acciones que ayudan a obtener la caracterización de los estudiantes referente a las expresiones *icónicas* y *simbólicas*, ellos logran que a partir de sus propias concepciones de las temáticas que se encuentran abordando, realizar relaciones entre las cantidades o acciones que intervienen como lo son relacionar números, entre magnitud, entre unidades.

Conjuntamente se puede determinar que se utiliza en diferentes tiempos el uso de conceptos a partir del uso de un algoritmo, o buscan justificar sus respuestas por medio de una operación, existe la implementación de una expresión normativa y expresiones de tipo indicial, al permitirles utilizar diferentes modos de representación tales como dibujos, tabulaciones, gráficas y expresiones analíticas. Tales representaciones son construidas a partir de características o cualidades que les brinda la situación

De acuerdo a los resultados presentados en la Sección 4.2 con relación a los textos de los estudiantes en la solución a las Actividades de Validación se asocian a los Sistemas de Prácticas Discursivas, Operativas y Normativas los siguientes elementos del Significado:



**Diagrama 15. Conclusiones sobre los datos**

A partir de lo anterior, podemos entonces caracterizar que con relación a cada uno de los momentos del desarrollo de las Actividades de validación sobresalen la utilización de Símbolos representados en el uso de Conceptos y como tal los Elementos de Significado se relacionan con los Sistemas de Prácticas Normativas. Igualmente, que aunque se haya dado una mayor reiteración en expresiones simbólicas, cabe aclarar que estas son de tipo discursivo, pues los estudiantes hacen mención a determinados conceptos pero no terminan por validar su uso a partir de normas o propiedades sino por el contrario, haciendo uso únicamente de una práctica discursiva.

#### **Otras conclusiones.**

- Con relación al sistema de prácticas que fueron analizadas en las actividades correspondientes a las situaciones de Acción, Formulación se puede determinar que a partir de la red categorial final, los sistemas de prácticas evidencian que en la mayoría de los textos de los estudiantes existe una mayoría de prácticas normativas, al evidenciar en mayor parte en los textos acciones por los estudiantes que involucran una multiplicación y el establecimiento de razones equivalentes.
- A partir de las situaciones de formulación, se puede identificar que mediante el sistema de prácticas se puede evidenciar que los estudiantes ejercen un sistema de práctica normativa, aunque existe una disminución con referencia a las otras prácticas, aun es evidente que ellos buscan determinar y justificar sus procedimientos bajo razonamientos que involucran una operación de tipo multiplicativo.
- Es evidente que durante el proceso de identificación realizadas en las unidades de muestreo, la mayor frecuencia que se presenta con respecto a las prácticas, hace referencia a las normativas, las cuales determinan que en mayor parte del trabajo realizado por los estudiantes, se basa en el uso de diferentes representaciones que permiten ser justificadas o argumentadas a partir de un algoritmo o propiedad utilizada.
- Bajo el proceso de descripción de los significados personales en el cual se implementa el uso de elementos de significado e implementado las unidades de contexto, se puede analizar que el elemento de significado con mayor frecuencia está ubicado en las prácticas normativas con relación al uso de la razón en la solución de situaciones, a su vez se encuentra que las prácticas discursivas evidencian dos elementos de significado como los son el uso de tabulaciones o algún tipo de representación que les ayude a argumentar el motivo por el cual utilizan determinado procedimiento.
- Al referirnos en aspectos que involucren expresiones de tipo simbólico, se puede concluir a partir de los textos de los estudiantes que se evidencian el hecho de permitir dotar de significado a diversos conceptos utilizados en el desarrollo de las actividades.
- En los procesos de realizar equivalencias entre diversas magnitudes, se puede concluir que se evidencian niveles de expresión semiótica bastante elevados, gracias a los diversos avances que surgieron a nivel de tipo de expresión icónico, indicial y simbólico. Donde podemos concluir que la expresión de mayor frecuencia es de tipo simbólico.

#### **5.3 Reflexión proceso formativo**

Los diferentes momentos que intervinieron en nuestra labor como docentes en la práctica y en la puesta en juego de la propuesta de investigación como investigadores, permiten establecer como puntos de partida elementos específicos para ser resaltados en la siguiente reflexión didáctica.

En primera medida, la documentación y postura teórica, la indagación y propuesta del proceso a llevar a cabo como investigación, los aprendizajes y acciones logradas en el aprendizaje del ser investigador, se vieron permeadas de elementos teóricos-metodológicos usados en el proceso investigativo (Tipos de Significado, Elementos del Significado, Sistemas de Prácticas, entre otros) los cuales se buscaron articular y relacionar mediante una serie de construcciones de redes

categoriales que buscaban atender al cumplimiento de los objetivos de la investigación, en lo que concierne a identificar, describir y caracterizar los significados personales de los estudiantes. A su vez, tal tarea nos llevó a reconstruir y afianzar nuestras concepciones relacionadas con el ser docente investigador, ya que en el cumplimiento de tales objetivos, debíamos tener siempre presente el proveer a los estudiantes herramientas útiles para trabajar en torno a estas en cada una de las construcciones tanto individuales como grupales que realizaron en las situaciones propuestas.

Del mismo modo, los momentos de diseño, gestión y evaluación de las prácticas en el proceso didáctico, y el reconocer los elementos propios de las construcciones conceptuales de los estudiantes, al articularse con cada uno de los elementos propios de los referentes Teórico-Metodológicos usados en lo que respecta a Sistemas de Prácticas Discursivas, Operativas y Normativas, elementos de significado y niveles de expresión semiótica (Godino, 2002; Lurduy, 2013), permite realizar un análisis basado en las herramientas que aportan dichos referentes para consolidar procesos investigativos que ayudan a realizar miradas cada vez más finas sobre los propios significados que expresan los participantes del Sistema Didáctico en sus propios textos (Lurduy, 2012).

En segunda medida, bajo las acciones que en la actualidad se ejerce como educador hemos podido determinar que es importante las labores de indagar, investigar y aprender por medio de la práctica sobre elementos teóricos que nos ayudan a entender y poner en evidencia un proceso para identificar, describir y caracterizar los significados personales de los estudiantes respecto a determinado saber. Sin embargo, debemos reconocer que fue demasiado tedioso y exigente para nosotros enfrentarnos a la puesta en escena de estos elementos que se encuentran relacionados unos con otros, pues esta postura teórica es tan rica en significados que se debe manejar con total cuidado el análisis que se genera sobre cada uno de ellos.

Por otra parte, aunque contamos con un grupo de estudiantes relativamente pequeño, al comienzo nos preocupamos al no saber de qué manera utilizaríamos las técnicas para proveer información de calidad sobre los desarrollos de los estudiantes y no terminar por perder aspectos claves en el proceso de reducción. Sin embargo, la interpretación y articulación coherente y compleja de los tres referentes metodológicos para el estudio de textos (ACC), (TFD) y (AST), desarrollada por Lurduy, (2009-2013), y los elementos propios de los Sistemas de Prácticas, elementos de significado y niveles de expresión semiótica (Godino, 2002; Lurduy, 2013), nos guió en el proceso y certificó que cada una de las reducciones recogiera de manera pertinente y eficaz los desarrollos más representativos de los estudiantes.

El disponer de un espacio de clases mediado por la resolución de problemas como metodología, contribuye a mejorar los procesos, pues mediados por un trabajo cooperativo por parte de los estudiantes y desde nuestra labor como mediadores del proceso se logró articular diversas situaciones que ayudan al estudiante a ser el actor principal del mismo y mediar los conocimientos para mejorar y construir procesos más sólidos, enmarcados en las situaciones significativas.

Finalmente, resulta importante para nosotros reconocer que los aprendizajes y procesos llevados a cabo desde el comienzo de la maestría, aportan aprendizajes significativos teórica y metodológicamente hablando al desarrollo de la propuesta de investigación, pues nos ayuda a tener suficientes argumentos para justificar cada una de las acciones generadas y validar su implementación. Así pues, consideramos que para ejercer mejor nuestra profesión, en todo ámbito debemos contar con una formación constante y nosotros como profesores investigadores, tenemos la necesidad de ejercer y modificar cambios notorios en las diferentes prácticas educativas, con el objetivo de tener una actitud crítica y reflexiva de las acciones que intervienen en la construcción del conocimiento.

## **BIBLIOGRAFÍA**

- Abril, G. (1994) "Análisis semiótico del discurso", en J. M. Delgado y J. Gutiérrez, (eds.): *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales*. Madrid, Síntesis
- Acevedo, M (2003) "La Evaluación en el aula de matemáticas" Trazas Y Miradas. Evaluación Y Competencias. . En: Colombia ISBN: 958701295X ed: Universidad Nacional De Colombia.
- Balli, B. Guido, S. Campo, C. & Mendoza, M. (2001) Evaluación del aprendizaje del conocimiento en metodologías constructivistas. Tesis para optar por el título de Magister en Educación con Énfasis en Docencia Universitaria. UPN.
- Bardin, L. (1986): El análisis de contenido. Madrid, Akal.
- Benítez, Naranjo, Rodríguez & Villamil (2001) una propuesta para iniciar el estudio de la proporcionalidad inversa. Tomado de transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer (pp. 222-240). Bogotá: una empresa docente.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2):33-115. Traducción de Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo.
- Cajaraville, J., Rocha, T., & Rodríguez, F. (2010). Significado referencial y personal de nociones algebraicas en educación Secundaria. El caso del número áureo. *Innovación Educativa*, N. ° 20. págs. 15-35.
- Camelo, F & Mancera G., (2006). El currículo desarrollado en torno a la proporcionalidad: un estudio cualitativo realizado en secundaria. Universidad Pedagógica Nacional. Docencia de la Matemática Departamento de Matemáticas.
- Cañón, L., Carrasquilla, S., & Diamante, L. (2001). Propuesta para el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento numérico enfocados desde la Resolución de problemas. Tesis para optar por El título de Licenciado en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas
- Castañares, W., (1994). La orientación semiótica. Facultad de CC. De la Información Universidad Complutense de Madrid. Texto publicado originalmente como el capítulo 3 del libro *De la interpretación a la lectura*, Madrid, Iberediciones, 1994, pp. 117-165
- Charnay, R. (1993). Aprender por medio de la resolución de problemas. *Didáctica de matemáticas*. Aportes y reflexiones. Cap. 2. Editorial Paidós. Buenos Aires, Argentina.
- Clark, D. (2002) Evaluación constructiva en Matemáticas. Pasos prácticos para profesores. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

- De Ketele y Rogers. (1995). Metodología para la recogida de información. Madrid: Editorial la Muralla
- Espinal, A., Suarez, A., Araque, T., & Vanegas, H. (2003). La enseñanza de la proporcionalidad: un camino largo por recorrer. En P. Perry, E. Guacaneme, L. Andrade, & F. Felipe, *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer* (págs. 155-165). Bogotá: una empresa docente. R
- Fresneda, P. Gutiérrez, F. & Pantano, O., (2010). La heurística como organizadora del trabajo en una comunidad de aprendizaje: Una herramienta de negociación de la empresa en un proceso de resolución de problemas. Memorias del 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa 2010
- García, G., & Serrano, C. (1999). La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural. Grupo Editorial Gaia, 1999. 52p. - Colección: Cuadernos de Matemática Educativa No. 3. Bogotá, D.C.,
- García, G. O. (2003). Currículo y evaluación en matemáticas. Un estudio en tres décadas de cambio en la educación básica. Bogotá: Magisterio.
- Giménez (1997): Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas. Primera parte: Principios. p. 12-35
- Godino, J & Batanero, C. (2002). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat – Maestros. Matemáticas y su didáctica para maestros- Manual para el estudiante. Disponible en [http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3\\_Proporcionalidad.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf)
- Godino, Batanero & Font (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. The Ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.
- Guerrero, F. Sánchez, N & Lurduy, O (2006). La práctica docente a partir de los Modelos DECA y TSD. Bogotá. Universidad Distrital.
- Iñiguez, C., con (2008). La evaluación al servicio de quién. Significados que los estudiantes de 2° y 3° año de enseñanza media científico humanista le otorgan a la evaluación de los aprendizajes. Tesis para optar al grado de Magíster en Educación. Universidad de Chile. 2008
- Londoño, N. y Bedoya, H. (1988). Serie Matemática Progresiva. Aritmética y Geometría 7. Bogotá: Grupo Editorial Norma Educativa. Pág. 243
- López, A., Rodríguez, D., & Rojas, M., (2005) Condiciones en las que puede ser observada la ruta de estudio en el aula de matemáticas. Estudio exploratorio de instrumentos. Informe final de coinvestigación. Universidad Distrital Francisco José de Caldas

- López, A. (2014). Una aproximación a la comprensión de la proporcionalidad Directa. Reporte de una experiencia.
- Lurduy, O (2007 -2009). EL SISTEMA DIDÁCTICO Y EL TETRAEDRO DIDÁCTICO. Elementos para un análisis didáctico de los procesos de estudio de las matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas
- Lurduy, J. O (2012). El sistema didáctico y el tetraedro didáctico. Elementos para el análisis didáctico de los procesos de estudio de las matemáticas. En: Libros de Énfasis, No 2. DIE-UD pensamiento, epistemología y lenguaje matemático. Olga Lucía León, compiladora.
- Lurduy, O. (2013). Conceptualización y evaluación de las competencias para el análisis, reflexión y semiósis didáctica. El caso de los estudiantes para Profesor de Matemáticas Una aproximación desde el enfoque ontosemiótico y la semiótica Peirceana. Tesis Doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas Doctorado interinstitucional en Educación Énfasis en educación matemática.
- Mejía, A., (2012) Una propuesta para la evaluación del proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesor en un espacio de formación de la LEBEM mediado por la metodología de resolución de problemas. Tesis para optar por El título de Licenciada en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Ministerio de Educación Nacional, Colombia. (MEN). (2010). Propuesta de lineamiento para la formación por competencias para la educación superior. Disponible en:[www.mineducacion.gov.co/1621/articulos/archivo\\_pdf\\_lineamientos.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1621/articulos/archivo_pdf_lineamientos.pdf).
- Mochón, S. (2012) Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres Educación Matemática, vol. 24, núm. 1. Págs... 33-157 Grupo Santillana México Distrito Federal, México
- Ortiz, J. J., Font, V., Mayén, S. (2009). Significados personales de la media aritmética de profesores en formación. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 345-353). Santander: SEIEM
- Prieto, L. (2009). *Proporcionalidad simple: estrategias utilizadas por los estudiantes*. Bucaramanga. R
- Remesal, A., (1999). Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria: perspectiva de profesores y alumnos. Tesis Doctoral. Facultad de Psicología UB.
- Rico, Luis (2000). La educación matemática en la enseñanza secundaria. Editorial Horsori
- Sanmartí, N. (1998). La evaluación de los aprendizajes. (Adaptado del capítulo 2 del libro: Gairin, J. & Sanmartí, N. (1998) *La evaluación institucional*. Ministerio Educación. Argentina.

- Santos Trigo. L (1997) Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México D.F.: Iberoamérica.
- Strauss & Corbin (2002) Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada,
- Taylor, S. J., Bogdan. R. (1986). Introducción a los métodos cualitativos de la investigación. Barcelona: Paídos Ibérica.
- Torres, F. (2013). Evaluación de los significados personales en la construcción de la función lineal
- Vasilachis, I. (2006) Estrategias de investigación cualitativa. Gedisa Editorial. Barcelona, España.
- Vergnaud, G., (1981), Multiplicative Conceptual Field: What and Why? En: Multiplicative Reasoning, Edit. G. Harel and J. Confer'1, Pp. 41-59. State University of New York Press.
- Vinent S. Manuel. (2003) Trazas y miradas. Evaluación y competencias. Una mirada a la evaluación.
- William, D (2009) Una síntesis integradora de la investigación e implicancias para una nueva teoría de la evaluación formativa. [En línea] Archivos de Ciencias de la Educación (4ª. época), 3(3). Disponible en: [http:// www.fuentesmemoria.fahce.unlp.edu.ar/art\\_revistas/pr.4080/pr.4080.pdf](http://www.fuentesmemoria.fahce.unlp.edu.ar/art_revistas/pr.4080/pr.4080.pdf)