Resolver ecuaciones: “más allá de estar sumando y pasar a restar”

Emerson Garzón Herrera

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

Énfasis en Educación Matemática

Bogotá, Septiembre de 2017

Resolver ecuaciones: "más allá de estar sumando y pasar a restar"

Emerson Garzón Herrera

20152184012

Trabajo para optar al título de Magíster en Educación

Modalidad Profundización

Director

Rodolfo Vergel Causado

Doctor en Educación con Énfasis en Educación Matemática

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Facultad de Ciencias y Educación

Maestría en Educación

Énfasis en Educación Matemática

Bogotá, Septiembre de 2017

Dedicatoria

A mi hija Kiana; verte nacer y crecer han sido la luz que orienta el camino de mi vida.

A María Paula; tu amor, tus palabras, tu compañía y esa inmensa paciencia fueron esenciales para culminar este proyecto.

A la memoria de Carlos Andrés Villa Parra, porque este era un sueño de los dos.

Agradecimientos

A Rodolfo Vergel, por orientar este trabajo y por brindarme su apoyo y amistad.

A los profesores de la maestría; por compartir, discutir y reflexionar de la forma en que lo hicieron a lo largo de estos dos años.

A Nelly Ruíz por su apoyo, colaboración y por creer en mí.

A los estudiantes del Liceo Español Pérez Galdós, porque son la piedra angular de todo este trabajo.

A Alejandro, Wilson, Paola, Liseth, William, John Carlos, José Luís, Jerry y Sandra; por crecer juntos en medio de alegrías y tristezas estando juntos tanto en unas como en otras.

A mi madre y hermanos, por estar ahí… siempre.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN (RAE) UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN MAESTRÍA EN EDUCACIÓN BOGOTÁ, D.C.
1. TÍTULO Resolver ecuaciones: “más allá de estar sumando y pasar a restar”
AUTOR Garzón Herrera, Emerson
LUGAR DE ELABORACIÓN Bogotá, D.C. Colombia.
TIPO DE DOCUMENTO Tesis de grado
2. PALABRAS CLAVES Medios semióticos de objetivación, Narrativa simbólica, Teoría cultural de la objetivación, Designación simbólica, Procesos semióticos de simbolización.
3. OBJETIVO GENERAL Identificar y analizar la emergencia de los medios semióticos de objetivación que movilizan estudiantes de grado séptimo en su actividad matemática cuando transforman problemas verbales en narrativas simbólicas.
4. DESCRIPCIÓN Este trabajo se enfocó en los aspectos relacionados con la Teoría Cultural de la Objetivación, donde la idea de educación da reposo a una posición política-conceptual como una invitación para repensar la finalidad de la educación matemática más allá de los horizontes que la definen y justifican como tarea social (Radford, 2014a); es decir, pretende imaginar la educación matemática como algo que está centrado tanto en los saberes como en los seres. En particular, para el desarrollo de este estudio se considera que al utilizar una letra (“x” u otra) se descubre un nuevo espacio semiótico en el cual, un problema verbal (enunciado en lenguaje natural) “tiene que ser re-dicho, conduciendo a lo que ha sido usualmente llamado la 'traducción' del problema en una ecuación” (Radford,

2002). Para ello, se analizan desde una concepción multimodal del pensamiento matemático, la actividad matemática y las producciones de un grupo de estudiantes de grado séptimo de educación básica secundaria.

5. FUENTES

Para la realización de este estudio se utilizaron diferentes referencias bibliográficas. Algunas de las más relevantes son:

Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 1-26.

Radford, L. (2002). Sobre héroes y colapso de narrativas: una contribución al estudio del pensamiento simbólico. *Conferencia Internacional del Grupo de Psicología de la Educación de Matemáticas, PME*, (págs. 81-88).

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2014a). La enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva histórico-cultural: la teoría de la objetivación. Ciclo de conferencias en Educación Matemática-GEMAD. Bogotá, Colombia. Octubre 18 2014.

Radford, L., & Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. In Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*, 157-182. New York: Springer.

Vergel, R. (2015). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* Bogotá: Tesis Doctoral, Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

6. CONTENIDO

Este informe está presentado en cinco capítulos distribuidos de la siguiente manera:

El capítulo uno presenta los elementos problemáticos que constituyen el estudio; el planteamiento del problema, los antecedentes, así como el objetivo propuesto. Posteriormente en el segundo capítulo se presenta el marco referencial, donde se exponen la perspectiva semiótica cultural así como la ilustración del término *narrativa simbólica*, elementos en los cuales está sustentado teóricamente el estudio. El capítulo tres corresponde a la metodología; en este se presenta el diseño, las fases y la caracterización de los participantes. Posteriormente, se ilustra la manera como se ejecutaron las acciones, decisiones y justificación de las tareas con el fin de recolectar la información y de esta manera constituir los datos susceptibles de análisis que permitieron responder la pregunta orientadora.

El cuarto capítulo presenta el análisis y la forma como fueron interpretados los datos dentro de las categorías de análisis propuestas para desarrollar el estudio de manera multimodal. Este análisis se ilustra por cinco episodios en los cuales se hacen explícitos los medios semióticos de objetivación que movilizaron o activaron los estudiantes en el acto de conocer. En el capítulo cinco se dará respuesta a la pregunta orientadora del estudio, se presentarán las reflexiones personales del trabajo así como las observaciones finales subyacentes a este. Finalmente, se incluyen las referencias bibliográficas y anexos de las producciones de los estudiantes durante el desarrollo de este estudio.

7. METODOLOGÍA

El estudio se desarrolló metodológicamente dentro de un enfoque multi-semiótico (Radford & Sabena, 2015) acerca del cómo se estudió la transformación de problemas verbales en narrativas simbólicas. Dado que la labor, como actividad que media y actualiza el saber es intersubjetiva, sensual y material, se tuvieron en cuenta todas las señales que intervienen en los signos escritos, pero además, identificando los signos corporales tales como los gestos y la postura. En otras palabras, ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gesteado por los estudiantes fue analizado de manera aislada, antes bien, estas formas de expresión se estudiaron como partes clave del proceso de objetivación (Miranda et al., 2007). Para identificar los medios semióticos de objetivación, utilizamos un video-análisis cuadro a cuadro, empleando una cámara de video para registrar las actividades en pequeños grupos de estudiantes. Se seleccionaron episodios para ser transcritos siendo analizados en detalle, y se enfrentaron con los principios teóricos (Radford & Sabena, 2015), trazando el

“momento a momento” de las actividades situadas de los sujetos; dando una atención especial a recursos semióticos a través de los cuales se desarrollaron las actividades matemáticas de los estudiantes y del profesor.
8. CONCLUSIONES Los resultados encontrados sugieren que en la actividad matemática se da la emergencia de los medios semióticos de objetivación buscados; puesto que en las tareas implementadas hubo demandas que facultaron a los estudiantes la posibilidad de expresarse semióticamente, aunque con la premisa de otorgarles tareas cotidianas o problemas “clásicos” a los cuales se puede enfrentar cualquier estudiante escolar de su edad en nuestro país. Se considera entonces, que en la designación simbólica de los objetos, la forma en que los distintos signos fueron representando alguna cosa, se promovieron formas culturales de interacción y de cooperación que hacen pensar en que sus intenciones dieron vida a las marcas que constituyen al signo como un acto, y estas marcas se fueron convirtiendo en signos para expresar “algo” (su significado). De acuerdo Radford es posible afirmar, que la posibilidad de operar con lo indeterminado está ligado al tipo de significado que los símbolos llevan.

Contenido

Índice de figuras y tablas

Introducción

La necesidad de iniciar a los estudiantes al pensamiento algebraico referido en términos generales al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional" (Rojas & Vergel, 2012), se puede caracterizar a través del *modo simbólico* que debe designar a sus objetos. Este trabajo se enfocará en los aspectos relacionados con la Teoría Cultural de la Objetivación iniciada por el profesor Luís Radford, planteando el objetivo de la educación matemática como un "esfuerzo político, social, histórico y cultural cuyo fin es la creación de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente" (Radford, 2014a).

Abordar este trabajo desde una perspectiva semiótica cultural nos permite plantear el problema de la cognición como una *reflexión* de la práctica social (Radford, 2006). En la reflexión suscitada; la semiótica, dotada de signos y artefactos permite la mediación de la actividad cognitiva, y en donde signos y artefactos aportan elementos en dicho proceso de reflexión. Durante el tiempo que he estado trabajando con estudiantes de secundaria he observado cómo los estudiantes sólo pueden obtener resultados a una ecuación mediante la ejecución de una "receta", pero difícilmente logran asociar las ideas claves sobre el papel que cumple una ecuación en la resolución de problemas que vinculan relaciones entre cantidades. De acuerdo con esto, identifico como problemática, la manera en que los estudiantes denominan los objetos por medio del simbolismo algebraico.

A partir de una revisión de antecedentes al respecto, se observa la importancia de trabajar en estudios que permitan reflexionar sobre los acontecimientos en el aula de clases, frente a la elaboración de significados en matemáticas, asociados a las representaciones semióticas, éstas, en torno al desarrollo del pensamiento algebraico. En particular, el papel de los medios semióticos de objetivación, el cual constituye un intento por comprender las actuaciones de los estudiantes mediante la estratificación del objeto matemático (Vergel, 2015).

Este informe está presentado en cinco capítulos distribuidos de la siguiente manera:

El capítulo uno presenta los elementos problemáticos que constituyen el estudio; el planteamiento del problema, los antecedentes, así como el objetivo propuesto. Posteriormente en el segundo capítulo se presenta el marco referencial, donde se exponen la perspectiva semiótica cultural así como la ilustración del término narrativa simbólica, elementos en los cuales está sustentado teóricamente el estudio. El capítulo tres corresponde a la metodología; en este se presenta el diseño, las fases y la caracterización de los participantes. Posteriormente, se ilustra la manera como se ejecutaron las acciones, decisiones y justificación de las tareas con el fin de recolectar la información y de esta manera constituir los datos susceptibles de análisis que permitieron responder la pregunta orientadora de este estudio.

El cuarto capítulo presenta el análisis y la forma como fueron interpretados los datos dentro de las categorías de análisis propuestas para desarrollar el estudio de manera multimodal. Este análisis se ilustra por cinco episodios en los cuales se hacen explícitos los medios semióticos de objetivación que movilizaron o activaron los estudiantes en el acto de conocer. En el capítulo cinco se dará respuesta a la pregunta orientadora, se presentarán las reflexiones personales del estudio así como las observaciones finales subyacentes al trabajo. Finalmente, se incluyen las referencias bibliográficas y anexos de las producciones de los estudiantes durante el desarrollo de este estudio.

Capítulo 1

Antecedentes, contexto y justificación del estudio

En este capítulo se presentan las ideas que fundamentan el estudio. En la primera parte se realiza una contextualización frente a la designación simbólica de los objetos, enfocada bajo los principios de la Teoría Cultural de la Objetivación (TCO) y se formula la pregunta orientadora del estudio. En la segunda parte se reportan antecedentes asociados al pensamiento algebraico, al problema de la traducción entre los sistemas de representaciones algebraicas y verbales de las ecuaciones, así como investigaciones enmarcadas en la TCO que permitan establecer el objetivo general del trabajo.

1.1 Contexto y justificación del estudio

La necesidad de iniciar a los estudiantes al pensamiento algebraico puede ocurrir vinculando la aritmética con el álgebra mediante la orientación de aspectos numéricos y espaciales hacia ideas algebraicas tales como la variable, incógnita, la relación funcional y el número general (Butto & Rojano, 2004). De esta manera, avanzar en la clarificación de la naturaleza del razonamiento algebraico elemental es un tema complejo pero necesario desde el punto de vista educativo (Godino, Castro, Aké, & Wilhelmi, 2012). Este pensamiento algebraico se "refiere al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional" (Rojas & Vergel, 2012); en otras palabras, el pensamiento algebraico se puede caracterizar a través del *modo simbólico* que debe designar a sus objetos.

Este trabajo se enfocará en los aspectos relacionados con la Teoría Cultural de la Objetivación (TCO). En esta teoría, la idea de educación da reposo a una posición política-conceptual. Esta posición es una invitación para repensar la finalidad de la educación matemática, más allá de los horizontes que la definen y justifican como tarea social, es decir, pretende imaginar la educación matemática como algo que es más que una tarea centrada sobre los saberes, centrándola en los saberes y los seres.

Abordar este trabajo desde una perspectiva semiótica cultural nos permite plantear el problema de la cognición como una *reflexión* de la práctica social (Radford, 2006). En la reflexión suscitada, la semiótica, dotada de signos y artefactos permite la mediación de la actividad cognitiva, y en donde signos y artefactos aportan elementos en dicho proceso de reflexión. De acuerdo con Radford (2006), "objetivar el saber es la acción de convergencia del signo y del pensamiento que lleva a hacer aparente lo que en el mundo conceptual se perfila como meramente potencial". Objetivar es toparse con el objeto (con eso que objeta a la conciencia) en el encuentro entre lo subjetivo y lo cultural. En esta vía, se hace necesario y pertinente plantear el tema de la mediación semiótica en el sentido de Vygotski, así como su vínculo con el desarrollo del pensamiento (Vergel, 2015).

Ahora bien, bajo el propósito de establecer el problema de estudio, necesitamos hablar entonces acerca del pensamiento algebraico e identificar teóricamente cómo emerge dicho pensamiento en los estudiantes. El pensamiento algebraico, como forma particular de reflexionar matemáticamente (Radford, 2010, citado en Vergel, 2013), es caracterizado mediante tres elementos interrelacionados: el sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros; opuesto a la determinancia numérica), la analiticidad (como forma de trabajar los objetos indeterminados; reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos) y la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos (manera específica de nombrar o referir los objetos). El aprendizaje de las ecuaciones, visto como contenido del currículo, no debe limitarse únicamente a la estructura formal del concepto, ya que además es la puerta de entrada a los aspectos intuitivos que pueden desarrollarse mediante la adquisición del pensamiento algebraico en los primeros años de la educación secundaria.

A través de mi experiencia he observado, cómo los estudiantes sólo obtienen resultados a una ecuación mediante la ejecución de una "receta", pero difícilmente logran asociar las ideas claves sobre el papel que cumple una ecuación en la resolución de problemas que vinculan relaciones entre cantidades. De acuerdo con esto, identifico una problemática en la manera que los estudiantes denominan los objetos por medio del simbolismo algebraico. Radford (2002) afirma que al utilizar una letra ("x" u otra) se descubre un nuevo espacio semiótico, en el cual, un problema verbal "tiene que ser re-dicho, conduciendo a lo que ha sido usualmente llamado la 'traducción' del problema en una ecuación". Sin embargo, Radford se inclina por utilizar el término *narrativa simbólica* afirmando que "lo que es 'traducido' todavía nos cuenta una historia, pero en símbolos matemáticos".

Dentro de una perspectiva semiótica cultural en la cual el pensamiento es considerado una actividad reflexiva, sensible y mediada por signos encarnada en la corporeidad de las acciones, gestos y artefactos (Radford, 2010); explorando la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos (Vergel, 2015), es posible proponer un estudio que permita responder la pregunta: *¿Qué medios semióticos de objetivación se movilizan en estudiantes de grado séptimo en la actividad matemática, cuando transforman problemas verbales en narrativas simbólicas?*

1.2 Antecedentes y objetivo general del trabajo

Con el fin de orientar y constituir un objetivo general para el desarrollo de este estudio, se realizó una búsqueda de antecedentes de investigaciones en educación matemática; en particular, estudios donde se abordasen problemas asociados a la "traducción" y la interpretación, el desarrollo del pensamiento algebraico, las representaciones semióticas e investigaciones desarrolladas desde una perspectiva semiótico cultural.

El simbolismo algebraico es el fundamento lingüístico que da voz al pensamiento algebraico, y de acuerdo con Kieran (1989, p, 165) "para una caracterización significativa del pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente". Asimismo, dar paso al pensamiento algebraico en los primeros grados implicará "el desarrollo de formas de pensar para las que el álgebra puede ser utilizado como una herramienta, como por ejemplo, el análisis de las relaciones entre cantidades, la identificación de las estructuras, el cambio, la generalización, la resolución de problemas, el modelado, lo que justifica, lo que demuestra, y la predicción" (Kieran, 2004, p. 149).

La investigación de Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro (2015), acerca de las traducciones de expresiones algebraicas que realizan escolares de educación secundaria; tuvo como objetivo identificar y clasificar los errores en los que incurren los estudiantes al realizar las traducciones entre los sistemas de representación simbólico y verbal. Dentro de los resultados obtenidos se destaca como un hallazgo relevante que se presenta un gran número de errores en traducciones del sistema de representación verbal al simbólico. Para este grupo de investigadores, una posible explicación de esta dificultad es que los estudiantes abordan la traducción de forma semántica y crean una estructura cognitiva de la situación, diferente a la expresada por el enunciado verbal. Este fenómeno es interpretado entonces como el resultado de la interacción entre la relativa ambigüedad del lenguaje verbal y la relativa precisión del lenguaje matemático.

Algunos antecedentes nacionales frente al estudio de las ecuaciones me guiaron al trabajo de Cifuentes, Dimaté, Rincón, Velásquez, Villegas y Flores (2012), quienes consideran el problema de la interpretación de frases que deben ser traducidas a un lenguaje formal para construir expresiones algebraicas y con ellas generar ecuaciones creando una barrera para la utilización real del álgebra. Para abordar esta problemática, implementaron una unidad didáctica en la cual pudieran observar a los estudiantes utilizando el lenguaje algebraico para traducir enunciados, estableciendo relaciones entre diferentes sistemas de representación, posibilitando el tránsito de un sistema al otro. Es decir, que al resolver un problema deban expresar el enunciado del problema con signos que caracterizan una ecuación, estableciendo la relación entre el sistema de representación verbal y el simbólico. Luego de la implementación, los autores encontraron que los estudiantes consiguieron utilizar las ecuaciones lineales como herramienta para la solución de problemas, desarrollando competencias matemáticas como manejar lenguaje simbólico, representar, comunicar y usar material manipulativo y tecnológico.

Por otra parte; Serrano, Moreno, Santoyo, Hernández, Gutiérrez y Lupiáñez (2012), identificaron dificultades que tienen estudiantes de grado octavo para usar adecuadamente la simbología matemática en el planteamiento de ecuaciones, así como para realizar algunos procedimientos matemáticos necesarios en la resolución de ecuaciones y comprender lo que dice el enunciado de un problema e identificar los datos que hay en él, entre otros. Para abordar esta problemática, decidieron implementar una unidad didáctica; entre los resultados obtenidos de esta implementación, los estudiantes identificaron datos conocidos y desconocidos al traducir enunciados en lenguaje natural y simbólico y representaron simbólicamente ecuaciones lineales a partir de enunciados verbales. Sin embargo, cuando los enunciados incluyeron cantidades fraccionarias, consideran que no se aprecia coherencia entre el enunciado y el planteamiento y que a pesar del trabajo, persisten -aunque en menor medida- dificultades para establecer las relaciones aritméticas entre los diferentes datos del enunciado.

Desde la perspectiva de la teoría cultural de la objetivación, Moreno (2014) observó el proceso de objetivación de un grupo de estudiantes de grado sexto a partir de la evolución de los medios semióticos emergentes al abordar tareas sobre generalización de patrones, centrando el foco teórico de su investigación en el proceso de contracción semiótica. Para llevar a cabo su objetivo tomó como unidad de análisis los medios semióticos presentes en la labor matemática vista desde una perspectiva multimodal, conformando nodos que mostraran la acción lingüística-perceptiva-gestual de los estudiantes. La evolución en términos del refinamiento de fórmulas corpóreas para dar cuenta del proceso de objetivación de los estudiantes, sugieren un refinamiento de recursos semióticos y en consecuencia una concentración del significado en relación con la manera de abordar la tarea desde un punto de vista algebraico, es decir, encontró un despliegue de un proceso de contracción semiótica.

Enmarcado en la perspectiva semiótica cultural, Pantano (2014) revisó las formas de reflexión, acción y expresión asociadas a la manifestación, desarrollo y evolución del pensamiento aditivo de estudiantes de grado tercero al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales. Con el propósito de poner en evidencia que los actos de conocer, conceptualizar y de pensar por parte de los estudiantes están fuertemente influenciados por modalidades sensoriales que emergen y se manifiestan a través del cuerpo, el movimiento, la actividad perceptual, la ritmicidad y el uso de signos, analizó desde una concepción multimodal del pensamiento matemático la actividad matemática y las producciones de los estudiantes. A partir del análisis y las diversas producciones, afirma que en la labor conjunta en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tanto los estudiantes como la profesora lucharon por comunicar sus intenciones y organizar sus acciones en el tiempo y en el espacio a través de la movilización de diferentes medios semióticos de objetivación.

La necesidad de apropiarse de posibilidades para transformar una representación semiótica de un objeto matemático en otra, fundamentó la investigación de Rojas (2014), la cual estuvo orientada al fenómeno relacionado con la articulación y el cambio de sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, obtenidas mediante tratamiento. Este investigador describe y analiza los procesos de asignación de sentidos de estudiantes de grado 9° y 11° en relación con tareas específicas, indagando por el sentido asignado a ciertas representaciones semióticas en las que se requiere realizar transformaciones de tratamiento. Este autor reporta dificultades que tienen los estudiantes para articular sentidos asociados a expresiones reconocidas por ellos como sintácticamente equivalentes, en tanto pueden establecer las transformaciones requeridas para obtener una de ellas a partir de la otra. Asimismo, evidencia la importancia de los procesos de interacción como elemento fundamental para posibilitar la articulación de sentidos asignados a expresiones sintácticamente equivalentes.

Por su parte, Vergel (2015) asume el problema de la emergencia de formas de pensamiento algebraico en niños de 9 y 10 años en el contexto de las acciones a través de las cuales expresan sus generalizaciones. Para este investigador, las formulaciones que expresan las generalizaciones de los alumnos pueden componerse de acciones como gestos, ritmos, miradas, palabras, es decir, de formulaciones que se expresan y se despliegan en el espacio y el tiempo. La investigación se dirigió entonces, a explorar la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones. Dentro de la síntesis y reflexión de la investigación, el autor sugiere analizar sistemáticamente la incorporación del lenguaje natural en las formulaciones algebraicas de los estudiantes; considera que este análisis quizás conduzca a comprender aún más el proceso de contracción semiótica de los estudiantes.

De acuerdo con esta revisión de antecedentes, converge la importancia de trabajar en estudios que permitan reflexionar sobre los acontecimientos en el aula de clases, frente a la elaboración de significados en matemáticas asociados a las representaciones semióticas, éstas, en torno al desarrollo del pensamiento algebraico. En particular, el papel de los medios semióticos de objetivación, el cual constituye un intento por comprender las actuaciones de los estudiantes mediante la estratificación del objeto matemático (Vergel, 2015). Para la realización de este estudio se establecerá entonces como objetivo general: *Identificar y analizar la emergencia de los medios semióticos de objetivación que movilizan estudiantes de grado séptimo en su actividad matemática cuando transforman problemas verbales en narrativas simbólicas.*

Capítulo 2

Referentes teóricos

En este capítulo se encuentran los fundamentos teóricos que sustentan la propuesta del trabajo. En la primera sección se presentan los elementos característicos relacionados al objetivo de la educación matemática desde la Teoría Cultural de la Objetivación, colocando al centro de su teorización sobre la enseñanza y el aprendizaje el concepto de actividad o labor. Dentro de esta teorización se ponen de manifiesto dos principios fundamentales: los procesos de objetivación y de subjetivación, con el fin de desarrollar algunos elementos teóricos referentes a los medios semióticos de objetivación, quienes tienen un papel preponderante en el desarrollo y la emergencia del pensamiento de los estudiantes. Para finalizar este capítulo, en la segunda sección se presenta una distinción entre los problemas verbales y las narrativas simbólicas. Esta distinción permitirá abordar el cómo los estudiantes pretenden que las expresiones simbólicas lleven significado cuando dan paso a la designación de objetos y operan con los signos designantes en típicos problemas verbales cortos.

2.1 La perspectiva semiótica cultural

Es notable cómo en los últimos años, las investigaciones en educación matemática se han interesado por estudiar el desarrollo de las habilidades comunicativas de los estudiantes, en particular el cómo se comunican las ideas matemáticas. Desde la teoría cultural de la objetivación, la interacción social, el uso de signos y artefactos toma vital importancia en el proceso de aprendizaje, ya que son mediadores de la actividad reflexiva del sujeto, que se ve materializada en la corporeidad de las acciones, gestos y expresiones (Vergel, 2015). La comunicación permite al estudiante establecer relaciones entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas, así como conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas (MEN, 1998).

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (1998), al visualizar una representación, como puede serlo una ecuación, el estudiante puede así describir distintas situaciones, empezando a comprender la potencia de las matemáticas, así como la utilidad de éstas. Desde la TCO, quienes permiten lograr "una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones para adquirir las metas de sus acciones", son los artefactos y signos utilizados por los individuos (Radford, 2003); dichos elementos son denominados los *medios semióticos de objetivación*. Los gestos, el lenguaje, los símbolos, entre otros, se convierten en elementos constituyentes del acto cognitivo que posiciona el objeto conceptual, no dentro de la cabeza del individuo, sino en el plano social (Radford, 2006), lo que los convierte en instrumentos culturales, que contribuyen a modificar radicalmente el proceso de aprendizaje, permitiendo a los estudiantes organizar y regular sus propios procesos cognitivos (Vergel, 2015).

En armonía con los cambios de contenidos en los curriculum de matemáticas, Radford (1999) señala la emergencia de un cambio de naturaleza metodológica, traducida por un énfasis en el aspecto de la comunicación en el aula y apoyado por una visión más social del aprendizaje. Es decir, una mirada en la que el estudiante junto con otros estudiantes y el profesor son convocados a participar en tareas y proyectos en los cuales la parte discursiva obtenga una dimensión explícita en la elaboración del conocimiento. Este autor reconoce la importancia epistémica del lenguaje, pero plantea que si bien es un mediador de las actividades humanas, no es posible describir adecuadamente los modos de pensar, conocer y conceptualizar solo en términos de prácticas discursivas (Rojas, 2014).

Para desentramar el problema de la representación de las ecuaciones, acudiremos a la idea de signo en Vygotski, la cual, inspirada en la categoría marxista de labor concibe el signo como una herramienta (Radford, 1999). Aludiendo que tal y como los seres humanos utilizan herramientas de labranza para dominar la naturaleza, de la misma manera usan herramientas psicológicas (las palabras, el lenguaje y otros objetos físicos) para pensar y dominar el comportamiento. Se afirma que "el signo, al principio, es siempre un medio de relación social, un medio de influencia sobre los demás y tan sólo después se transforma en un medio de influencia sobre sí mismo" (Vygotski, 1931, citado en Vergel, 2015), esto es, que más allá de influenciar las conductas, el signo es un instrumento que transforma al sujeto mismo. De acuerdo con Vergel (2015), el significado de un signo no se descubre, sino que él mismo se materializa, gesta y transforma durante una situación comunicativa gracias al intercambio lingüístico establecido por los usuarios entre sí.

La conceptualización anterior nos permite ahora explicar la manera en que en este estudio estamos concibiendo el signo. Para Radford (1999) los signos no son vestimentas, ni meras herramientas auxiliares para pensar "mejor" o para superar convenientemente las limitaciones de nuestra memoria, sino “el resultado de la contracción semiótica de acciones previamente realizadas en el plano social”. Es importante aclarar que puede una acción ocurrir o no necesariamente en la proximidad de la producción del signo. Es decir, “el signo es, en general, el signo de otros signos” (op. cit. p-31). Para ejemplificar esta idea, una acción pudo haberse originado con el gesto que señala el objeto (primer signo) y que luego se reemplaza por una palabra sonora (segundo signo) que se convierte luego en palabra del lenguaje articulado (tercer signo) y que termina, al final de un largo ciclo, en un signo escrito.

Como aproximación semiótica-cultural de la educación matemática, Vergel (2015) se interesa en el papel que desempeñan el organismo (lo corpóreo), el discurso y los signos cuando los estudiantes refieren a objetos matemáticos. En otras palabras en el estudio de la comprensión del pensamiento matemático, deben abordarse ciertos problemas de la cognición humana, entre ellos el del uso de signos y artefactos en la cultura. La teoría cultural de la objetivación parte de reposicionar al individuo como un sujeto que vive, piensa y actúa en el marco de su cultura y toma como premisa que la base de la cognición se encuentra en la actividad humana sensitiva y concreta (Radford, 2010, citado en Vergel, 2015). Es importante señalar que el enfoque semiótico cultural asume dos principios: i) *los signos permiten a los individuos reflexionar sobre el mundo* y ii) *el mundo es reflejado y refractado en los signos y en la forma en que estos son usados*. De acuerdo con Rojas (2014), estos principios llevan a considerar la semiótica no solo en su papel de representación de los objetos matemáticos, en tanto la actividad matemática está anclada a los complejos simbólicos de la cultura en que se desarrolla.

La teoría cultural de la objetivación parte de una posición política-conceptual que le da su propia forma y contenido (Radford, 2014). Concibe una idea general acerca de la educación, donde la enseñanza y el aprendizaje no tratan de saberes únicamente, sino que tratan de saberes y de seres. La TCO concibe la educación como un esfuerzo político, social, histórico y cultural, cuyo fin es la creación de individuos éticos y reflexivos que se posicionan de manera crítica en prácticas constituidas histórica y culturalmente (Radford, 2014). La

TCO tiene bases teóricas en el materialismo dialéctico de Marx, se inspira en la dialéctica de Hegel y en pensadores dialécticos como Vygotski, colocando su teorización sobre la enseñanza y aprendizaje en el concepto de actividad o labor. Para este autor, la enseñanza y el aprendizaje no son dos procesos diferentes que “corren” juntos con intersecciones, sino que son un mismo proceso a través del cual se producen saberes y subjetividades.

En la TCO, el saber es concebido como potencialidad cultural, y está constituido por sistemas de acción y reflexión incrustados en la cultura. De acuerdo con Radford (2014a), en la enseñanza y aprendizaje deben estudiarse tanto los conocimientos en juego (es decir, el *conociendo* o “knowing” de los alumnos), como la formación del alumno en tanto que sujeto humano (es decir, el *volviéndose* o “becoming,” esto es, la transformación perpetua del sujeto). De acuerdo con la teoría de la objetivación, el principio fundamental que permite estudiar el knowing y el becoming es el de *labor* o trabajo en el sentido dialéctico materialista. Porque es a través de la labor que encontramos al otro y al mundo en sus dimensiones conceptuales y materiales. Para este autor, en su sentido ontológico, la labor significa alteridad: el encuentro de eso que no soy yo, y que al encontrarlo, me transforma; ya que los seres humanos estamos hechos tanto de sangre y huesos, como de historia y relaciones sociales y culturales.

De acuerdo con Miranda, Radford & Guzmán (2007), la TCO pretende dar cuenta de la manera en que el individuo alcanza el saber cultural, distinguiendo como fuentes de producción de significados el uso de artefactos y la interacción social. Los autores quieren entonces decir que, en la vía hacia el conocimiento, la relación sujeto-objeto está mediatizada no sólo por los artefactos, sino también por la presencia del otro. La relación de alteridad, viene a desempeñar un papel epistemológico junto con la relación sujeto-objeto. Dada esta relación, es importante definir claramente los términos objetivación y subjetivación, ya que se pretende pensar el sujeto y su cultura no como dos entidades distintas, sino como expresiones de una misma formación histórico conceptual. En palabras de Radford (2014, pp. 141-142):

> *La objetivación es el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente*.

> *La subjetivación consiste en aquellos procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto que sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo.*

En sintonía con esta perspectiva, se explicita un proceso que tiene por objetivo mostrar *algo* (un objeto) a alguien. Es decir, los procesos de enseñanza-aprendizaje tienen metas que son alcanzables a partir de la interacción social, empero, no basta con las relaciones establecidas entre los individuos. Dado este hecho, ¿cuáles son los medios para mostrar el objeto? Radford los denomina *medios semióticos de objetivación*, esto es, objetos, artefactos, términos lingüísticos y en general signos que se utilizan para comunicar o hacer visible una intención y para llevar a cabo una acción (Vergel, 2015). Estos artefactos y demás son vistos más allá de su concepción instrumental como representación del conocimiento, ya que estos son depositarios de la historia cognitiva de generaciones predecesoras, radicando en ellos una responsabilidad histórica y cultural que los hace consustanciales con la actividad (Radford, 2004).

En términos de Radford (2003, p. 41), los medios de objetivación son:

> *Todos los medios utilizados por los individuos que se encuentran en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones y así adquirir las metas de sus acciones.*

El acceso a los objetos matemáticos se presenta pues, en una actividad escolar determinada, cuyo proceso se caracteriza por la existencia de medios semióticos de naturaleza diversa que permiten hacer presentes (que objetivan) esos objetos (Miranda et al., 2007). Basados en una concepción multimodal del pensamiento humano (Arzarello, 2006), un análisis de datos deberá tener en cuenta la relación de los diferentes sistemas semióticos movilizados durante la actividad (el lenguaje escrito, el lenguaje hablado, los gestos, las acciones, etc.). En otras palabras, ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gesteado por los estudiantes es analizado de manera aislada. Antes bien, estas formas de expresión se estudian como partes clave del proceso de objetivación (Miranda et al., 2007).

Por último, el sujeto social, es decir, el que actúa al aprender, se forma discursivamente (Vergel, 2015) en un proceso sensorial donde vive y piensa en el marco de una cultura, por lo cual, cada individuo toma elementos del discurso de los otros. De esta manera, el proceso de aprendizaje no es posible si no existe un individuo diferente al que desea aprender; es importante resaltar entonces, que la relación entre el estudiante y el objeto no es lineal, sino que está mediada por la presencia de otro sujeto (Miranda et al., 2007). Las relaciones entre estos son vistas desde las ideas de *togethering* y *el espacio de acción conjunta* (Radford & Roth, 2011).

Para Vergel (2015), *togethering* teoriza los elementos que sistemáticamente trascienden los límites del aquí y ahora, y de acuerdo con Radford y Roth (2011) dan cuenta de la manera ética en que los individuos se involucran, responden y ajustan el uno al otro, a pesar de sus diferencias cognitivas y emocionales, es decir, que implica un compromiso motivado por la actividad. El *espacio de acción conjunta* hace referencia a la zona concebida por las relaciones que se dan en el lugar de la interacción, donde el individuo realiza una tarea y la comparte con los otros; aquí se puede establecer una zona de desarrollo próximo, que “se presenta cuando un estudiante requiere de la ayuda de una persona que sabe más que él (el profesor o sus compañeros) para adquirir un nuevo nivel de desarrollo” (Miranda, 2009, p. 37).

2.2 La narrativa simbólica

En la transformación del lenguaje natural al lenguaje matemático existen dos problemas principales: el primero es el modo de designación de los objetos del discurso y el segundo tiene que ver con las operaciones que se llevan a cabo sobre los símbolos que designan los objetos. Cuanto mayor sea la implicación del álgebra, requiere una mayor reducción del vocabulario; dado que el lenguaje natural tiene un vocabulario muy amplio frente a los pocos símbolos del vocabulario matemático. Los estudiantes tienen dificultades para reducir a lenguaje matemático las expresiones que entienden en lenguaje natural. Para Radford (2002), el lenguaje algebraico no incluye adjetivos, adverbios y demás términos lingüísticos que resultan ser cruciales en la comunicación basada en lenguaje natural. Entre estos problemas se encuentran los signos, estos dificultan aún más la transformación de símbolos naturales en matemáticos, dado que los estudiantes no pueden operar estos símbolos debido a la dificultad que tienen para designar objetos algebraicamente.

La designación se ve interferida por la intención de los individuos; esta ocupa el espacio entre el objeto y el signo que lo representa. Esto da vida a las marcas corpóreas de los signos y hace que dichas marcas expresen *algo*; y aquello que expresan es su significado. La construcción de este significado y el uso de los símbolos está mediada por "la cuestión de cómo los estudiantes pretenden que las expresiones simbólicas lleven significado cuando proceden con la designación de objetos y operan con los signos designantes en un típico problema verbal corto" (Radford, 2002).

En el acto de designar simbólicamente, sus intenciones ocupan el espacio entre el objeto propuesto y los signos que lo "representan" (Radford, 2002). La posibilidad de operar con lo desconocido aparece entonces ligada al tipo de significado que los símbolos llevan; en el tratamiento de problemas que involucran frases comparativas la dificultad consiste en es ser capaz de derivar frases asertivas no comparativas. En el caso del álgebra, el adjetivo no es conocido; como resultado de ello, el adjetivo debe ser referido *de alguna manera*. El problema verbal tiene que ser re-dicho, conduciendo a lo que ha sido usualmente llamado la 'traducción' del problema en una ecuación. Radford prefiere utilizar aquí el término *narrativa simbólica* ya que lo que es "traducido" todavía nos cuenta una historia, pero en símbolos matemáticos.

Radford (2002) sugiere que exista una distinción entre los problemas verbales y las narrativas simbólicas. Esta distinción permite facilitar una interpretación de algunas expresiones simbólicas "sin sentido" elaboradas por los estudiantes. Además, emerge el concepto de nominalización cuyo interés teórico no es simplemente dar cuenta de la introducción de incógnitas en un problema. La nominalización es una herramienta teórica para examinar cómo las expresiones simbólicas llegan a ser dotadas de significado en este limbo donde ni se ha abandonado totalmente la historia original (dicha en lenguaje natural), ni entrado totalmente en la narrativa simbólica (dicha en símbolos). Por último existe un problema frente al uso formal o abstracto de signos para obtener la ecuación asociada con el problema verbal denominado el colapso de narrativas el cual describe la tensión que se genera cuando las operaciones algebraicas, por ejemplo, la reducción de términos semejantes, no dejan pieza alguna en el problema verbal que se pueda relacionar con el resultado de dicha operación. En otras palabras, los esfuerzos al designar los objetos para construir una narrativa simbólica, es decir, para llevar la pista del significado de la narrativa tienen que colapsar al reducir los símbolos dramáticamente al momento de realizar operaciones algebraicas.

Capítulo 3

Aspectos metodológicos

Este capítulo documenta la estructura metodológica del estudio. Este estudio se encuentra enmarcado dentro de un enfoque multi-semiótico que tiene como objetivo describir el problema didáctico bajo estudio, en este caso, la movilización de medios semióticos de objetivación que activan los estudiantes cuando transforman problemas verbales (enunciados en lengua natural) en narrativas simbólicas. En otras palabras, se observan los recursos que utilizan los estudiantes para dar significado a los símbolos con los que designan los objetos indeterminados así como los procesos que desarrollan.

3.1 Diseño del estudio

El estudio se desarrolló metodológicamente dentro de un enfoque multi-semiótico (Radford & Sabena, 2015). Este enfoque se basa en la idea Vigotskiana de *método* argumentando que "un método no es un instrumento o una mera secuencia de acciones a seguir". La idea de método a considerar se orienta hacia transmitir una visión de la realidad que ofrezca ideas sobre entidades o fenómenos, y sobre qué y cómo pueden ser investigados estos. De esta manera, las ideas constituyen principios teóricos dentro de un lenguaje y significado particular, con el cual se pueden expresar las preguntas de investigación. Para Radford y Sabena, esta es la razón por la cual los métodos funcionan en tándem con los principios teóricos y preguntas de investigación, y que una teoría puede considerarse como un triplete interrelacionado de "partes": (P, M, Q), donde P representa principios, M significa metodología y Q para las preguntas de investigación.

Presentamos una metodología crítica y reflexiva acerca del cómo se estudió esta transformación. Dado que la labor, como actividad que media y actualiza el saber es intersubjetiva, sensual, y material, se deben tener en cuenta todas las señales que intervienen en los signos escritos, pero además, identificar los signos corporales, tales como los gestos y la postura (por ejemplo, la posición de las manos y los dedos). Para desentrañar las acciones sensoriales de los estudiantes, observamos dos construcciones metodológicas: el nodo semiótico y la contracción semiótica. Se tomaron evidencias de los nodos semióticos emergentes y se hizo un análisis multimodal de los mismos, con el fin de rastrear su evolución, lo que conlleva a un refinamiento y la posible evidencia de la contracción semiótica (Vergel, 2015).

Para identificar los medios semióticos de objetivación, utilizamos un vídeo-análisis cuadro a cuadro. Una cámara de vídeo se utilizó para registrar las actividades en pequeños grupos de estudiantes, así como las discusiones de la clase. Los videos y los materiales escritos producidos durante la actividad (hojas de los estudiantes), fueron observados con el fin de seleccionar episodios útiles para responder a la pregunta orientadora específica (Q) del estudio. Estos episodios fueron transcritos para ser cuidadosamente analizados una y otra vez en detalle, y se enfrentaron con los principios teóricos (P) (Radford & Sabena, 2015). De acuerdo con estos autores, este tipo de análisis es consonante con metodologías micro etnográficas, abarcando un conjunto de técnicas y análisis que van trazando el "momento a momento" de las actividades situadas de los sujetos, dando una atención especial a recursos semióticos a través de los cuales se desarrollaron las actividades matemáticas de los estudiantes y del profesor.

Una descripción de cada una de las fases en torno a su desarrollo para este estudio se observa a continuación:

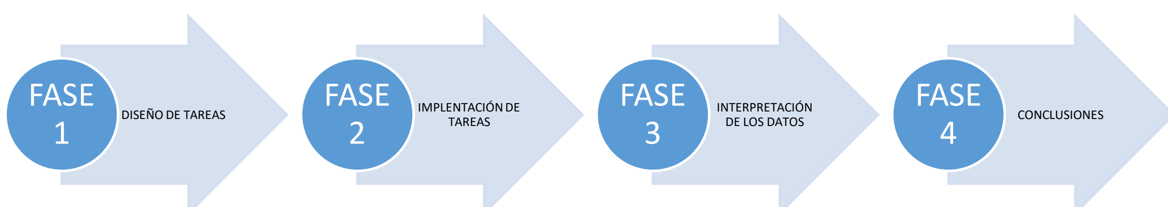


Figura 1. Fases propuestas para el desarrollo del estudio

Fase 1: Las tareas propuestas fueron planteadas bajo la perspectiva de la TCO, teniendo en cuenta enunciación de problemas verbales para ser transformados en narrativas simbólicas. Se recolectó la información del estudio a partir de la observación de las clases, el registro de las hojas de trabajo y la grabación en video de éstas. Estas tareas fueron sometidas previamente a una fase de pilotaje, que nos arrojó elementos para ganar *sensibilidad analítica* y tomar algunas decisiones en relación con el diseño de tareas subsiguientes (Vergel, 2015).

Fase 2: Una vez definidas las tareas a partir del pilotaje, se aplicaron en sesiones de clase de matemáticas de grado séptimo del Liceo Español Pérez Galdós del municipio de Tenjo, Cundinamarca.

Fase 3: Los datos obtenidos se analizaron bajo la perspectiva multisemiótica, enfocados en la observación de los aspectos asociados a la conformación de los nodos semióticos y a la contracción semiótica. De acuerdo con lo expuesto anteriormente, se seleccionaron episodios a los cuales se les hizo el análisis *cuadro a cuadro* con el fin de sistematizar y constituir los datos que fueron susceptibles de análisis.

Fase 4: A partir del análisis de los datos, se dio cuenta de la emergencia de los medios semióticos de objetivación y, finalmente se dio respuesta a la pregunta orientadora planteada.

3.2 Caracterización de los participantes en el estudio

Para el desarrollo de este estudio estuvimos interesados en la caracterización de los medios semióticos de objetivación que movilizan o activan los estudiantes de grado séptimo cuando abordan tareas de tipo verbal (lenguaje natural) con el fin que transformen los enunciados propuestos en una ecuación, identificando su posible contextualización teórica dentro de las categorías planteadas por Radford (2002) respecto a los procesos semióticos de la construcción de significación y el uso del símbolo por parte de los estudiantes.

El trabajo de campo se realizó con un grupo de 12 estudiantes de grado séptimo de educación básica (12-13 años) de un colegio privado del municipio de Tenjo, Cundinamarca; durante 6 sesiones de 90 minutos aproximadamente, entre los meses de septiembre y octubre de 2016. De acuerdo con las fases del estudio y en particular con las tareas propuestas, se recolectó información susceptible de análisis a partir de las hojas de trabajo de los estudiantes y la grabación en video del desarrollo de las tareas, enfocándonos en el tipo de respuestas y las justificaciones que daban teniendo en cuenta las acciones corpóreas que realizaban durante el proceso. Es importante aclarar que el interés no estuvo puesto en valorar las respuestas correctas o incorrectas, sino en estudiar los procesos que desarrollan los estudiantes. De acuerdo con Vergel (2015) en estos procesos es posible identificar cierta evolución de medios semióticos de objetivación y cómo unos sustituyen a otros al tiempo que los estudiantes logran concentrar los significados.

3.3 Acciones preliminares y pilotaje de las tareas

Las acciones realizadas de manera preliminar para direccionar el trabajo acorde con las fases planteadas fue orientado por dos objetivos: *i) observar el comportamiento de los estudiantes cuando se sitúan en una clase con cámaras de video* e *ii) implementar tareas piloto con el fin de tomar decisiones sobre la pertinencia de estas para el desarrollo del trabajo*. Partiendo del hecho que la labor conjunta entre estudiantes y profesor es una actividad intersubjetiva, sensual y material en la cual es importante tener en cuenta las señales que intervienen tanto en los signos escritos como en los signos corpóreos, es de vital importancia que las actividades situadas de los sujetos participantes ocurrieran de manera natural y espontánea; para que en el proceso de obtención y constitución de los datos, estos no estuvieran viciados por acciones o comportamientos asociados a la presencia del artefacto "cámara de video" e incluso del sujeto "camarógrafo" en los momentos en los que estuviera presente[1].

Al estar proyectada la implementación de las tareas para este estudio en el mes de septiembre de 2016, la decisión fue llevar a cabo la utilización de la cámara de video desde el mes de julio del presente año, con el fin de generar un ambiente de cotidianidad en la acción. Durante el transcurrir de esas semanas se pudo observar cómo el comportamiento del grupo de estudiantes tanto como del profesor fueron cambiando, haciendo natural y en algunos casos casi imperceptible la presencia del artefacto de video en las clases. Para la implementación de la cámara de video como dinámica de la clase fueron realizados los permisos pertinentes ante las directivas de la institución y posteriormente a los padres de familia de los estudiantes del grado séptimo. También es importante aclarar que en las situaciones de video preliminares, no necesariamente se implementaron tareas asociadas al objeto de estudio sino a las temáticas trabajadas en esos momentos de clase.

Sin embargo, dentro de las tareas implementadas en los días previos, se destaca la realización de una tarea adaptada de Radford (2015) acerca de unas cartas de hockey y unos sobres en los cuales hay una cantidad desconocida de cartas. Dicha tarea fue implementada por Radford en estudiantes de 7-8 años de edad de segundo grado de primaria y fue adaptada

[1] Durante el proceso de "familiarización" con la presencia de la cámara, esta fue manipulada en algunas sesiones por el profesor y en otras por un segundo profesor colaborador con el objetivo que el primero estuviera más libre para realizar la interacción con los estudiantes, es decir, que pudiera actuar también de manera más natural en la clase.

contextualmente a los estudiantes objeto de este estudio. El propósito de la actividad consistió en observar cómo los estudiantes desarrollan las ideas del objeto ecuación como relación entre cantidades de manera visual con los sobres y las cartas que se encontraban pegadas al tablero. La tarea y la adaptación de dicha tarea, así como la implementación de esta se observan a continuación.

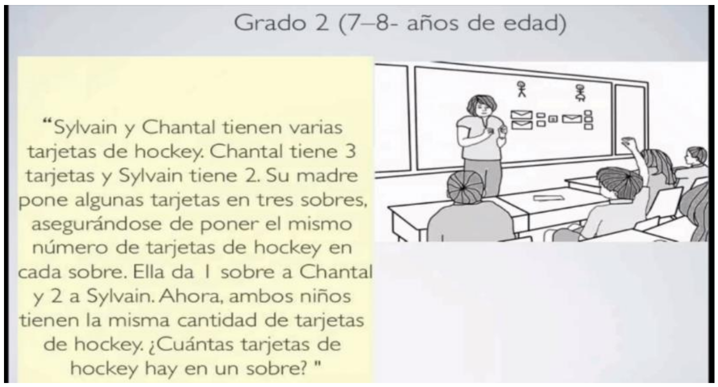


Figura 2. Tarea implementada por Radford con estudiantes de segundo grado

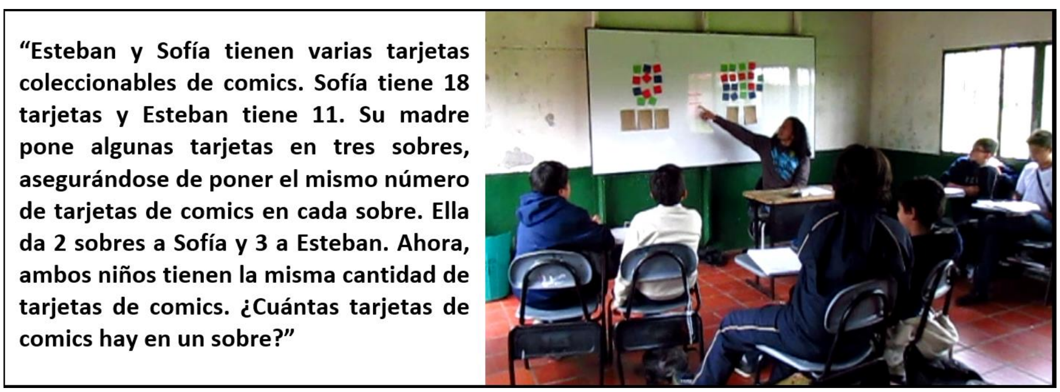


Figura 3. Tarea adaptada e implementada a los estudiantes de séptimo grado

Para la implementación de las tareas piloto de este trabajo se realizaron dos sesiones extraordinarias de clase con algunos estudiantes (una con 4 estudiantes y una con 2) en la biblioteca de la institución teniendo en cuenta que en estas tareas se enunciaran problemas verbales para que los estudiantes los designaran simbólicamente. Las tareas fueron resueltas de manera grupal con el objetivo de observar la interacción de los estudiantes así como la posible identificación de algunos recursos semióticos; además, en las dos sesiones se propiciaron espacios de interacción con el profesor para poder observar dificultades en torno a las preguntas y del mismo modo se realizaron algunas preguntas de las tareas para nutrir la información que se pretendía recolectar de acuerdo con los propósitos del pilotaje.

A continuación se presentan las dos tareas propuestas a los estudiantes.

LICEO ESPAÑOL PÉREZ GALDÓS
MATERIAL DE APOYO
ECUACIONES
GRADO SÉPTIMO

1. **Una fábrica de tapas metálicas para gaseosa cuenta con tres máquinas para el corte de láminas. La máquina A corta el doble de tapas que la cantidad que corta la máquina B. La máquina C corta 500 tapas más que la máquina A. En total, las tres máquinas cortan 40.000 tapas en un día.**
   a. **Si *x* representa el número de tapas que corta la máquina B, halla una expresión para el número de tapas que corta la máquina A.**
   b. **Usando la respuesta anterior, encuentra una expresión para la cantidad de tapas que corta la máquina C.**
   c. **Escribe una ecuación que traduzca el problema.**

	Expresión para el número de tapas
Máquina B	*X*
Máquina A	
Máquina C	
Total de tapas	

Figura 4. Primera tarea propuesta en la fase de pilotaje

LICEO ESPAÑOL PÉREZ GALDÓS
MATERIAL DE APOYO
ECUACIONES
GRADO SÉPTIMO

1. **"La edad de Andrés es el doble que la de Pablo, y ambas edades suman 84 años".**
   a. **Si *x* representa la edad de Andrés, escribe una expresión matemática para resolver el problema.**
   b. **Si *x* representara la edad de Pablo, ¿cambiaría la expresión? ¿quedaría igual? ¿cómo quedaría?**
2. **Tres bolsas contienen 575 bolitas de chocolate. La primera bolsa tiene 10 bolitas más que la segunda y 15 más que la tercera.**
   a. **Escriba una expresión si *"y"* representa la cantidad de bolitas de la primera bolsa.**
   b. **Escriba una expresión si *"y"* representa la cantidad de bolitas de la segunda bolsa.**

Figura 5. Segunda tarea propuesta en la fase de pilotaje

3.3.1 Resultados del pilotaje. Al realizar la escritura de las expresiones algebraicas que designan las cantidades desconocidas con las cantidades de los problemas entregados a los estudiantes, se logró ver cómo los estudiantes recurren a la utilización de señalamientos con sus dedos al momento de establecer diálogos con sus compañeros para explicar y dar sentido a las ideas sobre cómo debía organizarse la información de manera simbólica. Además en las tareas planteadas, en particular, en las instrucciones donde se especifica representar por medio de la letra (x ó y) una cantidad y realizar la escritura que relacione respecto a dicha letra la cantidad o las demás cantidades desconocidas del problema, fue posible observar la movilización de algunos medios semióticos de objetivación tales como: señalamientos indexicales y apuntamientos con el lápiz, encerramientos, gesticulaciones y utilización de expresiones lingüísticas verbales y escritas. Por otra parte, se destaca la importancia y la pertinencia de la tarea de los sobres y las tarjetas implementada con anterioridad dado que posibilitó la emergencia y la movilización de medios semióticos de objetivación tales como el apoyo gráfico para la representación de las cantidades [figura 6].

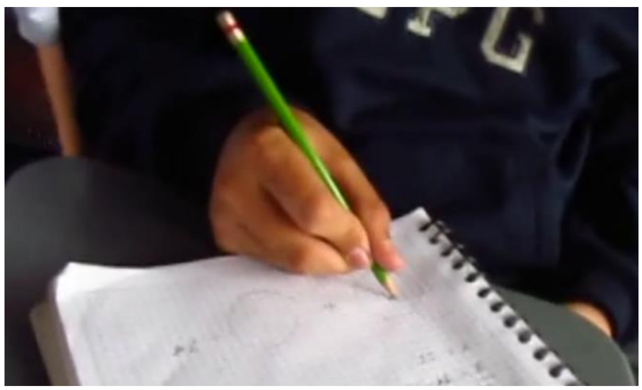


Figura 6. Utilización de representaciones gráficas (globitos) para representar las dos cantidades desconocidas, nótese cómo escribe x en el primer globito para representar dentro de él la edad de Andrés (tarea 2), quedando el espacio del segundo globito para representar dentro de él la edad de pablo y construir la representación $\boldsymbol{Edad\ de\ Andr}\text{é}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{Edad\ de\ pablo} = \mathbf{84}$

Estas tareas que permitieron a los estudiantes movilizar (o activar) medios semióticos de objetivación, arrojaron elementos para ganar *sensibilidad analítica* (Vergel, 2015) y se tomaron algunas decisiones en relación con el diseño de tareas para implementar en el trabajo de campo puesto que la movilización de estos medios es importante en el marco del estudio.

3.3.2 Decisiones a partir del pilotaje. En búsqueda de una tarea que se ajustara de la mejor manera al objetivo propuesto para este estudio, se observó la forma en que se enunciaron las situaciones a los estudiantes. De la tarea 1 a la tarea 2 hay una decisión importante: eliminar la tabla en la cual se organiza la información puesto que la tabla direcciona la mirada del estudiante hacia una forma particular de manipular y establecer relaciones entre cantidades y puede privar al estudio, la posibilidad de observar cómo organiza los objetos (cantidades) al realizar la transformación de los enunciados en símbolos alfanuméricos. Por otra parte, algunas de las preguntas planteadas no permitieron que los estudiantes expresaran la forma como representan simbólicamente los objetos por medio de la letra dado que éstas podían resolverse de manera aritmética buscando los números que cumplieran la relación planteada en los enunciados.

La segunda decisión tomada fue rediseñar los tipos de preguntas, con el propósito que los estudiantes encontraran la necesidad de establecer relaciones aritméticas con lo indeterminado y que las cantidades estuvieran ubicadas en diferentes contextos, en particular, en contextos métricos (longitudes), así como en contextos numéricos (edades, dinero). Por último, se decidió que las cantidades se ubicaran en el conjunto de los números racionales para evitar que los estudiantes utilizaran estrategias que no fueran de utilidad para la constitución de los datos a ser analizados. En la siguiente tabla, se observan las características de las 5 tareas que se ajustaron para implementar en el trabajo de campo.

TAREA 1	DOS CANTIDADES DESCONOCIDAS (RELACIÓN “FRACCIONARIA”)	Una pieza de alambre de 48 m se corta en 2 trozos desiguales. El pedazo corto mide 3 m más que la cuarta parte del más largo. ¿Cuánto mide cada trozo? • Represente por x la longitud del pedazo largo • Represente por x la longitud del pedazo corto
TAREA 2	TRES CANTIDADES DESCONOCIDAS (RELACIÓN “FRACCIONARIA”)	La edad de Martha es el doble de la edad de Carlos; el triple de la edad de Carlos es igual a la mitad de la edad de Pedro y la suma de todas las edades es 18. ¿Cuáles son las edades de cada uno? • Represente por x la edad de Carlos • Represente por x la edad de Martha • Represente por x la edad de Pedro
TAREA 3	TRES CANTIDADES DESCONOCIDAS	El señor Cortés tiene \$85.000 en el bolsillo; él sabe que ese dinero está en una combinación de billetes de \$2.000, de \$5.000 y de \$20.000, pero no recuerda el número que tiene de cada billete. El señor Cortés sabe

	(RELACIÓN "FRACCIONARIA")	que el número de billetes de \$5.000 es la mitad de la cantidad de billetes de \$2.000 y que el número de billetes de \$20.000 es la quinta parte de la cantidad de billetes de \$2.000. ¿Cuántos billetes tiene de cada uno? • Represente por x el número de billetes de \$2.000 • Represente por x el número de billetes de \$5.000 • Represente por x el número de billetes de \$20.000
TAREA 4	TRES CANTIDADES DESCONOCIDAS (RELACIÓN "FRACCIONARIA")	La cola de una salamandra tiene tres veces el largo de su parte media. La cabeza mide $\frac{1}{2}$ de su parte media. La longitud total de la salamandra es 27 cm. ¿Cuál es la longitud de la cola? ¿Cuál es la longitud de la cabeza? ¿Cuál es la longitud de la parte media? • Represente por x la longitud de la parte media del cuerpo de la salamandra.
TAREA 5	UNA CANTIDAD DESCONOCIDA (RELACIÓN "FRACCIONARIA")	Un padre deja como herencia a sus tres hijos una colección de monedas de oro. Al primero le deja la mitad de la colección más media moneda, al segundo, le deja la mitad de las que quedan más media moneda, y al tercero le deja la mitad de las que han quedado más media moneda, de modo tal que así quedan distribuidas la totalidad de las monedas. ¿Cuántas monedas tenía la colección? • Represente por x el número total de monedas de la colección del padre.

Tabla 1. Tareas propuestas a los estudiantes luego de las decisiones generadas a partir de lo visto en la fase de pilotaje.

3.4 Justificación de las tareas

Las tareas propuestas a los estudiantes tuvieron en cuenta que las acciones a realizar fuesen distintas no solo en contexto sino frente a la cantidad de elementos desconocidos y las relaciones entre las cantidades. La pretensión de las tareas también tuvo en cuenta que se propiciaran espacios en los cuales los estudiantes trabajaran en pequeños grupos, hicieran sus interpretaciones y las manifestaran a sus compañeros y al profesor; generando discusiones y cuestionamientos entre los actores de la clase para que surgieran conclusiones del objeto de estudio. De acuerdo con Radford (2014b), la educación debe ser un proyecto más englobante que incluya tanto al sujeto que aprende como al sujeto que enseña, es decir, que vea tanto al estudiante como al profesor como sujetos humanos, culturales e históricos; sujetos en formación y transformación continua. A partir de lo observado en la segunda tarea de pilotaje, se decidió mantener las instrucciones que pedían al estudiante “reescribir” la ecuación si la letra representa una u otra cantidad dentro del contexto del problema.

La primera tarea pretendía que los estudiantes establecieran una relación entre las longitudes de un alambre que se corta en dos pedazos, dejando así dos cantidades desconocidas relacionadas con una cantidad conocida: la longitud total del alambre. La segunda tarea buscaría que los estudiantes relacionaran tres cantidades desconocidas, en este caso, tres edades vinculadas a una cantidad que las relaciona entre sí: la suma de las tres. La tercera tarea básicamente tiene las mismas pretensiones de la segunda tarea salvo el cambio de contexto (dinero) y el manejo de cantidades numéricas “grandes”. La cuarta tarea tiene el propósito de ubicar nuevamente a los estudiantes en un contexto métrico (tarea 1), pero esta vez con tres cantidades desconocidas relacionadas entre sí con la longitud total de la medida de la salamandra. En esta tarea la relación fraccionaria no aparece de manera verbal (p. ej. “la cuarta parte de” o “el triple de”) sino que está escrita de forma numérica: “$\frac{1}{2}$ de”. Por último, en la quinta tarea se presenta una situación de una sola cantidad desconocida: el total de monedas de una herencia y la relación de esta cantidad de monedas con la cantidad de monedas que deja a cada uno de sus hijos al momento de realizar el reparto.

3.5 Naturaleza del trabajo y proceso de recolección de la información

El trabajo fue dirigido por el profesor en las clases de matemáticas del grado séptimo durante 6 sesiones entre los meses de septiembre y octubre del año 2016. En algunas sesiones la cámara fue manipulada por el profesor y en otras fue manipulada por otro docente[2]. La organización de las sesiones fue desarrollada a partir de los planteamientos propuestos por Vergel (2015) teniendo en cuenta los siguientes momentos: 1) pequeña contextualización de la actividad, 2) lectura de la tarea de manera individual, 3) trabajo en grupo[3] y 4) en algunos momentos se detenía el trabajo de los grupos para realizar algunas discusiones generales del trabajo, dirigida por el profesor.

Durante el desarrollo de las tareas, el profesor estuvo visitando cada uno de los grupos con el fin de vincular y hacer partícipes a cada uno de los estudiantes, haciendo preguntas acerca del "cómo van" desarrollando el proceso, realizando preguntas que confrontaran posturas de los integrantes de los grupos y hacer aclaraciones en el caso en que fuesen necesarias. El propósito fundamental de la participación del profesor en el trabajo de los grupos consistía en facilitar los espacios de acción conjunta entre profesor y estudiantes donde se generaran diferentes discusiones, intercambio de ideas y formulaciones de preguntas entre los estudiantes y entre estudiantes y profesor, ya que las preguntas y la interacción constituyen la base de la actividad a través de la cual las formas de acción, expresión y reflexión van a develarse en la conciencia de los estudiantes (Miranda et al, 2013).

La información fue recolectada de acuerdo con las fases mencionadas en la sección 3.1. El proceso de recolección se describe de la siguiente manera:

- *Grabación en video de las sesiones de clases:* La grabación se efectuó con una sola cámara que capturó momentos situados de la clase, en particular las acciones de los grupos de trabajo y los momentos de interacción con el profesor para resolver la tarea.

[2] El docente fue previamente orientado respecto de qué y cómo debía grabar: la forma como debía enfocar al profesor y a los estudiantes durante la actividad matemática desarrollada.
[3] En algunas tareas la lectura se realizó con los grupos ya formados, en particular, en los casos donde los muchachos ya tenían definido su(s) compañero(s) de grupo.

- *Obtención de las hojas de trabajo de los estudiantes:* Al finalizar cada sesión se recogieron las hojas de trabajo de los estudiantes y hojas adicionales que utilizaran para evitar su pérdida y se entregaban a los estudiantes en la siguiente sesión en caso que la tarea no estuviera terminada. Si ya lo estaba, se entregaba la siguiente tarea a realizar.
- *Revisión de los videos y de las hojas de trabajo:* Se revisaron posteriormente las grabaciones (varias veces) con el fin de seleccionar episodios situados donde se encontraran evidencias de la emergencia de medios semióticos de objetivación al momento de abordar las diferentes tareas.
- *Transcripción de episodios seleccionados:* Se realizó la transcripción del discurso de los estudiantes y el profesor generados en los episodios que pueden ser susceptibles de análisis seleccionados previamente.

Como fue mencionado anteriormente, el interés no estuvo puesto en valorar las respuestas correctas o incorrectas, sino en estudiar los procesos que desarrollan los estudiantes. De acuerdo con Vergel (2015) en estos procesos es posible identificar cierta evolución de medios semióticos de objetivación y cómo unos sustituyen a otros al tiempo que los estudiantes logran concentrar los significados.

3.6 Obtención y constitución del dato

Para la constitución de los datos susceptibles de análisis para este estudio, se tuvo en cuenta el enfoque metodológico propuesto por Radford y Sabena (2015); para dar cuenta de la manera en que una gama de recursos semióticos es utilizada por profesores y estudiantes en el curso de los procesos sociales de objetivación. A partir de los episodios seleccionados luego de la revisión de los registros hechos en video, el primer conjunto de datos lo constituyen las transcripciones de los episodios situados y las hojas de trabajo de los estudiantes. La reducción y análisis de los datos fue orientado permanentemente por el foco teórico (Vergel, 2015); este fue el criterio por medio del cual se tuvo constantemente en cuenta la pregunta orientadora y el objetivo planteado, además de las herramientas analíticas de la Teoría Cultural de la Objetivación. El foco teórico permitió depurar la información en aquella que fuera pertinente para el estudio de la que no lo era.

Se realizó entonces una observación detallada de las grabaciones en video bajo el propósito de hacer una reducción y selección prolija de los datos, marcando los tiempos del video en los cuales se observaron segmentos de la actividad matemática donde se identificaran (o detectaran) la movilización o activación de medios semióticos de objetivación por parte de los estudiantes asociados con las formas de acción, expresión y reflexión realizadas al resolver las tareas propuestas. Se sistematizó la información construyendo una tabla de la siguiente manera: número del video, segmento del video (tiempo) y una ubicación teórica/categorial acerca de si el segmento era evidencia de un medio de objetivación movilizado o si lo era de un proceso semiótico de significación del símbolo por parte de los estudiantes. Finalmente, se realizó la transcripción de esos segmentos situados de la actividad con el objeto de llevarlos al proceso de análisis.

Luego de organizar y sistematizar la información, se constituyeron los datos del estudio de la siguiente manera: 1) segmento transcrito del video, 2) imágenes tomadas del video con el fin de describir la emergencia de los medios semióticos de objetivación identificados, 3) imágenes de las hojas de trabajo como evidencia de la actividad matemática realizada por los estudiantes. Luego de constituido el dato, se acompaña de un análisis respectivo a los medios semióticos movilizados así como a los procesos de objetivación desarrollados por medio de las herramientas de análisis que proporciona la Teoría Cultural de la Objetivación para dar respuesta a la pregunta orientadora propuesta en este estudio.

La justificación teórica de cómo el dato es constituido se concibe de acuerdo con Radford y Sabena (2015), quienes afirman que los profesores y los estudiantes involucrados en la actividad matemática tanto de manera sensual como material, recurren a una amplia gama de sistemas semióticos a través de los cuales vienen a formar sus intenciones e ideas en el contexto de formas de pensar y actuar constituidas culturalmente e históricamente. De acuerdo con estos autores, en el desarrollo de los procesos de objetivación, estudiantes y profesores producen acciones *multimodales*. Es esta la razón por la cual ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gesteado por los estudiantes puede ser analizado de manera aislada (Vergel, 2015).

Capítulo 4

Análisis multimodal

En este capítulo se presentará el análisis de los datos constituidos de modo que se observen las formas de acción y reflexión asociadas a la transformación de enunciados en lenguaje natural en lenguaje simbólico. Por la naturaleza del trabajo así como la pregunta que lo orienta, la atención del análisis estuvo enfocada en la interacción discursiva de los estudiantes y el profesor por medio de las transcripciones de los videos seleccionados, y en las producciones que los estudiantes registraron en sus hojas de trabajo. Como fue mencionado en la sección 3.6, se tuvieron en cuenta para el análisis la emergencia y la relación entre los diferentes recursos semióticos movilizados o activados por los estudiantes durante la actividad matemática (lenguaje escrito, lenguaje hablado, los gestos, las acciones corpóreas, etc.) dada la importancia de la inclusión de estos en el acto de conocer.

La implementación de tareas que pidieran transformar problemas enunciados en lenguaje natural en narrativas simbólicas teniendo en cuenta entonces, los gestos, el lenguaje, los símbolos, entre otros, que utilizaron los estudiantes para organizar y regular sus propios procesos cognitivos (Vergel, 2015), permitieron observar procesos semióticos de producción de significación que plantea Radford (2002) cuando los estudiantes hacen uso del símbolo en la actividad matemática propuesta. Seguidamente se presenta una breve descripción de estos procesos:

Signos como marcas en actos narrativos: Esta distinción nos permite proporcionar una interpretación de algunas expresiones simbólicas “sin sentido” elaboradas por los estudiantes novatos.

Nominalización: No es simplemente dar cuenta de la introducción de incógnitas en un problema. Es una herramienta teórica para examinar cómo las expresiones simbólicas llegan a ser dotadas de significado en este limbo donde ni han abandonado totalmente la historia original (dicha en lenguaje natural), ni entrado totalmente en la narrativa simbólica (dicha en símbolos).

Colapso de narrativas: Es una discusión sobre el problema del uso formal o abstracto de signos para obtener la ecuación asociada con el problema verbal. Hace referencia a la lucha de los estudiantes con el lenguaje simbólico algebraico, porque la agrupación de términos semejantes significa una ruptura con su significado original. Es decir, es el momento en el que todos los esfuerzos que fueron hechos en el nivel de la designación de los objetos para construir la narrativa simbólica tienen que colapsar, y ya no hay segmento correspondiente en el problema verbal que pueda ser correlacionado con el resultado de la agrupación de términos semejantes, es decir, los estudiantes realizan un esfuerzo por no perder la pista del significado de la narrativa.

A continuación se presenta una descripción y análisis de los episodios al implementar las tareas en las sesiones de clase con los estudiantes, con algunas transcripciones de diálogos entre los estudiantes y el profesor señalando los actos semióticos que realizaron los estudiantes cuando abordaron dicha tarea.

4.1 Signos como marcas en actos narrativos

Se presenta a un grupo de estudiantes la siguiente tarea (tarea del alambre):

> “Una pieza de alambre de 48m se corta en 2 trozos desiguales. El pedazo corto mide 3m más que la cuarta parte del más largo. ¿Cuánto mide cada trozo?
>
> - Represente por x la longitud del pedazo largo
> - Represente por x la longitud del pedazo corto

Los estudiantes con ayuda de un gráfico, escriben sobre él, una expresión que representa lo pedido en la primera tarea [figura 7]

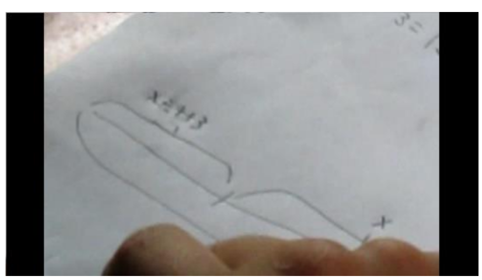


Figura 7. Representación gráfica realizada por los estudiantes para resolver la tarea.

Y posteriormente hablan con el profesor cuando van a proceder a realizar la segunda tarea. Daniel toma la vocería, mientras realiza un segundo dibujo (un segmento) y debajo de él hace una marca con una llave para indicar su longitud [figura 8]. Simultáneamente al diálogo entre el profesor y el estudiante, comienzan a manifestarse las ideas del objeto del discurso del estudiante por medio de señalamientos y deslizamientos con sus dedos índices [figura 9]. No obstante, observemos ahora cómo un cálculo erróneo con frases comparativas conduce a los estudiantes a concluir de la siguiente manera:

Figura 8. Marcas que realiza el estudiante para indicar la longitud del alambre y la forma como fue cortado al abordar la segunda tarea (cuando x representa la longitud del pedazo corto)

1. Profesor: ¿Eso cuánto mide? [hace alusión a la llave que está dibujando]
2. Daniel: 48 metros [habla mientras va dibujando… hace una marca arbitraria en el segmento]
3. Profesor: [asintiendo] Y ahora, lo corta en dos pedazos desiguales, y va a representar por x ¿a quién? [señala la segunda viñeta de la tarea en la hoja]
4. Daniel: Al pequeño [hace una llave por encima y marca la longitud x]
5. Profesor: Al pedazo corto
6. Daniel: Y… me toca encontrar el valor de este [hace otra llave por encima señalando con el lápiz]
7. Profesor: Pues obviamente con las condiciones del problema ¿no?
8. Daniel: Sí, sí señor [se detiene a mirar el primer dibujo realizado]
9. Profesor: ¿Cómo sería la cosa ahí?
10. Daniel: Algo que ya sé: equis por cuatro menos tres $(x \times 4 - 3)$ [escribiéndolo sobre el segundo dibujo donde había hecho el señalamiento con el lápiz]… porque ésta parte es la cuarta parte de ésta más tres [señala sobre el primer dibujo], entonces si se multiplica esto por cuatro [señala sobre el segundo dibujo], da la medida que tiene esto y si se le quitan los tres da exactamente el lugar [desliza su dedo índice sobre la longitud larga].

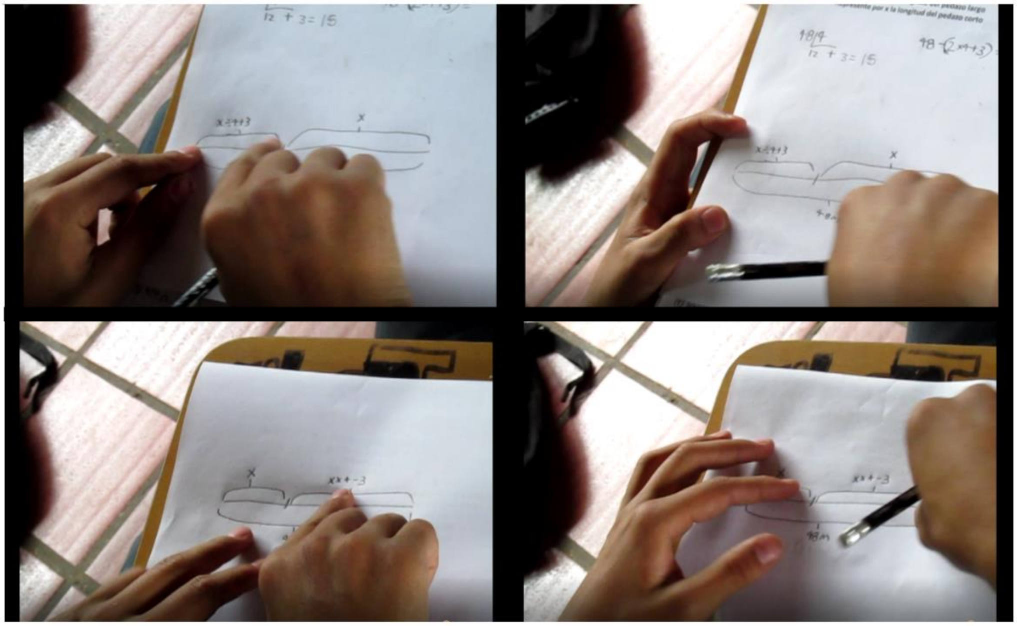


Figura 9. Arriba; marcas, deslizamientos y encerramientos con los dedos para indicar las longitudes del alambre en la tarea 1 (al x representar el pedazo largo). Abajo; marcas, deslizamientos y encerramientos con los dedos para indicar las longitudes del alambre en la tarea 2 (al x representar el pedazo corto). En ambos casos, se observa la forma como designa simbólicamente las longitudes.

Desde la Teoría Cultural de la Objetivación la estrategia sistemática de graficar el segmento y partirlo en dos partes desiguales por parte de Daniel le contribuye a identificar cómo debe relacionar las longitudes conocidas y desconocidas; éstas se consideran formas de acción, reflexión y expresión (Radford, 2011). Formas que han sido codificadas culturalmente, es decir, se pueden concebir como modelos o patrones que se reproducen de una cultura a otra en la actividad laboral y en la experiencia sensual de los individuos (Radford, 2006). Sin embargo en las acciones de Daniel, él y su grupo realizan expresiones incorrectas o “sin sentido” a la luz de lo que se espera el (los) estudiante(s) logre(n) para así poder encontrar el valor de su incógnita. La expresión para representar las longitudes de los dos pedazos de alambre en la situación 1 (primera viñeta) es asertiva en ese grupo de estudiantes. Sin embargo, al cambiar de “héroe”[4] en la situación 2 (segunda viñeta), se observa cómo Daniel

[4] Para Radford (2002) una de las dificultades en el tratamiento de problemas que involucran frases comparativas como “Kelly tiene 2 dulces más que Manuel” es ser capaz de derivar frases asertivas del tipo “A tiene C”. Si, por ejemplo, Manuel tiene 4 caramelos, la frase adoptará la forma «Kelly (sujeto) tiene (Verbo) 6 (Adjetivo) caramelos (Sustantivo)». Dado que el adjetivo debe ser referido de alguna manera (usando la letra x u otra), el problema verbal es re-dicho de otra forma, forma que él denomina la *narrativa simbólica*, sin embargo, aunque hay similitudes entre el problema verbal y la narrativa simbólica, los personajes cambian. Este cambio se

referencia visual y gráficamente de manera correcta lo que está pensando, y sus marcas y señalamientos dan muestras de la comprensión del problema y la forma como debe abordarlo, es decir, la longitud total como referencia y la representación de dos pedazos que se cortaron en *algún* lugar, pero no lo escribe adecuadamente.

La transformación de las frases comparativas está relacionada con tomar explícitamente en cuenta la medida desconocida del alambre que se ha cortado. De acuerdo con Radford (2002), la clara introducción de una letra para la designación de tal cantidad desconocida no soluciona el problema. Podemos ver esto en el extracto (línea 10), puesto que la dificultad radica en cómo designó simbólicamente la longitud del pedazo largo; porque al "invertir" el protagonismo de sus actores (el largo pasó a ser corto, y el corto pasó a ser largo), surge en él la necesidad de invertir inmediatamente las operaciones que sobre los símbolos están involucradas (de dividir *pasar* a multiplicar y de sumar *pasar* a restar). Es decir, en las frases comparativas los estudiantes cambiaron la frase "la cuarta parte del más largo" en una forma adverbial (cuatro veces el más corto), lo que les permite designar el problema verbal de acuerdo con las condiciones dadas: partir en dos partes desiguales.

Además, cuando Daniel asigna a sus palabras alusiones sobre el dibujo que está realizando (líneas 2 y 4) y luego señala con el lápiz el objeto de su mirada y sobre el cual quiere realizar una acción (línea 6); estos señalamientos, sus expresiones lingüísticas y la ubicación espacial del dibujo permiten inferir que Daniel está movilizando de forma sincronizada varios medios semióticos de objetivación. Desde la TCO, estas acciones sincronizadas se denominan un nodo semiótico (Radford, 2008). Por otra parte, hubo una declaración del profesor que se tomó como algo sobrentendido (línea 7), pero ésta era en últimas un intento por orientar a los estudiantes a enfocar su atención en la forma como deben expresar la longitud del pedazo largo siendo x la longitud del pedazo corto. La intención por cambiar el contenido noemático, es decir, la forma de utilizar el signo para *expresar* las características particulares del objeto de discurso, fue opuesta por las frases (líneas 8 y 10) "sí, sí señor" y "algo que ya sé" (Radford, 2002).

caracteriza por seguir con ciertas partes de la historia mientras coloca a otras en el trasfondo. En particular, los ´héroes´ de la historia ya no son Kelly o Manuel, sino relaciones numéricas entre la cantidad de caramelos, expresadas en el nuevo espacio semiótico, es decir, en el simbolismo algebraico.

Por otra parte, la creación de una narrativa simbólica para este problema verbal tiene una pretensión adicional: mientras que el problema verbal se desarrolla de acuerdo con una lectura lineal de izquierda a derecha (con retrospectivas eventuales), el punto de partida en la narrativa simbólica no tiene una ubicación permanente. En la narrativa simbólica, el *orden* del discurso es diferente y el carácter temático es sobre otras cosas (Radford, 2002).

4.2 Decepción o ¿colapso?

Durante el trabajo en búsqueda de una ecuación representando por x el pedazo largo, dos estudiantes llegan a la expresión $\frac{x}{4}+3$ para representar la longitud del pedazo corto. Sin embargo, los estudiantes dicen no tener "nada"; dado que ellos siguen en la búsqueda por encontrar un valor explícito para x.

1. Mauricio: No hay nada
2. Tomás: ¿Y si los sumamos?... [Tomás escribe $\frac{x}{4}+\frac{3}{1}=\frac{x+}{4}$]
3. Mauricio: Toca… pase esto a cuartos [señala con su lápiz el $\frac{3}{1}$ que tiene escrito Tomás]
4. Profesor: ¿Están sumando las fracciones?
5. Mauricio: $\frac{x}{4}+\frac{3}{1}=\frac{x}{4}+\frac{12}{4}$ [toma la hoja y habla mientras escribe: "equis sobre cuatro, más…"]
6. Profesor: Muy bien
7. Mauricio: igual a… ocho… [mientras va escribiendo $=\frac{}{8}$]
8. Profesor: ¿Por qué Mauricio? ¿En las fracciones con el mismo denominador se suman los denominadores? [señala con el índice los denominadores de la operación]
9. Tomás: Cuatro… [borra el ocho escrito por Mauricio]
10. Mauricio: Sí, esto es igual (señala el denominador cuatro, corregido por Tomás) y se suman los numeradores
11. Profesor: ok, se deja el mismo denominador
12. Mauricio: o sea, es tan básico que a uno se le olvida [entretanto, Tomás escribe el numerador $x+12$ en la fracción, quedando como $=\frac{x+12}{4}$]
13. Profesor: entonces ¿este quién es Mauricio? [Señala $=\frac{x+12}{4}$]
14. Mauricio: eh... cuatro

15. Profesor: …este "equis más doce, cuartos" ¿qué es en tu problema? [señala con sus dos dedos índice la expresión]
16. Mauricio: … ay no puedo [ríe] ¿cómo exactamente? Sería la totalidad de…
17. Profesor: ¿La totalidad de qué? ¿La totalidad del alambre?
18. Mauricio: No, la totalidad de… sí, la totalidad del alambre
19. Profesor: ¿La totalidad de qué cosa…?
20. Mauricio: Ah… o sea que el pedazo corto mide 12
21. Tomás ¿No? [Mira al profesor]
22. Mauricio: No, qué decepción, no profe…

Mauricio y Tomás han nombrado de manera simbólica la longitud del pedazo corto, es decir, realizaron una transformación del enunciado verbal "el pedazo corto mide 3m más que el pedazo largo" y teniendo en cuenta la instrucción de la viñeta: "represente por x la longitud del pedazo largo", escribieron la expresión $\frac{x}{4}+3$. Sin embargo, al no tener escrita una ecuación que represente la situación, los estudiantes intentan hacer operaciones con la expresión obtenida. Para ellos, $\frac{x}{4}+3$ comunica la idea que si dividen en 4 partes la longitud del pedazo largo y luego agregan 3 unidades sueltas (metros), obtienen la longitud del pedazo corto. Al reescribir la expresión $\frac{x}{4}+3=\frac{x}{4}+\frac{3}{1}$ y luego $\frac{x}{4}+\frac{12}{4}=\frac{}{8}$ manifiestan un intento por operar con lo indeterminado (Arzarello, 2006); esta forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos es lo que Radford (2010) denomina la analiticidad o forma de tratar las cantidades indeterminadas de manera analítica.

Al corregir borrando el 8 escrito en el denominador y determinar que el resultado de la operación es $\frac{x+12}{4}$, Mauricio acusa: "es tan básico que a uno se le olvida" (Línea 12), en este momento el estudiante legitima el acto de operar una fracción indeterminada con una que sí lo es, con el propósito de capturar la expresión escrita en una sola fracción. En la labor conjunta emerge el proceso semiótico iconicidad, el cual se evidencia cuando Tomás quien considera un saber específico como algo *posible*, sugiere a Mauricio la pregunta: "¿y si los sumamos?" (Línea 2). En la figura 10 se observa cómo Tomás va transformando la expresión $\frac{x}{4}+3$ agregando a esta la representación icónica del tres como un número racional (fraccionario) “tres unidades” para proceder a operar como: $\frac{x}{4}+\frac{3}{1}=\frac{x+}{4}$. Así mismo, Mauricio sugiere a Tomás la necesidad de transformar la expresión $\frac{3}{1}$, en una fracción no denominada en unidades sino en cuartos (Línea 3) ya que su representación icónica de operar fracciones no es la misma de Tomás y toma la hoja de trabajo para escribir $\frac{x}{4}+\frac{12}{4}$. En ambos casos, los estudiantes realizan procesos de acción y reflexión constituidos histórica y culturalmente (Vergel, 2013).

Figura 10. Izquierda; Tomás escribe la forma icónica como él representa la suma de fracciones. Centro; Mauricio sugiere pasar a cuartos el denominador “uno”. Derecha; Mauricio toma la hoja y escribe la forma icónica como él suma las fracciones.

Acto seguido a la obtención de la expresión $\frac{x+12}{4}$, el profesor señala con sus dedos índice la expresión y pregunta: ¿este quién es Mauricio? (Línea 13) [figura 11] intentando averiguar de qué forma están interpretando la nueva expresión obtenida. El diálogo posterior entre el profesor y el estudiante pone de manifiesto la forma como los estudiantes luchan con el lenguaje simbólico algebraico. Al pasar de la expresión $\frac{x}{4}+3$ a la expresión (equivalente) $\frac{x+12}{4}$ se produce una ruptura con el significado original (Radford, 2002), y todos los esfuerzos hechos por ellos para designar simbólicamente el objeto (la longitud del pedazo corto), es decir, la narrativa simbólica construida colapsaron. De acuerdo con este mismo autor, en ese momento no quedó un segmento correspondiente en el problema verbal que pudiera ser correlacionado con el resultado de operación de las cantidades, es decir, con $\frac{x+12}{4}$. La reacción desesperada de Mauricio por no perder el hilo de su historia (narrativa) es clara en la línea 22.

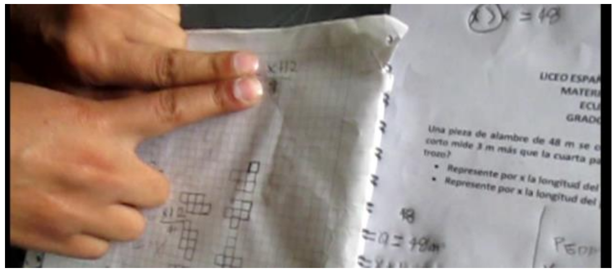


Figura 11. El profesor señala con sus dedos índices la expresión obtenida por los estudiantes en búsqueda de la forma de interpretación de la expresión en el contexto del problema.

4.3 Las primeras nominalizaciones

Esta misma pareja de estudiantes en otro momento de la clase, utilizando la misma estrategia gráfica que el grupo de Daniel para mirar las condiciones del problema intentan hacer la escritura de la expresión algebraica que representa el enunciado. Luego de descartar la expresión $\frac{x+12}{4}$, los estudiantes tienen nuevamente escrita la expresión $\frac{x}{4}+3$ y junto a esta, ahora tienen escrita otra x pero las dos expresiones carecen de conector alguno (el signo + que permita representar la suma de las dos longitudes); el profesor al ver la información que tienen consignada les declara la frase: “ahí está todo”. Luego de un rato, el profesor se acerca al grupo (dúo) para hablar con ellos. Mauricio toma la voz:

1. Mauricio: tú dices que aquí está todo ¿a qué te refieres con que aquí está todo? [señala la expresión que tiene escrita en la hoja]
2. Profesor: Claro porque es que aquí [encierra la expresión circularmente con el dedo] tú estás cumpliendo unas condiciones ¿cierto? ¿qué estás cumpliendo?
3. Mauricio: estoy cumpliendo que… el pedazo corto [señala con el lápiz la x] es la cuarta parte más tres [señala con el lápiz el 4, el signo + y el tres]
4. Profesor: ajá, [tiene el índice sobre la expresión] dice que el pedazo corto es la cuarta parte más tres… pero del largo [encierra circularmente con el índice la expresión] entonces ¿este quién sería? [señala la x]
5. Mauricio: [se queda en silencio un momento] el largo…, sobre cuatro, más tres [emocionado] ¡oh! ¡Por dios!
6. Profesor: Este sería el lado largo ¿cierto? [sigue señalando con el índice la x], entonces ¿esto representa a quién? [encierra circularmente con su índice la expresión]

7. Profesor y Mauricio: el pedazo corto [hablan al tiempo]
8. Profesor: pero ¿esto a quién representa? [señala la x] al pedazo…
9. Mauricio: al pedazo largo… ah, ya entendí
10. Profesor: entonces ya tenemos el pedazo corto [señala la expresión $\frac{x}{4}+3$ con un golpe con el índice sobre la hoja] y al pedazo largo [señala la x que hay escrita sola al lado con otro golpe con el índice sobre la hoja]… y ¿tenemos datos más, aparte de esos dos?
11. Mauricio; eh…
12. Profesor: lee, lee otra vez el problema ¿qué dice?
13. Mauricio: una pieza de alambre de 48 metros se corta en dos… [va siguiendo la lectura señalando con el lápiz]
14. Profesor: eso, ahí… entonces tenemos otro dato ¿sí o no?
15. Mauricio: que equis es igual a 48 [sonríe como sintiendo que encontró la medida desconocida]
16. Profesor: No
17. Mauricio: Sí… ah no, mentiras
18. Profesor: No… este es el pedazo largo [señala la x] ¿el pedazo largo mide 48?
19. Mauricio: no, el pedazo largo no mide 48
20. Profesor: ¿qué mide 48?
21. Mauricio: equis sobre cuat… 48 mide… equis sobre cuatro más tres ¡MÁS [grita] equis! [levanta el pulgar y mira al profesor]… ¡gracias!
22. Profesor: ¿por qué?
23. Mauricio: [seguro] porque si este es el pedazo corto… [señala $\frac{x}{4}+3$] y este es el pedazo largo [tapa con sus dedos de la mano derecha el cuatro y el más tres]
24. Profesor: este es el corto [encierra circularmente el $\frac{x}{4}+3$]
25. Mauricio: pero este… pedacito de aquí [tapa nuevamente el 4 y el +3 con los dedos de la mano derecha y señala con el lápiz circularmente la x] o sea, esta cosa, es el largo
26. Profesor: exactamente [asiente con la cabeza]
27. Mauricio O.K.

En este episodio vemos cómo los pronunciamientos de Mauricio son complementados por el profesor quien está asentando las expresiones del estudiante, además, el profesor sincroniza el diálogo con Mauricio haciendo señalamientos y encerramientos circulares con su dedo índice sobre la expresión que tiene él escrita en la hoja (líneas 2 a 5). La activación de gestos y de expresiones verbales utilizadas durante el diálogo indica cómo ambos están involucrados en la actividad matemática, por medio de una labor conjunta. La forma como se da la interacción tanto corporal como dialéctica puede interpretarse como relaciones y modos de producción, los cuales se constituyen en elementos característicos de la labor dando cuenta de cómo actuamos con otros y cómo los saberes son conceptualizados (Radford, 2014).

Al escuchar el audio (extraído del video) de este episodio de clase, con el fin de obtener una mejor idea de la forma como Mauricio y el profesor enfatizan las características del rol que cumplen los términos en la expresión simbólica a través del ritmo, se llevó a cabo un análisis prosódico de las líneas 6 a 10. Con análisis prosódico, nos referimos a todas aquellas características vocales a las que los hablantes recurren para marcar de manera distintiva las ideas transmitidas en la conversación (Radford & Sabena, 2015). El análisis se realizó utilizando el software Praat, centrándose en la distribución temporal de las palabras. En la figura 12, la forma de la onda muestra cierta distribución visual de las palabras a lo largo del tiempo, donde las elocuciones de estudiante y profesor se desarrollan casi rítmicamente. En este episodio emerge entonces el ritmo como medio semiótico de objetivación, dado que las elocuciones del profesor otorgan elementos que le permiten al estudiante la identificación de los objetos del discurso al momento utilizar signos para expresar características particulares.

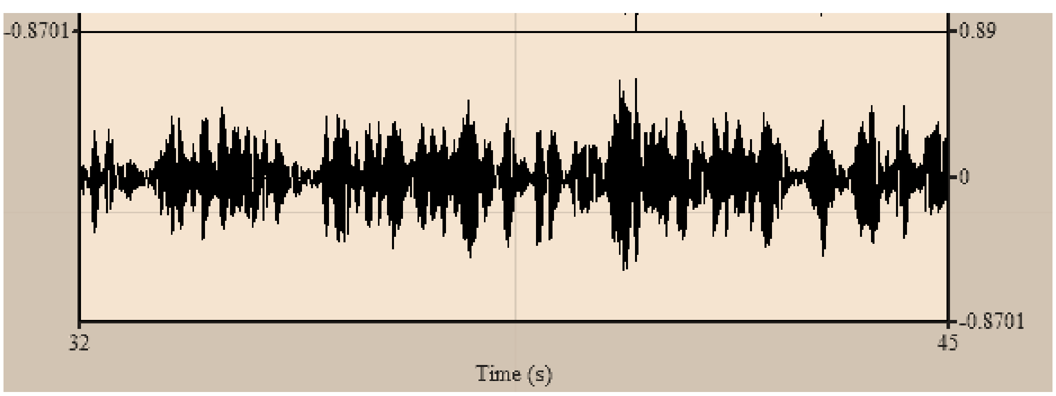


Figura 12. Análisis prosódico con el software Praat de las emisiones vocales de profesor y estudiante para expresar los conceptos en el discurso.

Por otra parte, las acciones de Mauricio y el profesor se reiteran en varios pasajes de la actividad con el objetivo que el estudiante tome conciencia de quiénes son los personajes de su "historia" en la designación simbólica que está construyendo [figura 13]. De acuerdo con Vergel (2015), recursos semióticos tales como los gestos, el movimiento, el ritmo y la actividad perceptual son consubstanciales a la manifestación y constitución del pensamiento algebraico. En este episodio se manifiestan por medio de los pronunciamientos el rol que empieza a tomar la letra x en la expresión junto con la movilización de señalamientos, encerramientos y golpes sobre la expresión que está escrita en la hoja del estudiante. De esta manera se puede observar la constitución de un nodo semiótico gracias a la coordinación de deícticos espaciales, ritmo, palabras y la actividad perceptual puestos en juego para objetivar el saber involucrado en la tarea.

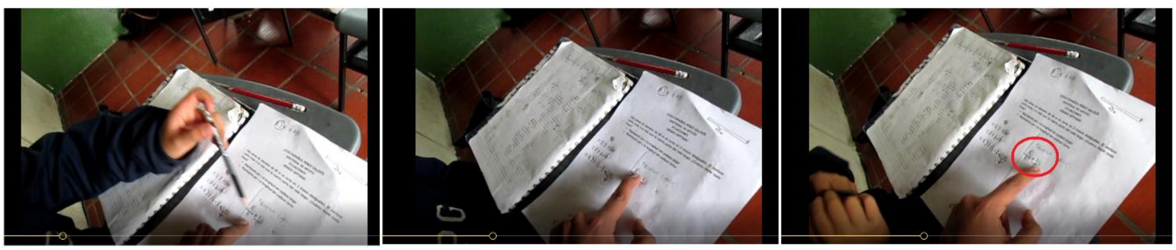


Figura 13. Espacios de acción conjunta que incluyen diálogos, señalamientos sobre el mismo objeto y encerramientos circulares por parte del profesor

Miranda et al. (2007) afirman que la relación entre el estudiante y el objeto no es lineal, sino que está mediada por la presencia de otro sujeto. De acuerdo con esto, la enseñanza-aprendizaje no es posible si no existe un individuo diferente al que desea aprender; las relaciones entre estos sujetos (estudiante y profesor) pueden ser vistas desde la ideas de *togethering* y de *espacio de acción conjunta* (Radford & Roth, 2011). Para Vergel (2015), togethering teoriza los elementos que sistemáticamente trascienden los límites del aquí y ahora, y de acuerdo con Radford y Roth (2011) dan cuenta de la manera ética en que los individuos se involucran, responden y ajustan el uno al otro, a pesar de sus diferencias cognitivas y emocionales. Podemos encontrar evidencias de *togethering* durante la actividad conjunta entre Mauricio y el profesor (líneas 12 a 21) ya que los medios utilizados, señalamientos y expresiones verbales, estaban orientados hacia un objetivo común: que el estudiante comprendiera el significado del símbolo que designa su objeto de estudio, objetivo que se alcanza con la pregunta "¿qué mide 48?", que es cuando el estudiante encuentra la relación entre las dos longitudes del alambre y manifiesta su comprensión levantado sus pulgares y agradeciendo la claridad que obtuvo luego de la actividad conjunta [figura 14].

Figura 14. Gestos realizados por Mauricio al momento de tomar conciencia del significado de sus símbolos para representar las cantidades del problema.

Por otra parte, vemos como Mauricio transformó la frase comparativa en una afirmación ("estoy cumpliendo que… el pedazo corto es la cuarta parte más tres"). Al introducir la letra x (señalándola con el lápiz) refiriéndose a esta como "el pedazo corto" (línea 3), él está abriendo la puerta que conduce a la narrativa simbólica (Radford, 2002). Se puede observar cómo los héroes empiezan a desvanecerse, dando paso a las formulaciones simbólicas de los objetos. Además, esta formulación o designación simbólica de la longitud del pedazo corto del alambre por medio de la letra x, da lugar para una nominalización, es decir, un proceso en el cual alguna cosa llega a ser capaz de funcionar como el sujeto o el objeto de un verbo (Radford, 2002).

No obstante, la fuerza de la nominalización del estudiante emergió cuando transformó la expresión "el pedazo corto es (ser) la cuarta parte más tres" en la expresión verbal "48 mide (medir)… equis sobre cuatro más tres MÁS equis". Al decir "48 mide…", la expresión ahora puede convertirse en el sustantivo en la frase afirmativa, lo cual le permite referirse a los objetos de manera más clara, haciendo señalamientos con mayor seguridad acerca de las medidas que ha nominalizado con símbolos [figura 15].

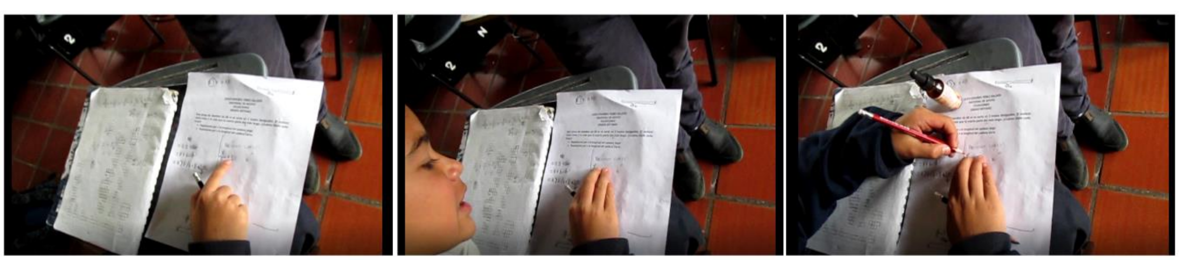


Figura 15. Señalamientos y segmentos en los cuales oculta partes de la escritura para apuntar de manera clara el objeto al cual se está refiriendo (longitud del pedazo largo).

4.4 Marcas en la búsqueda de un acto narrativo

Otro grupo está realizando la siguiente tarea (primera viñeta):

> El señor Cortés tiene $85.000 en el bolsillo; él sabe que ese dinero está en una combinación de billetes de $2.000, de $5.000 y de $20.000, pero no recuerda el número que tiene de cada billete. El señor Cortés sabe que el número de billetes de $5.000 es la mitad de la cantidad de billetes de $2.000 y que el número de billetes de $20.000 es la quinta parte de la cantidad de billetes de $2.000. ¿Cuántos billetes tiene de cada uno?
>
> - Represente por x el número de billetes de $2.000
> - Represente por x el número de billetes de $5.000
> - Represente por x el número de billetes de $20.000

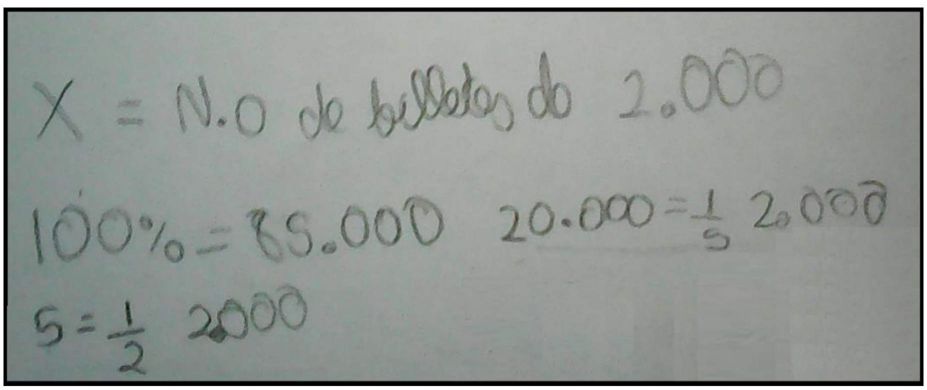


Figura 16. Algunas expresiones sin sentido que escribe Gabriel al momento de abordar inicialmente el problema luego de realizar una primera lectura de él

Los estudiantes abordan la tarea de representar por x el número de billetes de $2.000; realizan la lectura del problema por varios minutos e intentan hacer algunos cálculos pero, la escritura que obtienen les arroja algunas expresiones "sin sentido" [figura 16]. Luego de un rato, el profesor se acerca para indagar qué están haciendo.

1. Profesor: ¿y ustedes cómo van? [Gabriel y Gabriela guardan silencio, mientras Gabriel termina de escribir $5 = \frac{1}{2}\ 2.000$]
2. Gabriel: ¿sí?
3. Profesor: ¿qué les están pidiendo que hagan?

4. Gabriel: la ecuación para hallar equis… igual a dos mil
5. Profesor: ¿equis vale… equis es igual a 2000?
6. Gabriel: sí
7. Profesor: ¿qué dice que es equis?... según el problema
8. Gabriel: … el número de billetes
9. Profesor: entonces… ¿equis vale 2000? ¿qué es lo que vale equis?
10. Gabriel: el número de billetes
11. Profesor: por ejemplo… si yo tengo… 6000 pesos ¿cuánto valdría equis?
12. Gabriel: tres
13. Profesor: ¿por qué?
14. Gabriel: porque son… tres billetes de 2000
15. Profesor: Ah, ok ¿viste?... cómo… qué operación hiciste ahí Gabriel para descubrir eso, porque Gabriela no lo ha entendido entonces vamos a ayudarle
16. Gabriel: pues que equis es igual a la operación [va golpeando con el lápiz al revés (borrador) sobre la frase $x = N.o\ de\ billetes\ de\ 2.000$]
17. Profesor: [interrumpe cuando dice "operación"] al número de billetes de 2000… ¿sí ves Gaby (Gabriela)?... equis no es el dos mil [señala la letra equis de la frase mientras da golpes sobre ella con el dedo índice]… ¿equis es qué? [señala la equis con el índice]
18. Gabriela: el… número de billetes de 2000
19. Profesor: [asienta] entonces, si el problema no dijera 85000, y que no hay (billetes) de otros valores, sino… si el problema dijera: el señor Cortés tiene… 6000 pesos en el bolsillo ¿cierto? [pregunta buscando la comprensión de la nueva situación hipotética]… y tiene un número desconocido de billetes de 2000…
20. Gabriela: mmm, ya entendí [sonríe]
21. Profesor: ¿sí?
22. Gabriela: sí

La tarea abordada pretende que los estudiantes realicen un tratamiento de frases comparativas como "el señor Cortés tiene un número desconocido de billetes de 2.000" en una frase que refiera ese número desconocido de alguna manera, en particular, que lo refiera como el número equis (x). Si bien, Gabriel en la hoja tiene escrita la frase "$x =$

$N.o\ de\ billetes\ de\ 2.000"$, en la línea 4 enuncia la frase comparativa "equis… igual a dos mil" y luego que el profesor le pregunta sobre la veracidad de su afirmación, él nuevamente asegura que es cierto que equis es igual a dos mil (línea 6). Luego, el profesor intenta ayudar a ubicar la atención de los estudiantes refiriendo la instrucción de la tarea con frases como "¿qué es equis?" y "¿qué es lo que vale equis?" de modo que enfocaran el objeto del discurso en que la letra x es "el número de billetes" (de dos mil) que tiene el Señor Cortés (líneas 8 y 10). Luego de ubicada la atención de Gabriel en la mirada que debe dar a la letra (x), el profesor plantea algunas situaciones hipotéticas particulares con el objetivo de verificar que entre el estudiante y él se haya establecido un lenguaje común para poder desarrollar la idea, la cual aún no se encuentra en el discurso de los estudiantes.

Acto seguido el profesor asienta las respuestas de Gabriel y lo convoca a revisar el discurso con el objetivo de vincular en este a su compañera Gabriela, quien ha estado en silencio y algo distante de la discusión. De hecho, es Gabriel quien toma la voz para explicarle a su compañera de qué se trata lo que ha escrito, coordinando la voz (sus emisiones verbales) con golpes de manera sincronizada hechos con el lápiz (al revés) sobre la frase escrita previamente "$x = N.o\ de\ billetes\ de\ 2.000$", pero interrumpe a Gabriel cuando utiliza la palabra "operación" para provocar que Gabriela se concentre en la idea que x es un *algo* (adjetivo numérico) que representa una cantidad desconocida de billetes, en este caso, de 2.000, dando reiterados golpes con su dedo índice sobre la letra x. Tanto en las acciones del profesor como en las de Gabriel [figura 17], movilizan los señalamientos como medio semiótico de objetivación en busca de la toma de conciencia de Gabriela y asimismo desde el punto de vista del materialismo dialéctico, se observan las formas culturales de interacción que organizan el contacto entre los estudiantes y entre ellos y el profesor (Vergel, 2015).

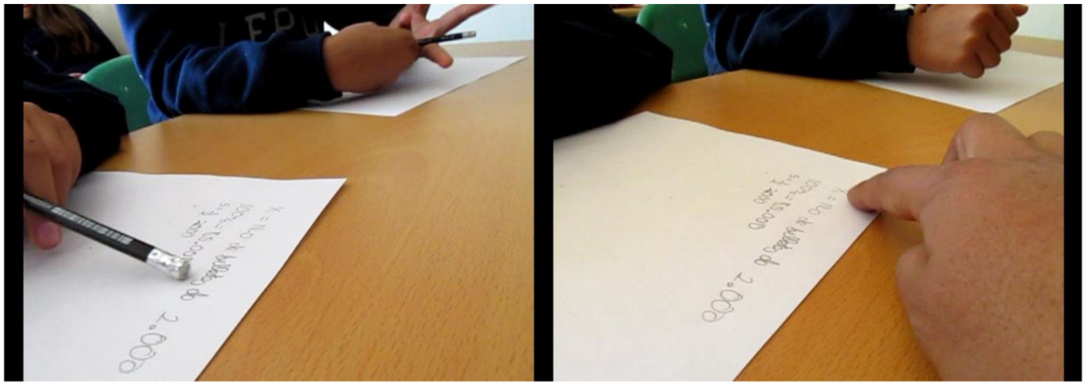


Figura 17. Izquierda; señalamientos hechos por Gabriel con el lápiz de manera sincronizada mientras lee a Gabriela la frase que tiene escrita en la hoja. Derecha; señalamientos hechos por el profesor con el índice de manera reiterada con golpes sobre la letra x para que Gabriela ubique el objeto de su mirada en el sentido que se va a otorgar a la letra para el planteamiento del problema.

4.5 ¿Esta es la ecuación?

En otra sesión de clase, Gabriela y Gabriel están realizando la siguiente tarea:

> La cola de una salamandra tiene tres veces el largo de su parte media. La cabeza mide $\frac{1}{2}$ de su parte media. La longitud total de la salamandra es 27 cm.
>
> ¿Cuál es la longitud de la cola?
>
> ¿Cuál es la longitud de la cabeza?
>
> ¿Cuál es la longitud de la parte media?
>
> - Represente por x la longitud de la parte media del cuerpo de la salamandra.

Los estudiantes abordan la tarea de representar por x la longitud de la parte media del cuerpo de la salamandra; realizan la lectura del problema por varios minutos y a diferencia de la tarea anterior (billetes) antes de intentar hacer cálculos, proceden directamente a construir una escritura que permita expresar simbólicamente las condiciones del enunciado. Sin embargo, esta vez acuden a realizar un dibujo de la salamandra en el cual realizaron algunas marcas que les permitieran establecer relaciones entre las longitudes [figura 18]. El profesor se acerca para indagar qué están haciendo.

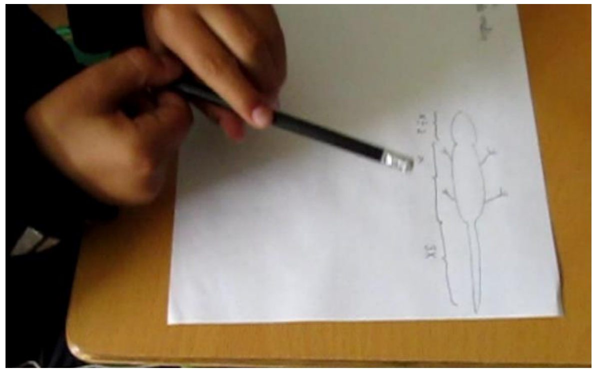


Figura 18. Representación gráfica de la salamandra y marcas hechas a esta.

1. Profesor: Esta es tu salamandra [señala el dibujo con el índice]
2. Gabriel: Sí, entonces esta es su parte media… su parte media es igual a equis [señala la x con el lápiz]
3. Profesor: La longitud de la parte media, muy bien… y esto, ¿la cabeza es qué? [señala la marca hecha por los estudiantes con el índice]
4. Gabriel: La mitad de la parte media
5. Profesor: Y la cola es… [señala la marca hecha por los estudiantes con el índice, siguiendo el relato de Gabriel]
6. Gabriel: Es… el largo… o sea tres veces el largo de la parte media
7. Profesor: Muy bien, ¿y? y… toda la salamandra [encierra entre sus dedos pulgar e índice la longitud total] entonces ¿se expresaría como qué? [señala con el índice la ecuación que está escrita al otro lado de la hoja]
8. Gabriel: Quedó como veintisiete es igual a equis…
9. Profesor: ¿Que es qué cosa? [señala enfáticamente con el índice la primera equis que aparece en la expresión]
10. Gabriela: La parte media, más equis dividido dos…
11. Profesor: ¿Este es quién? [señala nuevamente con el índice la primera equis que aparece en la expresión]
12. Gabriela: La longi… la parte media
13. Profesor: La longitud del cuerpo o sea del tronco… ¿este equis medios qué es? [señala con el índice la expresión $x \div 2$]
14. Gabriela: El resultado de partir la parte media
15. Gabriel: La cabeza

16. Profesor: ¿Y este tres equis? [señala con el índice la expresión $3x$]
17. Gabriel: La cola
18. Profesor: Y que sumados me dan… [da tres golpes con el índice uno sobre cada sumando de la expresión]
19. Gabriel: Veintisiete
20. Profesor: Toda la longitud de la salamandra [regresa al dibujo y encierra entre sus dedos pulgar e índice la longitud total de la salamandra]… ¡Bueno!
21. Gabriel: ¿Sí? ¿esa es la ecuación?
22. Profesor: Sí, ahora… ¿cómo se resuelve eso?

En este episodio de clase se observa cómo los estudiantes recurren a formas de acción, reflexión y expresión utilizadas en el pasado, es decir, al abordar otras tareas. Se encontraron acciones como la representación gráfica de la salamandra haciendo las marcas por medio de llaves para indicar longitudes de las partes de esta, con el objetivo de coordinar o sincronizar espacialmente las expresiones lingüísticas provenientes del problema verbal con la actividad perceptual a ser exteriorizada de su pensamiento. La utilización de estos recursos permite derivar la idea que al recurrir a acciones pasadas para abordar una nueva tarea propuesta en otro momento en espacio y tiempo, emerge así el proceso de objetivación que Radford denomina iconicidad; donde los estudiantes instancian formas culturales de pensamiento, reflexión y acción que han quedado codificadas en la cultura (Vergel, 2015).

En la actividad matemática desarrollada durante esta tarea se observan los señalamientos hechos por Gabriel con el lápiz, expresando en sus palabras la identificación de la x como algo que llegó a ser capaz de funcionar como el sujeto o el objeto de un verbo; en particular, cuando dice: *"esta es su parte media… su parte media es igual a equis"* (línea 2); al otorgar a la letra x mencionada capacidad dentro de la frase elaborada, Gabriel está realizando el proceso semiótico de nominalización (Radford, 2002). Este proceso condujo al grupo a lograr la creación de una narrativa simbólica del problema dado que la coordinación de señalamientos orientados hacia el dibujo y los símbolos escritos junto con las marcas y encerramientos permitieron que Gabriel pudiera describir o narrar los sucesos del enunciado, por medio de una expresión algebraica con un hecho determinante: en el dibujo están solamente las partes, mientras que en el discurso que acompaña la expresión escrita, el estudiante señala el "*veintisiete es igual a…*" (Línea 8).

De este modo, las acciones de los estudiantes mostraron respecto de otras tareas, una reducción de recursos semióticos al tiempo que dieron mayor atención al significado de la letra x en relación con las cantidades puestas en juego; al momento del diálogo, los golpes sobre la hoja tanto en el dibujo como en la expresión señalaron el número de cantidades desconocidas del problema con acciones secuenciales y reiteradas para explicar la idea desarrollada [figura 19]. En comparación con tareas anteriores se pudo observar cómo Gabriela y Gabriel tomaron mayor conciencia de las características de los enunciados, la forma de construir una expresión algebraica y del papel que cumple la letra al momento de representar por medio de símbolos el enunciado. Este refinamiento de medios semióticos y la adquisición de un nivel más profundo de conciencia de los problemas verbales permiten inferir que se desarrolló un proceso de contracción semiótica, es decir, un proceso de desarrollo conceptual en los estudiantes (Vergel, 2015).

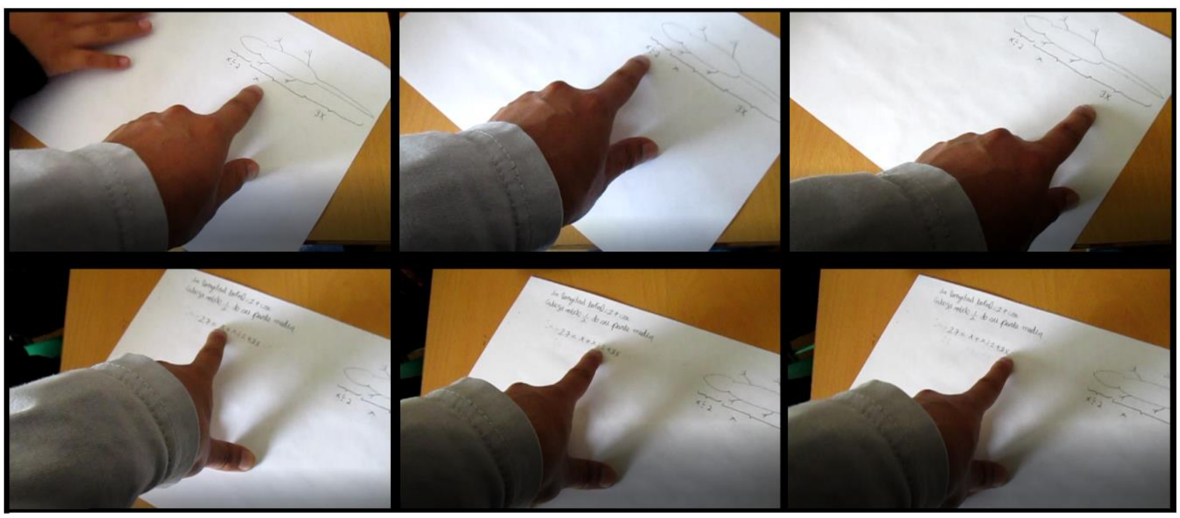


Figura 19. Arriba; secuencia de señalamientos hechos por el profesor sobre las marcas simbólicas puestas sobre el dibujo. Abajo; secuencia de señalamientos hechos por el profesor sobre las marcas simbólicas puestas en la narrativa simbólica.

Por otra parte, se identifica en la actividad matemática el proceso de subjetivación denominado *espacio de acción conjunta*; refiriendo el espacio como la zona donde se conciben las relaciones entre los individuos que realizan una tarea y la comparten con otros [figura 20]. La manera como el profesor fue realizando preguntas a Gabriel del tipo *¿este es quién?* (línea 11), *¿este equis medios qué es?* (línea 13), *¿y este tres equis?* (línea 16), así como la respuesta de Gabriela: *"el resultado de partir la parte media"* (línea 14); fueron acciones en las cuales se estableció una zona de desarrollo próximo donde Gabriel requirió de la ayuda de otro sujeto (el profesor y su compañera Gabriela) para adquirir un nuevo nivel de desarrollo (Miranda, 2009).

Asimismo, las preguntas mencionadas fueron formuladas como formas elípticas que ayudaron a solidificar la distancia entre el problema verbal y la narrativa simbólica; de acuerdo con Radford (2002), estas preguntas permiten que los héroes comiencen a desvanecerse produciendo objetividades, es decir, produciendo en Gabriel el desplazamiento de la atención de un espacio semiótico a otro. Se puede afirmar que los procesos de subjetivación señalados ayudan a que los estudiantes abran paso para caminar en el entorno de los símbolos y así dar inicio a la toma de conciencia sobre la gran cantidad de significados que las frases elaboradas tienen a pesar del dramático y reducido número de símbolos que ellas poseen.

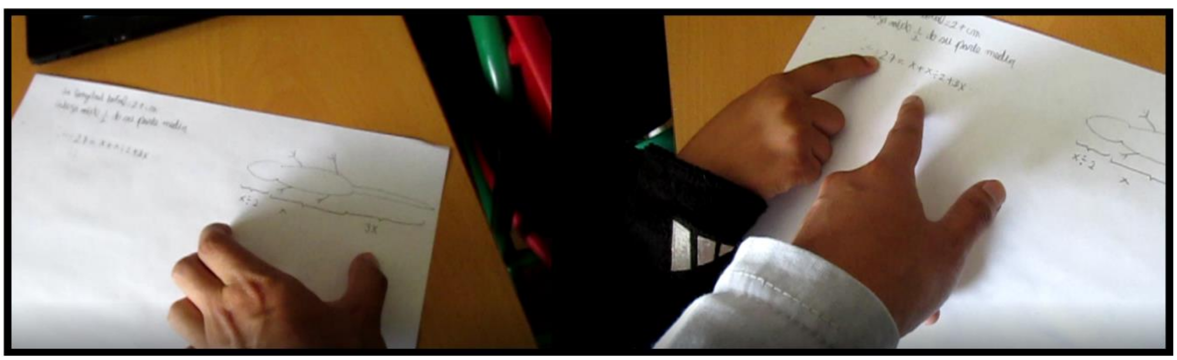


Figura 20. Izquierda; encerramientos hechos por el profesor para indicar la longitud total de la salamandra. Derecha; espacios de acción conjunta entre profesor y estudiante en los cuales señalan con sus índices sobre la expresión con el objeto de establecer relaciones entre el gráfico y esta.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se responderá la pregunta orientadora planteada, teniendo en cuenta los elementos teóricos y metodológicos en los cuales estuvo enmarcado el estudio. Finalmente se pondrán de manifiesto algunas consideraciones que pueden derivarse de este estudio para posibles trabajos en el futuro.

5.1 Respuesta a la pregunta orientadora

El desarrollo del estudio se focalizó en la pregunta: *¿Qué medios semióticos de objetivación movilizan estudiantes de grado séptimo en la actividad matemática, cuando transforman problemas verbales en narrativas simbólicas?*

Luego de vivenciar la actividad matemática con los estudiantes de grado séptimo, recolectar información, constituir los datos y realizar el análisis a estos, es posible afirmar dentro de la perspectiva semiótica cultural que tanto estudiantes como profesor realizaron una labor conjunta en el proceso de enseñanza y aprendizaje mediada por la movilización de diferentes signos, acciones, gestos y artefactos. Algunos recursos o medios semióticos que emergieron en esta actividad matemática fueron:

Representación gráfica: Con la intención de expresar la medida de longitud de partes o segmentos que conforman un todo, es decir, una longitud total; en la actividad matemática emergió el medio o recurso semiótico de objetivación que se denominó representación gráfica, a través del cual los estudiantes realizan un registro de transición entre el lenguaje verbal y el simbólico. Este medio facilita a los estudiantes una visualización de la situación que necesitan simbolizar concediendo a los sujetos orientación espacial avalando un camino o plan de acción para que ellos identifiquen de manera contextual el espacio que ocupan las cantidades desconocidas de un problema que involucra longitudes.

Marcas con llaves para encerrar longitudes: Luego de identificar espacialmente la existencia de longitudes desconocidas expresadas gráficamente, aparece este medio semiótico de objetivación en el cual, los sujetos discriminan las longitudes realizando marcas por medio de llaves para identificar de manera explícita la longitud que comprenden los segmentos dibujados e iniciar el proceso de designación simbólica de cada uno de ellos. Es posible afirmar en esta investigación que el medio semiótico *marcas* evidencia de manera más clara cómo los estudiantes van tomando conciencia y sofisticando el recurso *representación gráfica* ofreciendo evolución en el proceso de transformación del problema planteado a la escritura por medio de símbolos de este.

Señalamientos y deslizamientos indexicales: Este medio de objetivación reside en utilizar el (los) dedo(s) índice(s) para señalar o situar el objeto de la mirada del estudiante al momento de identificar espacialmente una longitud. Los señalamientos, en particular hacia las marcas que realizan para identificar los extremos de un segmento luego son acompañados de deslizamientos con el dedo sobre dichos segmentos; estos deslizamientos permiten constatar una forma más estable de conciencia respecto a qué están designando simbólicamente como una medida de longitud indeterminada, estableciendo relaciones entre una parte y un todo.

Encerramientos circulares (deícticos espaciales): Este acto consiste en trazar una trayectoria circular con el dedo para resaltar el objeto de la mirada de los estudiantes cuando desean confirmar la presencia de una parte de la historia del problema verbal en una manera distinta de expresarla, pero ahora por medio de símbolos que pretender mantener el sentido de la historia o enunciado. El encerramiento circular con el dedo índice fue un recurso que permitió a esta investigación observar cómo los estudiantes estructuran el pensamiento y sus acciones en el espacio, ya que es un resultado del ingenio, el cual se materializa en la actividad matemática cuando hace referencia a este por medio de palabras claves como “aquí” o “este” para referirse al significado del símbolo en la expresión que construye.

Luego de identificar y caracterizar los medios semióticos encontrados, se logró observar que la movilización de diferentes medios semióticos de manera simultánea por parte de los estudiantes, así como la necesidad de estos en compensar la reducción de recursos o medios semióticos concentrando los significados en el menor número de signos o palabras, permitió la emergencia de algunas construcciones metodológicas; dichas construcciones son denominadas procesos semióticos de objetivación. Los procesos semióticos de objetivación observados fueron:

Iconicidad: Al abordar tareas que involucran relaciones entre cantidades, los estudiantes evidencian formas de acción, reflexión y expresión ligadas a la posibilidad de realizar operaciones entre cantidades, es decir, vieron la situación de manera analítica (posibilidad de operar con los objetos). Desde este punto de vista, en la actividad matemática emerge el proceso de objetivación *iconicidad* ya que los estudiantes recurren a acciones que han sido utilizadas en el pasado para resolver otras tareas. La manera como los estudiantes han aprendido a sumar cantidades fraccionarias a través de su propia historia viene a jugar un papel importante en el momento que asumen operar con cantidades desconocidas; se puede ver esto en la sección 4.2 cuando los dos estudiantes deciden sumar las fracciones cada uno de la forma como lo ha aprendido y finalmente la narrativa construida se desvanece y les genera un colapso o tensión para seguir resolviendo el problema.

Otro manifiesto de *iconicidad* dentro de la actividad matemática ocurre cuando abordan la tarea de la salamandra y realizan diferentes acciones utilizadas en el pasado cuando abordaron la tarea del alambre. Los estudiantes afinan entonces las acciones que llevan a cabo cuando van a plantear una solución a un problema que involucre medidas de longitud, representando gráficamente la situación, realizando marcas sobre el gráfico realizado y designando simbólicamente sobre las marcas las cantidades desconocidas que aparecen en el enunciado; es decir, a través de gestos y acciones propias, se plantean estrategias similares para dar solución a una nueva situación.

Nodo semiótico: En la actividad matemática realizada por los estudiantes, se movilizaron de manera sincronizada varios medios semióticos de objetivación que se convirtieron simultáneamente en un recurso para indicar la presencia de una letra como un elemento corpóreo de los diferentes actos de constitución de una narrativa simbólica; es decir, por medio de gráficos, símbolos (marcas), señalamientos, los estudiantes tanto en el trabajo con sus compañeros como en los espacios conjuntos con el profesor, fueron dando vida a la marca simbólica (x) al momento de narrar con palabras la historia inicial suministrada en lenguaje natural pero en un nuevo espacio, el designado simbólicamente.

Contracción semiótica: Transcurridas las sesiones de clase se pudo observar cierta evolución en la actividad matemática de los estudiantes, donde ellos fueron descartando distintos recursos utilizados en las primeras tareas de modo que orientaran progresivamente su trabajo hacia formas reducidas de expresión (Radford, 2008). A través de las sesiones de clase, los estudiantes fueron tomando decisiones para abordar las tareas considerando aspectos relevantes e irrelevantes y refinando recursos semióticos utilizados anteriormente, siendo esto muestra de un mayor nivel de conciencia (objetivación) que evidencia aprendizaje y desarrollo conceptual en los estudiantes. En otras palabras, el proceso de objetivación *contracción semiótica* es una evolución de los *nodos semióticos* dado que los recursos van evolucionando de fórmulas corpóreas hacia fórmulas más sofisticadas en el pensamiento de los estudiantes (Vergel, 2015).

5.2 Síntesis, discusión y comentarios finales

El análisis de los datos constituidos en este estudio es evidencia de una concepción clara del signo como resultado de recursos semióticos realizados anteriormente en el plano social, y en contraposición a la idea de signo como una simple herramienta auxiliar para pensar "mejor". Se pudo observar cómo la materialización del signo escrito no es un acto inminente el cual los docentes pretendemos que emerja inmediata y espontáneamente de modo que el estudiante centre su atención en cómo se "despeja" o resuelve una ecuación, sino que indiscutiblemente el signo es "el signo de otros signos" (Radford, 1999).

Los resultados encontrados sugieren que en la actividad matemática se da la emergencia de los medios semióticos de objetivación buscados; puesto que en las tareas implementadas hubo demandas que facultaron a los estudiantes la posibilidad de expresarse semióticamente, aunque con la premisa de otorgarles tareas cotidianas o problemas "clásicos" a los cuales se puede enfrentar cualquier estudiante escolar de su edad en nuestro país. Se considera entonces, que en la designación simbólica de los objetos, la forma en que los distintos signos fueron representando alguna cosa, se promovieron formas culturales de interacción y de cooperación que hacen pensar en que sus intenciones dieron vida a las marcas que constituyen al signo como un acto, y estas marcas se fueron convirtiendo en signos para expresar "algo" (su significado). De acuerdo con Radford, es posible afirmar que la posibilidad de operar con lo indeterminado está ligado al tipo de significado que los símbolos llevan.

Es de señalar que la designación simbólica de los problemas matemáticos entregados a los estudiantes en lenguaje verbal no aparece o se materializa solo a través de las marcas alfanuméricas que un estudiante registra en una hoja sino luego de un conjunto de acciones como los gestos que señalan un objeto, pasando a una marca por medio de una palabra sonora que luego se convierte en una palabra dentro de un discurso; apoyándose de movimientos corpóreos, actividades perceptuales y uso de artefactos para finalmente convertirse en un signo escrito. Este conjunto de acciones generalmente pasan inadvertidas por los profesores siendo estas, elementos que permiten valorar la forma como los estudiantes interpretan y realizan tareas en un ambiente de resolución de problemas.

Los medios semióticos son entonces, recursos que posibilitan enterarse y hacer interpretaciones acerca de cómo actúan los estudiantes; observando cómo estructuran sus ideas, cómo reflexionan y discuten de acuerdo con la Teoría Cultural de la Objetivación formas de pensamiento constituidas histórica y culturalmente, es decir, el saber visto como posibilidad se constituye por sistemas de acción y reflexión incrustados en la cultura. De acuerdo con esto, este estudio permite confirmar que la enseñanza y el aprendizaje no son dos procesos diferentes sino uno solo en el cual se producen saberes y subjetividades; hace pensar que profesores y estudiantes somos sujetos activos de una comunidad de práctica en un ambiente de resolución de problemas, donde nos hacemos conscientes que todos cooperamos de manera relevante en el desarrollo de procesos de otros. Así, representar simbólicamente un enunciado como una ecuación es entonces un proceso social, es decir, un proceso que ocurre con otros el cual no es meramente intelectual sino que además incluye el cuerpo, sus gestos, sus acciones y la cultura material dotada de artefactos.

Los resultados permitieron observar los procesos semióticos de producción de significación que plantea Radford cuando los estudiantes hacen uso del símbolo en la actividad matemática propuesta para este estudio: *signos como marcas en actos narrativos*, *nominalizaciones*, *colapso de narrativas*. Si bien se identificaron estos procesos en problemas que involucran ecuaciones de primer grado y un acercamiento a ecuaciones simultáneas resueltas por medio de sustituciones, sería interesante realizar estudios en los cuales el acto narrativo involucre 2 incógnitas designadas como x y y dentro del mismo problema, así como en otras situaciones que impliquen planteamiento de ecuaciones. Por ejemplo, en problemas de proporcionalidad o problemas con ecuaciones de segundo grado; dado que al analizar estos objetos bajo la mirada semiótico cultural posiblemente impulsen reportes de investigación que contribuyan a la comunidad de educación matemática en nuestro país.

Esta investigación contribuyó a evidenciar la emergencia de los tres procesos semióticos de producción de significación en estudiantes de grado séptimo cuando abordaron problemas cortos en lenguaje verbal; sin embargo, es posible que dichos procesos estén relacionados o asociados con los tres vectores del pensamiento algebraico propuestos por

Radford posteriormente en el tiempo. Se podrían realizar trabajos en los cuales se indague por la relación entre la terna *signos como marcas en actos narrativos*, *nominalizaciones*, *colapso de narrativas*; con la caracterización *indeterminancia*, *analiticidad*, *expresión semiótica*. Dado que al parecer la emergencia del signo "vive" la misma travesía antes de consolidarse como un símbolo alfanumérico en la hoja de trabajo del estudiante de acuerdo con los productos mostrados por los medios semióticos de objetivación que emergieron en este estudio.

En la implementación de algunas tareas del estudio, se pueden reportar consideraciones respecto a posibles limitaciones de este. El doble rol que cumple el docente como profesor e investigador puede evidenciar algún direccionamiento por su interés o afán en que los estudiantes representaran de manera simbólica los enunciados o en la búsqueda del acto narrativo, dadas las marcas iniciales que manifestaron los estudiantes al momento de abordar las tareas. Ese doble papel que el docente cumplió en el aula aunque tenía como propósito recolectar la información asociada a los recursos que utilizaron los estudiantes para abordar las tareas, no podía dejar de lado su compromiso ético con el grupo de estudiantes a su cargo. Si bien desde una mirada parece que el docente direccionara o apresurara los procesos de los estudiantes, por otro lado es posible justificar sus acciones desde el papel que él cumple dentro de un espacio de acción conjunta con sus estudiantes el cual implica un compromiso motivado por la actividad (Radford & Roth, 2011) y el establecimiento de una zona de desarrollo próximo en la que un estudiante requiere de la ayuda de una persona que sabe más que él para adquirir un nuevo nivel de desarrollo (Miranda, 2009).

De una u otra forma, de acuerdo con los resultados del análisis se reconoce que los procesos de aprendizaje requieren tiempo y estos deben permitirse a los estudiantes, ya que no todos llegan a tomar conciencia de los objetos en los mismos instantes de tiempo ni de una misma manera. Por otra parte, es importante aclarar que el estudio fue realizado con el grupo total de estudiantes (12) y no con una muestra del grupo; además, es posible que existan ciertas limitaciones dado que el pilotaje se hizo con dos estudiantes del mismo curso al cual se iban a implementar las tareas. Si bien, la forma y las acciones realizadas en el pilotaje fueron reportadas y justificadas en la sección 3.1, se destacan estas consideraciones de modo que sean tenidas en cuenta y puedan realizarse ajustes y tomar decisiones metodológicas en posibles estudios posteriores que surjan a partir de este trabajo.

Referencias bibliográficas

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 267-300.

Butto, C., & Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 113-148.

Cifuentes, A., Dimaté, L., Rincón, A., Velásquez, J., Villegas, M., & Flores, P. (2012). Ecuaciones lineales con una incógnita. En P. Gómez, *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 76-141). Bogotá: Universidad de los Andes.

de Moura, M. & Moretti, V. (2014b) Entrevista con Luís Radford sobre la teoría de la objetivación. Santillana. *Revista Ruta Maestra*, *9,* 33-37.

Godino, J., Castro, W., Aké, L. & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Boletim de Educacao Matemática- BOLEMA.*

Jansen, T and Radford, L. (2015). Solving equations: Gestures, (un)allowable hints, and the unsayable matter. In K. Krainer & N. Vvondrová (Eds.), *Proceedings on the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 419-425). Prague: Charles University.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C, Kieran. Research agenda for mathematics education: Vol. 4. *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, *18*(1), 139-151.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia -MEN- (1998). *Lineamientos curriculares para Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Miranda, I. (2009). *Objetivación de saberes científicos-culturales relacionados con el movimiento lineal representado con gráficas cartesianas: una experiencia con* *estudiantes de bachillerato*. Tesis doctoral (no publicada). Departamento de Matemática. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 1-26.

Miranda, I., Radford, L., & Guzmán, J. (2013). Un origen matemático vs dos orígenes fenomenológicos: la significación del movimiento de objetos respecto del punto (0,0). *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 183-208.

Moreno, C. (2014). *La contracción semiótica como proceso de objetivación en estudiantes de grado sexto en el campo del pensamiento algebraico*. Tesis de maestría (no publicada), Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Pantano, O. (2014). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales*. Tesis de maestría (no publicada), Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra. Una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática, 11*(3), 25-53.

Radford, L. (2002). Sobre héroes y colapso de narrativas: una contribución al estudio del pensamiento simbólico. *Conferencia Internacional del Grupo de Psicología de la Educación de Matemáticas, PME,* (págs. 81-88).

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical thinking and learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking,* 103-129.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40(1)*, 83-96.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas [The evolution of paradigms and perspectives in research. The case of mathematics education]. In J. Vallès, D. Álvarez & R. Rickenmann (Eds.), *L'ctivitat docent intervenció, innovació, investigació [Teacher's activity: Intervention, innovation, research]*, 33-49. Girona (Spain): Documenta Universitaria.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática. 7*(2), 132-150.

Radford, L. (2014a). La enseñanza-aprendizaje desde una perspectiva histórico-cultural: la teoría de la objetivación. Ciclo de conferencias en Educación Matemática-GEMAD. Bogotá, Colombia. Octubre 18 2014.

Radford, L., & Roth, W. (2011). Intercorporeality and ethical commitment: an activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics, 77,* 227-245.

Radford, L., & Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. In Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education,* 157-182. New York: Springer.

Rojas, P. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos.* Tesis Doctoral, Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en Educación Matemática. Bogotá: Publicaciones Universidad Distrital.

Rojas, P. & Vergel, R. (2012). Proceso de generalización y pensamiento algebraico. *Curso taller, especialización en educación matemática. Universidad distrital Francisco josé de Caldas* .

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C., & Castro, E. (2015) Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA*, 9, (4), 273-293.

Serrano, A., Moreno, E., Santoyo, S., Hernández, Y., Gutiérrez, Y., & Lupiáñez, J. (2012). Ecuaciones de primer grado con una incógnita. En P. Gómez, *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (págs. 142-199). Bogotá: Universidad de los Andes.

Vergel, R. (2013). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años). *Revista Científica*, 225-231.

Vergel, R. (2015). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* Tesis Doctoral, Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en Educación Matemática. Bogotá: Publicaciones Universidad Distrital.

Anexos

Juan Daniel Caco

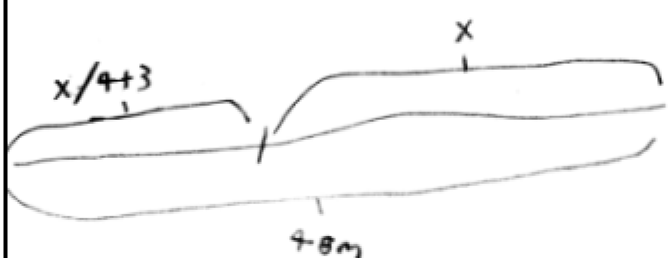
LICEO ESPAÑOL PÉREZ GALDÓS
MATERIAL DE APOYO
ECUACIONES
GRADO SÉPTIMO

Una pieza de alambre de 48 m se corta en 2 trozos desiguales. El pedazo corto mide 3 m más que la cuarta parte del más largo. ¿Cuánto mide cada trozo?

1 • **Represente por x la longitud del pedazo largo**
2 • **Represente por x la longitud del pedazo corto**

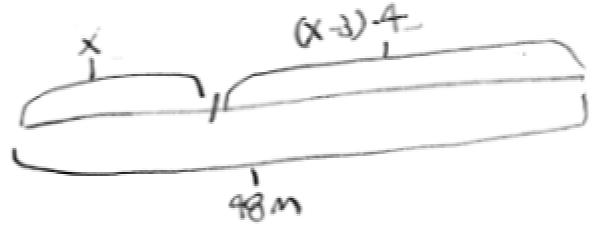
$48 | 4$
$12 + 3 = 15$

$48 \div (2x4+3) =$



$x + x \div 4 + 3 = 48$

2



$12.6 + 34.8 \quad 47.4$

$(x + x) \cdot 4 - 3 = 48$

Juan Sebastian Sanchez

11,6
25
37,6
50

48 | 5
30 | 9,6

12,6

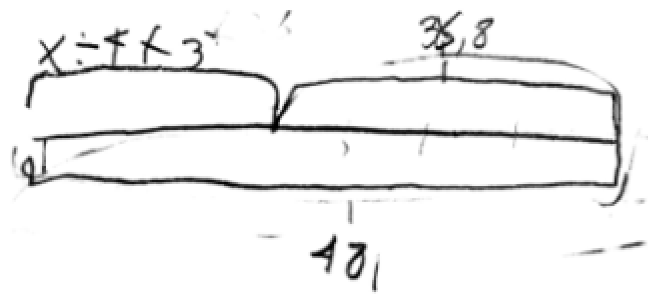
LICEO ESPAÑOL PÉREZ GALDÓS
MATERIAL DE APOYO
ECUACIONES
GRADO SÉPTIMO

Una pieza de alambre de 48 m se corta en 2 trozos desiguales. El pedazo corto mide 3 m más que la cuarta parte del más largo. ¿Cuánto mide cada trozo?

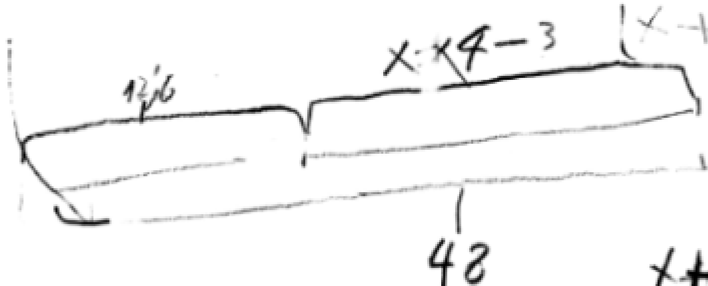
- **Represente por x la longitud del pedazo largo**
- **Represente por x la longitud del pedazo corto**

24
21
27

$\frac{48}{57}$ $\frac{2}{x}$ $= \frac{9}{1} \cdot x$



$x + x \div 4 + 3 = 48$



$x + (x - 3) \times 4 = 48$

Tamás

LICEO ESPAÑOL PÉREZ GALDÓS
MATERIAL DE APOYO
ECUACIONES
GRADO SÉPTIMO

Una pieza de alambre de 48 m se corta en 2 trozos desiguales. El pedazo corto mide 3 m más que la cuarta parte del más largo. ¿Cuánto mide cada trozo?

- **Represente por x la longitud del pedazo largo**
- **Represente por x la longitud del pedazo corto**

a) x = la longitud del pedazo largo

$48 \div 2 + 3 = x$

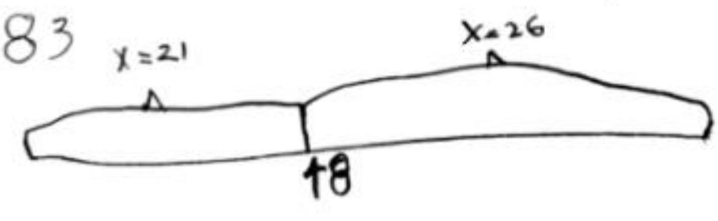
$24 + 3 = x$

$27 - \frac{1}{4} = 26{,}75 = x$

b) $48 \div 2 - 3 = x$

$24 - 3 = 21 + \frac{1}{4} = 21{,}25 = x$

83



$x > x = 48$

48 m

LICEO ESPAÑOL PÉREZ GALDÓS
MATERIAL DE APOYO
ECUACIONES
GRADO SÉPTIMO

Una pieza de alambre de 48 m se corta en 2 trozos desiguales. El pedazo corto mide 3 m más que la cuarta parte del más largo. ¿Cuánto mide cada trozo?

- **Represente por x la longitud del pedazo largo**
- **Represente por x la longitud del pedazo corto**

48

$a = 48m$

$x + b = a$

$x > b / b = x + \frac{3m}{4}$

PEDAZO CORTO:

1. $\frac{x}{4} + 3 + x = 48$

Largo

2. $x - (3 + \frac{x}{4})$ 48

$\frac{x}{4} + 3$

x

Angela Vivian Franko Buitrago

LICEO ESPAÑOL PÉREZ GALDÓS
MATERIAL DE APOYO
ECUACIONES
GRADO SÉPTIMO

La edad de Martha es el doble de la edad de Carlos; el triple de la edad de Carlos es igual a la mitad de la edad de Pedro y la suma de todas las edades es 18. ¿Cuáles son las edades de cada uno?

- **Represente por x la edad de Carlos**
- **Represente por x la edad de Martha**
- **Represente por x la edad de Pedro**

$x \cdot 2 \cdot 3 \div 2 = 18$

edad Marta — Edad carlos — Edad de pedro — Total edades

$x + x \cdot 2 + x \cdot 6 = 18$

edad carlos — edad mart — edad pedr

EDAD MARTHA + EDAD CARLOS + EDAD PEDRO = 18

$9x = 18$

$9 \div 9 = 18 \div 9$

$1x = 2$ = edad de carlos

$x \cdot 3 = \frac{p}{2}$

$x \cdot 2 = \frac{p}{2} \times 2$

$x \cdot 6 = p$

Alejandro Zuluaga

LICEO ESPAÑOL PÉREZ GALDÓS
MATERIAL DE APOYO
ECUACIONES
GRADO SÉPTIMO

El señor Cortés tiene \$85.000 en el bolsillo; él sabe que ese dinero está en una combinación de billetes de \$2.000, de \$5.000 y de \$20.000, pero no recuerda el número que tiene de cada billete. El señor Cortés sabe que el número de billetes de \$5.000 es la mitad de la cantidad de billetes de \$2.000 y que el número de billetes de \$20.000 es la quinta parte de la cantidad de billetes de \$2.000. ¿Cuántos billetes tiene de cada uno?

- **Represente por x el número de billetes de \$2.000**
- **Represente por x el número de billetes de \$5.000**
- **Represente por x el número de billetes de \$20.000**

$(x \div 5) + (x \div 2) + x = 17$

$x2000 + \frac{x}{2}5000 + \frac{x}{5}20000 = 85000$

$2000x + 2500x + (4000x) = 85.000$

Manuel Hurtado

LICEO ESPAÑOL PÉREZ GALDÓS
MATERIAL DE APOYO
ECUACIONES
GRADO SÉPTIMO

El señor Cortés tiene \$85.000 en el bolsillo; él sabe que ese dinero está en una combinación de billetes de \$2.000, de \$5.000 y de \$20.000, pero no recuerda el número que tiene de cada billete. El señor Cortés sabe que el número de billetes de \$5.000 es la mitad de la cantidad de billetes de \$2.000 y que el número de billetes de \$20.000 es la quinta parte de la cantidad de billetes de \$2.000. ¿Cuántos billetes tiene de cada uno?

- **Represente por x el número de billetes de \$2.000**
- **Represente por x el número de billetes de \$5.000**
- **Represente por x el número de billetes de \$20.000**

1) $x \cdot 2000 + \frac{x}{2} \cdot 5000 + \frac{x}{5} \cdot 20000 = 85.000$

2) $\frac{x}{2} \cdot 2000 + x \cdot 5000 + \frac{x}{2} \cdot 2000 \cdot 5 = 85.000$

3) $\frac{x}{5} \cdot 2000 + \frac{x}{5} \cdot 2000 : 2 + x \cdot 20000 = 85.000$

2000 Cb

5000 Cb.

20000 Cp

$\frac{x}{5} \cdot 20000$

$\frac{x}{5} \cdot 2000 : 2$

$x \cdot 20000$

85.000

- $x \cdot 2000 + \frac{x}{2} \cdot 5000 + \frac{x}{5} \cdot 20000 = 85.000$

$2000x + 2500x + 4000x = 85.000$

$8500x = 85000$

$x = 85.000 : 8500$

$x = 10$

$= 5$

$= 2$

20000
+ 25000
40000
85000

Alejandro 20/09/??

LICEO ESPAÑOL PÉREZ GALDÓS
MATERIAL DE APOYO
ECUACIONES
GRADO SÉPTIMO

La edad de Martha es el doble de la edad de Carlos; el triple de la edad de Carlos es igual a la mitad de la edad de Pedro y la suma de todas las edades es 18. ¿Cuáles son las edades de cada uno?

- **Represente por x la edad de Carlos**
- **Represente por x la edad de Martha**
- **Represente por x la edad de Pedro**

$(x \cdot 2) + x + (x \cdot 3 = \frac{1}{2}p) =$ la edad total

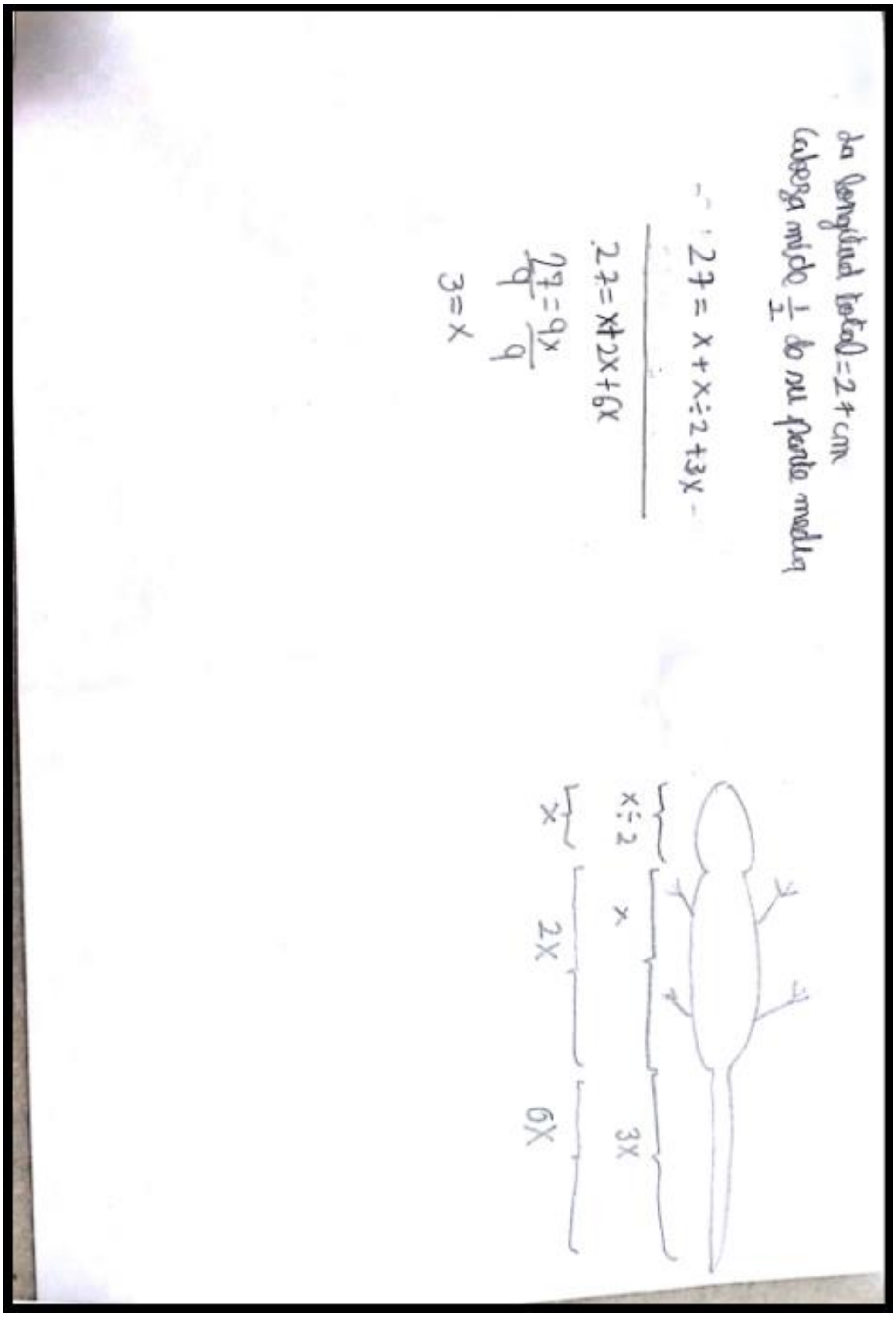
$(x \cdot 2) + x + (x \cdot 3 \cdot 2) = 18$

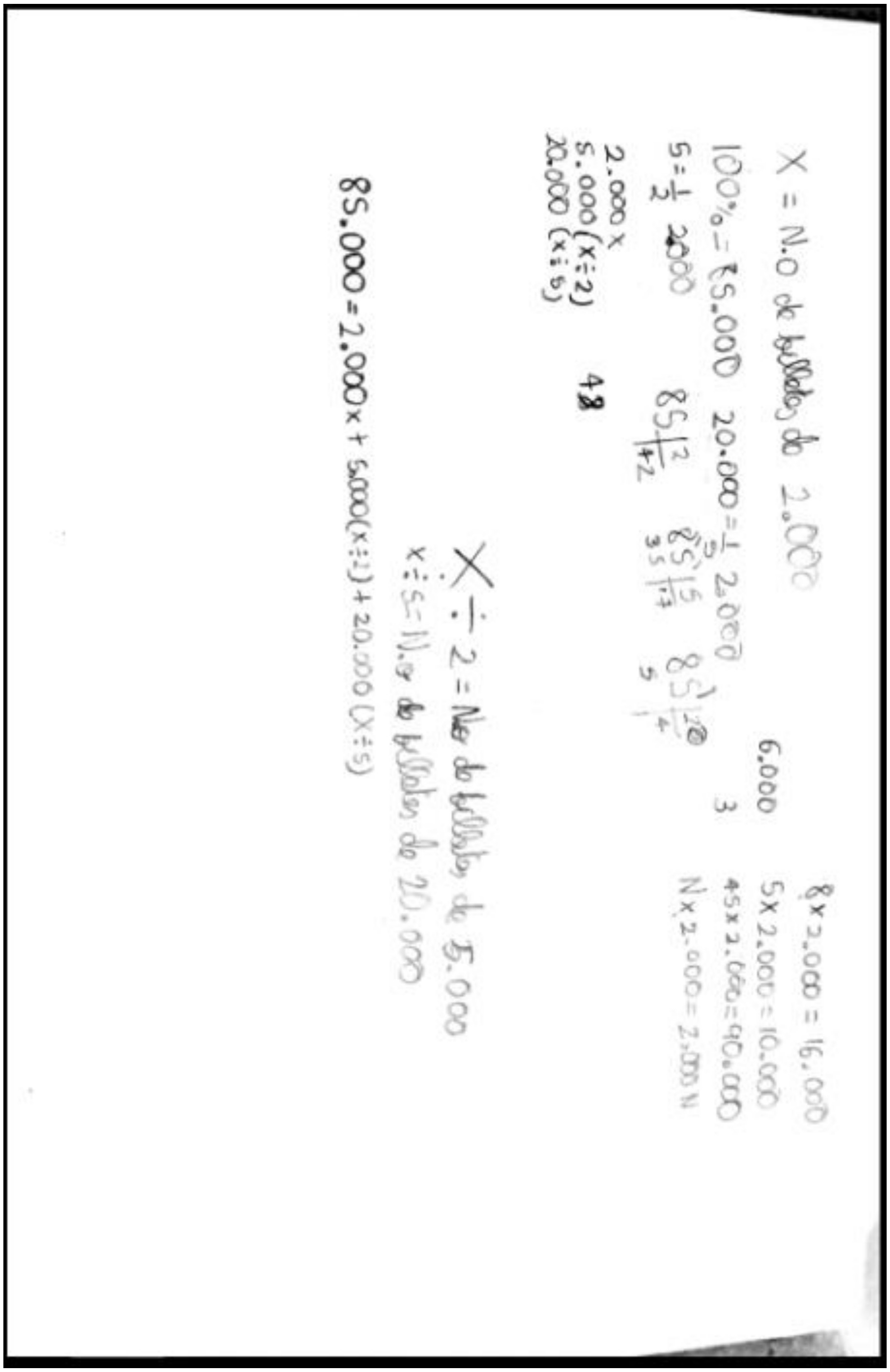
$x + (x \div 2) + (x \cdot 3) = 18$

$(x \div 3) + (x \div 3 \div 2) + x = 18$

$\cdot 3 = x \div 2$

$(x \div 2) \cdot 3 \cdot 2 = p$


La longitud total = 27 cm
Cabeza mide 1/2 de su parte media
27 = x + x ÷ 2 + 3x
27 = x + 2x + 6x
27/9 = 9x/9
3 = x
x ÷ 2
x
3x
x
2x
6x


X = N.o de billetes de 2.000
100% = 85.000 20.000 = 1/5 2.000
5 = 1/2 2000
2.000 x
5.000 (x ÷ 2)
20.000 (x ÷ 5)
48
6.000
3
8 x 2.000 = 16.000
5 x 2.000 = 10.000
45 x 2.000 = 90.000
N x 2.000 = 2.000 N
X ÷ 2 = No de billetes de 5.000
x ÷ 5 = N.o de billetes de 20.000
85.000 = 2.000x + 5.000(x ÷ 2) + 20.000 (X ÷ 5)